CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE CAMPOS
Universidade da Tecnologia e do Trabalho

Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ESTUDANDO ELIPSE COM AUXÍLIO DO *SOFTWARE* WINGEOM

FLÁVIO DE FREITAS AFONSO

CAMPOS DOS GOYTACAZES
2007

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE CAMPOS
Universidade da Tecnologia e do Trabalho
Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

FLÁVIO DE FREITAS AFONSO

ESTUDANDO ELIPSE COM AUXÍLIO DO *SOFTWARE* WINGEOM

Monografia apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Campos, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Profª MSc. Gilmara Teixeira Barcelos

Co-Orientadora: Profª MSc. Silvia Cristina Freitas Batista

CAMPOS DOS GOTACAZES/RJ
2007

Dados de Catalogação na Publicação (CIP)

A257e Afonso, Flávio de Freitas.

Estudando elipse com auxílio do *software* Wingeom / Flávio de Freitas Afonso / Campos dos Goytacazes, RJ: [s.n.], 2007.
176 f. : if

Orientadora: Gilmara Teixira Barcelos.
Co-orientadora: Silvia Cristina Freitas Batista
Monografia (Licenciatura em Matemática). Centro Federal de Educação Tecnológica de Campos. Campos dos Goytacazes, RJ.
Bibliografia: f. 75-78.

1. Matemática – Estudo e ensino . 2. Informática na educação. 3. Elipse (Geometria). I. Barcelos, Gilmara Teixeira, orint. II. Batista, Silvia Cristina Freitas, co-orint. III. Título.

CDD – 510.7

FLÁVIO DE FREITAS AFONSO

ESTUDANDO ELIPSE COM AUXILIO DO *SOFTWARE* WINGEOM

Monografia apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovada em 11 de setembro de 2007.

Banca Avaliadora:

Profª Gilmara Teixeira Barcelos (orientadora)
Mestre em Ciências de Engenharia/UENF/RJ
Centro Federal de Educação Tecnológica de Campos/RJ

Profª Silvia Cristina Freitas Batista (co-orientadora)
Mestre em Ciências de Engenharia /UENF/RJ
Centro Federal de Educação Tecnológica de Campos/RJ

Profª Márcia Valéria Azevedo de Almeida Ribeiro
Mestre em Educação Matemática/USU/RJ
Faculdade de Filosofia de Campos/RJ

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus.

À Gilmara Teixeira Barcelos e Silvia Cristina Freitas Batista, pela paciência, dedicação e competência na orientação deste trabalho.

Aos meus pais, sem os quais eu não teria cumprido mais uma etapa da minha trajetória.

Aos professores da Licenciatura em Matemática, em especial à professora Márcia Valéria Azevedo de Almeida Ribeiro, uma das responsáveis pela escolha do tema deste trabalho, pois foi quem me proporcionou uma boa formação no conteúdo proposto.

Ao coordenador Salvador Tavares, pela competência em coordenar o curso e contribuir para a formação de novos educadores.

Aos participantes do teste exploratório das atividades.

Aos alunos que participaram da validação das atividades.

À amiga Juliana Chagas, que, com toda competência, dedicação e paciência, me incentivou nas horas difíceis, compartilhando conhecimentos e exemplos necessários para este trabalho e para a vida.

Ao amigo Leonardo Lacerda, que sempre me incentivou e me aconselhou em todas as fases deste trabalho.

Às amigas e colegas de turma Keilla Lopes, Luana Siqueira, Julyana Marins, Amanda Gomes, Carla Fernanda Soares e Priscila Nascimento, por estarem sempre me incentivando.

Ao professor de português Luciano Antônio Campos Soares, que, com toda dedicação e competência, fez a revisão ortográfica deste trabalho.

Ao amigo Oswaldo Antônio Barreto Bellei, pelo apoio.

À professora Selma Gomes, que contribuiu para a realização da validação das atividades.

"Vivemos em uma sociedade da aprendizagem, na qual aprender constitui uma exigência social crescente que conduz a um paradoxo: cada vez se aprende mais e cada vez se fracassa mais na tentativa de aprender."

Juan Ignácio Pozo

Dedico este trabalho a todos os meus familiares e amigos que, de forma direta ou indireta, me deram força e coragem para chegar até aqui.

RESUMO

O uso das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) no processo de ensino e aprendizagem de Matemática pode proporcionar bons resultados, desde que sejam utilizadas de maneira adequada por professores e alunos. Neste sentido, desenvolveu-se este trabalho monográfico, cujo objetivo geral foi preparar e validar atividades sobre elipse, utilizando o *software* Wingeom, visando à melhoria do processo de ensino e aprendizagem do tema. Fundamentando o trabalho desenvolvido, apresenta-se uma revisão bibliográfica sobre o processo de ensino e aprendizagem de Matemática, sobre a importância do uso das TIC neste processo, sobre o tema matemático Cônicas e, mais especificamente, sobre Elipse, tema desta monografia. Além disso, descrevem-se, a seguir, as atividades desenvolvidas sobre elipse, as quais foram testadas e validadas. Os testes realizados para tais fins (teste exploratório e teste de validação, respectivamente) são descritos e analisados. Finalizando, são tecidas algumas considerações finais sobre o trabalho desenvolvido, destacando que os dados levantados no teste exploratório e de validação ressaltam a importância das TIC no contexto educacional e, também, a importância do papel do professor, atuando como mediador do processo de ensino e aprendizagem.

Palavras-chave: Informática na Educação. Elipse. Construção de Conhecimentos.

ABSTRACT

The use of Information and Communication Technologies (ICT) in the process of teaching and learning Mathematics can bring good results, as long as they are used in an adequate way by teachers and students. In doing so, this thesis has been developed and its general objective is to prepare and to validate activities about ellipsis, using the software Wingeom, targeting the improvement of the theme's process of teaching and learning. In order to ground the developed work, a bibliographical review about the Mathematics' process of teaching and learning, about the importance of the use of the ICT in this process, about the theme of Mathematics' Conics and, more specifically, about ellipsis, specific theme of this thesis, is presented. Besides, activities developed about ellipsis, which have been tested and validated, are described. The tests conducted to reach these ends (exploratory test and validation test, respectively) are described and analyzed. Finally, some final considerations about the developed work are made, emphasizing that the data found in the exploratory and validation tests point out the relevance of the ICT in the educational setting and, also, the importance of the teacher's role, acting as a mediator of the process of teaching and learning.

Key-words: Informatics in Education. Ellipsis. Knowledge Construction.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Atualmente, as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) estão presentes nas mais diversas atividades humanas. Estas tecnologias têm, inclusive, possibilitado a criação de novas formas de socialização e, até mesmo, de novas definições de identidade social e coletiva (UNESCO, 2001).

Segundo o relatório da Unesco (2001), as TIC também podem desempenhar um importante papel no processo de ensino e aprendizagem, como meio de lutar contra o insucesso escolar, motivando os alunos, permitindo que talentos sejam revelados e facilitando o acesso à informação.

Baldin afirma que:

> A tecnologia não substitui o pensamento crítico nem as atividades com lápis e papel, ela deve ser usada como auxiliar no ensino/aprendizagem em atividades adequadas para cada situação, valorizando o conhecimento integrado e o papel do professor. O entendimento de usos diferenciados de recursos de informática no ensino deverá auxiliar o professor na escolha e planejamento de atividades para as suas aulas, trazendo mais confiança e alegria no seu trabalho (BALDIN, 2002, p. 36).

As TIC podem colaborar com o professor na criação de situações de aprendizagem estimulantes, favorecendo, também, a diversificação das possibilidades de aprendizagem (PONTE; OLIVEIRA; VARANDAS, 2003). No entanto, isto requer educadores bem preparados, o que implica a necessidade de uma boa formação inicial e/ou continuada.

A mediação do professor é fundamental para que ocorram melhorias no processo de ensino e aprendizagem, quando são utilizadas algumas ferramentas didáticas (BELFORT, 2002). Valente (1993) defende a idéia de que todos os envolvidos na educação escolar devem estar preparados para o uso crítico e consciente do computador na educação.

Considerando, em particular, a Matemática, Ponte, Oliveira e Varandas (2003) consideram que as TIC podem favorecer o desenvolvimento de atitudes mais positivas, permitindo o desenvolvimento de capacidades de ordem superior, relativizando a importância do cálculo e da manipulação simbólica, e reforçando o papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação.

Kline (1973, *apud* VALENTE, 1993) apresenta as seguintes justificativas para o ensino da Matemática nas escolas: i) para transmitir fatos matemáticos; ii) para proporcionar indivíduos aptos às profissões de maior destaque; iii) pela sua beleza intrínseca; iv) pelos seus valores práticos; v) para o treinamento da mente e do raciocínio lógico-dedutivo. No entanto, segundo Valente (1993), em geral, essa disciplina é vista como algo que provoca medo e desinteresse, o que pode estar relacionado à forma como os professores medeiam as situações de aprendizagem. Este autor afirma, ainda, que muitas vezes os professores apenas repassam técnicas de resolução de problemas, fazendo com que a aprendizagem não ocorra de forma agradável e consistente. Assim como a Matemática, o computador na educação se tornará algo desagradável, se não for usado de forma adequada. Para evitar isso é preciso haver mudanças no paradigma educacional (VALENTE, 1993).

Na tabela abaixo é possível verificar o percentual de alunos do 3º ano do Ensino Médio nos estágios de construção de competências matemáticas, nos anos de 2001 e 2003.

Tabela 1: Percentual de Alunos nos Estágios de Construção de Competências-Matemática – 3º Ano do Ensino Médio – 2001 e 2003

Estágio	**2001 %**	**2003 %**
Muito Crítico	4,80	6,50
Crítico	62,60	62,30
Intermediário	26,60	24,30
Adequado	6,00	6,90
Total	100,00	100,00

Fonte: Inep, 2004, p.6.

Percebe-se uma porcentagem muito elevada, acima de 60%, de alunos que se enquadram no estágio crítico.

Considerando as dificuldades dos alunos com relação à Matemática e as vantagens do uso das TIC no processo de ensino e aprendizagem dessa disciplina, neste trabalho monográfico propõem-se a elaboração e validação de atividades pedagógicas para o estudo de elipse no Ensino Médio, utilizando o *software* Wingeom. Estas atividades pedagógicas têm por objetivo possibilitar a construção de conhecimentos. Para o desenvolvimento deste trabalho foi necessário um estudo aprofundado sobre elipse e sobre o s*oftware* Wingeom.

O *software* Wingeom permite construções geométricas bidimensionais ou tridimensionais e, por meio de animação, possibilita verificar diversas propriedades geométricas. Este *software* encontra-se disponível para *download* em http://math.exeter.edu/rparris/wingeom.html.

O estudo de elipse e do Wingeom iniciou-se no projeto de iniciação científica, do qual o autor desta monografia participou durante o ano de 2005.

A motivação para a preparação das atividades sobre elipse decorreu da pouca ênfase dada a este tema nas escolas de Ensino Médio de Campos dos Goytacazes, segundo pesquisa realizada por Batista (2004). De acordo com esta pesquisa, das 47 escolas, entre as estaduais, municipais, particulares e federais, observa-se que apenas 51% trabalham o tema cônicas com os alunos. Os recursos oferecidos pelo Wingeom também motivaram a escolha do tema.

Vale destacar que elipse é um tema com aplicações práticas e uma delas é no campo astronômico (IMENES,1987). Além disso, verifica-se a presença de questões de vestibular envolvendo este conteúdo.

O objetivo geral deste trabalho monográfico é preparar e validar atividades sobre elipse, utilizando o *software* Wingeom, visando à construção de conhecimentos. Além disso, visa-se a contribuir para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem do tema.

Alguns objetivos específicos foram delineados para se alcançar o objetivo geral, são eles:

- Elaborar atividades para o estudo de elipse, complementando as já criadas no projeto de Iniciação Científica;
- Aplicar as atividades a professores e licenciandos de Matemática, e a alunos de Ensino Médio;
- Analisar o processo de resolução das atividades.

Na tentativa de melhorar o processo de ensino e aprendizagem de elipse no Ensino Médio, propõe-se este trabalho, que está dividido em seis etapas, a saber: i) revisão bibliográfica; ii) estudo do *software* wingeom e do tema matemático elipse; iii) complementação das atividades para serem realizadas com o auxílio do *software*

Wingeom; iv) elaboração de dois questionários; v) validação das atividades; vi) aplicação dos questionários e análise das respostas.

Para o desenvolvimento deste trabalho, foram necessários estudos sobre cônicas e o uso das TIC na educação. Para tanto, foi realizada revisão bibliográfica em literaturas especializadas, registro de experiências, artigos, revistas e outras fontes.

No projeto de Iniciação Científica, foram criadas atividades que geraram a apostila: "Estudando Cônicas com o Auxílio do *Software* Wingeom", que continha o estudo geométrico das cônicas. Visando a diagnosticar possíveis problemas nas atividades, foi realizado o minicurso "Estudando Cônicas com Auxílio do *Software* Wingeom". Este ocorreu no CEFET Campos e teve como participantes 10 licenciandos em Matemática, alunos do 5º período com conhecimentos de Informática e Informática Educativa, o que serviu para detectar algumas falhas que foram corrigidas.

Dando continuidade ao que foi realizado no projeto de iniciação científica, foi feita a complementação da apostila com o desenvolvimento do estudo de equações das elipses, o que não havia na apostila. Nesta fase, estudou-se com mais detalhes esta curva.

Na etapa seguinte ocorreu a elaboração de dois questionários, contendo perguntas sobre as atividades realizadas no teste exploratório e na validação, e sobre o uso das TIC na aprendizagem Matemática. Procurou-se, com isso, verificar se os objetivos foram devidamente alcançados.

Estes questionários foram aplicados aos participantes dos minicursos. Os dados levantados foram tabulados e representados através de tabelas e gráficos. Além disso, foi feita uma análise das respostas das atividades, dos questionamentos e procedimentos utilizados pelos alunos na resolução das atividades propostas, complementando, assim, a análise de todo o trabalho desenvolvido.

A quinta etapa foi destinada a validação destas atividades, já complementadas. Para tanto, foi realizado um minicurso com um grupo de professores e licenciandos de Matemática, como teste exploratório. Posteriormente, ocorreu um segundo minicurso com alunos de Ensino Médio, para validação. Com isso, foi possível observar as atitudes dos participantes na resolução das atividades, bem como as respostas das mesmas, com o objetivo de verificar se os recursos utilizados contribuíram para a aprendizagem de elipse.

Esta monografia encontra-se estruturada em dois capítulos, além desta introdução e das considerações finais.

No primeiro capítulo “Aprendizagem Matemática”, visa-se a fundamentar teoricamente o trabalho desenvolvido. Para tanto, faz-se uma revisão bibliográfica, em literaturas especializadas, sobre o processo de ensino e aprendizagem de Matemática, sobre importância do uso das TIC neste processo, sobre o tema matemático cônicas e, mais especificamente, sobre elipse

. Nesse sentido, faz-se, inicialmente, uma análise prévia da educação atual e, em seguida, subdivide-se o capítulo em 2 seções: “TIC na Aprendizagem Matemática” e “Cônicas”, dispostas nessa ordem. Na primeira destas duas seções, são apresentadas algumas considerações importantes sobre o uso das TIC na aprendizagem de maneira geral e na aprendizagem Matemática. Na segunda seção, focaliza-se o tema matemático Cônicas, fazendo uma análise de seu contexto histórico e, mais especificamente, aborda-se o tema Elipse.

No segundo capítulo “Relato de Experiência”, relatam-se as ações realizadas e, para tanto, este foi subdividido em três seções. Na primeira seção, “Elaboração das Atividades e dos Questionários”, descreve-se o objetivo de cada atividade e de cada um dos dois questionários elaborados. Na segunda seção, “Teste Exploratório das Atividades”, relata-se o teste das atividades, realizado com licenciandos e professores de Matemática, analisam-se os dados levantados através do questionário e apresenta-se, então, a conclusão desse teste. Na terceira seção, “Validação das Atividades” descreve-se todo o processo de resolução das atividades pelos alunos do Ensino Médio e, novamente, analisam-se os dados levantados através do questionário e apresenta-se a conclusão do teste.

Nas considerações finais, destaca-se a relevância deste estudo, faz-se uma breve retrospectiva da pesquisa, focalizando os resultados; relatam-se as contribuições e as dificuldades encontradas e, finalmente, apontam-se algumas formas de continuidade do estudo realizado.

1 – APRENDIZAGEM MATEMÁTICA

Neste capítulo apresenta-se o resumo da revisão bibliográfica realizada, visando a fundamentar o trabalho desenvolvido. Nesse sentido, aborda-se o tema Aprendizagem Matemática, analisando previamente a educação atual de maneira geral. A seguir, apresenta-se a visão de alguns autores sobre o papel das TIC na aprendizagem de maneira geral e, em particular, na aprendizagem Matemática. Além disso, focando o tema matemático específico desta monografia, aborda-se o tema Cônicas, fazendo uma análise de seu contexto histórico e, mais especificamente, aborda-se o tema Elipse.

Na Sociedade da Aprendizagem, as pessoas estão sendo levadas a absorver muitas informações ao mesmo tempo (POZO, 2004). Os avanços científicos e tecnológicos são diversos, sendo difícil prever quais conhecimentos serão necessários aos cidadãos, para que possam enfrentar as demandas sociais daqui a 10 ou 15 anos (POZO, 2004).

Os PCNEM[1] (BRASIL, 1999) orientam sobre a necessidade do desenvolvimento de novas competências por parte dos indivíduos, devido ao desenvolvimento tecnológico e social vigente na nova sociedade. Sendo fundamental, para tanto, pensar um sistema que seja compatível ao novo quadro educacional.

De acordo com os PCNEM "A educação deve ser estruturada em quatro alicerces: aprender a conhecer, aprender a fazer, aprender a viver e aprender a ser" (BRASIL, 1999, p. 31). Segundo estes parâmetros, o primeiro alicerce diz respeito às orientações dadas aos educandos, para que possam atingir a informação e, conseqüentemente, o conhecimento, de forma rápida e eficiente; o segundo refere-se aos conhecimentos aplicados, associando teoria e prática; o terceiro trata das relações entre os diferentes indivíduos da sociedade, já que todos estão interligados; o último alicerce está relacionado com os atos praticados pelos agentes envolvidos na sociedade do conhecimento, interferindo no coletivo.

---
[1]Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

Valente (2004) defende que:

> À medida que a sociedade vai tornando-se cada vez mais dependente do conhecimento, é necessário questionar a concepção de educação e de aprendizagem. É importante entender a aprendizagem como uma atividade contínua, que se estende ao longo da vida. A educação tem de criar condições para o aluno desenvolver a habilidade de aprender a aprender, de modo que ele seja capaz de continuar sua aprendizagem, mesmo depois de deixar a escola – o que alguns autores têm denominado de educação ao longo da vida, e outros de aprendizagem ao longo da vida [...] (VALENTE, 2004, p.13).

Na busca de uma estrutura educacional que atenda às necessidades atuais, principalmente as descritas, é fundamental repensar a formação dos educadores. Freire (1996) afirma que os educadores não devem apenas transferir conhecimentos, mas criar suportes para que os educandos consigam produzir ou construir seus conhecimentos.

Valente (2003) defende que os professores precisam ser práticos na construção de novos conhecimentos, relacionando, relativizando e integrando diferentes conteúdos na construção de uma nova prática pedagógica. Este autor afirma ainda que esse processo de formação deve levar em consideração alguns aspectos desenvolvidos no cotidiano dos alunos, mas, para isso, o professor precisa estar disposto a mudar sua prática, enfatizando o processo reflexivo e investigativo do aluno.

Complementando, Hernández (1998) afirma que as maiores mudanças na educação deverão estar ligadas à importância do papel do professor. Segundo este autor, a escola pode contribuir para que os indivíduos aprendam a viver em sociedade, assim como pode contribuir para a diminuição da exclusão e discriminação social vigentes.

D'Ambrósio (2001) destaca que a educação para a cidadania é um dos grandes objetivos da educação atual, sendo necessário levar em consideração o conhecimento moderno, impregnado de ciência e tecnologia. Em particular, com relação à Matemática, o autor afirma que esta é:

> [...] uma estratégia desenvolvida pela espécie humana ao longo de sua história para explicar, para entender, para manejar e conviver com a realidade sensível, perceptível, e com o seu imaginário, naturalmente dentro de um contexto natural e cultural (D'AMBRÓSIO, 2001, p.7).

Segundo D’Ambrósio (2001), a Matemática ensinada nas escolas é ultrapassada, antiga e descontextualizada, causando desinteresse por parte dos educandos.

Rocha (2001), complementando, afirma que “A matemática ensinada na escola é geralmente muito mecânica e exata: um conjunto de fórmulas e passos que, se repetidos corretamente, levam invariavelmente à solução de um problema hipotético” (ROCHA, 2001, p. 23).

Rocha (2001) afirma, ainda, que muitos conteúdos são estudados sem nenhuma aplicação, e isto acaba dificultando o entendimento, pois os alunos estão apenas repetindo resoluções e memorizando conteúdos sem experimentações e criatividade. Este processo de ensino e aprendizagem pode repercutir na desigualdade social e na exclusão, e ao professor cabe tentar melhorar esse quadro, estimulando os alunos à pesquisa e à experimentação, para que possam construir novos conhecimentos (ROCHA, 2001).

Segundo D’Ambrósio (1986), o ensino de Matemática nas universidades se faz pelo acúmulo de conteúdo, principalmente o estudo de Cálculo e Geometria Analítica, que se faz da mesma forma que se fazia há cem anos. Os estudantes precisam ser motivados através de procedimentos que permitam a identificação e a formulação de problemas, utilizando informações que podem ser obtidas das mais variadas formas (D’AMBROSIO, 1986).

De acordo com dados do Inep (2004), com relação à construção de competências e desenvolvimento de habilidades na resolução de problemas matemáticos, em 2003, aproximadamente 62% dos estudantes de 3º ano do Ensino Médio se enquadravam no estágio Crítico. Estar neste estágio significa ter desenvolvido algumas habilidades elementares de interpretação de problemas, mas não conseguir transpor o que consta no enunciado para uma linguagem matemática específica.

Tentando minimizar os problemas no processo de ensino e aprendizagem, é importante encontrar formas de trazer os saberes adquiridos pelos alunos no seu convívio com a família e com a comunidade na qual estão inseridos para a sala de aula, como defendido por D’Ambrósio (1998).

Além disso, as TIC estão cada vez mais presentes no cotidiano de professores e alunos. É importante utilizar esses recursos em sala de aula, como ferramenta auxiliar no processo de ensino e aprendizagem de temas matemáticos e, para isso, os professores precisam ser preparados (D'AMBROSIO, 2001).

Como o foco desta monografia está relacionado ao uso das TIC no processo de ensino e aprendizagem de Matemática, abordaremos este tema na próxima seção.

1.1–TIC na Aprendizagem Matemática

O uso das TIC vem modificando a sociedade em vários setores, mostrando ter potencial também para colaborar com o sistema educacional (SETTE, AGUIAR, SETTE, 1999). Segundo Belfort (2002), se essas tecnologias forem utilizadas de forma adequada, podem ajudar no processo de ensino e aprendizagem, favorecendo a compreensão de conceitos, o desempenho na resolução de muitos problemas e o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo do aluno.

Segundo Belfort (2002), uma ferramenta didática sem o intermédio do professor não deve ser considerada um recurso didático, por melhor que seja. Nesse sentido, para que as TIC possam ser utilizadas de maneira adequada, é preciso haver uma preparação de professores (BELFORT, 2002). Como defendido por Valente (1999), é importante que todos os agentes envolvidos na educação escolar estejam preparados para enfrentar esse novo modelo de aprendizagem.

Valente (2003) afirma que é preciso haver uma integração entre o computador e a prática pedagógica. A avaliação das atividades do ProInfo[2] (MEC/SEED/DIED, 2002), promovida pelo DIED (Departamento de Informática na Educação a Distância), entre novembro de 2001 e dezembro de 2002, aponta, como um dos principais problemas enfrentados pelo referido programa, a resistência por parte do professor, com relação ao uso da Informática na Educação. Uma pesquisa realizada

---

[2] Programa Nacional de Informática na Educação - programa do Ministério da Educação, desenvolvido pela Secretaria de Educação a Distância (SEED) em parceria com governos estaduais e municipais, que visa introduzir as Tecnologias de Informação e Comunicação na escola pública, como ferramenta de apoio ao processo de ensino-aprendizagem (MEC/SEED/DIED, 2002).

pela antropóloga Juliane Remold[3] mostra que as experiências brasileiras de levar computadores às escolas não tem sido satisfatórias, pois estas têm esbarrado em dificuldades básicas (WEINBERG; RYDLEWSKI, 2007). Remold realizou uma pesquisa, durante dois anos, em 30 escolas brasileiras equipadas com computador. Através desse estudo, a referida antropóloga observou que metade das máquinas não era utilizada, ou porque precisavam de manutenção ou porque eram ignoradas pelos professores, que muitas vezes não sabiam sequer ligar o equipamento. A outra metade dos computadores servia apenas às aulas de informática (WEINBERG; RYDLEWSKI, 2007).

No processo de ensino e aprendizagem de Matemática, a utilização dos recursos tecnológicos é motivada por algumas facilidades que estes podem trazer, tais como: capacidade computacional, visualização gráfica, descoberta e confirmação de propriedades, possibilidades de executar experimentos com coleta de dados e modelagem de problemas, especulações, entre outras (BALDIN, 2002), além das contribuições mencionadas por Ponte, Oliveira e Varandas (2003), apresentadas na introdução desta monografia.

No entanto, não se pode deixar de mencionar que, ao utilizar as TIC, os professores podem enfrentar problemas, tais como: i) qualidade dos *softwares* que não realizam algumas tarefas esperadas pelo usuário (PONTE, 2000); ii) falta de suporte técnico nas escolas (BORBA; PENTEADO, 2001); iii) tempo que o professor não disponibiliza na realização de algumas atividades (BORBA; PENTEADO, 2001); iv) estratégias de facilidade que colocam em risco valores fundamentais (PONTE, 2000), tais como o "copiar" e "colar" de trabalhos na Internet, sem a menor preocupação em referenciar autores.

Segundo Borba e Penteado (2001), o computador pode ser comparado a um oráculo, em que as pessoas precisam dele para se aconselhar sobre uma decisão, porém não recebem a resposta de imediato e sim uma charada ou desafio que precisam ser decifrados.

As TIC podem auxiliar o professor na sala de aula, desde que haja uma interação correta entre aprendiz e computador, na obtenção de um aprendizado por intermédio da construção de conhecimento (JOLY, 2002).

[3] Juliane Remold defendeu sua tese de doutorado "Informática, Educação e Desigualdade Social nas escolas Públicas Brasileiras" em 08/11/2005, na UFRJ (UFRJ, s.d.).

Segundo Gravina e Santarosa (1998):

> O mundo físico é rico em objetos concretos para o início da aprendizagem em Matemática, no geral de caráter espontâneo. Mas se o objetivo é a construção de conceitos mais complexos e abstratos, estes não têm suporte materializado, entrando em jogo a 'concretização mental', que nem sempre é simples, mesmo para o matemático profissional (GRAVINA; SANTAROSA, 1998, p.8).

Nesse sentido, os ambientes informatizados apresentam-se como ferramentas de grande potencial, podendo colaborar para superar os obstáculos inerentes ao processo de aprendizagem (GRAVINA; SANTAROSA, 1998). Segundo essas autoras, em alguns casos, mesmo quando há a possibilidade de ações sobre objetos físicos, a transposição destes objetos para ambientes informatizados ainda pode ser interessante, pois estes permitem a realização de grande variedade de experimentos em pouco tempo, diferentemente da manipulação concreta.

Embasando a pesquisa, na seção seguinte, aborda-se o tema Cônicas, fazendo-se uma análise de seu contexto histórico.

1.2 – Cônicas

Segundo Anderson (1992), um dos três problemas clássicos da Antiguidade[4] era encontrar uma construção geométrica (utilizando somente régua e compasso) da aresta de um cubo, cujo volume fosse o dobro do volume de um cubo dado.

Não se sabe ao certo quando e por quem este problema foi formulado pela primeira vez, pois existem vários relatos a respeito. Uma das versões diz que como os délios[5] haviam sido atingidos por uma praga, uma delegação foi enviada ao oráculo de Apolo, em Delos, para perguntar como a peste poderia ser combatida. Este respondeu que, para tanto, o altar de Apolo, cuja forma era cúbica, deveria ter seu volume dobrado (ANDERSON, 1992). Uma outra versão diz que o rei Minos, insatisfeito com o tamanho do túmulo de seu filho Glauco, ordenou que o túmulo

[4] Três problemas clássicos da Antiguidade: Trissecção de um ângulo, Quadratura do círculo e Duplicação do cubo (CARVALHO, 2004).

[5] Povo de Delos (uma pequena ilha localizada praticamente no centro de um grupo de ilhas ao sul do Mar Egeu). Na Antiguidade Clássica, essa ilha serviu como santuário de Apolo, sendo considerada o berço desse deus (WIKIPÉDIA, s.d.).

tivesse o volume dobrado, porém sem que perdesse a forma original (ANDERSON, 1992).

Hipócrates (c. 440 a.C.) foi o pioneiro na realização de avanços relacionados ao problema da duplicação (ANDERSON, 1992). Este matemático provou que o problema poderia ser resolvido, achando-se duas médias proporcionais entre dois segmentos de comprimento A e 2A[6] (ANDERSON, 1992). Porém, não havia uma construção geométrica para esta dupla proporção. Arquitas de Tarento (c. 400 a.C.), posteriormente, resolveu o problema pela intersecção de três superfícies de revolução. No entanto, essa solução não atendia à limitação de usar apenas régua e compasso (ANDERSON, 1992).

Diversos outros matemáticos se empenharam na busca de uma solução para este problema e, nessa busca, vários avanços matemáticos foram realizados. O texto de Heath (1963) relata isso:

> Atribui-se a Menaecmus (c. 350 a.C.) a descoberta das secções cônicas, feita quando ele tentava encontrar a solução desse problema. Ele deu duas soluções, uma envolvendo a intersecção de duas parábolas e a outra a intersecção de uma hipérbole e uma parábola. (Pode-se ver facilmente pela geometria analítica que, quando as equações $y = x^2$ e $xy = 2$ são resolvidas simultaneamente, então $x = \sqrt[3]{2}$.) Deve-se enfatizar que essas eram soluções perfeitamente legítimas, mas não satisfaziam o critério grego de se restringirem os instrumentos a serem usados à régua e ao compasso. Platão (340 a.C.) descobriu uma solução mecânica, e durante o século III a.C. Nicomedes usou a curva chamada conchóide. Diocles (c. 180 a.C.) usou a cissóide para efetuar a duplicação. (1963, apud ANDERSON, 1992, p. 35).

Desde o século XIX, sabe-se que, na verdade, os três problemas clássicos da Antiguidade não podem ser resolvidos somente com régua e compasso (CARVALHO, 2004). Porém, os gregos foram capazes de encontrar soluções notáveis para os mesmos, usando vários outros tipos de instrumentos e construções, conforme já citado em relação ao problema da duplicação do cubo.

Considera-se que Menaecmus tenha sido o primeiro a tratar das seções cônicas, utilizando a idéia de Arquitas na resolução do problema da duplicação, fazendo relação dessas seções com sólidos geométricos (BOWSHER, 1992).

---

[6] Em terminologia atual (não na de Hipócrates), deve-se achar x e y de maneira que A/x = x/y = y/2A. Como $x^2 = Ay$ e $y^2 = 2Ax$, a eliminação de y leva a $x^3 = 2A^3$. Assim, o volume de um cubo de aresta x é duas vezes o de um cubo de aresta A (ANDERSON, 1992).

Conforme citado anteriormente, na solução que obteve, Menaecmus utilizou duas curvas descobertas por ele, uma parábola e uma hipérbole. Uma terceira curva, a elipse, surgiu como subproduto de sua descoberta (YOUSSEF, FERNANDEZ, 1993). Supõe-se, ainda, que Menaecmus tenha descoberto essas curvas seccionando cones com planos perpendiculares a uma seção meridiana, cujo ângulo era, respectivamente, agudo, reto ou obtuso (BOWSHER, 1992).

Na época de Menaecmus, as cônicas, elipse, hipérbole e parábola não eram assim denominadas. Elipse era denominada *oxytome*, referência às seções do cone acutângulo; hipérbole era *amblytome*, referência às seções do cone obtusângulo; e, finalmente, parábola era *orthotome*, referência às seções do cone retângulo (BOYER, 2001).

Além de Menaecmus, as cônicas foram estudadas por vários matemáticos da Antiguidade, entre os quais Aristeu, Arquimedes e Euclides (BOYER, 2001).

No século II a.C., o astrônomo e geômetra grego Apolônio de Perga (presumivelmente 262 a.C. – 190 a.C.) escreveu um tratado sobre as seções cônicas reproduzindo os conhecimentos de Menaecmus, acrescentando, ainda, centenas de novos teoremas, deduzidos de uma maneira puramente geométrica (YOUSSEF, FERNANDEZ, 1993). Apolônio conseguiu obter todas as seções cônicas a partir de uma superfície cônica de duas folhas, variando o ângulo em que o plano corta a seção meridiana (BOWSHER, 1992). As Figuras 1.1, 1.2, 1.3 (construídas no *software* Winplot[7]) mostram uma seção cônica elíptica, parabólica e hiberpólica, respectivamente.

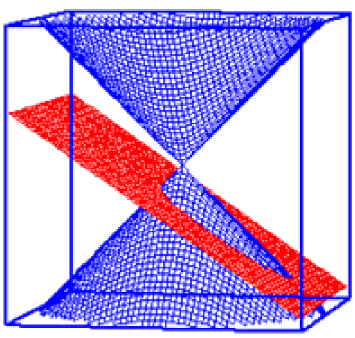
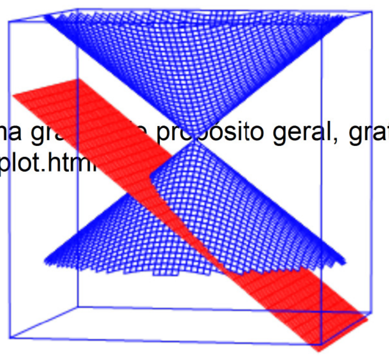


Figura 1.1: Elipse



[7] O *software* Winplot é um programa gráfico de propósito geral, gratuito, disponível para *download* em <http://math.exeter.edu/rparris/winplot.htm>.

Figura 1.2: Parábola

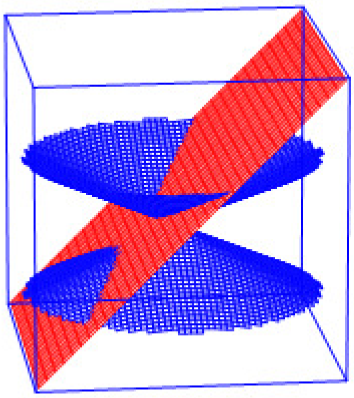


Figura 1.3: Hipérbole

Apolônio usou os termos *elipse, parábola* e *hipérbole,* baseando-se numa terminologia pitagórica (séc. VI a.C.), específica para áreas (SILVA, 1985).

> [...] quando os pitagóricos faziam a base de um retângulo ficar sobre um segmento retilíneo de modo que uma extremidade dessa base coincidisse com uma das extremidades do segmento, diziam que tinham um caso de *elipse, parábola* ou *hipérbole* conforme a referida base fosse menor do que o segmento, com ele coincidisse ou o excedesse. E observamos que a razão dessas designações está na própria significação dos termos, pois *elipse* quer dizer *falta, parábola* corresponde a *igual* e *hipérbole* exprime *excesso* (SILVA, 1985, p. 43).

Ressalta-se que os pitagóricos não usavam esses termos com referência a seções cônicas (BOWSHER, 1992).

Apolônio de Perga escreveu oito livros sobre as cônicas, este trabalho foi apresentado na forma geométrica regular, sem utilizar a notação da geometria analítica (BOWSHER, 1992). Descrevemos brevemente este trabalho, usando a termologia e simbolismos atuais, visando a facilitar o entendimento do mesmo.

Iniciando pelas parábolas, consideremos a construção da Figura 1.4 (elaborada no *software* Régua e Compasso[8]). Na referida figura, **A** é o vértice da

[8] O *software* Régua e Compasso é um programa para Geometria Dinâmica, livre, disponível para *download* em <http://www.khemis.hpg.ig.com.br/car/>.

parábola, $\overleftrightarrow{AB}$ o seu eixo, **P** um ponto genérico da curva e **Q** o pé da perpendicular traçada por **P** sobre $\overleftrightarrow{AB}$. Por **A** traça-se a perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ e sobre esta marca-se o ponto **R**, tal que a medida do segmento $\overline{AR}$ seja igual à medida do *latus rectum*[9] ou parâmetro. Constrói-se, então, um retângulo tendo como lados o segmento $\overline{AQ}$ e o segmento $\overline{AR}$. A área desse retângulo é **igual** à área quadrado de lado $\overline{PQ}$, o que justifica o nome parábola (igual) (SILVA, 1985).

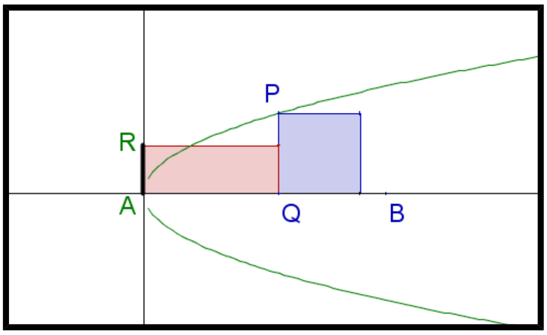


Figura 1.4: Parábola – Justificativa do Nome

Considerando a afirmação do parágrafo anterior e o sistema de coordenadas retangulares, temos que a equação da parábola com vértice na origem, foco sobre o eixo x e concavidade voltada para direita, é $y^2 = lx$, na qual l é a medida do *latus rectum* e (x, y) as coordenadas do ponto genérico **P** (BOYER, 2001). A Figura 1.5 (construída no *software* Régua e Compasso) apresenta a parábola $y^2 = x$, no sistema de coordenadas retangulares.

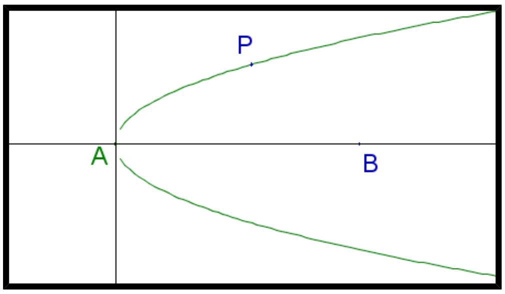


Figura 1.5: Parábola no Sistema de Coordenadas

Analisando, agora, as elipses e as hipérboles, consideremos, respectivamente, as construções das Figuras 1.6 e 1.7 (elaboradas no *software*

[9] *Latus rectum* é a corda que passa por um foco da cônica e é perpendicular ao eixo principal (BOWSHER, 1992, p.62).

Régua e Compasso). Em cada uma dessas construções, **A** é o vértice da cônica, $\overleftrightarrow{AB}$ o seu eixo principal, **P** um ponto genérico da curva e **Q** o pé da perpendicular traçada por **P** sobre $\overleftrightarrow{AB}$. Como na construção 1.4, por **A** traça-se a perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ e sobre esta marca-se o ponto **R**, tal que a medida do segmento $\overline{AR}$ seja igual à medida do *latus rectum*. Em cada caso, é construído um retângulo tendo como lados o segmento $\overline{AQ}$ e o segmento $\overline{AR}$. No caso da elipse, a área do quadrado de lado $\overline{PQ}$ é **menor** do que a área do retângulo construído. No caso da hipérbole, a área do quadrado de lado $\overline{PQ}$ é **maior** do que a área do retângulo construído (SILVA, 1985). Isto justifica o porquê dos nomes elipse (falta) e hipérbole (excesso) (SILVA, 1985).

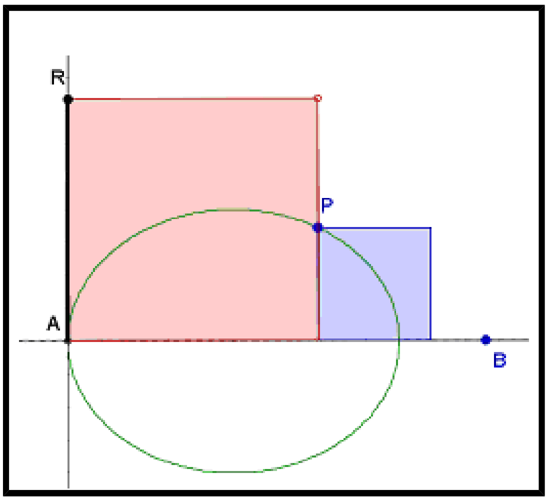


Figura 1.6: Elipse – Justificativa do Nome

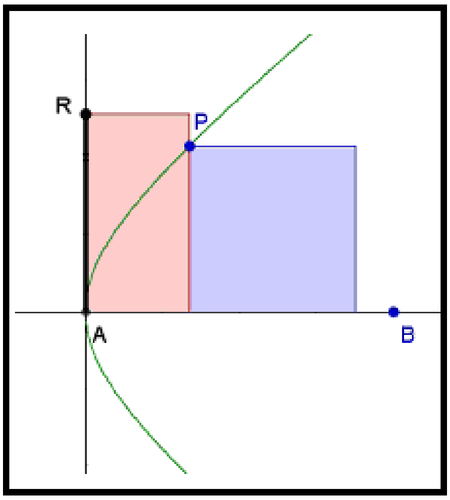


Figura 1.7: Hipérbole – Justificativa do Nome

Mostra-se, então, no sistema de coordenadas cartesianas, que a equação da elipse (com vértice na origem O e eixo maior sobre o semi-eixo positivo $\overrightarrow{OX}$) é $y^2 < lx$ (BOYER, 2001). Assim como, mostra-se que, no sistema de coordenadas cartesianas, a equação da hipérbole (com vértice na origem O e eixo maior sobre o semi-eixo positivo $\overrightarrow{OX}$) é $y^2 > lx$ (BOYER, 2001).

Segundo Boyer (2001, p.100), "[...] são das propriedades das curvas que são representadas por essas desigualdades que sugeriram os nomes dados por Apolônio, há mais de dois milênios, e que ainda lhes estão firmemente associados".

Para melhor entendimento do trabalho de Apolônio, consideremos um cone circular reto de duas folhas com eixo ***e*** e vértice **V**. Além disso, consideremos α o ângulo formado entre ***e*** e uma geratriz desta superfície cônica, $0° < \alpha < 90°$ (semi-abertura do cone) e β o ângulo[10] formado entre o plano π, que intersecta a superfície cônica, e a reta ***e***, conforme mostra a Figura 1.8 (construída no *software* Régua e Compasso e complementada no *software* Paint[11]).

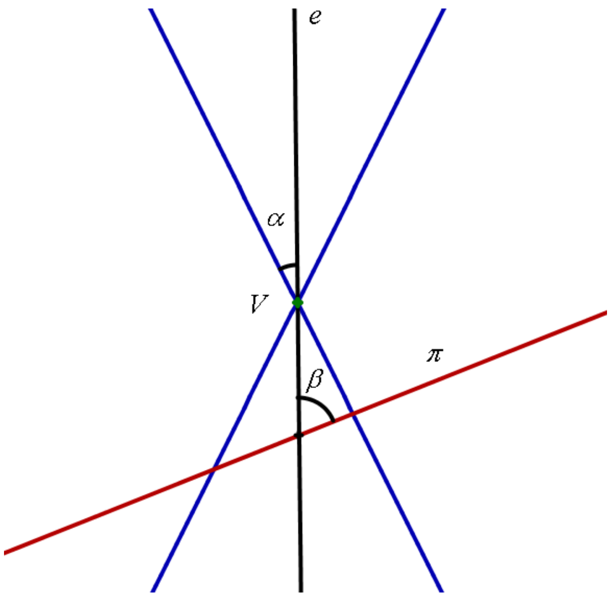


Figura 1.8: Ângulos α e β

De maneira geral, a cônica a ser determinada pela interseção do plano π com a superfície cônica irá depender de dois fatores: dos tamanhos relativos de α e β e se V é ou não um ponto de π (SATO, 2005). A cônica será não degenerada (ou suave) se V não pertencer ao plano π e será degenerada, caso contrário (SATO, 2005). Além disso, segundo este autor, se:

- $\alpha < \beta$, tem-se uma elipse;
- $\alpha = \beta$, tem-se uma parábola;
- $\alpha > \beta$, tem-se uma hipérbole.

---

[10] Chama-se ângulo entre uma reta e um plano oblíquos ao ângulo agudo que a reta forma com sua projeção ortogonal sobre o plano. Se a reta e o plano forem perpendiculares, o ângulo entre eles é reto. Se a reta for paralela ou estiver contida no plano, o ângulo entre eles é nulo (DOLCE; POMPEU, 1993).

[11] O *software* Paint é um programa da Microsoft, utilizado para a criação de desenhos simples e também para a edição de imagens.

Uma elipse degenerada é um ponto; uma parábola degenerada é uma única reta e uma hipérbole degenerada consiste de duas retas que se intersectam em V (SATO, 2005).

De modo equivalente, podemos dizer que a interseção de um plano com um cone circular reto de duas folhas será uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole, conforme o plano intersecte todas as geratrizes de uma única folha, seja paralelo a uma geratriz do cone ou intersecte as duas folhas deste, respectivamente (SATO, 2005).

As Figuras 1.9, 1.10 e 1.11 (construídas no *software* Winplot e complementadas no *software* Paint) ilustram as situações descritas acima, para os casos não degenerados.

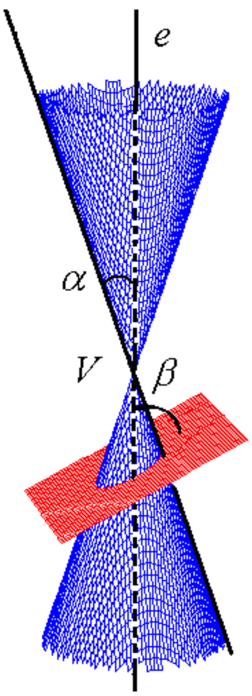


Figura 1.9: Elipse ($\alpha < \beta$)
O plano intersecta todas as geratrizes de uma única folha da superfície cônica.

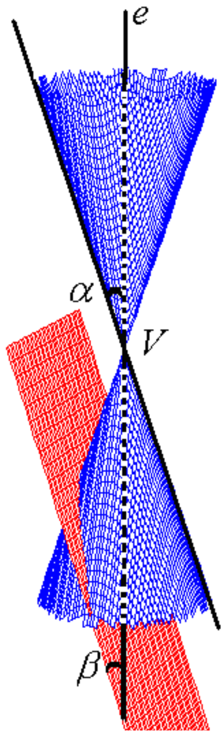


Figura 1.10: Parábola (=)
O plano é paralelo a uma geratriz da superfície cônica.

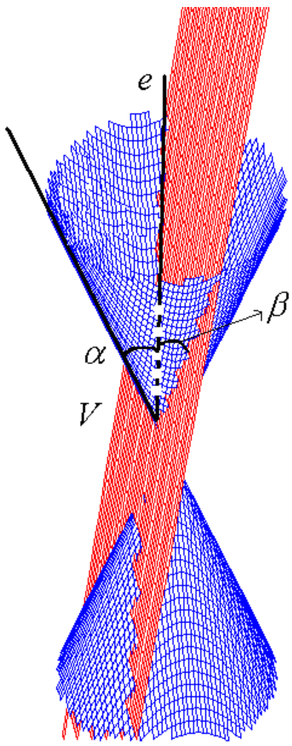


Figura 1.11: Hipérbole (>)
O plano intersecta as duas folhas da superfície cônica.

Em particular, se α < β e $\beta = 90^{\circ}$, obtém-se uma circunferência (GUIMARÃES, s.d. - a), conforme mostra a Figura 1.12 (construída no *software* Winplot, complementada no *software* Paint).

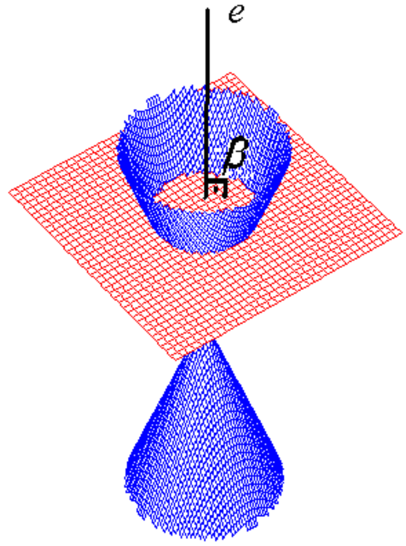
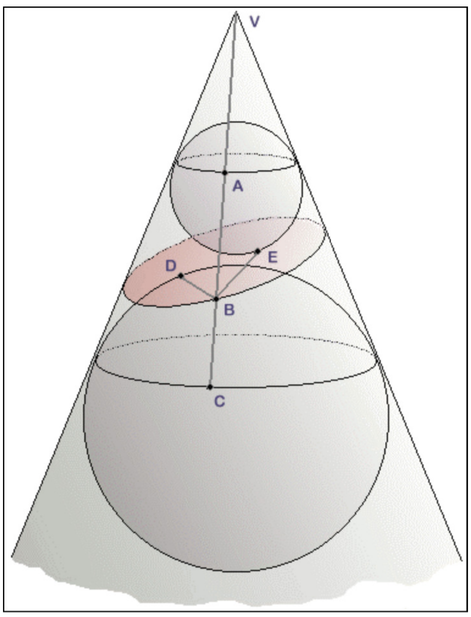


Figura 1.12: Circunferência ($\beta = 90^{\circ}$)

O matemático belga Dandelin desenvolveu um trabalho envolvendo esferas inscritas numa superfície cônica de revolução (SATO, 2005). Considerando uma superfície cônica de revolução, esferas inscritas nessa superfície e um plano π intersectando a mesma, Dandelin demonstrou que os pontos onde as esferas inscritas tangenciam o plano de interseção são focos da seção cônica (PRIME, s.d).

Se a seção cônica é uma elipse, então existem duas esferas inscritas na superfície cônica, tangentes ao plano π, ambas contidas numa mesma folha do cone, conforme mostra a Figura 1.13. Se a seção cônica é uma parábola, então existe uma única esfera inscrita na superfície cônica, tangente ao plano π. Se a seção cônica é uma hipérbole, então existem duas esferas inscritas na superfície cônica, tangentes ao plano π, porém, uma em cada folha do cone (SATO, 2005).



Fonte: PRIME, s.d.
Figura 1.13: Focos da Elipse

Os focos desempenham um papel importante no estudo das cônicas, na medida que fazem parte de propriedades importantes, sem os quais não poderiam ser provadas (BOYER, 2001). Acredita-se que Apolônio conhecesse estes pontos, mas não havia atribuído nenhum nome aos mesmos, e talvez seja por isso que não se encontre nada escrito sobre focos em suas obras (BOYER, 2001).

A excentricidade de uma cônica é o valor dado pela razão entre as medidas dos cossenos dos ângulos α e β, obtidos a partir da geratriz com o eixo do cone e do plano com o eixo do cone, respectivamente (GUIMARÃES, s.d. - a).

$$e = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$$

Os valores das excentricidades variam para cada cônica. Podemos verificar na tabela 1.1 a variação destes valores.

Tabela 1.1: Variação dos valores das excentricidades das cônicas

Cônica	**Excentricidade**
Circunferências	$e = 0$
Elipses	$0 < e < 1$
Parábolas	$e = 1$
Hipérboles	$e > 1$

Percebe-se que, no caso da circunferência, a excentricidade é nula, pois:

$$\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = 0$$

onde $\beta = 90^0$ (o plano é perpendicular ao eixo do cone) e como $\cos 90^0$ é igual a 0, $e = 0$.

A cônica elipse será abordada mais detalhadamente na subseção seguinte, pois é o tema de estudo desta pesquisa.

1.2.1 – Elipse

Elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano para os quais a soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano, F_1 e F_2, é uma constante 2a (MACHADO, 1982).

Como astrônomo, Apolônio de Perga lançou a idéia dos epiciclos para explicar o movimento dos planetas. Segundo essa idéia, os planetas girariam ao redor da Terra, descrevendo órbitas circulares. Em 1609, Johann Kepler chegaria à conclusão que os planetas giram ao redor do Sol, descrevendo órbitas elípticas (YOUSSEF, FERNANDEZ, 1993).

Evidentemente, Apolônio não poderia imaginar que a mesma curva obtida pela seção do cone serviria, dezoito séculos depois, para descrever a trajetória dos planetas (YOUSSEF, FERNANDEZ, 1993).

De acordo com a 1ª Lei de Kepler, a órbita que a Terra descreve em torno do Sol é uma elipse com o Sol num dos focos (ALMEIDA, s.d.). Ao descrever a órbita elíptica, a Terra passa por duas posições em relação ao Sol, denominadas *afélio* e *periélio*, quando a Terra está mais afastada ou mais próxima do Sol, respectivamente (ALMEIDA, s.d.).

Os astrônomos se interessaram, também, em saber se as elipses descritas pelos planetas do Sistema Solar em suas órbitas, eram do tipo mais “achatadas” ou mais “arredondadas”. A análise desta propriedade da elipse se dá pela excentricidade desta curva que, como já foi mencionado anteriormente, é uma razão, cujo valor está sempre compreendido entre zero e um (IMENES, 1987). Verificou-se, então, que os valores das excentricidades das órbitas desses planetas são muito próximos de zero e isto se deve ao fato das órbitas serem muito arredondadas. A tabela 1.2 mostra as excentricidades das órbitas dos planetas (IMENES, 1987).

Tabela 1.2: Excentricidade das órbitas dos planetas do sistema solar

Planetas	**Excentricidade**
Mercúrio	0,206
Vênus	0,007
Terra	0,017
Marte	0,093
Júpiter	0,049
Saturno	0,056
Urano	0,047
Netuno	0,009
Plutão	0,246

Fonte: IMENES, 1987, p.44

Para determinar a equação de uma elipse, conhecendo as coordenadas de um ponto qualquer da mesma, deve-se fazer a adição do módulo de dois raios vetores[12] diferentes e igualar o resultado à medida do eixo maior da elipse.

Se o ponto (x,y) pertence à elipse de semi-eixos a e b, com centro na origem e eixo maior (2a) sobre o eixo x, então (x,y) satisfaz à equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, o que se demonstra a seguir.

Consideremos uma elipse de pontos focais B (-c, 0) e C (c, 0) e um ponto P (x, y) sobre a elipse.

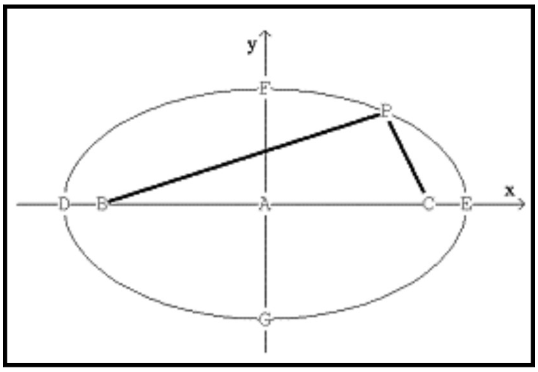


Figura 1.14: Equação da elipse: centro (0,0) e eixo maior sobre o eixo x

Nessas condições, para determinar a equação da elipse, temos que utilizar a definição e fazer os cálculos necessários:

Pela definição de elipse,

$$BP + CP = 2a$$

ou seja:

$$\sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Elevando os dois membros da equação ao quadrado:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$4xc-4a^2=-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Dividindo ambos os membros da equação por 4:

[12] Raio Vetor de uma elipse é um vetor que liga o foco da elipse a qualquer ponto desta, com isto podem-se estabelecer infinitos raios-vetores, considerando os dois pontos focais da elipse (GUIMARÃES, s.d. - b).

$$xc - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc$$

Elevando novamente os dois membros ao quadrado:

$$a^2[(x-c)^2 + y^2] = (a^2 - xc)^2$$

$$a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = (a^2 - xc)^2$$

$$a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + c^2x^2$$

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \text{ (I)}$$

Como:

$a^2 = b^2 + c^2$, temos que

$$b^2 = a^2 - c^2 \text{ (II)}$$

Substituindo (II) em (I), temos:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividindo ambos os membros da equação por a^2b^2:

Equação reduzida da elipse com focos no eixo x e centro na origem.

Esta equação é condição necessária para que um ponto (x, y) pertença a uma elipse de semi-eixos a e b, centro na origem e eixo maior (2a) sobre o eixo x. Ou seja, considerando d e d' medidas de dois raios vetores distintos, com extremidades em focos distintos sobre o eixo x, eqüidistantes da origem, e $2a$ a medida do eixo, tem-se:

$$d + d' = 2a \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

É preciso demonstrar a recíproca, se o ponto (x, y) satisfaz a equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, então esse ponto pertence à elipse de semi-eixos a e b (sendo a o semi-eixo maior, sobre o eixo x) e centro na origem, ou seja, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow d+d'=2a$ (ÁVILA, 1997).

Ao elevar ambos os membros de uma equação ao quadrado, é possível que sejam introduzidas raízes que não são soluções da equação original. É isso que precisa ser verificado na demonstração feita. Porém, verifica-se que não foram introduzidas raízes na equação original, pois d e d' são medidas e, assim sendo, são valores positivos[13]. Diante disso, tem-se que $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow d+d'=2a$ e, consequentemente, fica demonstrado que:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow d+d'=2a$$

Desta maneira, fica provado que a equação citada é condição necessária e suficiente para que o ponto (x,y) pertença a uma elipse de semi-eixos a e b, centro na origem e eixo maior (2a) sobre o eixo x.

De maneira análoga, prova-se que a equação $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ é condição necessária e suficiente para que o ponto (x,y) pertença a uma elipse de semi-eixos a e b, centro na origem e eixo maior (2a) sobre o eixo y.

A elipse pode ser aplicada na construção de aparelhos utilizados no cotidiano, pois tem a propriedade refletora. Em consultórios dentários, por exemplo, são utilizadas luminárias com espelhos elípticos, que concentram os raios luminosos em um ponto, trazendo vantagens para os dentistas, pois permite obter o máximo de luz num único ponto, e para o paciente, que não precisa receber toda luminosidade no rosto (VALLADARES, 1998). No tratamento radioterapêutico também são usados aparelhos com esta propriedade e, neste caso, os raios destroem apenas os tecidos doentes sem afetar os tecidos sadios ao redor (VALLADARES, 1998).

Outra aplicação ocorre nas salas de sussurros, que são construções ovais com dois pontos marcados no chão. Estes pontos funcionam como os focos da elipse, considerando o plano representado pelo chão da sala. Nestes focos ficam localizadas duas pessoas em pé conversando em voz baixa e, devido à propriedade

[13] Se $a \geq 0$ e $b \geq 0$, então $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$.

refletora da elipse, estas pessoas conseguem se comunicar perfeitamente, pois o som emitido a partir de um dos focos toca num ponto da parede da sala e volta (reflete) ao outro foco, onde está localizada a outra pessoa (VALLADARES, 1998).

2- RELATO DE EXPERIÊNCIA

Tendo em vista o alcance dos objetivos propostos, diversas ações foram realizadas. Neste capítulo, relatam-se estas ações que estão organizadas da seguinte forma: i) elaboração das atividades e dos questionários; ii) teste exploratório das atividades; iii) validação das atividades.

2.1 – Elaboração das Atividades e dos Questionários

A preparação de atividades envolvendo elipse decorreu do fato deste ser um conteúdo pouco trabalhado no Ensino Médio, e também dos recursos oferecidos pelo *software* Wingeom para o estudo deste tema.

Abaixo, nas Figuras 2.1 e 2.2, apresenta-se a interface do *Software* Wingeom.

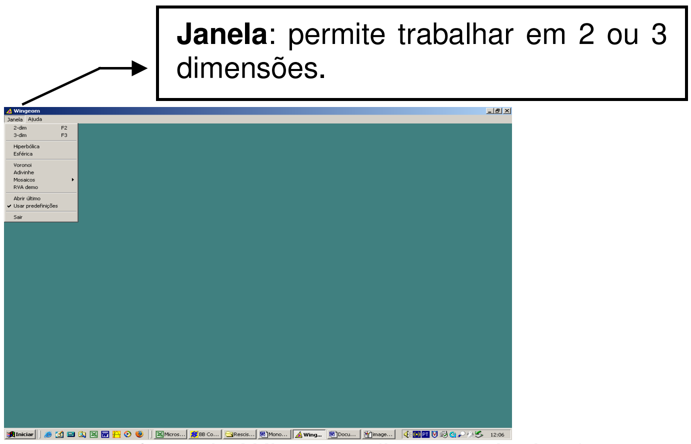


Figura 2.1: Interface do Wingeom (janela principal)

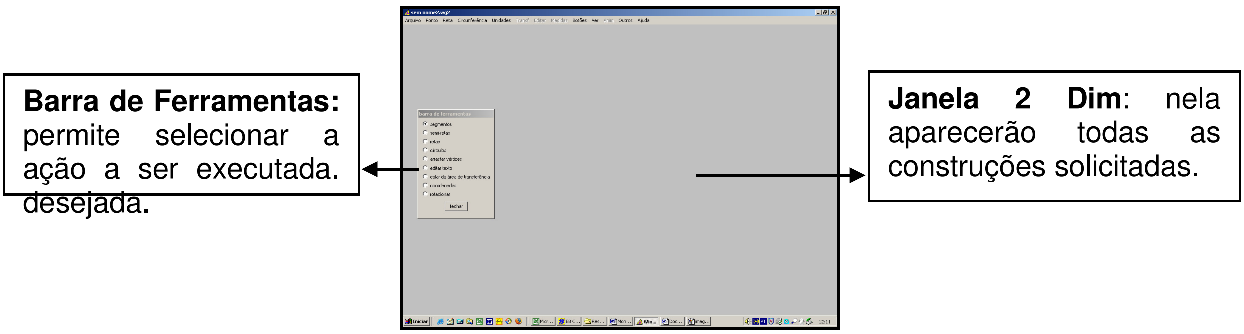


Figura 2.2: Interface do Wingeom (janela 2 Dim)0

O estudo de elipse e do *software* Wingeom iniciaram-se no projeto de iniciação científica, do qual o autor desta monografia foi bolsista PIBIC/CNPq, durante o ano de 2005, sob orientação das professoras Gilmara Barcelos e Silvia Batista (orientadora e co-orientadora desta monografia, respectivamente).

As atividades desenvolvidas nesse período visavam ao estudo geométrico das cônicas (elipse, hipérbole e parábola) e geraram a apostila "Estudando Cônicas com o Auxílio do *Software* Wingeom". Esta foi estruturada em três seções, uma com atividades de reconhecimento do *software*, outra destinada ao estudo das seções cônicas, e a última visando o estudo geométrico da elipse, da hipérbole e da parábola. Este estudo geométrico consiste do traçado das cônicas, a partir de suas definições, com o auxílio do Wingeom.

Visando a diagnosticar possíveis problemas nas atividades da referida apostila, foi realizado o minicurso "Estudando Cônicas com Auxílio do *Software* Wingeom". Este ocorreu no CEFET Campos, com duração de 12 horas, e teve como participantes licenciandos em Matemática do 5º período, com conhecimentos de Informática e Informática Educativa. Ao final deste minicurso, os participantes responderam um questionário, contendo perguntas sobre as atividades realizadas e sobre o uso das TIC na aprendizagem Matemática. Aproximadamente 83% dos participantes afirmaram ser possível realizar as atividades com seus futuros alunos, justificando isto pela facilidade de utilização do *software* e pela qualidade das atividades. Todas as atividades da apostila foram realizadas com facilidade pelos participantes e as observações feitas por estes foram registradas e analisadas.

Para esta monografia, o tema elipse foi estudado com mais detalhes, e as atividades sobre esse tema foram complementadas, incluindo relações entre os elementos, equações e excentricidade da elipse. Como fruto deste trabalho monográfico, foi elaborada a apostila "Estudando Elipse com Auxílio do *Software* Wingeom" (Anexo 1).

Para melhor compreensão, as atividades desta apostila estão organizadas em seções que visam a proporcionar um estudo gradativo de elipse e do *software* Wingeom. A primeira seção contém atividades exploratórias do *software*, a segunda destina-se ao estudo das seções cônicas e a terceira apresenta atividades para o estudo de elipse.

Considerando a importância da referida apostila no contexto deste trabalho, é fundamental que esta seja detalhada, sendo a proposta de cada seção melhor explicitada.

Na primeira seção, estão as atividades exploratórias do *software* Wingeom, que têm a finalidade de tornar mais fácil o manuseio do *software*, pois são atividades de reconhecimento de suas principais ferramentas. Nessa seção, as atividades estão bem detalhadas, fazendo com que o aluno se familiarize com os comandos solicitados.

Na segunda seção, faz-se um estudo das seções cônicas. O objetivo desta é mostrar como as cônicas podem ser obtidas através de interseções de um plano com uma superfície cônica de revolução. Nessa seção é possível observar as interseções através de algumas construções feitas com o auxílio do *software* Winplot, expostas na apostila com o intuito de favorecer o entendimento do tema. São citadas, ainda, as cônicas degeneradas (um ponto, um par de retas concorrentes e uma reta) que também são obtidas a partir de interseções. Além disso, são disponibilizados alguns endereços eletrônicos, nos quais é possível visualizar as interseções de outras formas, seja através de outras construções sem animação ou através de construções que permitem movimentações nos planos. Estas movimentações favorecem à visualização das cônicas obtidas e, conseqüentemente, o entendimento do assunto.

A terceira seção contém atividades com a finalidade de mostrar formas de aplicação do *software* Wingeom como recurso didático para o processo de ensino e aprendizagem de elipse. Esta seção encontra-se dividida em duas partes: a primeira (subseção 3.1) trata do estudo geométrico da elipse e a segunda (subseção 3.2) contém atividades referentes ao tratamento algébrico (estudo da relação entre elementos, das equações e da excentricidade da elipse). Sendo esta a principal seção da apostila elaborada, suas atividades serão comentadas e seus objetivos explicitados.

Na primeira parte (subseção 3.1), as atividades I (Quadro 2.1), III e IV têm como objetivo a construção de elipse, a partir de sua definição (lugar geométrico dos pontos de um plano tais que a soma de suas distâncias a dois pontos fixos desse plano, chamados focos, é constante). Nestas três atividades (I, III e IV), o procedimento utilizado para o traçado de elipse é o mesmo, porém, o que muda é a posição destas curvas. Na atividade I, os focos A e B estão sobre o eixo x, com centro no ponto (0,0); na atividade III, os focos A e B estão sobre o eixo y, com centro no ponto (0,0); na atividade IV é proposta uma construção cujos focos estejam sobre um dos eixos coordenados e o centro fora da origem.

Quadro 2.1: Atividade I da seção 3

a) Marque os pontos a (4,0), b (-4,0) e c (-7,0).

b) Construa uma circunferência de centro A, passando pelo ponto C. para isto, clique em **circunferência** (no alto da janela principal) e selecione **raio-centro**. digite **A** na caixa "**centro em**" e, a seguir, selecione "**circunferência através de**", digitando **C** na caixa correspondente. Clique, então, em **desenhar**.

c) Na **barra de ferramentas**, selecione **segmentos.** Clicando com o botão direito do mouse sobre a circunferência, crie o ponto D (em qualquer lugar da circunferência, exceto sobre o próprio ponto C).

d) Construa os segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{AD}$.

e) Construa a mediatriz do segmento $\overline{BD}$.

f) Peça a interseção da reta $\overleftrightarrow{EF}$ com o segmento $\overline{AD}$. Este ponto será nomeado G, pelo próprio programa.

g) Clique em **anim|traço temporário** e, na caixa de texto correspondente, digite G.

h) Movimente o ponto d e observe o conjunto de pontos marcados.

i) Crie o segmento $\overline{BG}$.

j) Peça a medida de $\overline{AG}$ + $\overline{BG}$.

k) Movimente novamente o ponto d observando a medida de $\overline{AG}$ + $\overline{BG}$.

l) Descreva o que você observou.

A Figura 2.3 mostra a construção obtida na Atividade I. Construções análogas a essa são obtidas nas atividades III e IV, porém com algumas modificações nas posições dos eixos destas curvas, conforme já descrito.

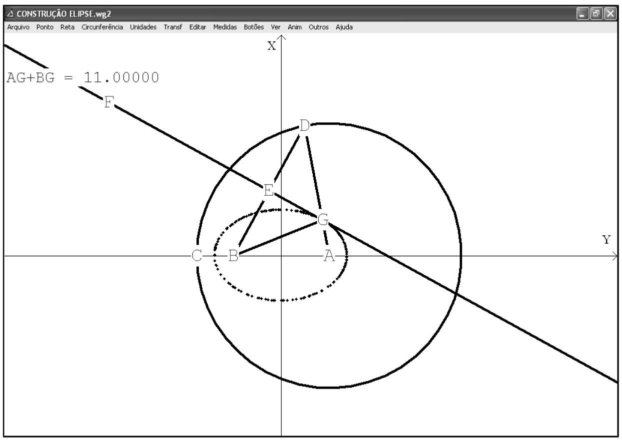


Figura 2.3: Construção da Elipse

As atividades permitem levantar hipóteses, estabelecer conjecturas, através das quais o entendimento do conteúdo pode ir sendo construído. Mas, certamente, é preciso que demonstrações sejam feitas, sustentando o que foi conjecturado. Dessa forma, após a atividade I há uma observação que apresenta a definição de elipse e a demonstração geométrica de que os pontos da curva da Figura 2.3 realmente atendem à definição de elipse. Esta observação permite, ainda, identificar alguns elementos de uma elipse, pois são citados os eixos maior e menor, o centro, e os focos. Comenta-se também, nesta observação, que o eixo maior da elipse mede a soma das distâncias entre os segmentos citados anteriormente.

A atividade II disponibiliza um endereço eletrônico para visualização de um conjunto de pontos descrevendo uma elipse, de forma análoga ao que foi feito nas atividades I, III e IV utilizando o *software*.

As atividades V e VI destinam-se também à construção de elipse, porém, o processo de traçado é distinto, pois é utilizada a ferramenta **Unidades|Cônicas com 3 pontos** (um recurso do *software* destinado ao estudo de cônicas). Na atividade VI é solicitada a construção de uma elipse com eixo maior não paralelo a nenhum dos eixos coordenados.

Na segunda parte da terceira seção (subseção 3.2), a atividade I foi elaborada com o propósito de comparar $\overline{PB}$ + $\overline{PC}$ (sendo P um ponto qualquer da elipse de focos B e C) com a medida do eixo maior da elipse. Nessa atividade são construídas duas elipses e, para ambas, são solicitadas comparações entre as referidas medidas. O *software* possui uma ferramenta que permite determinar a medida de segmentos, o que viabiliza atividades desse tipo. Após esta atividade, faz-se uma generalização do que foi analisado, esclarecendo que o que foi observado para as duas elipses é válido para qualquer outra, e que isso é possível de ser provado.

A seguir, faz-se a demonstração da relação fundamental entre os elementos de uma elipse. As Figuras 2.4 e 2.5 mostram as construções que acompanham esta demonstração. A Figura 2.4 mostra a distância focal (2c), a medida do eixo maior (2a) e a medida do eixo menor (2b).

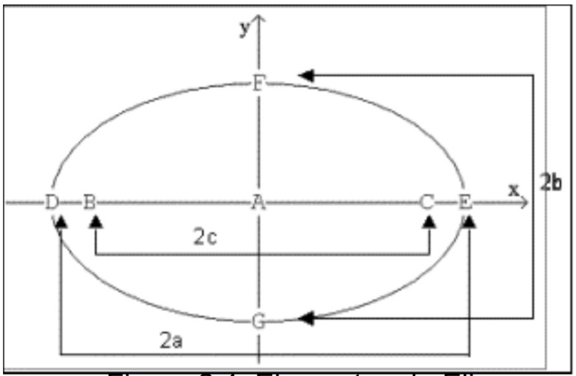


Figura 2.4: Elementos da Elipse

A Figura 2.5 mostra os triângulos retângulos que permitem demonstrar, através do Teorema de Pitágoras, a relação fundamental entre os elementos da elipse.

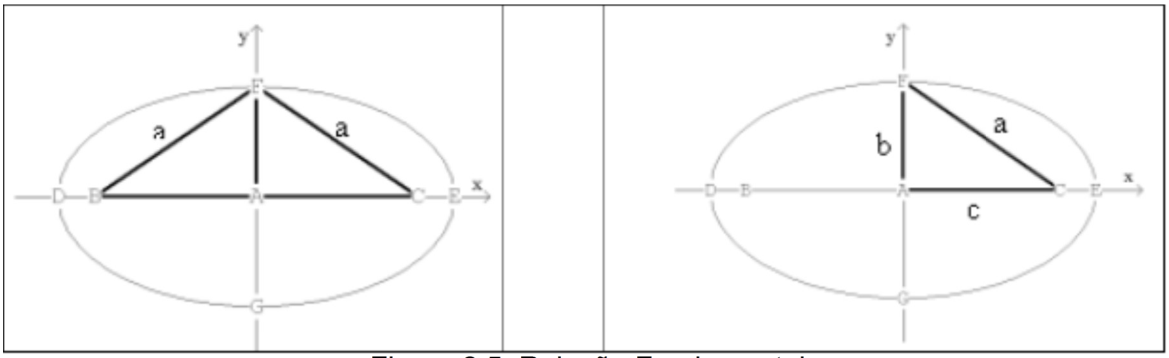


Figura 2.5: Relação Fundamental

Na atividade II o objetivo é a aplicação da relação fundamental. O Quadro 2.2 apresenta esta atividade e é possível observar que o item d solicita a determinação da medida do semi-eixo menor da elipse construída, sem utilização dos recursos do *software*. A intenção é verificar se o estudo da relação fundamental ficou claro.

Quadro 2.2: Atividade II da seção 3

a) Solicite um arquivo novo.
b) Marque os pontos A (0, 0), B(-2, 0), C(2, 0), D(-3, 0), E(3, 0).
c) Utilize a opção **Unidades|Cônicas com 3 pontos** e construa uma elipse com pontos focais B e C, passando pelo ponto D.
d) Considerando a relação $a^2 = b^2 + c^2$, calcule a medida do semi-eixo menor (sem utilizar os recursos do *software*): .

Na construção da elipse da atividade II (Quadro 2.2), é utilizada a ferramenta **Unidades/Cônicas com 3 pontos**, visando a tornar o processo de construção mais rápido, pois o objetivo desta atividade é investigar se o aluno aprendeu a relacionar os elementos de uma elipse. Em seguida, numa observação, apresenta-se uma elipse com eixo maior sobre o eixo x, como a construída na atividade II. Considera-se os focos B(-c,0) e C(c,0), o centro A(0,0) e um ponto P(x,y) sobre ela, para, a partir da definição de elipse, fazer a dedução da equação reduzida da elipse, com focos no eixo x e centro na origem, como mostra a figura 2.6.

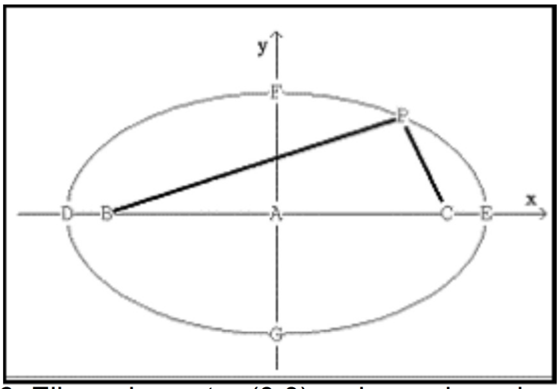


Figura 2.6: Elipse de centro (0,0) e eixo maior sobre o eixo x

A dedução da referida equação é apresentada na apostila. Esta envolve distância entre dois pontos, igualdade entre medidas, radiciações, potenciações e a relação fundamental. Isto faz com que se perceba a relação que existe entre a parte geométrica e a parte algébrica desta cônica, possibilitando uma melhor compreensão do tema.

Na atividade IV, assim como na atividade II, o aluno pode aplicar a relação fundamental através de outra construção no *software*. O processo de resolução desta atividade é análogo ao da atividade II, porém, deve-se atentar para o fato de que a elipse construída tem o eixo maior sobre o eixo y, ao contrário da atividade II.

À atividade IV, de forma semelhante ao que foi feito ao fim da atividade II, segue-se uma observação. Apresenta-se uma elipse com eixo maior sobre o eixo y, como a construída na atividade IV. Nessa construção estão o ponto P(x,y) sobre a elipse, os focos B(0,-c) e C(0,c) e o centro A(0,0), como mostra a Figura 2.7.

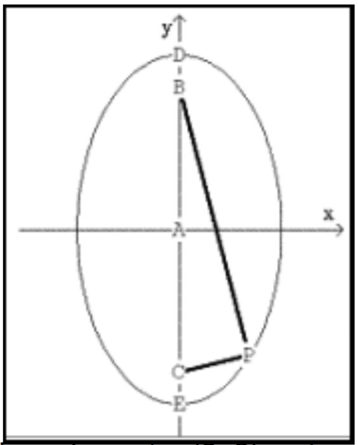


Figura 2.7: Elipse de centro (0, 0) e eixo maior sobre o eixo y

Esta figura tem como finalidade ilustrar uma situação em que temos uma elipse com eixo maior sobre o eixo y e centro na origem, para, a partir daí, estabelecer uma relação entre a definição de elipse e os pontos dados e, assim, chegar à equação reduzida de uma elipse com estas características.

Nas atividades III e V, pede-se para escrever a equação das elipses, construídas nas atividades II e IV. Dessa forma, estas atividades têm por objetivo a aplicação das fórmulas apresentadas nas atividades II e IV.

Após estas atividades, com o objetivo de aplicar os conteúdos estudados, propõem-se alguns exercícios para serem resolvidos sem o auxílio do *software.*

As atividades VI e VII focalizam a excentricidade da elipse. Através destas, visa-se a estabelecer conjecturas sobre comportamento da curva (“mais achatada” ou “mais arredondada”), ao serem promovidas variações na distância focal, mantendo-se o mesmo eixo maior. O Quadro 2.3 apresenta a atividade VI, na qual propõe-se a diminuição da distância focal, mantendo-se o mesmo eixo maior, conduzindo à compreensão de que, ao diminuir essa distância, obtém-se elipses “mais arredondadas”. Destaca-se, ainda, que se a distância focal é nula (focos coincidentes), obtém-se uma circunferência, caso particular de elipse.

Quadro 2.3: Atividade VI da seção 3

a) No Wingeom, solicite um novo arquivo.

b) Marque os pontos a (0,0), b (-9, 0), c(9, 0) e d(12, 0).

c) Clique em **unidades|cônicas com 3 pontos** e solicite uma elipse com focos b e c, passando pelo ponto d.

d) Determine, sem utilizar os recursos do *software*:

- a distância focal:_______________.
- a razão entre a distância focal e a medida do eixo maior:______________.

e) Marque os pontos e (-6, 0) e f(6, 0). Clique em **unidades|cônicas com 3 pontos** e solicite uma elipse com focos e e f, passando pelo ponto d.

f) Determine, sem utilizar os recursos do *software*:

- a distância focal desta segunda elipse:______________.
- a razão entre a distância focal e a medida do eixo maior:______________.

g) Marque os pontos g(-3, 0) e h(3, 0). clique em **unidades|cônicas com 3 pontos** e solicite uma elipse com focos g e h, passando pelo ponto d.

h) Determine, sem utilizar os recursos do *software*:

- a distância focal desta terceira elipse:______________.
- a razão entre a distância focal e a medida do eixo maior:______________.

i) Marque o ponto i(0, 0). clique em **unidades|cônicas com 3 pontos** e solicite uma elipse com focos a e i, passando pelo ponto d.

j) Determine, sem utilizar os recursos do *software*:

- a distância focal:_______________.
- a razão entre a distância focal e a medida do eixo maior:______________.

k) Observe que as quatro elipses construídas possuem o mesmo eixo maior, porém, a cada elipse construída a distância focal fica menor. Compare as quatro elipses e descreva o que você observou.

As elipses solicitadas nesta atividade estão representadas na Figura 2.8.

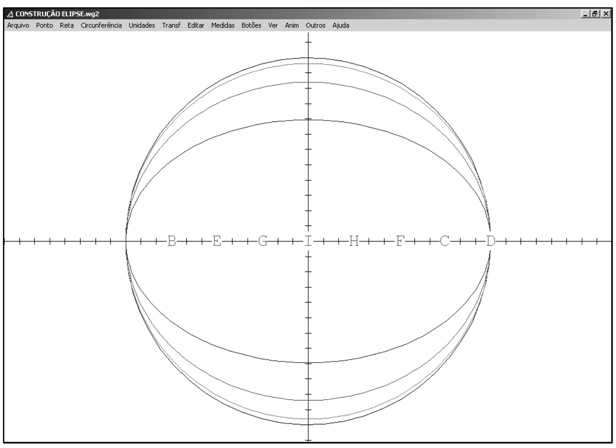


Figura 2.8: Elipse - Variação da Distância Focal

Ao final da atividade VII, apresenta-se um comentário alertando para o fato de que é possível provar que o que foi observado é válido para qualquer elipse.

A última parte da apostila é composta de exercícios gerais sobre elipse, para serem resolvidos sem o auxílio do *software*. Estes exercícios servem para verificar se os objetivos, referentes ao estudo algébrico proposto na segunda parte da terceira seção, foram devidamente alcançados.

Além da apostila de atividades, foram criados dois questionários investigativos, para serem respondidos pelos participantes do teste exploratório e da validação das atividades. Estes questionários contêm perguntas sobre as atividades realizadas, sobre o uso do *software* Wingeom na aprendizagem do tema proposto e sobre a importância das TIC na aprendizagem Matemática.

No minicurso realizado como teste exploratório foi aplicado um questionário que tinha como objetivo investigar se as atividades estavam estruturadas de maneira a ajudar no processo de ensino e aprendizagem do tema. Este questionário contém oito perguntas fechadas e duas perguntas abertas (Anexo 2).

O segundo questionário foi elaborado para a validação das atividades e tem como objetivo levantar dados, junto ao público alvo (alunos do Ensino Médio), sobre as atividades e sobre o uso do Wingeom no processo de ensino e aprendizagem de elipse (Anexo 3).

Este questionário também possui oito perguntas fechadas e duas perguntas abertas. Essas perguntas visam a complementar os resultados da validação das atividades, pois também questionam sobre as dificuldades encontradas e as vantagens de se resolver atividades deste tipo, só que, agora, diretamente com o público alvo.

Nos dois questionários existem espaços, mesmo nas perguntas fechadas, para os participantes comentarem suas respostas. Dessa forma, pretendia-se captar melhor a visão do avaliador diante da questão considerada.

2.2 – Teste Exploratório das Atividades

O teste exploratório foi realizado em um minicurso ocorrido numa instituição pública de ensino do município de Campos dos Goytacazes/RJ. Este teve 11 participantes, 9 licenciandos em Matemática e 2 professores de Matemática. Estes foram convidados por terem experiência em informática educativa (experiência esta obtida durante a graduação e/ou através de oficinas pedagógicas destinadas a esse fim), além de conhecimentos matemáticos (inclusive sobre elipse). Isso tornou o processo de aprendizagem do uso do *software* mais rápido. A Figura 2.9 mostra alguns momentos do minicurso em que os participantes estão resolvendo as atividades da apostila.

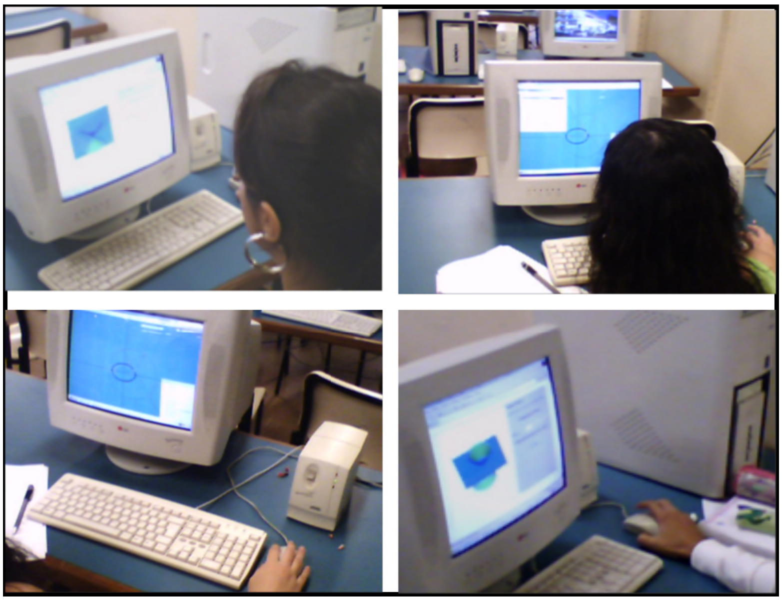


Figura 2.9: Foto com os Participantes

As atividades foram realizadas com facilidade pelos participantes, não havendo necessidade de mudanças na apostila. Para confirmar este fato, os participantes foram observados o tempo todo e no final do minicurso todos os 11 participantes preencheram o questionário (Anexo 5). Este foi devolvido juntamente com a apostila de atividades, devidamente respondida, para serem analisados posteriormente.

A primeira pergunta do questionário é opcional e refere-se ao nome de cada participante. A pergunta 2 questiona sobre a possibilidade de aplicação, na prática docente dos participantes, do que foi realizado no minicurso. O Quadro 2.4 mostra algumas respostas desta pergunta.

Quadro 2.4: Resposta de Alguns Participantes à Pergunta 2

2 Você considera possível aplicar alguma parte deste minicurso em sua prática docente?

☒ Sim ☐ Não ☐ Depende

Por quê? Fica muito mais fácil a visualização dos detalhes.

☒ Sim ☐ Não ☐ Depende

Por quê? Pois é um conteúdo raramente visto, e é cobrado em vestibulares

☒ Sim ☐ Não ☐ Depende

Por quê? As atividades são bem funcionais e de fácil manuseio.

Através da análise das respostas dadas à segunda pergunta (Gráfico 2.1), verificou-se que nove participantes (aproximadamente 82%) usariam parte deste minicurso em suas práticas docentes. Destes, quatro atribuíram isto aos recursos oferecidos pelo *software* na visualização das construções; um justificou pelo fato de elipse ser um conteúdo cobrado nos vestibulares e de não ser estudado com freqüência nas escolas. A observação sobre o fato deste conteúdo ser pouco trabalhado nas escolas se confirma com a pesquisa realizada por Batista (2004), como é citado na introdução desta monografia. Quatro justificaram que usariam estas atividades por serem fáceis de trabalhar. Isto foi verificado durante a resolução, pois os participantes responderam as atividades com facilidade, não havendo muitas dúvidas. Os demais participantes (dois, aproximadamente 18%), assinalaram a opção Depende, esclarecendo que usariam as atividades, se houvesse recursos computacionais disponíveis nas escolas. Verifica-se, assim, que todos os participantes usariam parte das atividades, se possível.

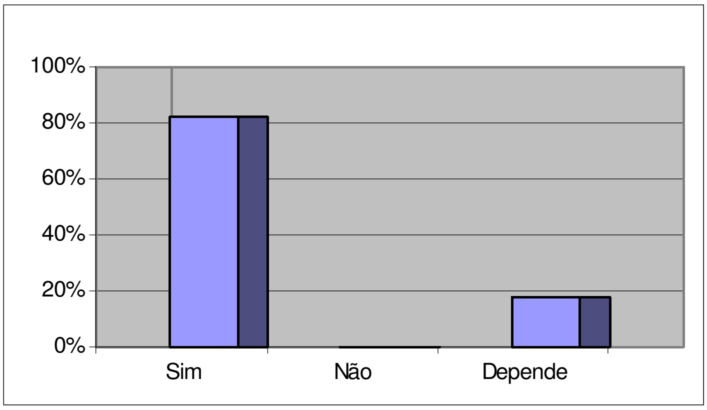


Gráfico 2.1: Aplicação do Minicurso na Prática Docente

Questionados, na pergunta 3, sobre a contribuição do minicurso para aumento de conhecimentos, aproximadamente 82% dos participantes responderam que o minicurso contribuiu para aumentar conhecimentos em Matemática e Informática. O restante, aproximadamente 18% , respondeu que o minicurso contribuiu para aumentar conhecimentos somente em Matemática. Isto atende às expectativas, pois a intenção é possibilitar que conhecimentos matemáticos sejam adquiridos por todos os participantes, e esse objetivo foi atingido. A informática seria uma ferramenta auxiliar neste processo. O Gráfico 2.2 mostra os percentuais de cada opção da pergunta 3.

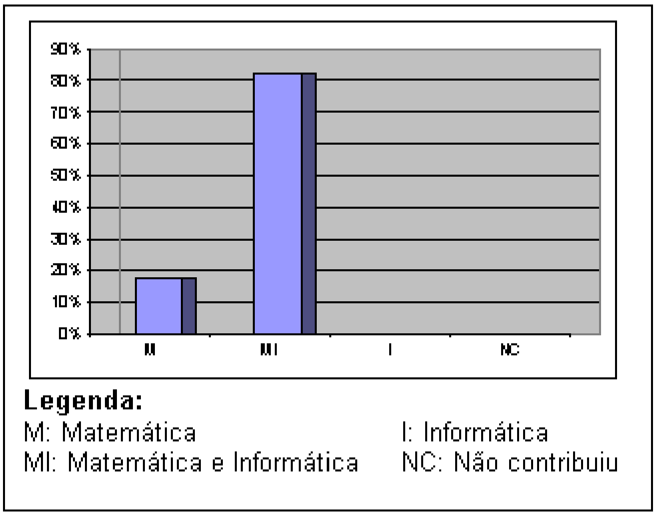


Gráfico 2.2: Conhecimentos Adquiridos no Minicurso

Com relação aos enunciados, na quarta pergunta, todos os participantes afirmaram que estavam claros. Esta pergunta serviu para verificar se as atividades continham alguma falha nos enunciados. Diante das respostas, não houve correção. Atribui-se este fato a inúmeras revisões feitas durante a elaboração das atividades.

Na pergunta 5, aproximadamente 99% dos participantes responderam que as atividades contribuíram para compreensão do tema (Gráfico 2.3). Este percentual reforça a idéia defendida por Freire (1996), quando este afirma que os educadores devem criar situações para que os educandos consigam produzir ou construir seus conhecimentos.

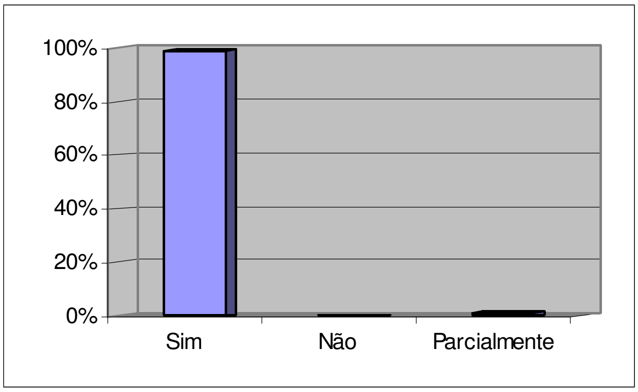


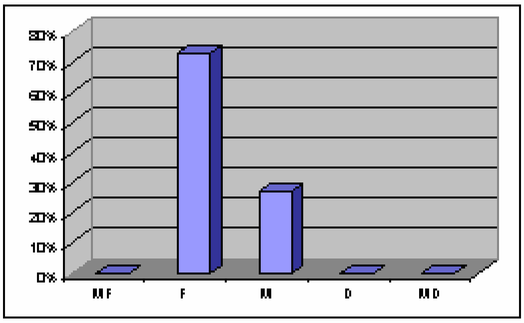
Gráfico 2.3: Contribuição das Atividades para Compreensão do Tema

Aproximadamente 99% dos participantes, consideraram o nível das atividades moderado (Gráfico 2.4).

Legenda:
MF: Muito Fácil F: Fácil
M: Moderado D: Difícil
MD: Muito Difícil

Gráfico 2.4: Nível das Atividades no Teste Exploratório

Aproximadamente 73% consideraram o uso do *software* Wingeom fácil (Gráfico 2.5) e, além disso, verificou-se que 100% dos participantes consideram que o uso de softwares educacionais favorece a construção de conhecimentos matemáticos. Estes percentuais retratam o que Belfort (2002) afirma sobre as potencialidades das tecnologias, quando utilizadas de forma adequada, ajudando no processo de ensino e aprendizagem, favorecendo a compreensão de conceitos, o desempenho na resolução de muitos problemas e o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo do aluno.



Legenda:
MF: Muito Fácil F: Fácil
M: Moderado D: Difícil
MD: Muito Difícil

Gráfico 2.5: Uso do *Software* Wingeom

Quando questionados (pergunta 9) sobre a utilização de *softwares* educacionais em aulas que ministraram, aproximadamente 55% dos participantes responderam que já utilizaram. Estes participantes relataram que o esforço necessário é compensado pelos resultados obtidos, afirmando que os alunos aprendem com muito mais facilidade e interesse (Quadro 2.5). Este fato está de acordo com o que está descrito no relatório da Unesco (2001), citado na introdução, sobre a importância das TIC na motivação dos alunos.

Quadro 2.5: Resposta de Alguns Participantes à Pergunta 9

9. Você já utilizou *software* educacional, ou outro recurso tecnológico, em alguma aula que ministrou (mesmo sendo em aulas de estágio, enquanto aluno da Licenciatura)? Em caso afirmativo, cite o nome do(s) *software(s)* e/ou de outros recursos utilizados.

Sim. Porque eles facilitam a aprendizagem

Sim, pois é um recurso eficaz, que apresenta bons resultados e facilita a aprendizagem. Os alunos tiveram a oportunidade de observar as translações verticais e horizontais que ocorriam dependendo da função.

Com relação ao papel do professor, durante a utilização de *softwares* educacionais, todos os participantes afirmaram que a presença deste é muito importante no papel de mediador, orientando nas dificuldades dos alunos. Como afirma Baldin (2002), o papel do professor deve ser valorizado diante do uso das tecnologias no ambiente de aprendizagem. Belfort (2002) reforça essa idéia, afirmando que a mediação do professor é fundamental.

A última pergunta (pergunta 11) é aberta e questiona sobre a importância do uso de tecnologias na formação do professor de Matemática, solicitando inclusive que sejam citadas as possíveis vantagens e desvantagens. A maioria dos participantes só apontou vantagens na utilização destes recursos (Quadro 2.6). A desvantagem apontada foi a deficiência destes recursos na maioria das escolas.

Quadro 2.6: Respostas de Alguns Participantes à Pergunta 11

11. Dê sua opinião sobre a importância do uso de tecnologias na formação do professor de Matemática apontando possíveis vantagens e desvantagens.

O uso de Tecnologias na formação do professor de Matemática Torna o professor mais informado e atualizado.

A vantagem é que, aprendendo na sua formação, ele terá mais facilidade, enquanto professor p/ passar p/ os alunos. O que será muito bom p/ o corpo discente.
Não vejo desvantagens.

Uma vantagem muito importante é o maior interesse dos alunos.
E a única desvantagem que encontro no momento é não ser muito fácil obter esses recursos tecnológicos na maioria das escolas.

Os depoimentos acima retratam o que é defendido por Valente (2003), quando este afirma que é importante o uso de tecnologias na formação de professores.

O teste exploratório permitiu verificar que as atividades estavam coerentes com os objetivos pré-estabelecidos. Os enunciados foram considerados claros pela maioria dos participantes, e não houve qualquer sugestão de alteração nas atividades.

Uma vez que as atividades foram consideradas adequadas pelos participantes do teste exploratório, promoveu-se, então, a validação das mesmas com alunos do Ensino Médio, o que é descrito na seção seguinte.

2.3 – Validação das Atividades

As atividades propostas na apostila "Estudando Elipse com Auxílio do *Software* Wingeom" (Anexo 1) foram validadas com um grupo de 7 alunos do 2º ano do Ensino Médio de uma instituição pública do município de Campos dos Goytacazes/RJ. Foram realizados, para esta validação, 3 encontros com os alunos no laboratório de informática da instituição. Cada encontro teve 3 horas de duração, totalizando 9 horas.

2.3.1. Primeiro Encontro

O primeiro encontro foi suficiente para a realização das atividades da primeira seção, da segunda e de parte da terceira seção da apostila de atividades.

Na resolução das atividades da seção 1, de reconhecimento do *software*, todos os alunos conseguiram entender qual o objetivo de cada ferramenta apresentada, o que facilitou a realização das atividades seguintes, pois a maioria é realizada com o auxílio das ferramentas apresentadas. A primeira seção foi realizada de forma interativa, todas as atividades foram feitas juntamente com os alunos para evitar futuras dúvidas.

Na seção 2, em que são apresentadas as interseções de planos com superfícies cônicas de revolução, surgiram algumas dúvidas com relação à geometria espacial. Isto fez com que alguns alunos não conseguissem visualizar as interseções apresentadas, mesmo com auxílio de material concreto. Estas interseções somente foram percebidas por todos os alunos durante a observação e manipulação de alguns *applets*[14] disponíveis nos endereços eletrônicos sugeridos no final da seção. Esta dificuldade justifica-se pelo fato dos alunos ainda não terem

[14] São programas desenvolvidos em linguagem de programação Java®, que podem ser incluídos em códigos HTML.

noções de geometria espacial, pois este tema não havia sido estudado até o momento da validação. Através da visualização das seções, foi possível entender o porquê do nome cônicas.

A terceira seção da apostila contém atividades com o propósito de mostrar formas de aplicação do *software* Wingeom, como recurso didático para o ensino de elipse, conforme já descrito na seção anterior. Estas atividades foram realizadas pelos alunos, havendo interferência do mediador (autor desta monografia) ao final de cada atividade (na conclusão do que era desconhecido e que, no momento, estava sendo conjecturado) e, também, quando ocorriam dúvidas relacionadas à geometria plana. Na verdade, em diversos momentos foi preciso interromper a resolução das atividades, para definir conceitos geométricos presentes na apostila, assim como apresentar exemplos relacionados a estes conceitos.

Como a seção 3 é a destinada ao estudo de elipse, são tecidos, a seguir, alguns comentários sobre a resolução de algumas atividades dessa seção.

A atividade I da subseção 3.1 da seção 3 foi realizada com facilidade, com exceção do item (l), que solicita a descrição do que foi observado no decorrer dos demais itens. Foi possível observar que os alunos não estavam habituados a este tipo de atividade e, sendo assim, foi preciso comentar toda atividade, para que eles conseguissem formalizar uma resposta. Com isso, todos entenderam o propósito desta atividade, facilitando o entendimento da observação seguinte. Esta observação apresenta a definição de elipse e a demonstração de algumas propriedades, envolvendo congruência de triângulos. Para explicar esta demonstração, foi preciso, então, explicar casos de congruência de triângulos, um assunto desconhecido para eles. A partir disso, todos entenderam a demonstração relacionando-a com a definição de elipse.

No final desta observação, afirma-se que o eixo maior da elipse mede a soma das medidas dos segmentos apresentados. Para verificar, experimentalmente, esta igualdade foi feita uma construção utilizando outro recurso didático, composto de um pedaço de isopor de forma retangular, dois percevejos e um barbante, como mostra a Figura 2.10. Através desse material, os alunos puderam visualizar o comprimento do barbante e comparar com o eixo maior. Como defendido por Borba e Penteado (2001), usar as TIC não significa abandonar outras tecnologias. Este material foi preparado para ser usado caso houvesse necessidade. A partir da dúvida de um dos alunos, ele foi utilizado.

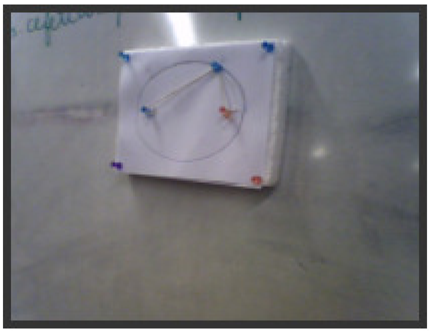
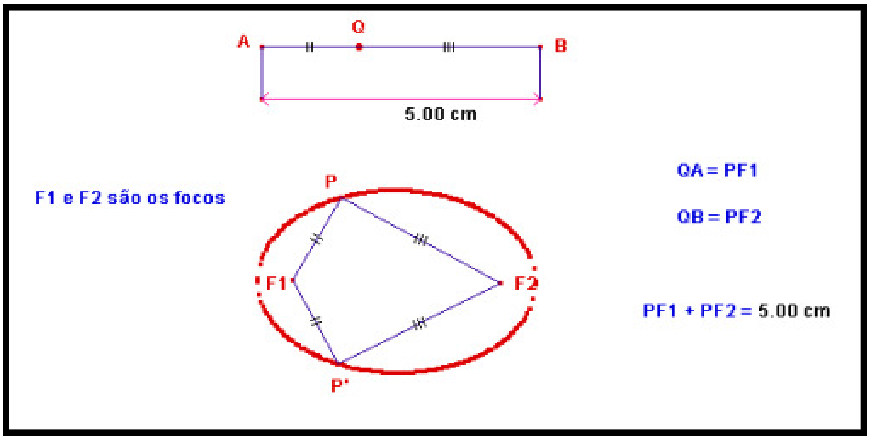


Figura 2.10: Material Didático

Na atividade II desta seção os alunos puderam visualizar, em um endereço eletrônico[15], um conjunto de pontos descrevendo uma elipse (Figura 2.11), o que foi importante para complementar à compreensão do que foi feito na atividade I, conforme foi planejado.



Fonte: http://www.colband.com.br/ativ/nete/matweb/conicas/conicas.htm
Figura 2.11: Visualização e Manipulação de Pontos da Elipse em *site*

2.3.2. Segundo Encontro

No segundo encontro, que também durou 3 horas, os alunos já sabiam utilizar o *software*, facilitando a resolução das atividades.

[15] http://www.colband.com.br/ativ/nete/matweb/conicas/conicas.htm

Dando seqüência ao primeiro encontro, foi proposta a resolução da atividade III. Os alunos entenderam o processo de construção da elipse com facilidade, pois esta atividade é semelhante à atividade I. O que diferencia essa atividade da atividade I é a variação das coordenadas dos focos (na atividade I, os focos estavam sobre o eixo x, na atividade III, estão sobre o eixo y), o que foi percebido facilmente pelos alunos, não havendo necessidade de interferência do mediador na resolução. No momento de descrever o que observaram, responderam com mais segurança do que na atividade I, pois já haviam entendido melhor o processo de construção e a definição de elipse, e já tinham tido a experiência de descrever suas observações na atividade I.

A atividade IV não apresenta todo o processo de construção, como nas atividades I e III, e isto gerou algumas dúvidas com relação aos pontos que teriam que ser marcados, e como ficaria a elipse construída, pois agora a elipse teria o centro fora da origem, ao contrário das atividades anteriores. Após algumas sugestões de possíveis pontos, todos entenderam a proposta da atividade e até sugeriram outros pontos que atendessem à proposta da atividade.

As atividades V e VI também geraram dúvidas. Nestas atividades é necessário utilizar a ferramenta **Unidades|Cônicas com 3 pontos**, até então inédita para os alunos; além disso, deveriam ser marcados 3 pontos convenientes para a obtenção de elipses com os eixos em posições diferentes das já construídas. As dúvidas foram superadas quando entenderam o funcionamento da referida ferramenta e perceberam que os pontos focais determinavam a posição dos eixos maior e menor. Esta percepção exigiu algumas intervenções do mediador.

Ainda na terceira seção, porém na subseção 3.2, os alunos resolveram cinco atividades relacionadas às equações da elipse. Na atividade I, retoma-se a questão de que, sendo P um ponto qualquer de uma elipse de focos B e C, a medida de $\overline{PB}+\overline{PC}$ é igual à medida do eixo maior. A retomada desse assunto visa fundamentar as atividades seguintes. A proposta da atividade I foi, então, facilmente alcançada, devido às construções e observações anteriores. Em seguida, deduziu-se a relação fundamental da elipse e, para tanto, foram utilizados dois conteúdos já conhecidos dos alunos, o Teorema de Pitágoras e a congruência de triângulos, o que facilitou o entendimento

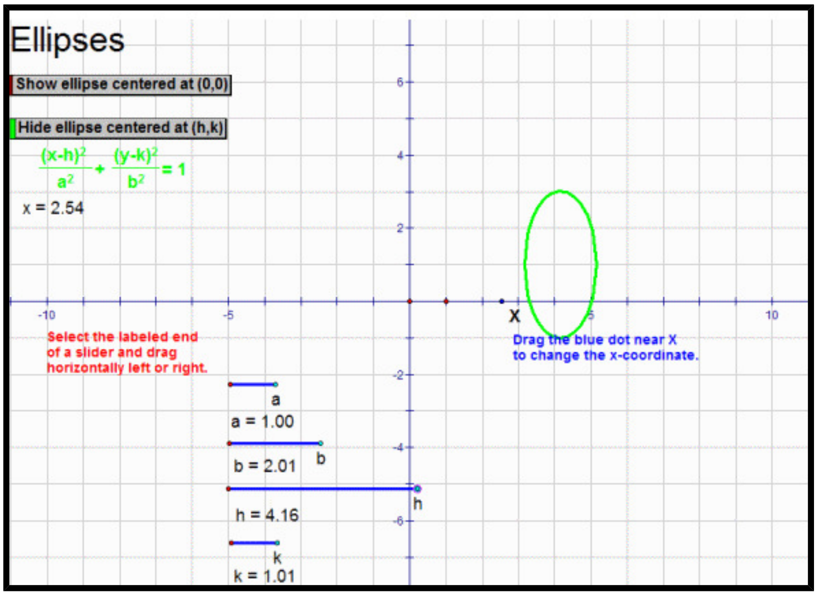
A atividade II, cujo objetivo é o de construir uma elipse com focos sobre o eixo x e, em seguida, determinar a medida do eixo maior utilizando a relação fundamental, foi realizada com facilidade, comprovando o entendimento da referida relação.

Na observação após a atividade II, deduz-se a equação da elipse com focos no eixo x e centro na origem. Esta dedução foi realizada de forma bem detalhada, pois a mesma exige manipulação algébrica, o que não é, em geral, de fácil entendimento para os alunos. Além disso, os alunos não conheciam a fórmula da distância entre dois pontos do plano (necessária para a demonstração pretendida) e, dessa forma, deduziu-se esta fórmula, a partir do Teorema de Pitágoras.

A atividade III solicita a equação da elipse construída na atividade II. Essa atividade foi realizada com facilidade, mostrando que os alunos entenderam o processo de obtenção da equação de uma elipse com eixo maior sobre o eixo x.

As atividades IV e V envolvem os mesmos conteúdos das atividades II e III, só que com elipses com focos sobre o eixo y. Estas foram realizadas sem dificuldades pelos alunos.

Os alunos ficaram curiosos em saber como ficariam as equações das elipses com o centro fora da origem, pois este tipo de estudo das equações não foi feito nestas atividades. Neste momento foi possível fazer algumas observações, no quadro, com relação às translações horizontais e verticais que ocorrem com a elipse, relacionando-as com suas respectivas equações. Além disso, foi visitado o *site* <http://mathdemos.gcsu.edu/mathdemos/family_of_functions/ellipse_func_vary_h_70.gif> (Figura 2.12) que possibilita a visualização das translações. Pode-se perceber o interesse dos alunos motivados pelas TIC, em aprender algo que não conheciam. Este fato não foi percebido pelos participantes do teste exploratório, por já conhecerem o conteúdo.



Fonte: <http://mathdemos.gcsu.edu/mathdemos/family_of_functions/ellipse_func_vary_h_70.gif>

Figura 2.12: Visualização e Manipulação de Elipse

Pode-se afirmar que os conteúdos abordados neste segundo encontro foram bem compreendidos pelos alunos, pois estes resolveram, sem apresentar dúvidas, as 3 questões propostas após a atividade V, que são realizadas sem o auxílio do *software* Wingeon, visando, justamente, a verificar o entendimento do assunto trabalhado.

2.3.3. Terceiro Encontro

O terceiro encontro foi destinado ao fechamento da terceira seção e também ao preenchimento, pelos alunos, do questionário investigativo.

Dando seqüência ao segundo encontro, foram propostas as atividades VI e VII da seção 3 (subseção 3.2). Nestas atividades, alguns alunos apresentaram uma certa dificuldade para estabelecer a relação existente entre a distância focal e a medida do eixo maior. Alguns relacionaram a razão com o eixo menor. Porém, após alguns comentários apresentados pelo mediador, a proposta da atividade foi entendida. A conclusão apresentada após a atividade V ajudou no entendimento do assunto abordado, e os alunos conseguiram até visualizar a circunferência quando os focos coincidem. Na referida conclusão, surgiu dúvida com relação à restrição da fórmula da excentricidade. Um aluno questionou o porquê do $e = 0$ não estar na desigualdade $0 < e < 1$, uma vez que a circunferência é um caso particular de elipse. Foi respondido que não se fala em excentricidade igual a zero porque, em geral, o estudo de circunferência é feito separadamente do estudo de elipse (os livros didáticos, em geral, não trazem esta igualdade), mas que não haveria erro em se considerar $0 \leq e < 1$, estando consciente do que esta igualdade significa.

Os alunos resolveram os exercícios do final da apostila com facilidade. Estes são exercícios gerais sobre elipse para serem resolvidos sem o auxílio do *software* Wingeom. Isto comprova que as atividades resolvidas anteriormente (elaboradas para este trabalho monográfico) possibilitaram a construção de conhecimentos sobre elipse, o que reforça a possibilidade destas serem aplicadas a alunos do Ensino Médio, dependendo da disponibilidade de laboratório de informática e de tempo disponível para a realização das mesmas.

A resolução das atividades possibilitou verificar que o papel do professor é fundamental, visto que este deve atuar como mediador, realizando intervenções fundamentais para o desenvolvimento das atividades. A importância do papel do professor é ressaltada por Belfort (2002) e Baldin (2002), conforme mencionado na introdução desta monografia.

Na Figura 2.13 pode-se verificar alguns momentos das aulas registradas através de fotos mostrando a participação dos alunos na resolução das atividades.

No final do terceiro dia de aula, ao terminar as atividades sugeridas na apostila, todos os sete alunos responderam um questionário investigativo contendo 8 perguntas fechadas e 2 abertas, relacionadas às atividades, ao uso do *software*, a aprendizagem do tema e também sobre a importância das TIC na educação. Este foi devolvido juntamente com a apostila de atividades, devidamente respondida (Anexo 4), para serem analisados posteriormente.

Figura 2.13: Foto dos Alunos Resolvendo as Atividades

A partir da análise dos questionários respondidos (Anexo 6) pelos alunos, ressaltamos alguns pontos que podem ser consideravelmente significativos. Antes da visualização gráfica dos dados, foi feita uma leitura criteriosa das respostas dos questionários.

Verificou-se que, para aproximadamente 57% dos alunos, o minicurso contribuiu para aumentar os conhecimentos em Matemática, e o restante, aproximadamente 43%, afirmou que contribuiu para aumentar os conhecimentos em Matemática e Informática (Gráfico 2.6). Este resultado é muito satisfatório, pois a intenção era proporcionar aos alunos conhecimentos matemáticos, utilizando os recursos da informática, e, diante das respostas, percebe-se que isto foi atingido. Estes índices reiteram a afirmação feita por Ponte, Oliveira e Varandas (2003), apresentada no capítulo 1, sobre o fato das TIC serem recursos que podem contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

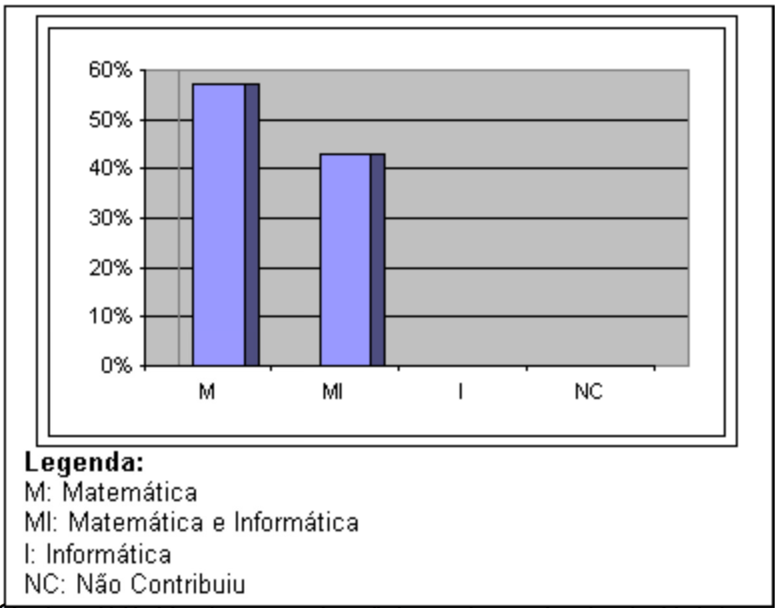


Gráfico 2.6: Conhecimentos Adquiridos – Teste de Validação

Para aproximadamente 86% dos alunos, os enunciados estavam claros e apenas 14% (Gráfico 2.7) consideraram os enunciados parcialmente claros. Os que acharam os enunciados parcialmente claros não opinaram sobre quais enunciados precisariam ser melhorados.

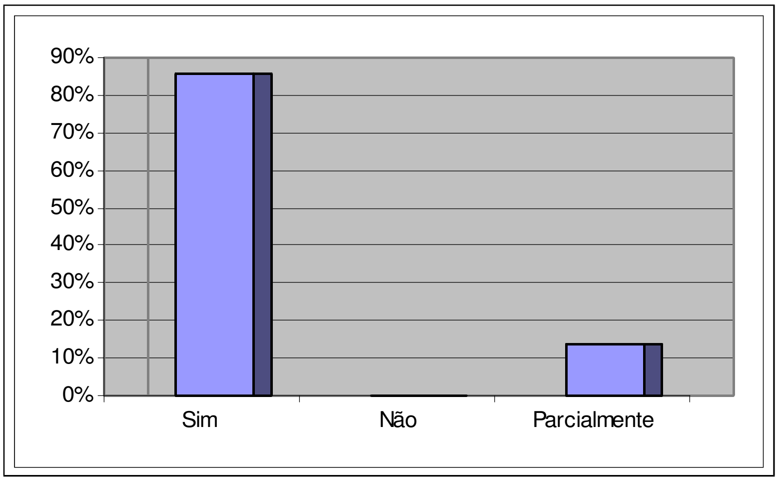
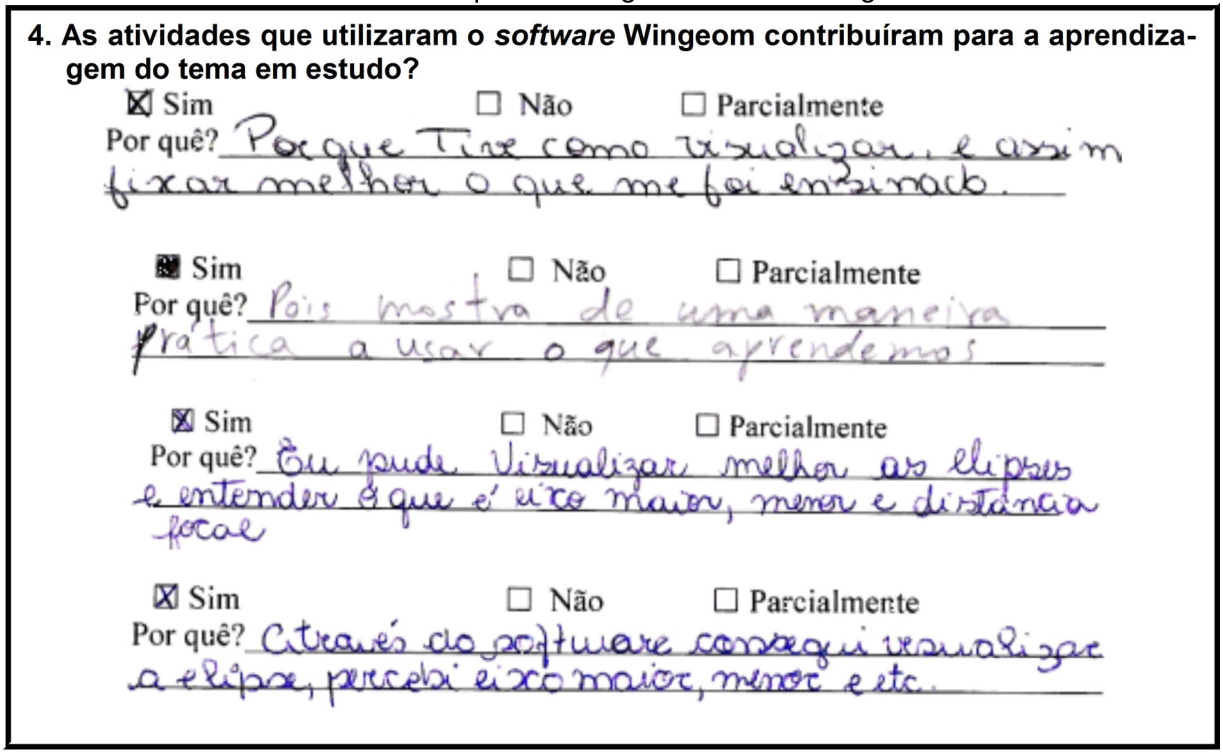


Gráfico 2.7: Enunciados das Atividades

Todos os alunos afirmaram que as atividades que utilizam o *software* Wingeom contribuíram para a aprendizagem do tema em estudo (pergunta 4). O Quadro 2.7 apresenta algumas das justificativas dadas pelos alunos para suas afirmativas. Estas justificativas reforçam o que Ponte, Oliveira e Varandas (2003) defendem, com relação às TIC reforçarem o papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, conforme descrito na introdução desta monografia.

Quadro 2.7: Resposta de Alguns Alunos à Pergunta 4



4. As atividades que utilizaram o *software* Wingeom contribuíram para a aprendizagem do tema em estudo?

☒ Sim ☐ Não ☐ Parcialmente
Por quê? Porque Tive como visualizar, e assim fixar melhor o que me foi ensinado.

■ Sim ☐ Não ☐ Parcialmente
Por quê? Pois mostra de uma maneira prática a usar o que aprendemos

☒ Sim ☐ Não ☐ Parcialmente
Por quê? Eu pude Visualizar melhor as elipses e entender o que é eixo maior, menor e distância focal

☒ Sim ☐ Não ☐ Parcialmente
Por quê? Através do software consegui visualizar a elipse, percebi eixo maior, menor e etc.

Verificou-se que, para aproximadamente 86% dos alunos, as visualizações possibilitadas pelos *sites* visitados contribuíram para a aprendizagem do tema em estudo. Apenas 14% consideraram o uso dos *sites* parcialmente necessário, afirmando que o *software* já cumpre este objetivo (Gráfico 2.8).

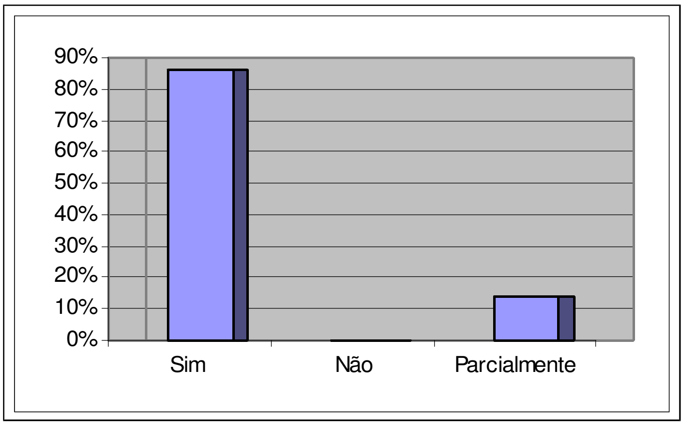
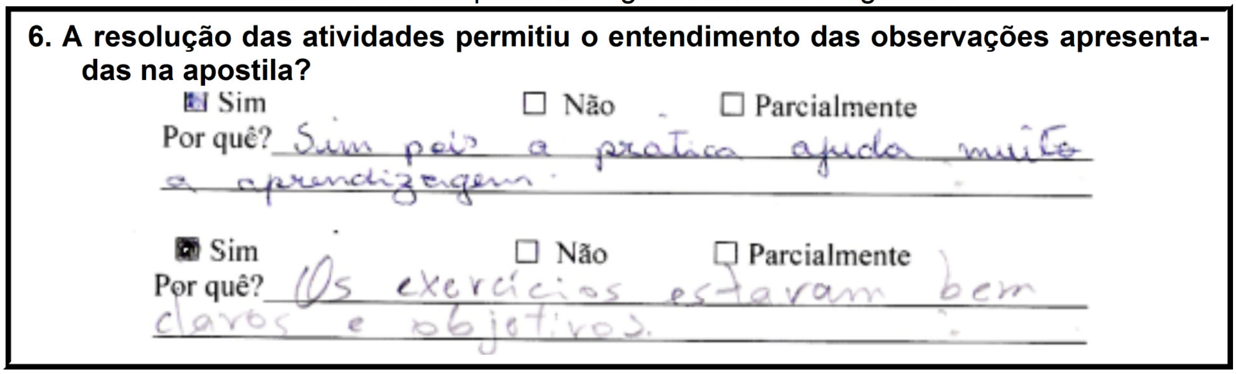


Gráfico 2.8: Contribuição das Visualizações

Todos os alunos afirmaram que as observações apresentadas na apostila foram compreendidas a partir da resolução das atividades (pergunta 6). O Quadro 2.8 apresenta algumas das justificativas dadas pelos alunos para suas afirmativas.

Quadro 2.8: Resposta de Alguns Alunos à Pergunta 6



6. A resolução das atividades permitiu o entendimento das observações apresentadas na apostila?

☒ Sim ☐ Não ☐ Parcialmente

Por quê? Sim pois a pratica ajuda muito a aprendizagem.

☒ Sim ☐ Não ☐ Parcialmente

Por quê? Os exercícios estavam bem claros e objetivos.

Com relação ao nível das atividades, pergunta 7, verificou-se que aproximadamente 86% dos alunos consideraram que as atividades se enquadram no nível moderado, e 14% no nível fácil (Gráfico 2.9).

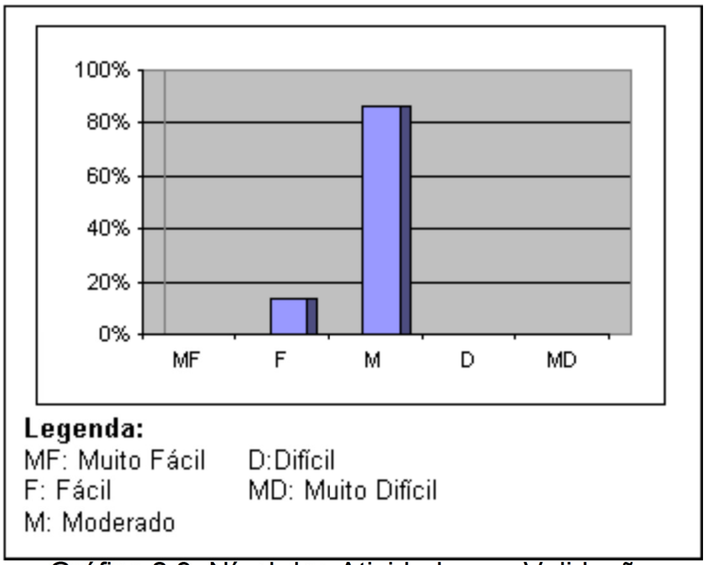
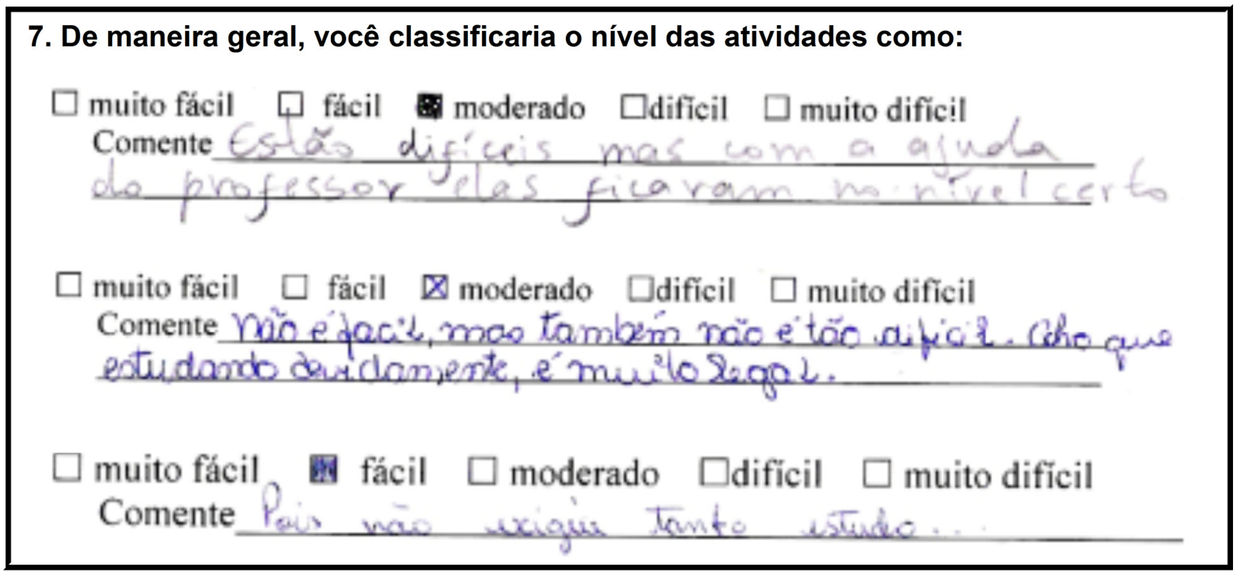


Gráfico 2.9: Nível das Atividades na Validação

No Quadro 2.9 destacam-se algumas justificativas para tais índices. Interpretamos tais justificativas positivamente, visto que os alunos nunca haviam estudado cônicas, além de nunca terem utilizados TIC na construção de conhecimentos.

Quadro 2.9: Resposta de Alguns Alunos à Pergunta 7



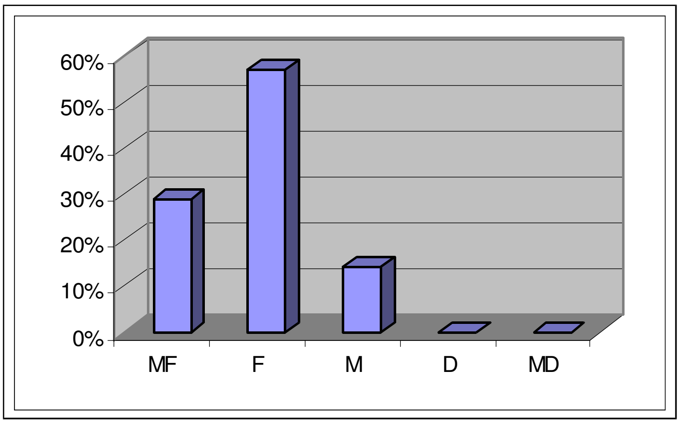
7. De maneira geral, você classificaria o nível das atividades como:

☐ muito fácil ☐ fácil ☒ moderado ☐difícil ☐ muito difícil
Comente Estão difíceis mas com a ajuda do professor elas ficaram no nível certo

☐ muito fácil ☐ fácil ☒ moderado ☐difícil ☐ muito difícil
Comente Não é fácil, mas também não é tão difícil. Acho que estudando devidamente, é muito legal.

☐ muito fácil ☒ fácil ☐ moderado ☐difícil ☐ muito difícil
Comente Pois não exigiu tanto estudo...

O Gráfico 2.10 mostra como os alunos classificaram a aprendizagem da utilização do *software* Wingeom (pergunta 8).

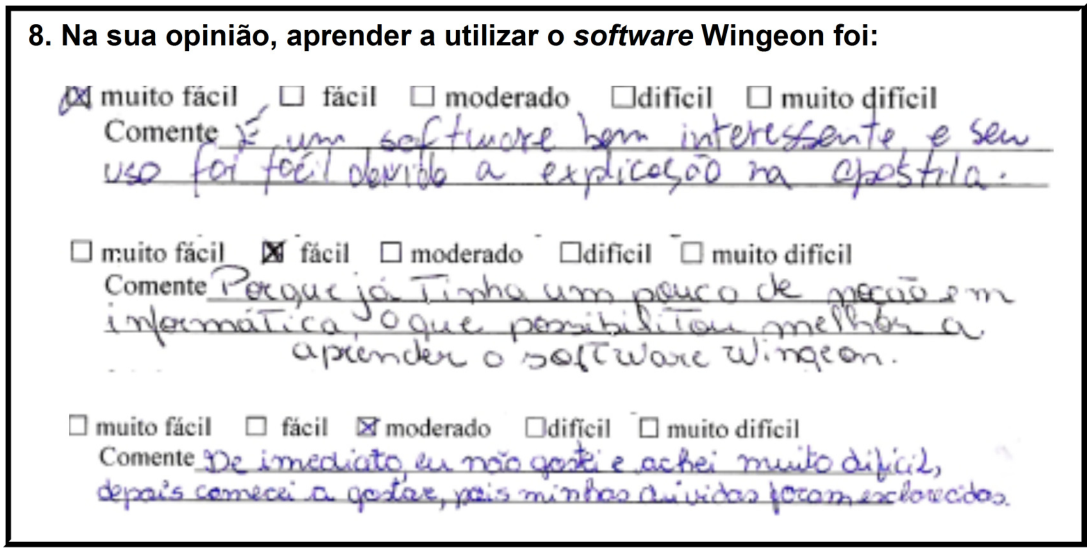


Legenda:
MF: Muito Fácil
F: Fácil
M: Moderado
D: Difícil
MD: Muito difícil

Gráfico 2.10: Utilização do *Software* Wingeom

Os índices estão de acordo com a facilidade demonstrada pelos alunos na resolução das atividades iniciais (atividades exploratórias do *software*). No Quadro 2.10 destacam-se alguns comentários feitos pelos alunos com relação à aprendizagem do Wingeom.

Quadro 2.10: Comentários de Alguns Alunos à Pergunta 8



8. Na sua opinião, aprender a utilizar o *software* Wingeon foi:

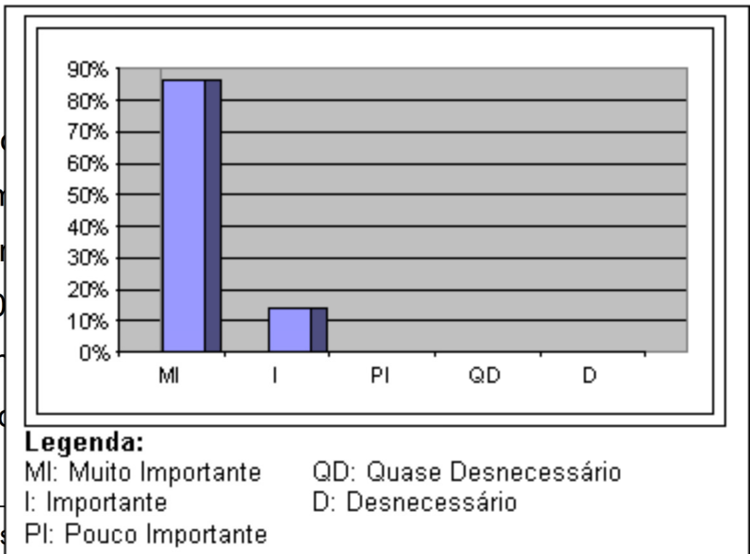
☒ muito fácil ☐ fácil ☐ moderado ☐difícil ☐ muito difícil
Comente É um software bem interessante e seu uso foi fácil devido a explicação na apostila.

☐ muito fácil ☒ fácil ☐ moderado ☐difícil ☐ muito difícil
Comente Porque já tinha um pouco de noção em informática, o que possibilitou melhor a aprender o software Wingeon.

☐ muito fácil ☐ fácil ☒ moderado ☐difícil ☐ muito difícil
Comente De imediato eu não gostei e achei muito difícil, depois comecei a gostar, pois minhas dúvidas foram esclarecidas.

Todos os alunos afirmaram que não haviam utilizado *software* educacional ou outro recurso tecnológico em aula de Matemática (pergunta 9). Este fato pode ser decorrente do despreparo dos professores diante do uso das TIC ou do tempo disponível das aulas. D'Ambrósio (s.d.) afirma que o professor tende, naturalmente a ensinar como lhe foi ensinado. Segundo pesquisa realizada por Barcelos (2004), as licenciaturas devem integrar as TIC na formação inicial dos professores e, para tanto, lista cinco temáticas[16] a serem contempladas na formação inicial.

Na pergunta 10, aproximadamente 86% dos alunos afirmaram ser muito importante o papel do professor durante a utilização de *softwares* educacionais, e aproximadamente 14% afirmaram que é importante (Gráfico 2.11).



Legenda:
MI: Muito Importante QD: Quase Desnecessário
I: Importante D: Desnecessário
PI: Pouco Importante

Os alun[...]r auxiliando nas atividades, com[...] com que a aula fique mais inte[...] de acordo com o que Belfort (20[...]ica não deve ser considerada u[...] O Quadro 2.11 mostra alguns [...] do professor.

[16]i) Conhecimentos[...]unicação - Educação – Sociedade; iii) Utilização e avaliação de *softwares* educacionais voltados para o ensino e aprendizagem de Matemática; iv) *Internet* e seus recursos; v) Matemática e TIC aplicadas ao Ensino Fundamental e Médio.

Quadro 2.11: Comentários de Alguns Alunos à Pergunta 10

10. Você considera que o papel do professor durante a utilização de *softwares* educacionais, é:

- ☐ **muito importante;**
- ☐ **pouco importante;**
- ☐ **importante;**
- ☐ **quase desnecessário;**
- ☐ **desnecessário.**

Comente:
Sem o mesmo, sinceramente, eu não teria conseguido ir muito longe. Sua explicação é valiosa.

Comente:
Porque o aluno presta mais atenção na aula com o auxílio do professor.

Comente:
Porque ele complementa a explicação da apostila, facilitando o entendimento.

Comente:
Vai aumentar o interesse do aluno, tornando a aula mais interessante.

A última pergunta (pergunta 11) é aberta e diz respeito à importância do uso do computador na educação apontando possíveis vantagens e desvantagens. Os alunos afirmaram que estes recursos ajudam na motivação, no interesse, no aprendizado do aluno, já que o mundo em que vivem está direcionado para a era tecnológica, e o que prevalece é o contato direto com computadores e outros tecnologias vigentes. Isso está de acordo com o que Moran (2000) afirma quando diz que o emprego adequado das tecnologias pode tornar o processo de ensino e aprendizagem mais eficiente e mais eficaz.

Apontam como desvantagem o risco do aluno se habituar a encontrar tudo pronto, o que atrapalharia no processo de ensino e aprendizagem. O Quadro 2.12 tra

11. Dê sua opinião sobre a importância do uso do computador (*softwares* educacionais, *internet,* etc) na educação, apontando possíveis vantagens e desvantagens.

O aluno fica mais motivado a assistir as aulas e com isso aprende melhor.

É muito bom, porque facilita a aprendizagem das matérias, mas só não podemos nos distrair com jogos e internet.

Acho uma grande vantagem, pois vivemos ~~[illegible]~~ em um mundo de tecnologia e então utilizaríamos mais o computador.

O teste de validação foi bastante útil. O assunto era inédito para o grupo de alunos e, além disso, não havia, por parte deles, experiência prévia de utilização de *softwares* educacionais (nem em aulas de Matemática, nem de outras disciplinas). Tudo isso contribuiu para que os alunos se sentissem muito motivados e fossem bastante participativos e críticos na resolução das atividades. Essa postura ativa e crítica do grupo de alunos de Ensino Médio valorizou ainda mais as respostas dos questionários. Foram respostas conscientes, vindas de um grupo de pessoas que questionou, discutiu, se envolveu, de fato, na resolução das atividades.

Assim, foi bastante satisfatório o resultado do teste de validação. A análise das respostas das atividades e dos questionários permitiu concluir que as atividades atenderam às expectativas, ou seja, possibilitaram a construção de conhecimentos sobre Elipse.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse capítulo, apresentam-se as considerações finais da pesquisa realizada nesta monografia. Relatam-se a importância do uso das TIC e da ação do professor no processo de ensino e aprendizagem. Além disso, expõem-se os resultados, as dificuldades encontradas e explicitam-se ações a serem realizadas para dar continuidade a este trabalho.

Na sociedade atual, interconectada pelas tecnologias vigentes, ensinar e aprender tornou-se um grande desafio. As tecnologias têm permitido mudar o conceito de aula, de espaço e de tempo, estabelecer pontes entre o estar junto e o estar conectados a distância (MORAN, 2000). No entanto, este autor ressalta que as tecnologias não resolvem todo o problema, pois não atuam sozinhas.

Neste contexto, Valente (1999) e Barcelos (2004) afirmam que o uso do computador na educação pode enriquecer o processo de aprendizagem, favorecendo a construção de conhecimentos. Porém, estes autores defendem a idéia de que os educadores devem estar bem preparados, o que implica a necessidade de uma boa formação inicial.

Complementando, Borba e Penteado (2001) defendem a idéia de se utilizarem recursos computacionais com os alunos, mas cita alguns riscos que o professor corre. Estes riscos podem estar relacionados à configuração das máquinas, ao curto tempo de aula, à falta de assistência técnica nas escolas e às perguntas imprevisíveis.

Neste trabalho monográfico, através do estudo de *softwares*, da elaboração de atividades e aplicação das mesmas, verificou-se a importância das TIC no contexto educacional. No entanto, é evidente a importância do papel do professor que, com toda a disponibilidade de recursos computacionais, deixa de ser transmissor de conhecimentos e passa a ser mediador da aprendizagem.

Para o desenvolvimento deste trabalho monográfico foram necessárias diversas ações que proporcionaram conhecimentos em diversas áreas. Estas ações envolveram a elaboração de atividades utilizando TIC, aplicação das mesmas para licenciandos e professores de Matemática, como teste exploratório e a validação destas com alunos do ensino médio. Cada etapa deste trabalho forneceu contribuições, tais como:

i) Todo referencial teórico apresentado sobre o uso das TIC na educação e sobre elipse poderá ser utilizado em estudos futuros de licenciandos e professores de Matemática;

ii) A apostila “Estudando Elipse com Auxílio do *Software* Wingeon” poderá ser utilizada por professores. Esta encontra-se disponível na Internet em <www.es.cefetcampos.br/softmat>.

iii) A análise dos questionários do teste exploratório e do teste de validação podem permitir reflexões sobre a importância da aplicação de atividades como as que foram elaboradas.

Vale ressaltar a importância da construção deste trabalho monográfico para o autor, no que diz respeito à melhora na escrita, na leitura e na pesquisa, além de ampliar os conhecimentos no uso de tecnologias, através da confecção desta monografia. Além disso, a elaboração das atividades, utilizando TIC, contribuiu para a aquisição de experiência neste tipo de prática.

Com a aplicação das atividades no teste exploratório, os participantes, além de adquirirem conhecimentos, puderam perceber o quanto este tipo de atividade é importante para proporcionar um processo de ensino e aprendizagem mais eficaz. Ademais, verificou-se, a partir do teste exploratório, que as atividades estavam coerentes com os objetivos pré-estabelecidos, não havendo necessidade de promover mudanças nas mesmas. Este fato foi verificado através da análise das respostas às atividades (orais e escritas) e aos questionários. A maioria dos participantes afirmou que os enunciados das atividades estavam claros e que usariam parte da oficina em suas práticas docentes, dados que ressaltam a importância deste trabalho.

Na validação destas atividades, os alunos do Ensino Médio conseguiram aprender o conteúdo proposto com facilidade, como descrito no capítulo 2. Ressalta-se que os alunos demonstraram grande interesse e foram muito participativos. A análise das respostas das atividades e dos questionários permitiu concluir que as atividades atenderam aos objetivos propostos, ou seja, possibilitaram a construção de conhecimentos sobre Elipse.

Comparando a atitude dos participantes do teste exploratório com a dos alunos do Ensino Médio que participaram da validação das atividades, destacam-se alguns fatos: os alunos do Ensino Médio participaram mais ativamente, questionando parte dos enunciados e comentando as respostas dadas pelos colegas, durante a correção das atividades, enriquecendo o processo de ensino e aprendizagem. Além disso, vale ressaltar que os alunos do Ensino Médio utilizaram o *software* com o mesmo desempenho dos participantes do teste, porém sem terem utilizado anteriormente nenhum outro *software* para aprendizagem de temas matemáticos, o que já haviam feito os participantes do teste exploratório. Este fato retrata que os alunos que participaram da validação das atividades apresentam características da Sociedade Informacional, ou seja, provavelmente por lidarem com tecnologias em outras situações do dia-a-dia não tiveram dificuldades em utilizar o *software* Wingeom.

Não há estratégias prontas que sejam independentes do contexto de utilização. Para a utilização das TIC como recursos pedagógicos, faz-se necessário um sólido conhecimento da área de domínio, algum conhecimento de Informática e de Informática Educativa. Mas, sobretudo, é necessário estar consciente de que não é possível dominar por completo a tecnologia a ser utilizada, o que requer, muitas vezes, desprendimento para reconhecer que não se sabe tudo, e que é possível aprender com os alunos.

Os resultados apresentados diante das respostas dos questionários mostram o quanto às atividades são válidas ao público alvo a que se destina, alunos do Ensino Médio.

Deve-se, no entanto, dar continuidade a este trabalho, para torná-lo ainda mais válido e consistente na construção de conhecimentos, aplicando as atividades a outros grupos de alunos. Outras ações a serem desenvolvidas, como forma de dar continuidade a este trabalho, seria fazer o estudo das equações de elipses com o centro fora da origem, e também fazer o estudo da parábola e da hipérbole utilizando o *software* Wingeom, pois este possui ferramentas que possibilitam isto.

Foram superadas algumas dificuldades durante a realização deste trabalho. Para a elaboração da apostila de atividades, por exemplo, foi necessário muito estudo dos recursos do *software* e de como este poderia contribuir para a aprendizagem de elipse, o que requereu bastante tempo e dedicação. A seleção de licenciandos e professores para o teste das atividades, com o perfil necessário e com tempo disponível e que se adequasse à disponibilidade de laboratório de informática, foi difícil. Este fato se repetiu na validação das atividades com os alunos do Ensino Médio. Felizmente, diante dos resultados obtidos, percebe-se que todas as dificuldades vivenciadas enriqueceram este trabalho monográfico.

A fundamentação teórica em Informática Educativa, a ampliação de conhecimentos de Informática, o estudo de s*oftwares* e a aplicação das atividades realizadas neste trabalho contribuíram para a formação de uma concepção de educação que vai muito além da transmissão de conteúdos: visa, na verdade, à construção de conhecimentos. Certamente, o estudo mais aprofundado do tema matemático também foi imprescindível, uma vez que, sem um sólido conhecimento na área de domínio, de nada adiantaria o uso de recursos tecnológicos.

Espera-se, com o trabalho desenvolvido, estar semeando idéias da importância da utilização das TIC na construção de conhecimentos matemáticos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, G. de. *A excentricidade da órbita da terra (I)*. s.d. Disponível em: <http://www.apaa.online.pt/GA/Excentricidade_Brasil_1.pdf>. Última consulta em: 06/06/2007.

ANDERSON, L. Duplicação do Cubo In: EVES, H. *História da Geometria*. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

ÁVILA, G. Como tratar a circunferência, a elipse e a hipérbole. *Revista do Professor de Matemática*, n. 35, p. 9-14. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 1997.

BALDIN, Y. Y. Utilizações Diferenciadas de Recursos Computacionais no Ensino de Matemática. In: CARVALHO, L. M.; GUIMARÃES, L.C. (Org.). História e Tecnologia no Ensino da Matemática. Rio de Janeiro: IME-UERJ, cap. 2, p. 29-37, 2002.

BARCELOS, G. T. Inovação no Sistema de Ensino: o Uso Pedagógico das Tecnologias de Informação e Comunicação nas Licenciaturas em Matemática da Região Sudeste. Dissertação (Mestrado em Ciências de Engenharia). Campos dos Goytacazes, RJ, Universidade Estadual do Norte Fluminense – UENF, 2004.

BATISTA, S. C. F. SoftMat: Um Repositório de Softwares para Matemática do Ensino Médio - Um Instrumento em Prol de Posturas mais Conscientes na Seleção de Softwares Educacionais. *Dissertação de Mestrado em Ciências de Engenharia*. Campos dos Goytacazes, RJ, Universidade Estadual do Norte Fluminense – UENF, 2004.

BELFORT, E. Utilizando o Computador na Capacitação de Professores. In: CARVALHO, L. M.; GUIMARÃES, L.C. (Org.). *História e Tecnologia no Ensino da Matemática*. Rio de Janeiro: IME-UERJ, cap. 3, p. 39-50, 2002.

BORBA, M.; PENTEADO, M. *Informática e Educação Matemática,* 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

BOWSHER, L. E. História dos Termos Elipse, Hipérbole e Parábola. In: EVES, H. *História da Geometria*. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. Revista por Uta C. Merzbach. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 2001.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio: Bases Legais*. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 1999.

CARVALHO, J. P. Os Três Problemas Clássicos da Matemática Grega. In: II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. Salvador, SBM, 2004. Disponível em: <http://www.bienasbm.ufba.br/M20.pdf>. Última consulta em: 31/05/07.

D'AMBRÓSIO, U. *Da Realidade à Ação: Reflexões sobre Educação Matemática*. Campinas, SP: SUMMS/ UNICAMP, 1986.

D’AMBRÓSIO, U. *Etnomatemática: Arte ou Técnica de Explicar e Conhecer*. São Paulo: Ática, 1998.

D’AMBRÓSIO, U. *Educação Matemática: da Teoria à Prática*. 8. ed. Campinas, SP: Papirus, 2001.

D’AMBRÓSIO, U. *Formação de Professores: O Comentarista e o Animador Cultural.* s.d. Disponível em: <http://sites.uol.com.br/vello/formar.htm>. Última consulta em: 07/06/07.

DOLCE, O.; POMPEU, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar*. v. 10. 5. ed. São Paulo: Atual, 1993.

FREIRE, P. *Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa*. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. *A Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados.* In: IV Congresso RIBIE. Brasília, 1998. Disponível em: <http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/artigos/artigos_index.php>. Última consulta em: 16/06/07.

GUIMARÃES, C. *Complementos*. s.d. – a. Disponível em: <http://www.rumoaoita.com/materiais/materiais_caio/artigoconicascap5.pdf>. Última consulta em: 01/06/07.

GUIMARÃES, C. Seções Cônicas. s.d. – b. Disponível em: <http://www.rumoaoita.com/materiais/materiais_caio/artigoconicascap1.pdf>. Última consulta em: 06/06/2007.

HEATH, T. L. *A Manual of Greek Mathematics* (uma condensação de A History of Greek Mathematics). Nova York: Oxford University Press, 1931; Dover Publications, 1963.

HERNÁNDEZ, F. *Transgressão e mudanças na educação: os projetos de trabalho*. Tradução de Jussara Haubert Rodrigues. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

IMENES, L. M. Arredondada ou achatada? *Revista do Professor de Matemática*, n. 11, p.42-44. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 1987.

INEP (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais). Percentual de Estudantes nos Estágios de Construção de Competência. 2004. Disponível em: <http://www.inep.gov.br/imprensa/noticias/saeb/news04_08.htm>. Última consulta em: 01/12/06.

JOLY, M. C. R. A. (org). *A Tecnologia no Ensino: implicações para a aprendizagem.* São Paulo: Casa do Psicólogo, 2002.

KLINE, M. *Why Johnny Can’t Add: the failure of the new math*. New York: Vintage Books, 1973.

MACHADO, A. S. dos. *Álgebra Linear e Geometria Analítica*. 2 ed. São Paulo: Atual, 1982.

MEC/SEED/DIED. Anexo I. *In*: *Relatório de Atividades 1996/2002. 2002*, p. 31–55. Disponível em: <http://www.proinfo.mec.gov.br/upload/img/relatorio_died.pdf>. Última consulta em: 07/02/07.

MORAN, J.M. Ensino e Aprendizagem Inovadores com Tecnologias Audiovisuais e Telemáticas. In: MORAN, J.M.; MASETTO, M.T.; BEHRENS, M.A. *Novas Tecnologias e Mediação Pedagógica*. São Paulo: Papirus, 2000.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H.; VARANDAS, J. M. O Contributo das Tecnologias de Informação e Comunicação para o Desenvolvimento do Conhecimento e da Identidade Profissional. *J. P. da Ponte: Artigos e Trabalhos em Português*. 2003. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos_pt.htm>. Última consulta em: 01/12/06.

PONTE, J. P. Tecnologias de Informação e Comunicação na Formação de Professores: Que Desafios? *Revista Iberoamericana de Educación*, n. 24, p.63-90. 2000.

POZO, J. I. A sociedade da aprendizagem e o desafio de converter informação em conhecimento. *Revista Pátio*, Porto Alegre-RS, n. 31, ano 8, p. 9-11, 2004.

PRIME (Platonic Realms Interactive Mathematics Encyclopedia). Dandelin's Spheres. *PRIME Articles*. Disponível em: <http://www.mathacademy.com/pr/prime/articles/dandelin/index.asp>. Última consulta em: 13/06/07.

ROCHA, I. C. B. da. Ensino de Matemática: Formação para a Exclusão ou para a Cidadania? In: *Educação Matemática em Revista*, n 9/10, p 22-31. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2001.

SATO, J. As Cônicas e suas Aplicações. *FAMAT em Revista*, n. 4, Abril de 2005. Disponível em: <http://www.famat.ufu.br/revista/revistaabril2005/index.htm>. Última consulta em: 10/06/07.

SETTE, S. S., AGUIAR, M. A., SETTE, J. S. A. Formação de Professores em Informática na Educação - *Um Caminho para Mudanças. Coleção Informática para a Mudança na Educação*. MEC/SED/PROINFO, 1999. Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/DetalheObraForm.do?select_action=&co_obra=40241>. Última consulta em: 09/08/07.

SILVA, G. S. da. Por que elipse, parábola e hipérbole? *Revista do Professor de Matemática* n. 7, p.43-45. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática. 1985.

UFRJ, Doutorado – Teses. s.d. Disponível em <http://www.ifcs.ufrj.br/~ppgsa/doutorado_teses.html>. Última consulta em: 19/06/07.

UNESCO. Educação: um tesouro a descobrir – *Relatório para a UNESCO da Comissão Internacional sobre educação para o século XXI.* 6. ed. Tradução de José Carlos Eufrásio. São Paulo: Cortez; Brasília, DF: MEC, 2001.

VALLADARES, R. J. C. Elipse, Sorrisos e Sussurros. *Revista do Professor de Matemática*, n. 36, p.24-28. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 1998.

VALENTE, J. A (Org.). *Computadores e Conhecimento*. Campinas: UNICAMP/NIED, 1993.

VALENTE, J. A (Org.). *O Computador na Sociedade do Conhecimento*. Campinas: UNICAMP/NIED, 1999. Disponível em: <http://teleduc.nied.unicamp.br/oea/pub/livro1/>. Última Consulta em 10/03/07.

VALENTE, J. A. *Formação de educadores para o uso da informática na escola*. Campinas: UNICAMP, 2003.

VALENTE, J. A. Educação ao longo da vida. *Revista pedagógica*, n.31, p.12-15. São Paulo: Pátio, 2004.

YOUSSEF, A. N., FERNANDEZ, V.P. *Matemática: conceitos e fundamentos*. São Paulo: Scipione, 1993.

WEINBERG, M., RYDLEWSKI, C. O Computador Não Educa, Ensina. *Revista Veja* São Paulo: Abril. Maio, n.19, p.87-93, 2007.

WIKIPÉDIA, A Enciclopédia Livre. Delos. s.d. Disponível em <http://pt.wikipedia.org/wiki/Delos>. Última consulta em: 13/06/07.

ANEXOS

ANEXO 1: APOSTILA “ESTUDANDO ELIPSE COM AUXÍLIO DO *SOFTWARE* WINGEOM”

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE CAMPOS
CEFET CAMPOS Universidade da Tecnologia e do Trabalho

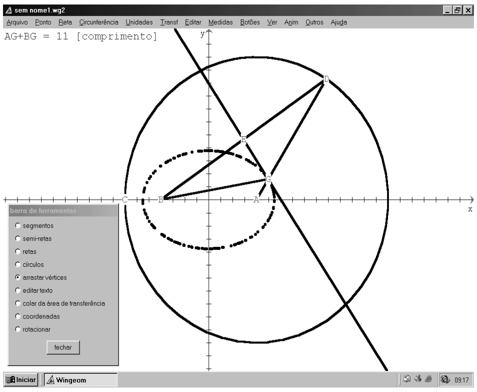
Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

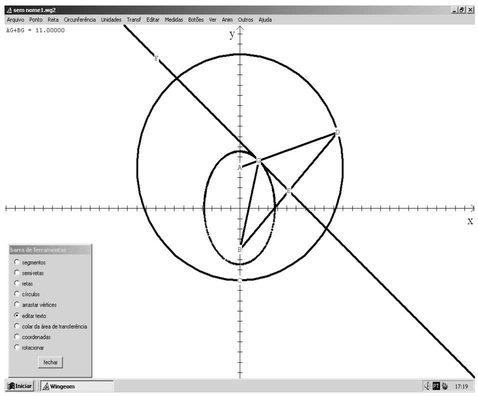
Estudando Elipse com Auxílio do *Software* Wingeom

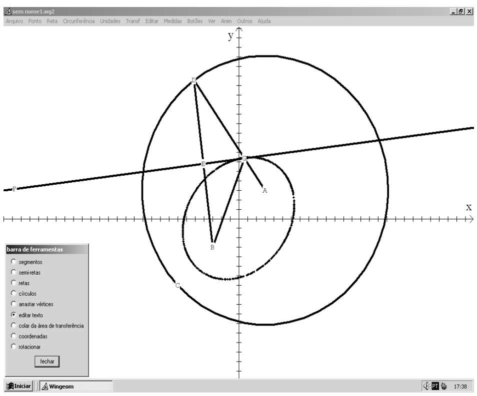
Flávio de Freitas Afonso
Licenciando em Matemática – CEFET-Campos

Gilmara Teixeira Barcelos
Professora do CEFET–Campos - Mestre em Ciências de Engenharia - UENF

Silvia Cristina Freitas Batista
Professora do CEFET–Campos - Mestre em Ciências de Engenharia – UENF







Campos dos Goytacazes
Fevereiro – 2007

ESTUDANDO ELIPSE COM AUXÍLIO DO *SOFTWARE*

WINGEOM[1]

1. ATIVIDADES EXPLORATÓRIAS DO *SOFTWARE* WINGEOM

Esta parte da apostila contém atividades elementares, elaboradas por Flávio de Freitas Afonso, Gilmara Teixeira Barcelos e Silvia Cristina Freitas Batista, com a finalidade de favorecer o reconhecimento das funções de algumas ferramentas do *software*.

Atividades

1) Ao abrir o *software*, clique em **Janela** e, em seguida, **2-dim** (isso abrirá uma janela que lhe permitirá trabalhar em duas dimensões (no plano)).

2) Na opção **Botões**, selecione **Barra de ferramentas** (isso fará abrir na tela principal uma pequena janela com diversas opções de ferramentas). A vantagem de manter a **Barra de ferramentas** aberta é poder visualizar a ferramenta atual com que se está trabalhando.

3) Na **Barra de ferramentas** selecione **segmentos.** A seguir, com o botão direito do mouse, marque dois pontos na tela principal (observe que o próprio *software* nomeia os pontos marcados). Clique com o botão esquerdo do mouse sobre um dos pontos marcados e, mantendo o botão pressionado, arraste o mouse até o outro ponto (com isso traça-se um segmento de reta). Trace outros segmentos de reta.

4) Clique com o botão direito do mouse sobre um ponto interno qualquer de um dos segmentos traçados. O *software* nomeará o ponto considerado. Clique com o botão direito em outros pontos (do mesmo ou de outro segmento) fazendo com que também estes sejam nomeados pelo *software*.

5) Na **Barra de ferramentas** selecione **arrastar vértices**. Clique com o botão esquerdo do mouse sobre um dos extremos de um dos segmentos traçados e, mantendo o botão pressionado, arraste o ponteiro do mouse até outro local da tela. Agora, considere um dos pontos internos nomeados e arraste-o. Observe a diferença entre arrastar um ponto extremo de um segmento e um ponto interno deste.

6) Apague um dos segmentos traçados. Para tanto, em **Editar** (no alto da janela principal), selecione **Apagar** e a seguir clique em **Reta**. Na janela que se abrirá digite as letras que nomeiam dois pontos quaisquer do segmento que se deseja apagar. O mesmo procedimento será adotado para apagar retas e semi-retas. Para apagar pontos, vá novamente em **Apagar**, clique em **Pontos**, e digite as letras que nomeiam os pontos que se quer apagar.

7) Solicite um arquivo novo, na opção **Arquivo**. Construa as semi-retas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$.

---

[1] *Software* gratuito disponível para download em **http://math.exeter.edu/rparris/wingeom.html**

8) Solicite um arquivo novo. Construa as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ de forma que as mesmas sejam concorrentes e a interseção seja visível na tela. Solicite, então, a marcação da interseção das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$. Para tanto, clique na opção **Ponto** (no alto da janela principal) e, em **Interseção**, clique em **Reta-reta**.

9) Na reta $\overleftrightarrow{AB}$, da construção anterior, marque o ponto F (onde desejar). Crie uma reta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$, passando por F. Para isso, em **Reta** (no alto da janela principal), selecione **Perpendiculares** e, a seguir, clique em **Geral**. Na janela que se abrirá solicite uma perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ passando por F.

10) Ainda considerando a construção do item 8, crie uma reta paralela a $\overleftrightarrow{AB}$, passando pelo ponto C. Para tanto, em **Reta**, clique em **Paralelas**. Na janela que se abrirá solicite uma paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ passando por C.

11) Solicite um arquivo novo. Na **Barra de ferramentas**, selecione **círculos**. Marque um ponto A. Com o botão esquerdo do mouse, clique no ponto A, e mantendo o botão pressionado, arraste o mouse até um outro local da tela (observe que um novo ponto será criado no local indicado pelo ponteiro do mouse). Construa outras circunferências.

12) Insira um texto junto a uma das circunferências traçadas. Para inserir um texto, selecione **editar textos** na **Barra de ferramentas**. A seguir, clique com o botão direito do mouse no local onde deseja colocá-lo. Uma caixa de diálogo abre, com uma caixa de edição para o texto. Para arrastar um texto existente, mantenha pressionado o botão esquerdo do mouse sobre o texto, arraste o mouse para o local desejado, e solte o botão.

13) Solicite um arquivo novo. Na opção **Unidades** (no alto da janela principal) selecione **Polígono** e clique, a seguir, em **Regular**. Clique em **ok** na janela que se abrirá. Assim será desenhado na janela principal um polígono regular. O Wingeon traz diversas construções automáticas na opção **Unidades**. Teste algumas delas.

14) Solicite um arquivo novo. Na opção **Unidades**, selecione **Aleatório** e clique, a seguir, em **losango**. Selecione **coordenadas** na **Barra de ferramentas** e clique com o botão esquerdo do mouse em qualquer vértice do losango. Mantendo o botão pressionado é possível ver as coordenadas do ponto selecionado.

15) Selecione **rotacionar** na **Barra de ferramentas**. Clique com o botão direito em qualquer vértice do losango já traçado. Isto fixará esse vértice como centro da rotação. Clique com o botão esquerdo do mouse em um outro vértice qualquer e, mantendo-o pressionado, arraste o mouse (a cor da legenda do vértice muda para indicar que ele está selecionado).

16) Solicite um arquivo novo. Crie o segmento $\overline{AB}$. Clique em **Medidas** (no alto da janela principal). Digite AB na janela que se abrirá e dê um **Enter**. Feche a janela de **Medidas**. O comprimento do segmento $\overline{AB}$ ficará registrado na tela. Arraste um dos extremos do segmento e observe que o comprimento registrado na tela também se alterará.
17) Solicite um arquivo novo. Marque os pontos A = (2, 3), B = (-2, 4) e C = (0, 0). Para isso, em **Ponto** (no alto da janela principal) selecione **Coordenadas** e solicite a marcação dos pontos.
18) Renomeie como P o ponto A do item anterior. Para isso, em **Botões** (no alto da janela principal) selecione **Texto**, clique com o botão direito do mouse sobre o ponto A e digite P na caixa que se abrirá.

2. Seções Cônicas

As curvas estudadas a seguir são denominadas, genericamente, **cônicas**, devido ao fato de serem obtidas através de interseções de um plano com uma superfície cônica de revolução.

Na Figura 2.1, o plano é perpendicular ao eixo da superfície cônica e não passa pelo vértice. A seção obtida é uma **circunferência**.

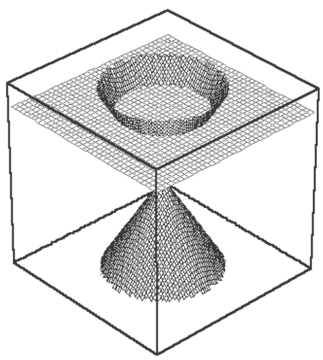


Figura 2.1: Circunferência

Na Figura 2.2 o plano é oblíquo ao eixo e intersecta todas as geratrizes de uma única folha. A seção obtida é uma **elipse**.

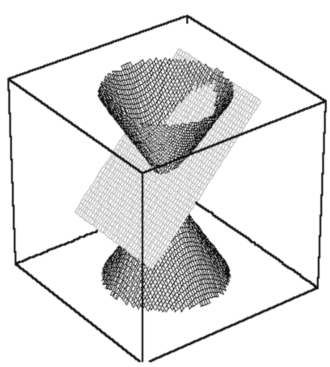


Figura 2.2: Elipse

Na Figura 2.3, o plano intersecta as duas folhas da superfície cônica e não passa pelo vértice. A seção obtida é uma **hipérbole**.

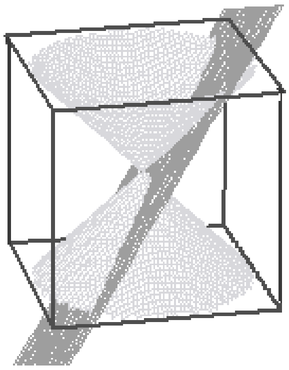


Figura 2.3: Hipérbole

Por último, na Figura 2.4 temos um plano paralelo a uma geratriz da superfície. A seção obtida é uma **parábola**.

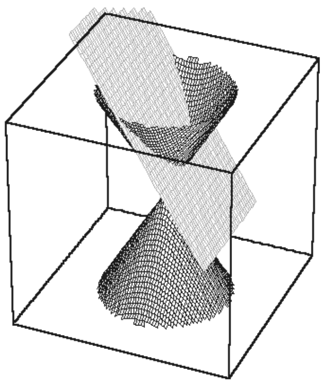


Figura 2.4: Parábola

Existem ainda outras cônicas obtidas por interseções de uma superfície cônica de revolução com um plano. São as cônicas degeneradas:

- Ponto: o plano intersecta unicamente o vértice da superfície cônica.
- Uma reta: o plano é tangente à superfície cônica.
- Um par de retas concorrentes: o plano intersecta apenas duas geratrizes da superfície cônica.

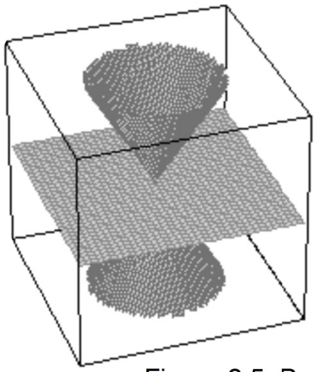


Figura 2.5: Ponto

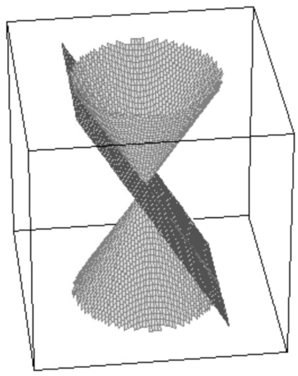


Figura 2.6: Uma Reta

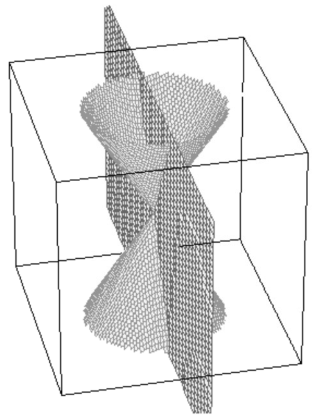


Figura 2.7: Par de Retas Concorrentes

Obs.: As figuras de numeração 2.1 a 2.7 foram construídas no *software* Winplot.

Para observar essas interseções mais detalhadamente, acesse os *sites*:

http://mathdemos.gcsu.edu/mathdemos/family_of_functions/conic_gallery.html

http://math2.org/math/algebra/conics.htm

http://www.professores.uff.br/hjbortol/disciplinas/2005.1/gma04096/applets/conic/conic.html

3. ESTUDO DA ELIPSE

Definição e Traçado de Elipses: Atividades

Esta seção contém atividades que tem a finalidade de mostrar formas de aplicação do *software* Wingeom como recurso didático para o processo de ensino e aprendizagem de elipse. Estas atividades foram adaptadas do tutorial http://math.exeter.edu/rparris/peanut/wgpr32tut.pdf, por Flávio de Freitas Afonso, sob orientação de Gilmara Teixeira Barcelos e Silvia Cristina Freitas Batista.

Atividade I

a) Marque os pontos A (4,0), B (-4,0) e C (-7,0).

b) Construa uma circunferência de centro A, passando pelo ponto C. Para isto, clique em **Circunferência** (no alto da janela principal) e selecione **Raio-centro**. Digite **A** na caixa "**centro em**" e, a seguir, selecione "**circunferência através de**", digitando **C** na caixa correspondente. Clique, então, em **desenhar**.

c) Na **Barra de ferramentas**, selecione **segmentos.** Clicando com o botão direito do mouse sobre a circunferência, crie o ponto D (em qualquer lugar da circunferência, exceto sobre o próprio ponto C).

d) Construa os segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{AD}$.

e) Construa a mediatriz do segmento $\overline{BD}$.

f) Peça a interseção da reta $\overleftrightarrow{EF}$ com o segmento $\overline{AD}$. Este ponto será nomeado G, pelo próprio programa.

g) Clique em **Anim|Traço temporário** e, na caixa de texto correspondente, digite G.

h) Movimente o ponto D e observe o conjunto de pontos marcados.

i) Crie o segmento $\overline{BG}$.

j) Peça a medida de $\overline{AG}$ + $\overline{BG}$.

k) Movimente novamente o ponto D observando a medida de $\overline{AG}$ + $\overline{BG}$.

l) Descreva o que você observou.

Observação:

Elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano tais que a soma de suas distâncias a dois pontos fixos desse plano (chamados focos) é constante.

Observe, na construção da atividade I, que a soma das medidas dos segmentos $\overline{AG}$ e $\overline{BG}$ é sempre constante. Isto pode ser provado da seguinte forma:

1. Os triângulos BGE e DGE são congruentes (caso de congruência LAL), logo os segmentos $\overline{GD}$ e $\overline{GB}$ são congruentes.

2. A medida do segmento $\overline{AD}$ é sempre constante, pois este segmento é raio da circunferência.

3. Como AG + GD = AD e $\overline{GD} \equiv \overline{GB}$, podemos afirmar que: AG + GB = AD.

4. Logo, a soma das medidas dos segmentos $\overline{AG}$ e $\overline{BG}$ é sempre igual a medida do segmento $\overline{AD}$, que é constante, conforme mencionado no item 2.

Assim, verificamos que, através da movimentação do ponto D, na atividade I, obteve-se uma elipse, uma vez que: i) G é um ponto qualquer de um plano; ii) A e B são dois pontos fixos desse mesmo plano; iii) a soma das medidas dos segmentos $\overline{AG}$ e $\overline{BG}$ é sempre constante.

A e B são os focos da elipse e a distância entre eles é denominada distância focal. Os focos estão localizados sempre sobre o eixo maior da elipse, o outro eixo é denominado eixo menor da elipse. O centro da elipse é o ponto médio do segmento que tem os focos como extremidade. Na elipse da atividade I, o centro é o ponto (0,0).

Sendo P um ponto qualquer de uma elipse de focos A e B, prova-se que o seu eixo maior tem medida igual ao valor constante da soma das medidas dos segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ (ou seja, PA + PB). Assim, na elipse da atividade I, o eixo maior tem a medida do segmento $\overline{AD}$.

Atividade II

Acesse o endereço abaixo e visualize a marcação dos pontos de uma elipse, de forma semelhante ao que foi feito na atividade I.

http://www.colband.com.br/ativ/nete/matweb/conicas/conicas.htm

Atividade III

a) Solicite um arquivo novo.

b) Marque os pontos A (0,4), B (0,-4) e C (0,-7).

c) Construa uma circunferência de centro A, passando pelo ponto C. Para isto, clique em **Circunferência** (no alto da janela principal) e selecione **Raio-centro**. Digite **A** na caixa "**centro em**" e, a seguir, selecione "**circunferência através de**", digitando **C** na caixa correspondente. Clique, então, em **desenhar**.

d) Na **Barra de ferramentas**, selecione **segmentos.** Clicando com o botão direito do mouse sobre a circunferência, crie o ponto D (em qualquer lugar da circunferência, exceto sobre o próprio ponto C).

e) Construa os segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{AD}$.

f) Construa a mediatriz do segmento $\overline{BD}$.

g) Peça a interseção da reta $\overleftrightarrow{EF}$ com o segmento $\overline{AD}$. Este ponto será nomeado G, pelo próprio programa.

h) Clique em **Anim|Traço temporário** e, na caixa de texto correspondente, digite G.

i) Movimente o ponto D e observe o conjunto de pontos marcados.

j) Crie o segmento $\overline{BG}$.

k) Peça a medida de $\overline{AG}$ + $\overline{BG}$.

l) Movimente novamente o ponto D observando a medida de $\overline{AG}$ + $\overline{BG}$.

m) Descreva o que você observou.

Atividade IV

a) Solicite um arquivo novo.

b) Construa uma elipse com centro fora da origem e eixos paralelos aos eixos coordenados (utilize o procedimento da atividade I, fazendo as devidas alterações).

Atividade V

a) Peça um novo arquivo.

b) Marque os pontos A (3, 0), B(-3, 0) e C(0, 1).

c) Clique em **Unidades|Cônicas com 3 pontos**, na janela que abrirá, selecione **elipse**, digite AB na caixa "**pontos focais**" e C na caixa "**ponto sobre a cônica**". Clique em **desenhar** (isso criará uma elipse com eixo maior sobre o eixo x, com focos A e B, passando pelo ponto C).

d) Utilizando a opção **Unidades|Cônicas com 3 pontos** construa uma elipse com eixo maior sobre o eixo y. Marque 3 pontos convenientes e registre suas coordenadas.

Atividade VI

a) Solicite um arquivo novo.

b) Até agora construímos elipses com eixo maior paralelo aos eixos coordenados. Agora, construa uma elipse com eixo maior não paralelo a nenhum dos eixos coordenados. Para isso, utilize a opção **UnidadeslCônicas com 3 pontos**. Como na atividade anterior, registre as coordenadas dos pontos escolhidos.

Relações entre Elementos – Equações da Elipse: Atividades

Esta seção foi elaborada por Flávio de Freitas Afonso sob orientação de Gilmara Teixeira Barcelos e Silvia Cristina Freitas Batista.

Atividade I

Digite: – (6 ^(½))

a) Solicite um arquivo novo.

b) Marque os pontos A(0,0), B(-$\sqrt{6}$,0), C($\sqrt{6}$,0), D(-3,0), E(3,0), P(1, $\frac{2\sqrt{6}}{3}$).

c) Utilize a opção **Unidades|Cônicas com 3 pontos** e construa uma elipse com pontos focais B e C, passando pelo ponto P.

d) Construa os segmentos $\overline{PB}$ e $\overline{PC}$.

e) Utilizando os recursos do *software*, determine $PB + PC$: _____________.

f) Sem utilizar os recursos do *software*, determine a medida do eixo maior: _____________.

g) Compare o valor de $PB + PC$ com a medida do eixo maior. Reflita: isso foi uma coincidência ou ocorre para qualquer elipse? Para colaborar nessa reflexão, solicite um arquivo novo, considere os pontos A(0, 0), B(-$\sqrt{12}$, 0), C($\sqrt{12}$, 0), D(-4,0), E(4, 0), P(-2, -$\sqrt{3}$), refaça os itens de **c** a **f** e compare novamente o valor de $PB + PC$ com a medida do eixo maior.

Generalizando:

Prova-se que o que foi observado na atividade I é válido para qualquer elipse, ou seja, prova-se que, sendo P um ponto qualquer de uma elipse de focos B e C, a medida de $\overline{PB}$ + $\overline{PC}$ é igual à medida do eixo maior.

Nas figuras 3.1 e 3.2, considere:

BC = 2c (distância focal)

DE = 2a (medida do eixo maior)

FG = 2b (medida do eixo menor)

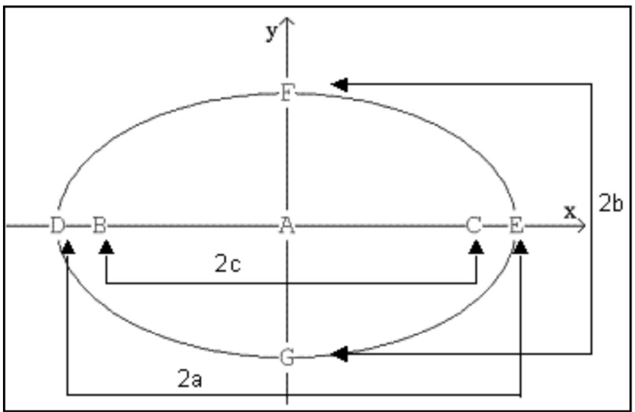


Figura 3.1: Elementos da Elipse

Observe, na figura 3.2, que os segmentos $\overline{FB}$ e $\overline{FC}$ formam com os eixos coordenados dois triângulos retângulos congruentes, FAB e FAC (caso LAL). Então, $\overline{FB} \equiv \overline{FC}$ e, como F é um ponto da elipse, FB + FC = 2a, logo FB = a e FC = a.

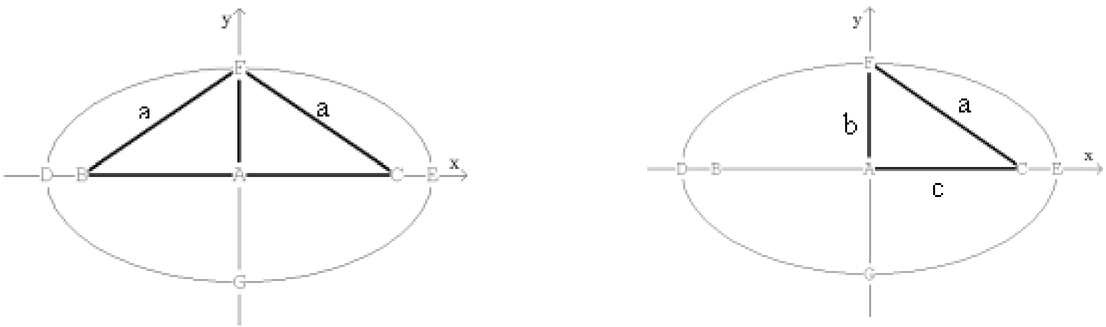


Figura 3.2: Relação Fundamental – Elipse

Observe ainda que como o triângulo FAC é retângulo, $(CF)^2 = (AF)^2 + (AC)^2$.

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Atividade II

a) Solicite um arquivo novo.

b) Marque os pontos A (0, 0), B(-2, 0), C(2, 0), D(-3, 0), E(3, 0).

c) Utilize a opção **Unidades|Cônicas com 3 pontos** e construa uma elipse com pontos focais B e C, passando pelo ponto D.

d) Considerando a relação $a^2 = b^2 + c^2$, calcule a medida do semi-eixo menor (sem utilizar os recursos do *software*): ____________.

Observação 1:

Nota-se, na atividade II, que a elipse obtida tem centro no ponto (0, 0), focos B e C, eixo maior (2a) sobre o eixo das abscissas (eixo x) e o eixo menor (2b) sobre o eixo das ordenadas (eixo y).

Consideremos uma elipse de pontos focais B (-c, 0) e C (c, 0) e um ponto P (x, y) sobre a elipse.

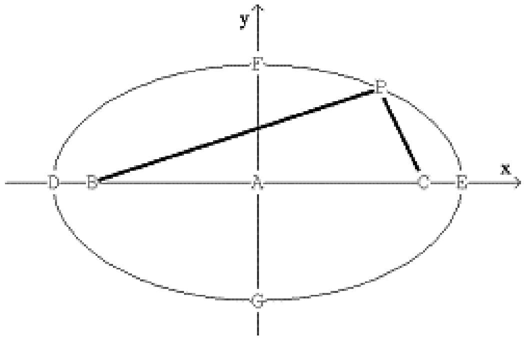


Figura 3.3: Equação da elipse: centro (0,0) e eixo maior sobre o eixo x

Nessas condições, para determina a equação da elipse temos que utilizar a definição e fazer os cálculos necessários:

Pela definição de elipse,

$$BP + CP = 2a$$

ou seja:

$$\sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Elevando os dois membros da equação ao quadrado:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$x^2+2xc+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2xc+c^2+y^2$$

$$4xc-4a^2=-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Dividindo ambos os membros da equação por 4:

$$xc-a^2=-a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-xc$$

Elevando novamente os dois membros ao quadrado:

$$a^2[(x-c)^2+y^2]=(a^2-xc)^2$$

$$a^2(x-c)^2+a^2y^2=(a^2-xc)^2$$

$$a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2xc+c^2x^2$$

$$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2) \quad \text{(I)}$$

Como foi mostrado anteriormente:

$$a^2=b^2+c^2$$

$$b^2 = a^2 - c^2 \text{ (II)}$$

Substituindo (II) em (I), temos:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividindo ambos os membros da equação por a^2b^2 :

Equação reduzida da elipse com focos no eixo x e centro na origem.

Atividade III

Retorne à atividade II e escreva a equação da elipse construída.

Atividade IV

a) Solicite um arquivo novo.

b) Marque os pontos A (0,0), B(0,2), C(0,-2), D(0,-3), E (0,3).

c) Utilize a opção **Unidades|Cônicas com 3 pontos** e construa uma elipse com pontos focais B e C, passando pelo ponto E.

d) Considerando a relação $a^2 = b^2 + c^2$, calcule a medida do semi-eixo menor (sem utilizar os recursos do *software*): ____________.

Observação 2:

A elipse obtida na atividade IV tem centro no ponto (0, 0), focos B e C, eixo maior sobre o eixo das ordenadas e eixo menor sobre o eixo das abscissas.

Consideremos uma elipse de pontos focais B (0, -c) e C (0, c) e um ponto P (x, y) sobre a elipse.

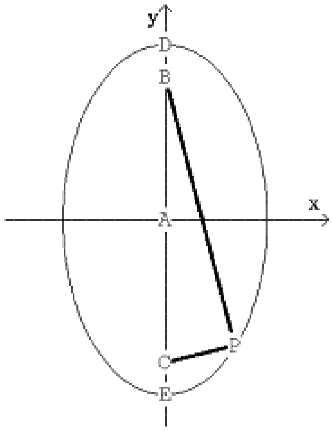


Figura 3.4: Equação da elipse: centro (0, 0) e eixo maior sobre o eixo y

Nessas condições, para determinar a equação da elipse temos que utilizar a definição e fazer os cálculos necessários, de forma análoga ao que foi feito na observação 1:

$$BP + CP = 2a$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-(-c))^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} = 2a$$

e, daí, decorre a equação da elipse:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Equação Reduzida da elipse com focos no eixo y e centro na origem.

Atividade V

Retorne à atividade IV e escreva a equação da elipse construída.

Sem o auxílio do *software*, resolvas as questões a seguir:

1) Determine a equação da elipse conhecendo:

a) os focos $F_1(3, 0)$ e $F_2(-3, 0)$ e o comprimento do eixo maior, 8;

b) os focos $F_1(0, 4)$ e $F_2(0, -4)$ e as extremidades do eixo maior $A_1(0, 6)$ e $A_2(0,-6)$;

2) O eixo maior de uma elipse está contido no eixo x. Sabendo que o centro é (0,0), o comprimento do eixo menor é 6 e a distância focal é 10, determine a equação da elipse.

3) (EEM-SP) Dados os pontos A(2, 0), B(-2, 0) e C(4, 0), determine a equação da elipse que tem focos nos pontos A e B e que passa pelo ponto C.

Atividade VI

a) No wingeom, solicite um novo arquivo.

b) Marque os pontos A (0,0), B (-9, 0), C(9, 0) e D(12, 0).

c) Clique em **Unidades|Cônicas com 3 pontos** e solicite uma elipse com focos B e C, passando pelo ponto D.

d) Determine, sem utilizar os recursos do *software*:

- a distância focal:_______________.
- a razão entre a distância focal e a medida do eixo maior:______________.

e) Marque os pontos E (-6, 0) e F(6, 0). Clique em **Unidades|Cônicas com 3 pontos** e solicite uma elipse com focos E e F, passando pelo ponto D.

f) Determine, sem utilizar os recursos do *software*:

- a distância focal desta segunda elipse:______________.
- a razão entre a distância focal e a medida do eixo maior:______________.

g) Marque os pontos G(-3, 0) e H(3, 0). Clique em **Unidades|Cônicas com 3 pontos** e solicite uma elipse com focos G e H, passando pelo ponto D.

h) Determine, sem utilizar os recursos do *software*:

- a distância focal desta terceira elipse:______________.
- a razão entre a distância focal e a medida do eixo maior:______________.

i) Marque o ponto I(0, 0). Clique em **Unidades|Cônicas com 3 pontos** e solicite uma elipse com focos A e I, passando pelo ponto D.

j) Determine, sem utilizar os recursos do *software*:

- a distância focal:_______________.
- a razão entre a distância focal e a medida do eixo maior:______________.

k) Observe que as quatro elipses construídas possuem o mesmo eixo maior, porém, a cada elipse construída a distância focal fica menor. Compare as quatro elipses e descreva o que você observou.

Atividade VII

a) Solicite um novo arquivo.

b) Marque os pontos A (0,0), B (12, 0) e C(0, 0).

c) Clique em **Unidades|Cônicas com 3 pontos** e solicite uma elipse com focos A e C, passando pelo ponto B.

d) Determine, sem utilizar os recursos do *software*:

- distância focal:_______________.
- a razão entre a distância focal e a medida do eixo maior:______________.

e) Marque os pontos D(-4, 0) e E(4, 0). Clique em **Unidades|Cônicas com 3 pontos** e solicite uma elipse com focos D e E, passando pelo ponto B.

f) Determine, sem utilizar os recursos do *software*:

- a distância focal desta segunda elipse:______________.
- a razão entre a distância focal e a medida do eixo maior:______________.

g) Marque os pontos F(-7, 0) e G(7, 0). Clique em **Unidades|Cônicas com 3 pontos**, e solicite uma elipse com focos F e G, passando pelo ponto B.

h) Determine, sem utilizar os recursos do *software*:

- a distância focal desta terceira elipse:______________.
- a razão entre a distância focal e a medida do eixo maior:______________.

i) Marque os pontos H(-11, 0) e I(11, 0). Clique em **Unidades|Cônicas com 3 pontos** e solicite uma elipse com focos H e I, passando pelo ponto B.

j) Determine, sem utilizar os recursos do *software*:

- a distância focal desta elipse:______________.
- a razão entre a distância focal e a medida do eixo maior:______________.

k) Observe que as quatro elipses construídas possuem o mesmo eixo maior, porém, a cada elipse construída a distância focal fica maior. Compare as quatro elipses e descreva o que você observou.

Concluindo:

Prova-se que o que foi observado nas atividades VI e VII é válido para qualquer elipse. Portanto, é possível afirmar que diminuindo a distância focal, obtemos elipses mais arredondadas, ao passo que aumentando essa distância, obtemos elipses mais achatadas. Observe que, nos casos em que as distâncias focais diminuem, a razão entre a distância focal e a medida do eixo maior aproxima-se de zero e, nos casos em que as distâncias focais aumentam, a razão obtida aproxima-se de um. Observe ainda que quando a distância focal é nula, ou seja, quando os focos coincidem, obtemos uma circunferência, caso particular de elipse. A essa razão (ou seja, a razão entre a distância focal e o eixo maior) dá-se o nome de excentricidade (e).

$$\boxed{e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a},\ 0 < e < 1}$$

Exercícios:

1) Considere a elipse de focos $F_1(6, 0)$ e $F_2(-6, 0)$ e eixo menor de comprimento 10 e determine:

a) o seu centro C.

b) a sua equação.

2) Seja a elipse com eixo maior de extremidades $A_1(0, 10)$ e $A_2(0, -10)$ e eixo menor de extremidades $B_1(8, 0)$ e $B_2(-8, 0)$. Obtenha sua equação.

3) (U.F. Juiz de Fora-MG) Determine a equação da elipse, sendo seus focos os pontos $F_1(0, 3)$ e $F_2(0, -3)$ e medindo 8 cm seu eixo menor.

4) Determine as coordenadas dos focos da elipse de equação $9x^2 + 25y^2 = 225$.

5) Determine a medida do eixo maior da elipse de equação $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$?

6) Uma elipse de centro (0, 0) tem excentricidade $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e eixo maior de comprimento 8, contido no eixo y. Obtenha a sua equação.

7) Determine a equação da elipse conhecendo:

a) os focos $F_1(0, 4)$ e $F_2(0, -4)$ e a excentricidade $e = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

b) os vértices $A_1(5, 0)$ e $A_2(-5, 0)$ e a excentricidade $e = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

8) (UA – AM) As coordenadas dos focos F_1 e F_2 da elipse de equação $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1$ são, respectivamente:

a) (0,4) e (0,-4).

b) (0,5) e (0,-5).

c) (0,12) e (0,-12).

d) (0,13) e (0,-13).

e) (5,0) e (-5,0).

9) (ITA – SP- 2005) A distância focal e a excentricidade da elipse com centro na origem e que passa pelos pontos (1,0) e (0,-2) são, respectivamente:

a) $\sqrt{3}$ e 1/2

b) 1/2 e $\sqrt{3}$

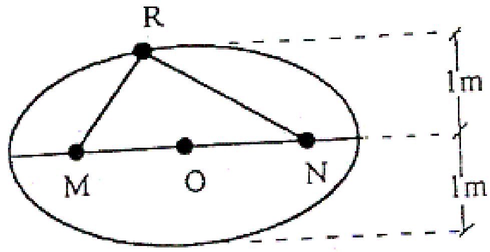
c) $(\sqrt{3})/2$ e 1/2

d) $\sqrt{3}$ e $(\sqrt{3})/2$.

e) $2\sqrt{3}$ e $(\sqrt{3})/2$.

10) (CEFET-Campos – 2001) O deslocamento que a Terra e a Lua fazem, juntas, em torno do Sol, é denominado movimento de translação. A trajetória da Terra nesse movimento é uma elipse com o Sol em um dos focos. Durante o movimento de translação, há dois momentos denominados **afélio** e **periélio**, em que a Terra vai estar afastada e mais próxima do Sol, respectivamente. Considerando que o semi-eixo maior da órbita elíptica mede 149,5 milhões de quilômetros e que a distância entre os focos é de 5,08 milhões de quilômetros, determine a distância da Terra ao Sol no periélio.

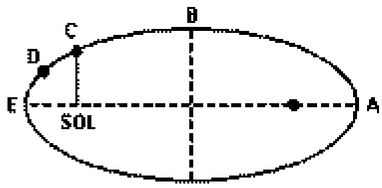
11) (FAFIC-Campos – 1997) Um jardineiro, ao construir um canteiro, amarra as extremidades de um barbante nas estacas M e N. Com um estilete em R de modo que o barbante fique bem esticado e próximo ao chão, obtém-se o contorno do canteiro desenhado na figura abaixo.



Sabendo que o comprimento do barbante MRN é 4m e que O é o ponto médio de $\overline{MN}$, a distância entre as estacas é:

12) (Cesgranrio – 1992) A segunda lei de Kepler mostra que os planetas se movem mais rapidamente quando próximos ao sol do que quando afastados dele. Lembrando que os planetas descrevem órbitas elípticas nas quais o sol é um dos focos, podemos afirmar que, dos pontos assinalados na figura, aquele no qual a velocidade da Terra é maior é o ponto:

a) A
b) B
c) C
d) D
e) E



13) (UNB - DF - 1997) O cometa Halley tem uma órbita elíptica com eixo maior e eixo menor iguais a 540 x 10^7 km e 140 x 10^7 km, respectivamente. Sabendo que o Sol está em um dos focos da elipse, calcule o valor d/10^7, em que d é a menor distância entre o Sol e o cometa, medida em quilômetros. Desconsidere a parte fracionária de seu resultado, caso exista.

ANEXO 2: QUESTIONÁRIO PARA TESTE EXPLORATÓRIO DAS ATIVIDADES

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE CAMPOS
Universidade da Tecnologia e do Trabalho
Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

Questionário
Minicurso: Estudando Elipse com Auxílio do *Software* Wingeon

1. Nome: (opcional): ____

2. Você considera possível aplicar alguma parte deste minicurso em sua prática docente?

☐ Sim ☐ Não ☐ Depende

Por quê?____
____

3. Você considera que este mincurso contribuiu para aumentar seus conhecimentos em:

☐ Matemática; ☐ Matemática e Informática;
☐ Informática; ☐ Outros:___________________________
☐ Não contribuiu em nada.

4. Os enunciados das atividades estão claros?

☐ Sim ☐ Não ☐ Parcialmente

Caso sua opção tenha sido "Parcialmente", liste a seção e o número das atividades cujos enunciados precisariam ser melhorados.

____
____
____

5. Você considera que as atividades contribuíram para compreensão do tema em estudo (elipse)?

☐ Sim ☐ Não ☐ Parcialmente

Por quê?____

6. Você classificaria o nível das atividades como:

☐ muito fácil ☐ fácil ☐ moderado ☐difícil ☐ muito difícil

Comente____
____

7. Na sua opinião, aprender a utilizar o *software* Wingeon foi:

☐ muito fácil ☐ fácil ☐ moderado ☐difícil ☐ muito difícil

Comente____
____

7.1 Caso você tenha achado a aprendizagem do *software* Wingeon "difícil" ou "muito difícil", ainda assim julga válida a sua utilização?

☐ Sim ☐ Não

Comente____
____

8. De maneira geral, você considera que o uso de *softwares* educacionais favorece a construção de conhecimentos matemáticos?

☐ Sim ☐ Não ☐ Depende de:____________

Por quê?____

9. Você já utilizou *software* educacional, ou outro recurso tecnológico, em alguma aula que ministrou (mesmo sendo em aulas de estágio, enquanto

aluno da Licenciatura)? Em caso afirmativo, cite o nome do(s) *software(*s) e/ou de outros recursos utilizados.

___

9.1 Caso a resposta acima tenha sido afirmativa, você considera que, de maneira geral, o esforço necessário para utilização de um recurso tecnológico (tempo de estudo, reserva de laboratório, risco de falhas, etc) é compensado pelos resultados obtidos? Comente.

___

___

9.2 Caso a resposta da questão 9 tenha sido negativa, que motivo(s) você atribui para isso?

___

___

10. Você considera que o papel do professor durante a utilização de *softwares* educacionais, é:

☐ muito importante; ☐ pouco importante;
☐ importante; ☐ quase desnecessário;
☐ desnecessário.

Comente:

___

___

11. Dê sua opinião sobre a importância do uso de tecnologias na formação do professor de Matemática apontando possíveis vantagens e desvantagens.

___

___

___

ANEXO 3: QUESTIONÁRIO PARA VALIDAÇÃO DAS ATIVIDADES

1. Nome: (opcional): ____

2. Você considera que este mincurso contribuiu para aumentar seus conhecimentos em:

☐ Matemática; ☐ Matemática e Informática;
☐ Informática; ☐ Outros:__________________________
☐ Não contribuiu em nada.

3. Os enunciados das atividades estão claros?

☐ Sim ☐ Não ☐ Parcialmente

Caso sua opção tenha sido "Parcialmente", liste a seção e o número das atividades cujos enunciados precisariam ser melhorados.

____
____
____
____

4. As atividades que utilizaram o *software* Wingeom contribuíram para a aprendizagem do tema em estudo?

☐ Sim ☐ Não ☐ Parcialmente

Por quê?

____
____

5. As visualizações possibilitadas pelos sites visitados contribuíram para a aprendizagem do tema em estudo?

☐ Sim ☐ Não ☐ Parcialmente

Por quê?

____
____

6. A resolução das atividades permitiu o entendimento das observações apresentadas na apostila?

☐ Sim ☐ Não ☐ Parcialmente

Por quê?____

7. De maneira geral, você classificaria o nível das atividades como:

☐ muito fácil ☐ fácil ☐ moderado ☐difícil ☐ muito difícil

Comente____
____

8. Na sua opinião, aprender a utilizar o *software* Wingeon foi:

☐ muito fácil ☐ fácil ☐ moderado ☐difícil ☐ muito difícil

Comente____
____

8.1 Caso você tenha achado a aprendizagem do *software* Wingeon "difícil" ou "muito difícil", ainda assim julga válida a sua utilização?

☐ Sim ☐ Não

Comente____
____

9. Você já utilizou *software* educacional, ou outro recurso tecnológico, em alguma aula de Matemática? Em caso afirmativo, cite o nome do(s) *software(*s) e/ou de outros recursos utilizados.

____
____
____

9.1 Caso a resposta anterior tenha sido afirmativa, você considera que, de maneira geral, o uso do recurso tecnológico contribuiu para a aprendizagem do tema em estudo?

____
____

10. Você considera que o papel do professor durante a utilização de *softwares* educacionais, é:

- ☐ muito importante;
- ☐ importante;
- ☐ desnecessário.
- ☐ pouco importante;
- ☐ quase desnecessário;

Comente:

____

____

11. Dê sua opinião sobre a importância do uso do computador (*softwares* educacionais, *internet,* etc) na educação, apontando possíveis vantagens e desvantagens.

____

____

ANEXO 4: APOSTILA DE ATIVIDADES RESOLVIDA POR DOIS ALUNOS

ANEXO 5: QUESTIONÁRIOS RESPONDIDOS NO TESTE EXPLORATÓRIO

ANEXO 6: QUESTIONÁRIOS RESPONDIDOS NA VALIDAÇÃO DAS ATIVIDADE