INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Ministério da Educação

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

A INFLUÊNCIA DO LIVRO PARADIDÁTICO NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

EMANUEL ANGELO ALVES
JORDANA BARRETO GONÇALVES BERNACCHI

CAMPOS DOS GOYTACAZES / RJ
2008

EMANUEL ANGELO ALVES
JORDANA BARRETO GONÇALVES BERNACCHI

A INFLUÊNCIA DO LIVRO PARADIDÁTICO NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense como requisito parcial para a conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática

Orientadora: Prof.ª Mônica Souto da Silva Dias
Mestre em Educação Matemática / USU / RJ

CAMPOS DOS GOYTACAZES / RJ

2008

Monografia intitulada ***A influência do livro paradidático no ensino e aprendizagem de Análise Combinatória*** elaborada por **Emanuel Angelo Alves e Jordana Barreto Gonçalves Bernacchi** e apresentada publicamente perante a Banca Avaliadora, como parte dos requisitos para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense.

Aprovada em 10 de fevereiro de 2009.
Banca Avaliadora:

Profª Mônica Souto da Silva Dias (orientadora)
Mestre em Educação Matemática / USU - RJ
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense/ RJ

Prof. Salvador Tavares
Mestre em Educação Matemática / USU /-RJ
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense

---

Profª Carmem Lúcia Vieira Rodrigues Azevedo
Mestre em Economia Empresarial / UCAM / RJ
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense

AGRADECIMENTOS

O agradecimento é uma parte importante e presente em todos os projetos de conclusão de um curso, visto que agradecer é muito mais que dizer obrigado, mas envolve dar graças, mostrar-se grato. E nesse projeto temos muito que mostrar gratidão.

À professora Mônica Souto da Silva Dias, pela paciência, dedicação, prontidão e competência na orientação deste trabalho.

Aos nossos pais, familiares e cônjuge, que sempre nos ajudaram e incentivaram durante toda a jornada, além de terem suportado as ausências e o cansaço.

Aos professores da Licenciatura em Matemática, Ana Paula Rangel de Andrade, Carmem Lúcia Vieira Rodrigues Azevedo, Salvador Tavares e Vera Lúcia Fazoli da Cunha Freitas Viana, os quais contribuíram significativamente para o aprimoramento do nosso trabalho.

Aos alunos que participaram das atividades de aplicação do livro.

Aos colegas que acreditaram e incentivaram este projeto.

Ao professor de português Luciano Antônio Campos Soares, que com toda sua competência e dedicação, fez a revisão ortográfica deste trabalho.

A todos que de forma direta ou indireta contribuíram com o nosso trabalho.

Enfim, mostramos gratidão a Deus por ter nos dado a vida e nos abençoado todos esses dias.

A questão primordial não é o que sabemos, mas como o sabemos.

Aristóteles

Dedicamos este trabalho aos nossos pais, familiares e cônjuges, que sempre estiveram presentes em todos os momentos da nossa jornada.

RESUMO

O presente trabalho aborda o ensino e aprendizagem do tema Análise Combinatória por meio de um livro paradidático produzido com este objetivo. A primeira parte do trabalho aborda a educação escolar no Brasil, apresentando resultados de alguns exames nacionais e internacionais, além de mostrar como é a pratica predominante no ensino e aprendizagem de Análise Combinatória segundo os docentes. Consta também de uma breve descrição da trajetória do livro paradidático no Brasil. A segunda parte do trabalho relata a aplicação do projeto, primeiramente no 3º período da Licenciatura em Matemática, e num segundo momento em uma turma de 15 alunos do 3º ano do Ensino Médio. Com esta experimentação foi possível constatar as vantagens da utilização do livro paradidático no ensino e aprendizagem de Análise Combinatória, tais como a participação dos alunos e a motivação para questionamentos.

Palavras chave: Análise Combinatória. Educação. Livro paradidático.

ABSTRACT

The present work broaches the teaching and the learning of the theme Analysis of Agreement through a paradidatic book produced with this purpose. The first part of this work broaches the school education in Brazil, showing results of the some national and international exams beyond to show how is the predominant practice in the teaching and learning of the Analysis of Agreement according to the professors. It includes too, a brief description of the trajectory of the didactic book in Brazil. The second part of the work first relates, the application of the project, in the third period of the undergraduate course in Mathematics and in a second moment in a class with fifteen pupils of the third year of the High School. It was possible, through this experimentation, to verify the advantages of the utilization of the didatic book in the teaching and learning of the Analysis of Agreement such as the participation of the pupils and the motivation to questioning.

Key-words: Analysis of Agreement. Education. Paradidatic book

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Durante o curso de Licenciatura em Matemática, todo o conhecimento matemático e pedagógico construído foi muito útil e necessário à nossa formação como educadores matemáticos. Destacamos a formação técnica e pedagógica a respeito dos softwares utilizados em Educação Matemática (*Winplot*[1], Régua e Compasso[2], Poly[3], Graphimática[4], Logo[5], entre outros), a utilização de material concreto (canudo, vela, linha, embalagens de papelão, isopor) e a reflexão sobre o uso destes[6].

Nos Laboratórios de Ensino[7] construiu-se material concreto para demonstrar alguma fórmula ou teorema, utilizou-se *software* matemático para dar aulas sobre poliedros, escrevemos um livro paradidático, dentre outras experiências didáticas. Nesses experimentos notou-se a riqueza de trabalhar com esses métodos, discutir pesquisas já realizadas sobre o ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos objetos de investigação, e observar a reação dos alunos nas aulas ministradas no âmbito do Laboratório de Ensino, nos quais utilizou-se os materiais produzidos, constatando que as aulas se tornavam bem mais construtivas.

---

[1] O *Winplot* é um software gratuito, de autoria de Richard Parris, traduzido para o português, pelo professor Adelmo Ribeiro de Jesus. Encontra-se disponível em: <http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html.> Acesso em: 29/01/09

[2] O "Régua e Compasso" é um software livre, de autoria de René Grothmann, traduzido para o português por Alexandre Soares. É possível fazer download e encontrar informações diversas sobre este software em <http://www.khemis.hpg.ig.com.br/car/index_pt.html.> Acesso em: 17/01/09

[3] Poly não é um programa gratuito, mas há uma versão completa disponível para avaliação, disponível em: <http://www.peda.com/poly/> Acesso em: 17/01/09

[4] Graphmática não é um programa gratuito, mas seus responsáveis disponibilizam uma versão avaliativa, totalmente funcional. Em <http://www107.pair.com/cammsoft/graphmatica.html> Acesso em: 17/01/09

[5] O LOGO é um programa gratuito produzido por George Mills e Brian Harvey da Universidade de Berkeley, traduzido e adaptado para o português pela Universidade Estadual de Campinas (Unicamp) e disponível para download em: <http://eurydice.nied.unicamp.br/softwares/software_detalhes.php?id=33> Acesso em 29/01/09

[6] Estas experiências aconteceram com maior intensidade no âmbito da disciplina Geometria I, II, III e IV, nas quais a utilização de material concreto nos fazia ver as propriedades dos sólidos estudados com mais facilidade além de ficarem indeléveis em nossa memória, sem deixar de mencionar o fato de que as aulas ficavam mais divertidas e motivadoras.

[7] Laboratório de Ensino é uma disciplina do núcleo pedagógico do curso de Licenciatura em Matemática do CEFET Campos, e está alocada no segundo, terceiro e quarto períodos. As atividades desenvolvidas nestas disciplinas compreendem o estudo, a elaboração e a implementação de uma proposta pedagógica para o ensino e aprendizagem de um tema matemático. Atualmente esta disciplina é denominada LEAMAT – Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática.

Ao analisar todos esses fatos, decidiu-se escolher como tema de nossa monografia algo relacionado à utilização de recursos didáticos na aprendizagem de Matemática. Buscou-se um aprofundamento sobre textos e pesquisas que embasassem a confecção de um livro paradidático, que foi aplicado em uma turma de Ensino Médio.

Ao escolher o paradidático como tema, levou-se em consideração além da já citada experiência no Laboratório de Ensino, as necessidades da escola de hoje em propor respostas às questões educativas, ante as exigências atuais (LIBÂNEO, 2001). A abordagem de um conteúdo matemático por meio do livro paradidático pode possibilitar o aprofundamento de um tema que geralmente é apresentado em sala por meio de exposição oral, teoria e exercícios, além de servir como incentivo para os alunos exercitarem a habilidade de compreensão de textos e aguçarem seu hábito de leitura; de construírem conceitos de relevante importância matemática de uma maneira mais agradável e enfatizar a conexão entre leitura e Matemática. Estes itens constituem pontos de destaque nas avaliações[8] em que a educação em nosso país é submetida e que não tem apresentado bons resultados.

A realidade atual exige que o aluno saiba muito além de conceitos e fórmulas, mas aprender a pensar com lógica, seqüência, objetividade, a relacionar o saber escolar com o mundo real. Deste modo, o conhecimento deve ser construído, sempre que possível, em interação com as exigências do dia-a-dia. Posto isso, este trabalho se justifica por desenvolver uma abordagem do tema Análise Combinatória em consonância com as habilidades que os alunos devem construir. Isto é corroborado pelos PCN+:

> Contextualização das ciências no âmbito sócio-cultural, na forma de análise crítica das idéias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico. (BRASIL, 2002, p.113)

Sendo assim, este trabalho tem por objetivo a produção e implementação de um livro paradidático sobre o tema Análise Combinatória, voltado para o público do Ensino Médio, para que seja possível responder a seguinte questão de pesquisa:

[8] SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica), ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) e PISA (Programme International Student Assessment)

“Em que medida um livro paradidático pode auxiliar no ensino e aprendizado de Análise Combinatória?”

No Capítulo I discutiu-se brevemente os resultados da Educação no Brasil em testes nacionais e internacionais, além de uma noção dos principais problemas da educação no Brasil e relatou-se alguns aspectos do ensino de Análise Combinatória no Brasil.

No Capítulo II abordou-se a história do livro paradidático, a sua importância no ensino e aprendizagem de Matemática, e sua utilização na educação hoje.

No Capítulo III relatou-se como foi o trabalho, desde a confecção do livro até a aplicação das atividades e análise dos resultados obtidos.

Por fim, apresentou-se as conclusões e as sugestões de continuidade deste trabalho.

CAPÍTULO I A EDUCAÇÃO BRASILEIRA

1.1 – RESULTADOS DA EDUCAÇÃO NO BRASIL NAS AVALIAÇÕES OFICIAIS

A Educação Brasileira vem sendo avaliada por testes nacionais, desde 1990, com a criação do SAEB (Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica), e internacionais, desde 2000, quando foi convidado pela OCDE - Organização para Desenvolvimento e Cooperação Econômico, para participar das avaliações do PISA, programa internacional de avaliação. Neste trabalho, será referido o período entre 2000 e os dias atuais.

No ano de 2006, o Brasil participou junto com mais 56 países do PISA, promovido pela OCDE, aplicado pelo INEP, Instituto de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. O exame é realizado a cada três anos e tem como principal objetivo produzir indicadores que contribuam, dentro e fora dos países participantes, para a discussão da qualidade da educação básica, e que possam subsidiar políticas nacionais de melhoria da educação.

Segundo o INEP, a aplicação do PISA-2006 foi realizada em 630 escolas brasileiras, de todas as unidades da Federação que possuíam alunos de 15 anos matriculados na 7ª ou na 8 ª série do Ensino Fundamental ou em qualquer série do Ensino Médio.

O Brasil participou com 9.295 alunos, um número bem significativo, porém os resultados retratam bem o estado preocupante da educação em nosso país: No quadro dos 57 países participantes, o Brasil ficou em 48º lugar.

O Brasil foi reprovado em Ciências, Leitura e Matemática com 390, 393 e 370 pontos, respectivamente, num total de 707,9 pontos, ficando no nível um de pontuação, atingindo com esses pontos o nível mais baixo nas avaliações, conforme mostra a tabela a seguir:

Tabela 1: Níveis de pontuação utilizados como critérios de avaliação

Nível	Pontuação na escala PISA
1	334,9
2	409,5
3	484,1
4	558,7
5	633,3
6	707,9

Fonte: OCDE Disponível em: <http://www.inep.gov.br/download/internacional/pisa/PISA2006-Resultados_internacionais_resumo.pdf>. Acesso em 17/01/2009

Os dados do PISA comprovam o abismo em relação à educação, entre o Brasil e os países desenvolvidos. Nos testes nacionais a Educação Brasileira também revela sua fragilidade. Destacamos o SAEB (Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica) e o ENEM (Exame Nacional de Ensino Médio). Criado em 1990 o SAEB é desenvolvido pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), autarquia do Ministério da Educação (MEC), sendo a primeira iniciativa brasileira, em âmbito nacional, no sentido de conhecer mais profundamente o nosso sistema educacional.

As avaliações do SAEB produzem informações a respeito da realidade educacional brasileira especificamente, por estados e regiões. Participam do exame as redes de ensino público e privado nos estados e no Distrito Federal, por meio de exames bienais de proficiência em Matemática e em Língua Portuguesa (leitura), aplicado em amostra de alunos de 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental e da 3ª série do Ensino Médio. As médias do SAEB são apresentadas em escalas de proficiência que variam entre 0 e 500.

Em 2005 participaram do SAEB 194.822 alunos de 5.940 escolas públicas e particulares. Os números obtidos são os seguintes:

Tabela 2: média dos alunos brasileiros avaliados pelos SAEB em 2005

	Língua Portuguesa	Matemática
4ª Série do E.F.	172,3	182,4
8ª Série do E.F	231,9	239,5
3ª Série do E.M.	257,6	271,3

Fonte: <http://www.inep.gov.br/download/saeb/2005/saeb1998_2005.pdf > Acesso em: 17/01/2009

Observou-se que somente a 3ª série do Ensino Médio obteve uma média de 52% de aproveitamento em Língua Portuguesa e 54% de aproveitamento em Matemática.

O ENEM destina-se aos alunos que já concluíram o Ensino Médio (egressos) ou irão concluí-lo ao final do ano da realização do exame (concluintes). Desde sua implementação, em 1998, a adesão ao Enem tem crescido sistematicamente, atingindo em 2007 a marca de 2.738.610 participantes.

Os mais de 2 milhões de participantes do ENEM 2007 obtiveram médias de desempenho iguais a 51,52, na parte objetiva da prova, e 55,99, na redação, numa escala que vai de 0 a 100.

1.2 - OS MAIORES PROBLEMAS DA EDUCAÇÃO BRASILEIRA

Segundo Mello (2003) os dez maiores problemas da Educação no Brasil são: a cultura escolar elitista, falta de visão estratégica, visão sem eficiência e sem equidade, desinformação da sociedade, interesses coorporativos, perigo das “causas nobres”, fracasso escolar, qualidade, despreparo dos professores e defasagem.

Em seu trabalho, além de listar tais problemas, Mello também aponta possíveis soluções.

A questão da elitização da educação no Brasil é antiga, já em 1789 o Marquês de Pombal expulsou os jesuítas, que ensinavam o povo, e criou as aulas régias, ministradas para os nobres. Hoje há o direito de educação para todos, porém, a excelência continua sendo para a elite. Ricos estudam o ensino básico, em escolas privadas, para se preparar para a universidade pública e gratuita. Os pobres estudam o ensino básico na escola pública e gratuita e quando conseguem, ingressam no ensino superior privado (Mello, 2003)

A educação não faz parte da agenda estratégica dos governos; a educação só foi incluída na reforma do Estado nos anos 90. O fato do desenvolvimento do país estar ligado por muito tempo à mão-de-obra barata e exportação de produtos primários exclui a necessidade de educação com qualidade. Por outro lado, interesses políticos movimentam os Ministérios e Secretarias e impedem a continuidade de programas implantados, além da dificuldade de fazer o dinheiro sair da máquina pública e chegar às escolas (Op cit).

Na Gestão pública, a União, Estado e Município não se entendem, principalmente na questão da divisão de tarefas. A União com o Ensino Superior, e o Estado com Ensino Fundamental, principalmente de quinta a oitava séries e Ensino Médio, mas não há um estado do país que não tenha universidades estaduais e municípios com Educação Infantil e Ensino Fundamental. (Mello 2003, p.13) Os gastos com alunos no Ensino Superior demonstram má gestão: em média os países em desenvolvimento gastam com universitários quatro vezes mais do que com um aluno do Ensino Médio. Nas nações desenvolvidas, essa proporção cai para cada 1,7 alunos. Já no Brasil, um universitário custa o mesmo que 15 alunos do Ensino Médio, segundo Ioschpe (2005).

A sociedade é bombardeada pela imprensa, que muitas vezes é usada pelo governo para se promover, com informações algumas vezes distorcidas e fora de contexto sobre as escolas brasileiras; dizer, por exemplo, que o nível da educação está "caindo" é comum, mas falho, pois está "caindo" em relação a quê? O fato é que hoje a má qualidade do ensino ficou visível, pois uma educação de minoria não é de qualidade. Não é possível construir uma educação de qualidade sem garantir acesso para todos (Op. cit, 2003).

Em 2004, 70,5% das crianças entre 4 e 6 anos estavam na escola. No ano de 2006 este índice subiu para 76%. O Brasil possui 14 milhões de crianças e adolescentes menores de 17 anos fora da escola e a média de freqüência escolar é de 75,8%. O Acre é o estado com a menor média, 61,5%, enquanto Santa Catarina tem o maior índice de escolaridade, 99% no Ensino Fundamental, superando a média brasileira, que é de 97,6%. As mudanças no transporte escolar, entre diversos outros fatores, são fundamentais para mudar este quadro, é o que afirma o presidente executivo do compromisso Todos pela Educação, Mozart Ramos[9]

Muitos interesses estão de fato à frente da educação e os que defendem um método único para a alfabetização se esquecem que o bom professor diversifica, adapta, mistura e improvisa. As corporações de professores pregam que a repetência escolar incha o sistema, dando uma falsa ilusão de que faltam escolas e professores (Op. cit).

[9] Revista Nova Escola – Edição Maio 2008 p. 34

O Brasil tem um histórico de fracasso escolar. Até os anos 90 os indicadores eram entre os piores do mundo. Em 2002, quarenta por cento dos que iniciavam o ensino fundamental não concluíam na idade certa. No Ensino Médio o atendimento à população na idade certa é de quarenta e cinco por cento. Os critérios de avaliação são inadequados, da quinta série em diante, um aluno que é reprovado em Matemática, mas passa nas outras matérias, começa de novo, inclusive nas matérias que já passou (Op cit).

A escola brasileira tem um agravante que é não preparar para vida e sim para a escola. Na alfabetização o aluno tem que saber ler para seguir no Ensino Fundamental, que por sua vez prepara o aluno para o Ensino Médio, que por sua vez prepara o aluno para o vestibular. Seguindo nesse objetivo de ensinar para as próximas séries, os que não conseguem atingir os pontos fixados pelo professor, pela escola ou pelo Estado, para serem considerados aprovados, ficam caracterizados como incapazes de aprender a ler, escrever e fazer as quatro operações e este estigma é um prejuízo para auto-estima dos alunos, o que é uma conseqüência catastrófica do fracasso escolar (Op cit).

Um dos fatores que também contribui para o fracasso escolar é o fato dos profissionais e especialistas de educação tenderem a resistir as inovações tecnológicas, o medo dos equipamentos eletrônicos, medo de perder o emprego, ou ser substituído pelo computador (LIBÂNEO, 2001).

Outro fator causador de problemas na educação em nosso país é o despreparo do professor. As universidades formam mal os futuros professores, que por sua vez formam mal os seus alunos. Poucas universidades brasileiras têm uma política definida em relação à formação de professores para o ensino fundamental e médio (Op cit).

A desprofissionalização da profissão influencia diretamente na sua qualidade, os baixos salários, a precária formação teórico-prática, as condições inadequadas de trabalho. Isto vai provocando uma baixa estima que toma conta do professor (Op.cit). Na França, os professores com mais tempo de trabalho recebem um salário fixo de aproximadamente 3 mil reais, e não existe diferença entre os que trabalham na educação infantil, no ensino fundamental e médio. O vestibular para o aluno ingressar na licenciatura tem uma intensa concorrência. Daí supõe-se que onde a profissão é valorizada, à procura pelos cursos de licenciatura aumenta e conseqüentemente o exercício profissional ganha qualidade (Op. cit).

1.3 – O ENSINO E APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO BRASIL

Os autores deste trabalho, na condição de alunos, acreditaram que a aprendizagem de Análise Combinatória está diretamente relacionada à maneira como este conteúdo é abordado, o que influencia diretamente na motivação do aluno.

Segundo D' Ambrósio (2004),

> É muito difícil motivar os alunos com fatos e situações do mundo atual, uma ciência que foi criada e desenvolvida em outros tempos, em virtude dos problemas de então, de uma realidade, de percepções, necessidades e urgências que nos são estranhas. Do ponto de vista de motivação contextualizada, a matemática que se ensina hoje nas escolas é morta. Poderia ser tratada como um fato histórico. (p. 31)

O professor de Matemática precisa enfrentar o desafio de despertar no aluno uma visão diferente desta disciplina, trazendo para a sala de aula situações que sejam significativas, relacionadas com o seu cotidiano.

Segundo os PCN Ensino Médio (BRASIL, 2000)

> [...] é preciso que o aluno perceba a Matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de idéias e permite modelar a realidade e interpretá-la. Assim, os números e a álgebra como sistemas de códigos, a geometria na leitura e interpretação do espaço, a estatística e a probabilidade na compreensão de fenômenos em universos finitos são sub-áreas da Matemática especialmente ligadas às aplicações. (p. 40)

Portanto, a visão do aluno sobre a Matemática, como algo alheio a sua vivência, interfere negativamente na sua aprendizagem. Pinheiro (2007) realizou uma pesquisa em Belém do Pará com 20 professores de Ensino Médio de escolas da região, sobre a prática pedagógica predominante segundo os docentes, e constatou-se que 80% dos professores afirmaram que a dificuldade mais comum entre os alunos é diferenciar os problemas que envolvem apenas o produto das combinações dos que envolvem a soma das combinações; 60% dos professores afirmaram que a dificuldade mais comum é resolver questões de Análise Combinatória que sejam puras aplicações de fórmulas; e, por último, diferenciar os casos de arranjo, dos de combinação e compreender os textos dos problemas ou das questões.

Segundo Pinheiro (2007) a maior parte dos professores admitiu que inicia a abordagem de Análise Combinatória a partir da definição seguido de exemplos e exercícios. Verificou-se também que 75% dos professores que participaram da pesquisa possui especialização na área de Matemática ou Educação e, mesmo tendo participado dos cursos de formação continuada, utilizam métodos formais nas aulas de Análise Combinatória.

Os resultados apresentados no parágrafo anterior ratificam a necessidade de investigação de abordagens diferenciadas para o estudo de Análise Combinatória.

Lupinacci; BOLTIN; HOFFMANN (2007) afirma que:

> A resolução de problemas é a parte principal da Análise Combinatória, que estuda a maneira de formar agrupamentos com um determinado número de elementos dados, e de determinar quantos são esses agrupamentos, sem precisar contá-los um a um. (p. 2)

Neste trabalho será enfatizada a abordagem de Análise Combinatória por meio da resolução de problemas.

Perrenoud (2000) afirma que as atividades de aprendizagem, responsáveis por fazer com que os alunos cresçam, são limitadas pelo tempo, espaço, cooperação dos alunos, competência do professor, etc. Ou seja, situações designadas a levar os alunos ao aprendizado podem direcionar a lugar algum, pela falta de condições suficientes, como tempo, etc.

Neste sentido Perrenoud (2000) declara que:

> Um professor experiente sabe que as atividades que cria, por mais bem concebidas e preparadas que sejam, nem sempre dão os resultados esperados. (p. 50)

Dornelas (2004) afirma que a maneira como o conteúdo é abordado pelos professores é um ponto importante, pois uma abordagem bem sucedida do Princípio Fundamental da Contagem pode facilitar todo o decorrer do trabalho. O Princípio Multiplicativo é o elemento fundamental do pensamento combinatório e das atividades que envolvem contagem, ele é a peça chave de todos os conteúdos seguintes, como as permutações, os arranjos e as combinações. O seu desconhecimento ou a sua abordagem superficial trará dificuldades de aplicação durante todo o processo de resolução de problemas.

Para Zanella (2004) é importante que na sala de aula sejam usadas estratégias e técnicas de ensino que possibilitem ao aluno descobrir o significado de tudo aquilo que lhe é proposto.

Isto reforça a importância dada às técnicas e aos recursos utilizados para o ensino de Matemática e principalmente de Análise Combinatória. Estas técnicas precisam se adequar ao conteúdo matemático proposto, e a adequação destas pode ser facilitada quando se utiliza outro recurso como o livro paradidático ou algum material concreto.

CAPÍTULO II O LIVRO PARADIDÁTICO

2.1- INTRODUÇÃO

O grande diferencial nesse trabalho é a criação e apresentação de um livro paradidático. A sua escolha é justificada a partir do momento que ele se torna uma alternativa aos métodos tradicionais de ensino da Matemática como, por exemplo, aulas expositivas seguidas de exercícios em livros didáticos. O livro paradidático em sua constituição procura atribuir significância aos problemas propostos, usando narrativa e contextualizando os mesmos.

Em seu trabalho sobre a importância da narrativa no ensino da Matemática Cruz (2003) diz:

> Já que a ação humana é voltada para o estabelecimento do significado, é possível que, para o aluno, fique a impressão de que a Matemática, quando reduzida a um conjunto de técnicas, não tem conexões com a realidade, com a ação. A sensação de que a Matemática é impessoal também pode ser minimizada pela utilização das narrativas. p. 2

Cruz (2003) também cita que a narrativa no ensino da Matemática é um instrumento interpretativo de padrões, pois, por meio de uma história, o incomum pode ser compreendido. E também são fontes inesgotáveis para a produção de significado, por isso as narrativas são tão importantes e deveriam, na opinião do autor, ser utilizadas nas aulas de Matemática.

O livro paradidático não é amplamente utilizado em sala de aula, como pode ser constatado pelos autores do projeto durante todos os anos de estudo, além dos períodos de estágios em escolas públicas e particulares. Segundo a editora Moderna[10], que, quando publicava, os livros paradidáticos eram adotados pelas escolas, muitos professores lançam mão deles para a preparação e aplicação de conteúdos. DALCIN (2002) conta sua experiência na utilização desse material:

> Uma de minhas primeiras experiências com esses livros deu-se por meio do enredo do livro “Histórias de sinais”. Adaptei esse enredo para turmas de 6ª. série. Apelando para a imaginação dos alunos, percebia que os alunos pareciam aprender mais rápido com a utilização dos recursos da história e

[10] A editora Moderna hoje não possui livros paradidáticos em seu catálogo.

> com o incentivo à imaginação. Em outras experiências realizadas com adultos e adolescentes, essa percepção parecia se confirmar. (p. 3)

Além de uma abordagem mais lúdica o livro paradidático também introduz a interdisciplinaridade segundo SANCHES (2007).

2.2 – BREVE HISTÓRICO DO LIVRO PARADIDÁTICO NO BRASIL

Considera-se como os precursores de livros paradidáticos de Matemática no Brasil a obra: *Aritmética da Emília*, de Monteiro Lobato (1935), e *O homem que calculava*, de Malba Tahan (1939)[11], conforme DALCIN (2002). Nessas obras vemos a intencionalidade de desenvolver o conteúdo matemático dentro do contexto de uma história, a valorização das ilustrações como recurso pedagógico, o cuidado com relação entre símbolos matemáticos e uma linguagem verbal que facilitasse a compreensão do aluno, além de jogos e enigmas (DALCIN, 2002, p. 19).

As características citadas acima são também notadas nos paradidáticos que a partir da década de 80 foram lançados.

Na década de 70, com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – Lei nº 5692/71, que determinava o uso de textos literários nos currículos escolares, a Editora Ática se tornou a pioneira nesse sentido, com as coleções *Bom Livro*, *Vaga-lume* e *Para gostar de ler,* que apresentava como novidade os suplementos de trabalho. MUNAKATA (1997, apud SILVA, 2007), menciona até mesmo a criação do termo paradidático.

> Reza a lenda que o termo paradidático foi cunhado pelo saudoso professor Anderson Fernandes Dias, diretor-presidente da Editora Ática, no início da década de 70. Afinal, foi a Ática que criou a primeira coleção de alcance nacional destinada a apoiar, aprofundar, fazer digerir a disciplina muitas vezes aridamente exposta no livro didático. (p. 8)

Além da Editora Ática, outras, como a Atual, Moderna, a FTD, a Saraiva e a Scipione também lançaram, a partir do final da década de 70, coleções de paradidáticos, que não atingiam todas as disciplinas (somente Língua Portuguesa e

[11] Pseudônimo do professor Júlio César de Mello e Souza.

História), mas na década de 80 houve a expansão dos livros paradidáticos para outras disciplinas escolares.

Os primeiros livros paradidáticos em Matemática foram editados em 1986. Foram as coleções “Vivendo a Matemática”, da editora Scipione, e “A Descoberta da Matemática”, da editora Ática.

A coleção “A Descoberta da Matemática” tem como principal autora a professora Luzia Faraco Ramos, que em 1979 foi convidada pela editora Ática a produzir livros que unissem o uso da linguagem matemática e da língua portuguesa, contando uma história com personagens adolescentes. Em entrevista à editora Ática[12] a professora fala sobre a importância dos paradidáticos no ensino da Matemática:

> “Acredito que a série trouxe uma brisa renovadora para o ensino da Matemática. Quando estava lecionando, procurava melhores caminhos para que meus alunos compreendessem os conceitos, a partir de nossas vivências em salas de aula. Com certeza, isso não tem nada a ver com decorar fórmulas de modelos prontos. Logo descobri que o conhecimento só é real se construído em cada aluno. O meu desejo é de que cada livro da série possa ser um caminho através do qual o aprendizado fique recheado de experiências e descobertas, de uma forma mais agradável e natural.” (RAMOS, 2008, p.1)

A mesma autora também menciona processo de confecção de um paradidático:

> A pedra fundamental de cada obra é o conteúdo matemático que vou desenvolver. O passo seguinte é imaginar onde esse tema pode aparecer no cotidiano das pessoas. Procuro incluir também um outro plano em todas as histórias: a construção da consciência ambiental, abordando aspectos ecológicos como pesca não-predatória, plantio de grama, despoluição das águas dos rios e dos mares. Visualizando essas situações, vou construindo os personagens e a trama que poderá envolvê-los. Assim, sinto que estou humanizando a Matemática. (RAMOS, 2008, p.1)

Na década de 90 outras coleções foram somadas às já existentes de livros paradidáticos de Matemática. Dentre os de maior circulação nacional, estão: “*Contando a História da Matemática*”, cujos volumes são: *Dando corda na trigonometria* (2000), *Equação: O Idioma da Álgebra* (1999), *História da equação do 2º grau* (1999), *História de Potências e Raízes* (2000), *Jogando com a Matemática* (1999), N*úmeros com Sinais: Uma Grande Invenção* (2000), da editora Ática, “*Para que serve a Matemática?*”, com: *Semelhanças* (1992), *Álgebra* (1992), *Frações e*

[12] <http://www.atica.com.br/entrevistas/?e=135>, acessado pela última vez em: 08/11/08.

números decimais (1992), *Ângulos* (1992), *Proporções* (1992), *Equações do 2º grau* (1992), *Geometria* (1992), *Estatística* (2001) e *Números Negativos* (1992), da editora Atual, "O *Contador de História e outras histórias de Matemática*", com: *A Jaçanã* (1999), *A Missão* (1998), *A Profecia* (1997), *A Revelação* (1997), *O Aprendiz* (1997), *Os Exploradores* (1999), *Os Olímpicos* (1999) e *Os Peregrinos* (1998), da editora FTD e "*Problemas Matemáticos*" com: *E aí, algum problema?* (1997), *Problemas à vista!* (1998), *Vai um probleminha aí?* (1998) e *Problemas? Eu tiro de letra!* (1998) - da editora Moderna.

Após a década de 90, já em 2001, a editora Átomo lança o paradidático "*Diálogo Geométrico"* de autoria de Hélio Cyrino, enquanto as coleções "*Vivendo a Matemática*" e "*A Descoberta da Matemática*" foram reformuladas e relançadas em 2000 e 2001, respectivamente.

1.3 – CLASSIFICAÇÃO DOS LIVROS PARADIDATICOS.

A Classificação dos paradidáticos é abordado na dissertação "*Um olhar sobre o paradidatico de Matemática" de Dalcin (2002).* Nesse trabalho a autora classifica os livros paradidáticos em três categorias apresentadas a seguir:

Os Paradidáticos de Matemática no contexto de narrativas ficcionais –

Desenvolvem um enredo segundo uma sequência temporal que organiza os acontecimentos e dita o ritmo e a coerência da história; apresenta personagens que se relacionam ao longo do enredo; apresentam conflito ou antagonismo entre o bem e o mal, a coragem e a covardia, o medo e a segurança, e localiza-se em um espaço temporal definido, quase que num livro de literatura, como os contos de fadas.

As imagens estão presentes em todos os livros paradidáticos que fazem a opção pelo trabalho com narrativas. Nas narrativas ficcionais encontramos as **ilustrações imbricadas** (figuras ou desenhos encaixados no texto para o auxílio da compreensão), **ilustrações de contextualização** (tem a intenção de representar alguma cena narrada no texto escrito, sem exercerem alguma função específica no processo de compreensão do conteúdo matemático) e **as ilustrações de visualização** (auxiliam na compreensão dos conteúdos matemáticos e trazem no seu interior a simbologia matemática).

Os Paradidáticos de Matemática no contexto de narrativas com enfoque histórico - A história da Matemática é vista como uma ferramenta que, associada ao uso de uma linguagem simples, da presença de ilustrações, problemas curiosos e desafios, proporcionará uma leitura prazerosa e possibilitará os conhecimentos matemáticos dos alunos.

As imagens também estão presentes como **ilustrações imbricadas** (figuras ou desenhos encaixados no texto que o articulam com a simbologia matemática), **ilustrações de contextualização** (têm a intenção de representar alguma cena narrada no texto escrito sem exercerem alguma função específica no processo de compreensão do conteúdo Matemático) e **as ilustrações de visualização** (auxiliam na compreensão dos conteúdos matemáticos e trazem no seu interior a simbologia Matemática) e **ilustrações ornamentais** (figuras e desenhos que são associados à leitura, mas não possuem um significado matemático).

Os Paradidáticos de Matemática no contexto das abordagens pragmáticas – Desenvolvem um texto que enfatiza o relacionamento da Matemática com atividades muitas vezes desenvolvidas em outras atividades sociais, estudando a Matemática e suas aplicações em outras práticas, em especial, nas do cotidiano, em seus aspectos formais, visando a uma maior aproximação entre os estudos matemáticos mais atuais, desenvolvidos pelos matemáticos, e a Matemática escolar.

As imagens presentes nessa classificação são **ilustrações imbricadas** (figuras ou desenhos encaixados no texto que o articulam com a simbologia matemática); **ilustrações de contextualização** (têm a intenção de representar alguma cena narrada no texto escrito sem exercerem alguma função específica no processo de compreensão do conteúdo Matemático) e **as ilustrações de visualização** (auxiliam na compreensão dos conteúdos matemáticos e trazem no seu interior a simbologia Matemática).

Pode-se classificar o livro paradidático produzido para esse projeto como sendo um paradidático no contexto das abordagens pragmáticas, pois, embora faça alusão ao contexto histórico do tema abordado, Análise Combinatória, seu grande trunfo é articular situações do dia-a-dia dos alunos com os temas matemáticos, como preconiza uma abordagem pragmática.

CAPÍTULO III RELATO DA PESQUISA

3.1 – ELABORAÇÃO DO LIVRO PARADIDÁTICO.

O livro paradidático é o grande diferencial no desenvolvimento desse projeto. Esse livro foi idealizado e preparado pelos professores em formação. Após pesquisas sobre o tema paradidático, confeccionou-se um livro de estrutura simples, que aborda o tema Análise Combinatória com exemplos do dia-a-dia, ilustrado com figuras e linguagem coloquial.

No livro, a maioria das questões foi proposta de modo que inicialmente os alunos as resolvessem sozinhos, seguindo-se a apresentação da resolução acompanhada das devidas explicações. Esta decisão é justificada pela crença dos autores desse trabalho de que o livro paradidático é um auxílio utilizado para compreender o tema abordado pelo mesmo, e que na maioria das vezes este seria usado em momentos de trabalho individual, nos quais não se poderia recorrer imediatamente ao auxilio do professor.

Após o término do livro e algumas correções, o mesmo foi submetido a uma análise de quatro professores de Matemática e sentiu-se a necessidade de um teste exploratório para verificar a adequação dos problemas propostos, da linguagem utilizada no texto, da organização gráfica, uma vez que a apresentação pode interferir na motivação para a leitura.

Após as alterações realizadas no livro paradidático com base nas observações colhidas durante o teste exploratório, realizou-se a experiência com o uso do livro paradidático em uma turma do terceiro ano do Ensino Médio.

3.2 – O TESTE EXPLORATÓRIO

3.2.1 – RELATO

O teste exploratório ocorreu nos dias 27/06/08, 18/07/2008 e 25/07/2008, em uma turma de terceiro período da Licenciatura em Matemática de uma instituição de ensino superior de Campos dos Goytacazes, no turno diurno. Optou-se pela escolha deste nível de ensino por julgar que tais alunos possuem um grau de conhecimento próximo dos alunos do terceiro ano do Ensino Médio.

Nesse primeiro encontro, compareceram seis alunos, e, dentre esses, somente dois tinham conhecimento sobre Análise Combinatória. O fato de poucos alunos já terem estudado o assunto contribuiu para verificar a eficácia das três primeiras atividades propostas, já que todos conseguiram achar os resultados corretos.

Inicialmente o projeto foi apresentado. Em seguida, ressaltou-se a importância da história da Matemática, enfatizando que ela contribui para uma melhor compreensão das necessidades que levaram os homens àquelas descobertas e/ou construção de teorias matemáticas.

Após este momento, esclareceu-se que a escolha de um livro paradidático para estudar Análise Combinatória deveu-se ao fato de que o mesmo possibilita um estudo mais abrangente e completo, inserido num contexto histórico, uma vez que os livros paradidáticos geralmente abordam um só tema, além da permissão editorial para utilizar uma linguagem mais coloquial, pois se trata de uma publicação escolar voltada para um público específico.

Dando prosseguimento ao encontro, foi realizada pelos professores em formação a leitura das páginas 2 a 5, que contavam a história do quebra-cabeça *Stomachion e* de seu criador Arquimedes. Um dos professores em formação prosseguiu a leitura da página 6.

A partir da página 7, os alunos fizeram a leitura do livro coletivamente.

Os alunos resolveram a questão das roupas (Supondo que você tenha 2 calças, 2 bermudas, 2 camisetas, 2 camisas de manga e 1 tênis de quantos modos diferentes você poderia se vestir?) e indagou-se sobre o modo como fizeram, solicitou-se que um aluno escrevesse no quadro branco a sua resolução a fim de desencadear uma discussão sobre a solução apresentada (Foto 3).

Observou-se que todos os alunos resolveram multiplicando 4 (número de peças que cobria o tronco) por 4 (número de peças que cobria as pernas) por 1 (número de peças que cobria os pés (Foto 2), alguns alunos usaram o diagrama de árvore (Foto 1), por iniciativa própria, já que o tema diagrama de árvore ainda não tinha sido abordado.

Foto 1: Resolução 1 da questão das roupas por meio do diagrama de árvore

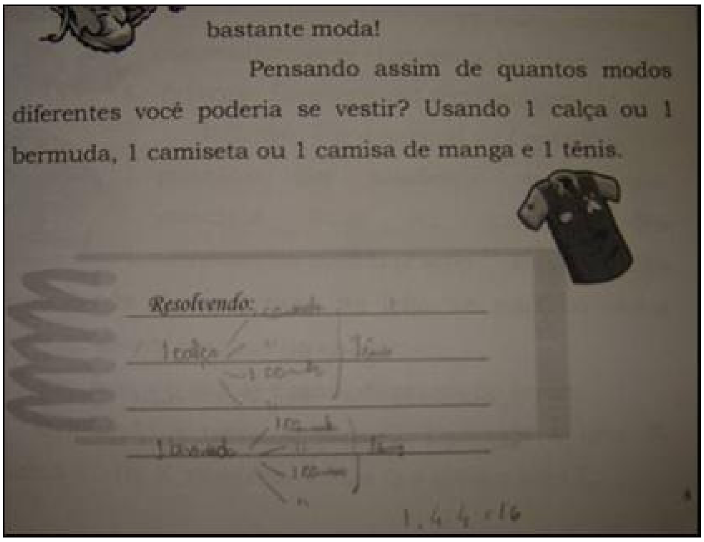
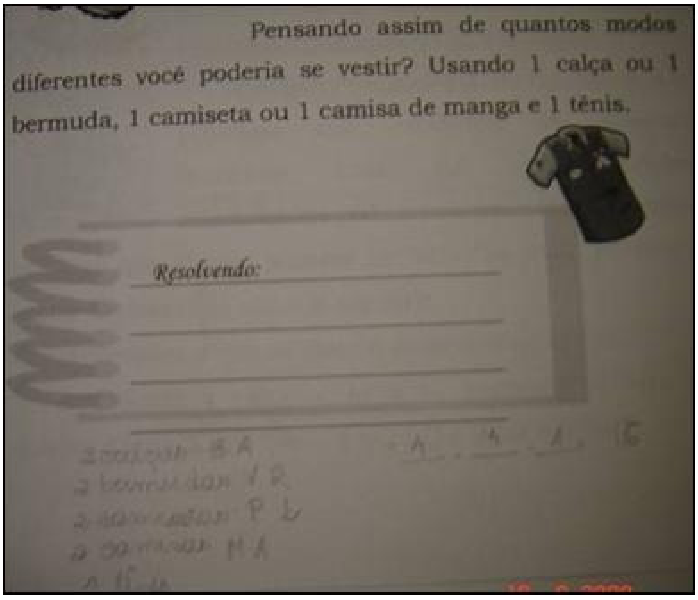
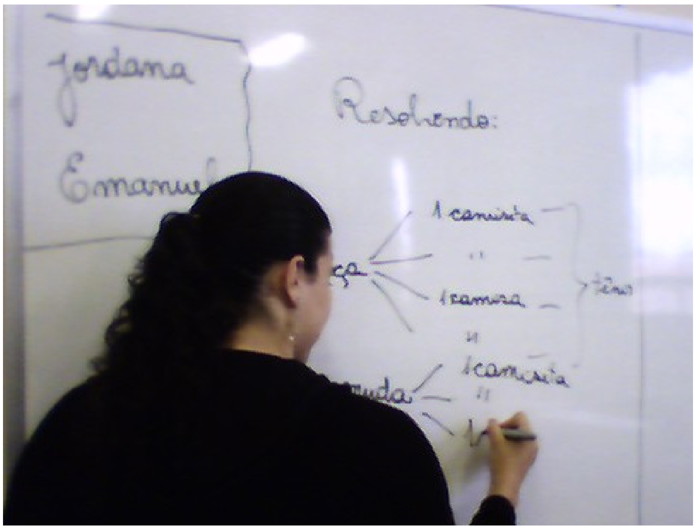


Foto 2: Resolução 2 da questão das roupas



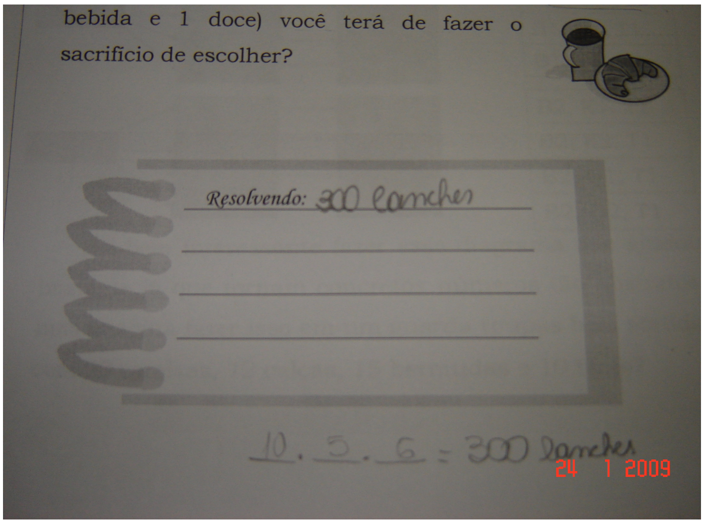
Na questão das roupas, alguns alunos usaram novamente o diagrama de árvore (Foto 3). No problema seguinte resolveram sem o diagrama, demonstrando assim que tinham conhecimento não formalizado sobre o Princípio Fundamental da Contagem. Este conhecimento foi institucionalizado pela apresentação e definição do mesmo.

Foto 3: Resolução 1 da questão das roupas por meio do diagrama de árvore



Na questão dos lanches (Imagine-se numa cantina sortida, e com uma boa mesada para gastar. São 10 tipos de salgados, 5 tipos de bebida e 6 tipos de doces, entre quantos apetitosos lanches completos (1 salgado, 1 bebida e 1 doce) você terá de fazer o sacrifício de escolher?) os alunos resolveram sem o diagrama de árvore (Foto 4), demonstrando assim que tinham conhecimento não formalizado sobre o Princípio Fundamental da Contagem.

Foto 4: Resolução 2 da questão das roupas por meio do diagrama de árvore.



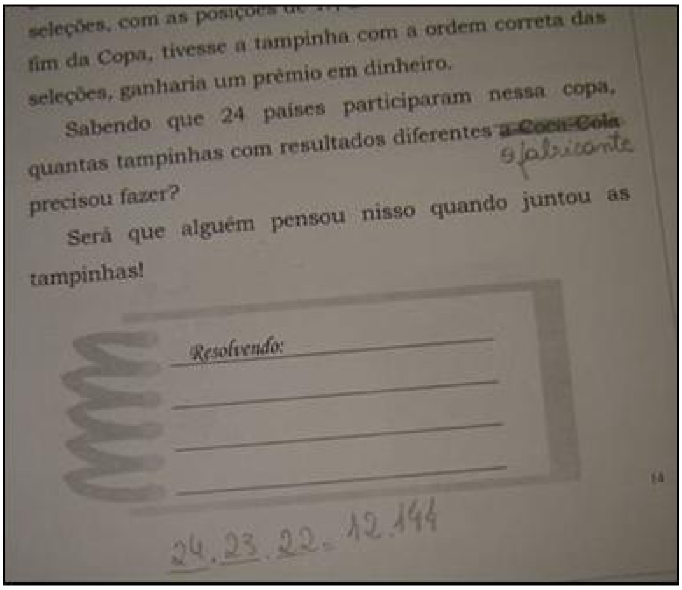
O problema seguinte do livro paradidático tratava da quantidade de códigos de barra possíveis de serem construídos com 13 dígitos. Antes de pedir para os alunos resolverem a questão seguinte, questionou-se o porquê do resultado de 10 trilhões de etiquetas, ou 10^{13} possibilidades de códigos de barras distintos.

Todos compreenderam e explicaram que havia 10 algarismos para a primeira opção, 10 algarismos para a segunda opção, 10 algarismos para a terceira opção até a décima terceira opção, o que daria 10^{13} possibilidades.

No problema seguinte do livro paradidático no qual nem todos os elementos seriam utilizados, surpreendeu a solução apresentada pelos alunos: todos resolveram corretamente, explicando com clareza a estratégia utilizada na resolução[13]. Esperava-se que houvesse mais dificuldades por parte dos alunos quando fizessem a passagem do uso de todos os elementos para uma atividade em que somente alguns seriam usados.

[13]A argumentação de um aluno para este problema: *escolhido "1 na primeira, logo a segunda seria com menos 1, e a terceira com menos 2".*

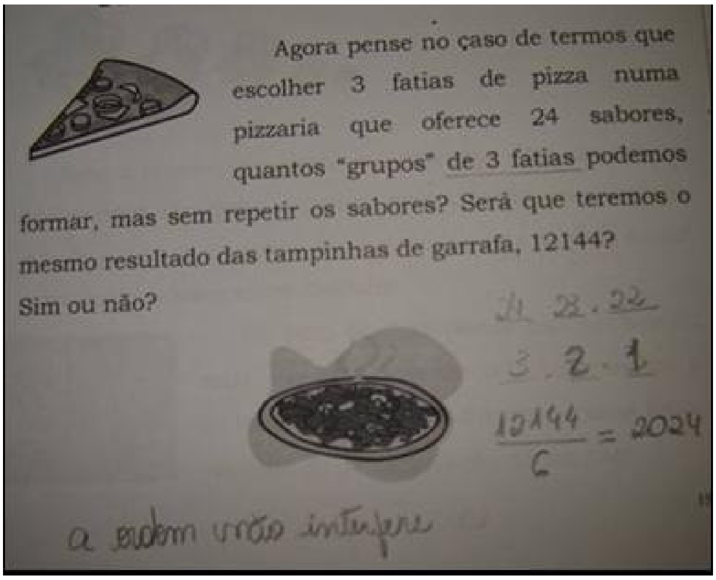
Foto 5: Resolução do problema das tampinhas de garrafa



A próxima situação abordava a seguinte questão: quantos grupos de 3 fatias de pizza com sabores diferentes podemos formar dentre 24 opções de sabores? Inicialmente os alunos não conseguiram compreender que a estratégia de resolução não poderia ser igual à usada na questão dos times de futebol. Eles afirmaram: *"se temos 24 sabores e vamos comer só 3, é igual ao time de futebol*, *pois os valores são os mesmos"*

Antes de ler a solução apresentada no livro, interrogou-se aos alunos: "*Será que escolher Calabresa, portuguesa e mista é diferente de escolher mista, portuguesa e Calabresa?*" Logo responderam que não, esses seriam o mesmo prato. Os professores em formação esclareceram que, no caso de termos Brasil no 1º lugar, França no 2º e Itália no 3º, era diferente de termos França no 1º, Itália no 2º e Brasil no 3º. Os alunos logo concluíram que a diferença era a ordem que importava em uma situação, mas não na outra.

Foto 6: Resolução do problema das pizzas



Os alunos não compreenderam a solução exposta no livro, que afirmava que a quantidade 24x23x22 deveria ser dividido por 6. Resolver essa questão foi uma opção apropriada, já que era visível a dificuldade dos alunos. Deste modo, o professor em formação desenhou no quadro 6 pratos com as 3 fatias de pizza com cores diferentes, representando sabores diferentes, somente mudando a posição das fatias para que percebessem que representavam a mesma opção, e que a cada 3 fatias podemos montar 6 pratos "diferentes", mas que representam a mesma situação.

O problema da criação de senhas com os nomes dos alunos, suscitou muitas dúvidas sobre a repetição de letras, pois os alunos não sabiam se contavam 2 vezes 2 letras "a" no mesmo nome, por exemplo. Também houve dúvidas, porque o texto não explicitava, por exemplo, se o nome do aluno tivesse 7 letras, ele deveria criar uma senha com 7 letras, o que não permitiria repetir nenhuma delas, a não ser as que já se repetiam naturalmente em cada nome. Devido às limitações de tempo, a discussão sobre esta solução ficou para o próximo encontro.

Foto 7: Resolução 1 do problema das senhas

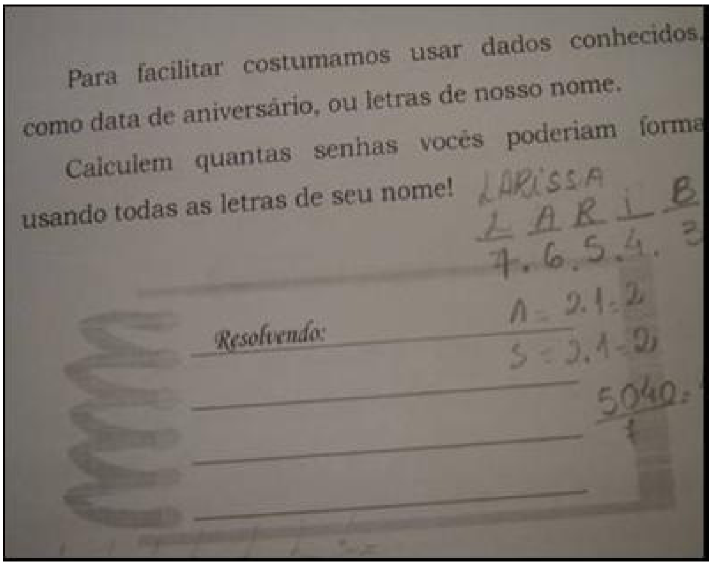
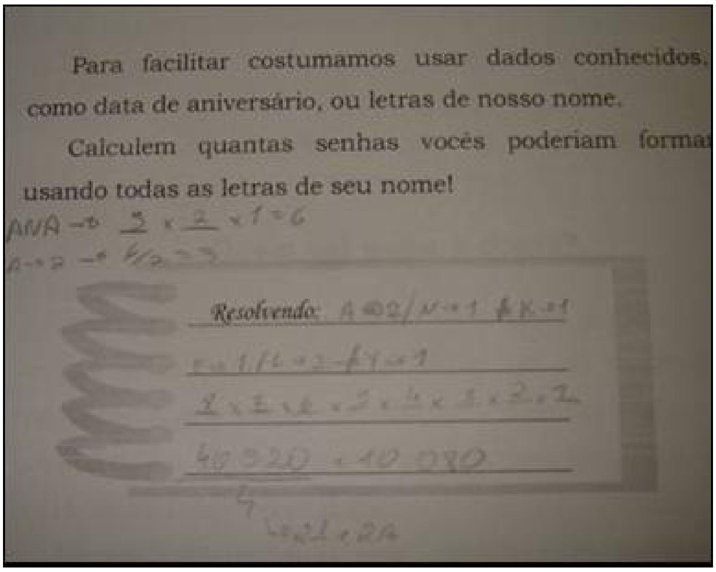


Foto 8: Resolução 2 do problema das senhas



No encontro ocorrido no dia 18 de julho de 2008, retomou-se a questão das senhas formadas pelas letras dos nomes dos alunos.

Uma aluna foi ao quadro explicar sua resposta. Ela escreveu 7x6x5x4x3x2x1, porque seu nome tinha 7 letras, e o produto obtido 5040 foi dividido por 4, o que resultou 1260. A aluna esclarece que não sabia se estava correto, essa divisão foi feita porque, como ela afirmou *"tenho o "e" e o "l" repetidos 2 vezes"*. Perguntada sobre o porque da divisão de 4, a aluna respondeu que esse era: *"o número de letras repetidas"*.

Foto 9: Resolução 1 no quadro do problema das senhas

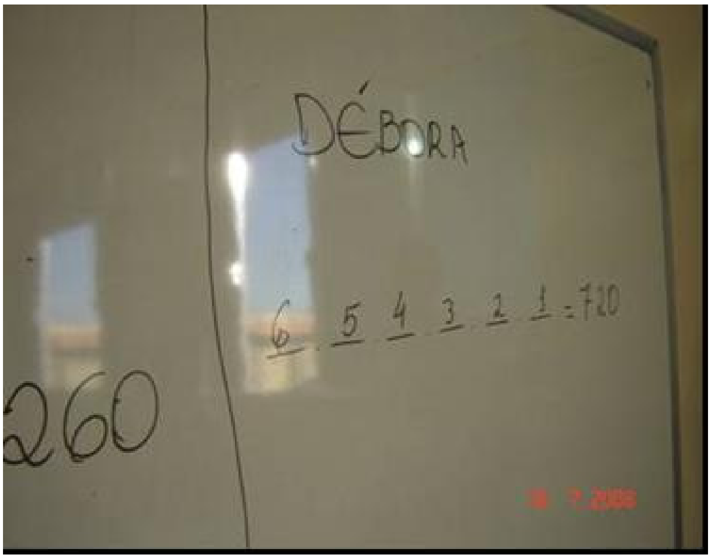
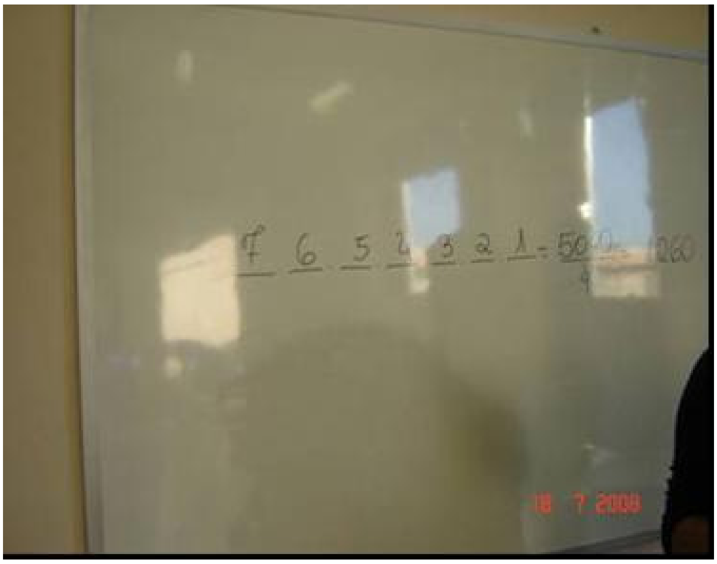


Foto 10: Resolução 2 no quadro do problema das senhas



Solicitou-se que outra aluna, (Foto 9) também viesse ao quadro e resolvesse com o seu nome, o que foi bastante tranqüilo, pois, não havia repetição de letras em seu nome.

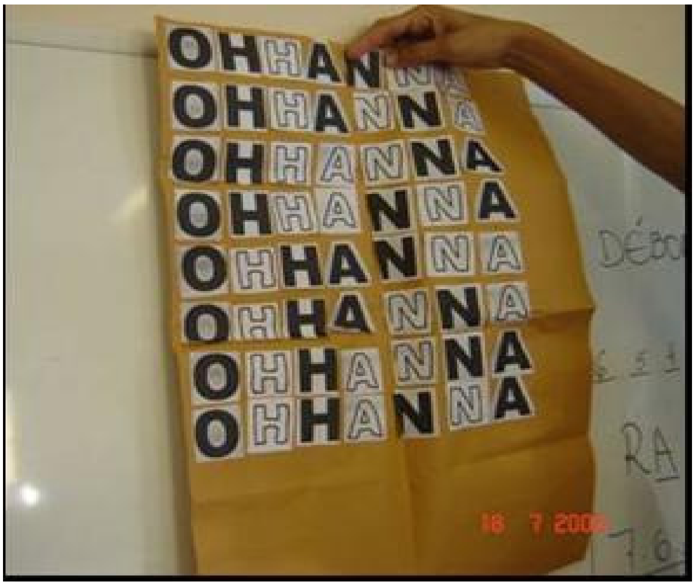
Uma aluna também resolveu no quadro da mesma maneira que a primeira, dividindo o produto 7x6x5x4x3x2x1 por 4 e usando a mesma justificativa (Foto 10).

Foi percebido que os alunos sentiram a necessidade de dividir para eliminar as repetições, mas que não compreenderam a relação entre a quantidade de elementos repetidos e o número pelo qual deveriam dividir o produto obtido.

Explicou-se no exemplo, que quando se dividia por 4, significava que a cada quatro senhas criadas equivalia a uma senha.

Para clarear as idéias, um quadro (Foto 11) com o nome “OHANNAH” foi apresentado aos alunos e feita a seguinte indagação: quantas seriam as senhas criadas com esse nome, usando todas as letras e sem repeti-las? Os alunos responderam que seria o produto 7x6x5x4x3x2x1 dividido por 6, já que eram 6 letras repetidas.

Foto 11: Quadro com o nome OHANNAH



O quadro foi bem esclarecedor, pois permitiu que os alunos percebessem o porquê da divisão do número total de senhas encontradas pelo número de repetições que cada uma das letras iguais produzia. Construiu-se o quadro com as letras O, H, A e N, com um tipo de letra, e o segundo A, N, H com um outro tipo (ver Foto 11) e então fizemos as 8 possíveis senhas que a permutação dessas 7 letras criariam, para que notassem a diferença entre as letras e que mesmo com letras “diferentes”, na realidade criavam a mesma senha. Com esse material os alunos conseguiram entender que se fazia a divisão pelas permutações que cada letra repetida podia produzir, formando a mesma senha: logo a letra A podia se permutar 2 vezes, assim como a letra H e a letra N, criando assim 2x2x2, ou seja, 8 senhas que tinham letras com tipos de letras diferentes mas que formavam a mesma palavra.

Para confirmar a compreensão apresentou-se um exemplo com o nome RAFAELA, e os alunos responderam que seria o produto 7x6x5x4x3x2x1 dividido por 6, que é a permutação de 3, já que eram 3 letras “A” se permutando. Fizemos no quadro 6 possíveis senhas com a permutação dos 3 “A” e que na realidade são a mesma senha.

Foto 12: Exemplo referente ao caso das senhas

Apresentou-se a definição de fatorial[14] de um número, para abreviar os cálculos nas tarefas seguintes.

Os alunos leram o texto que descrevia uma situação e a solução desta, na qual oito amigos saíram juntos, mas somente três pagariam a conta. Para verificar se os alunos haviam compreendido a solução colocou-se oralmente a seguinte questão: e se um dos 8 amigos tivesse esquecido a carteira em casa e não pudesse pagar, quantos grupos poderíamos formar? Eles deveriam fazer a divisão para o pagamento da conta, só que com um colega a menos, porque ele nesse dia esqueceu a carteira em casa.

Essa atividade foi importante para notarmos as lacunas na compreensão dos alunos. Esperava-se que os alunos não apresentassem dificuldades, pois, já que um colega não poderia pagar, eles teriam sete possibilidades para o primeiro colega pagante, um a menos do total, seis opções para o segundo colega pagante e cinco opção para o terceiro colega pagante. Mas não foi o que ocorreu: houve respostas

[14]Calculamos fatorial de números naturais maiores ou iguais a 2 quando multiplicamos esse número por seus antecessores naturais até o número 1.

diversas para o número de possibilidades do primeiro caso, no qual só sete alunos poderiam pagar a conta; as respostas foram desde seis, dois a menos do total, até mesmo oito. Ao serem informados que as respostas estavam incorretas pediu-se que pensassem mais um pouco.

Em seguida um aluno afirmou que a resposta seria o fatorial de 7. Outro aluno disse que dividiria o fatorial de 7 por 3, não sabendo responder por que faria isso.

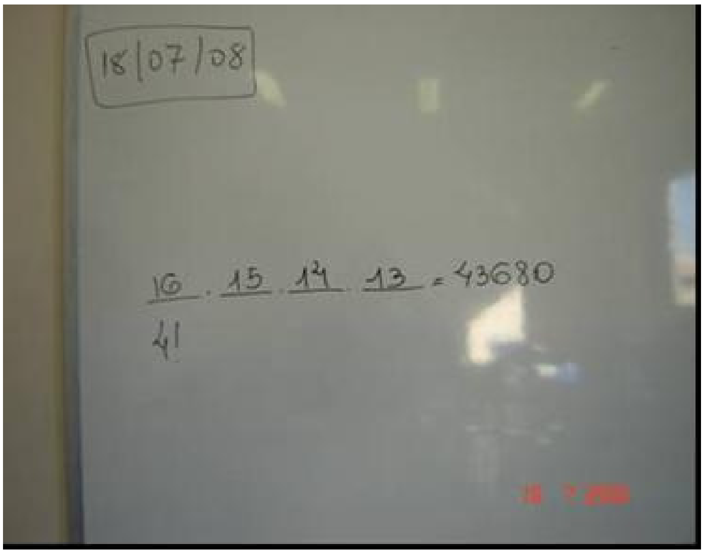
Diante das imensas dificuldades de compreensão por parte dos alunos os professores em formação resolveram a questão, buscando a participação dos alunos. Na resolução usou-se diagrama de árvore, e recorreu-se a um exemplo anterior, que foi o das pizzas.

A estratégia de abordagem deste problema foi modificada para a aplicação do livro aos alunos de Ensino Médio, pois notou-se que seria mais proveitoso que os alunos tentassem resolver antes e confirmassem por meio da leitura, suas idéias de resolução, caso tenham acertado, ou notassem onde foram seus erros, caso não conseguissem o resultado esperado.

A próxima questão tratava da criação de um CD[15] de músicas. Houve 10 minutos para eles resolverem. Ao solicitar um aluno que apresentasse a sua solução, uma aluna aceitou e explicou que como, escolheria 4 músicas em 16, ela multiplicaria 16.15.14.13 e dividiria por fatorial de 4, porque a ordem não importava. Os alunos entenderam a questão da ordem e discutiram entre si o fato de dividirem pelo fatorial de 4, porém citaram casos nos quais a ordem não importa, como por exemplo, no episódio das senhas. Nesse momento, os professores em formação intervieram e explicaram que naquela situação, a divisão pelo fatorial não ocorria porque a ordem importava, já que em uma senha com o nome JORDANA, ter o “J” no início ou no final cria senhas diferentes, logo a ordem importa nesse caso. Na realidade, os alunos perceberam que a divisão pela permutação ocorria para eliminar as repetições criadas, quando a ordem não importava ou quando temos possibilidades repetidas, que é o caso das letras da senha.

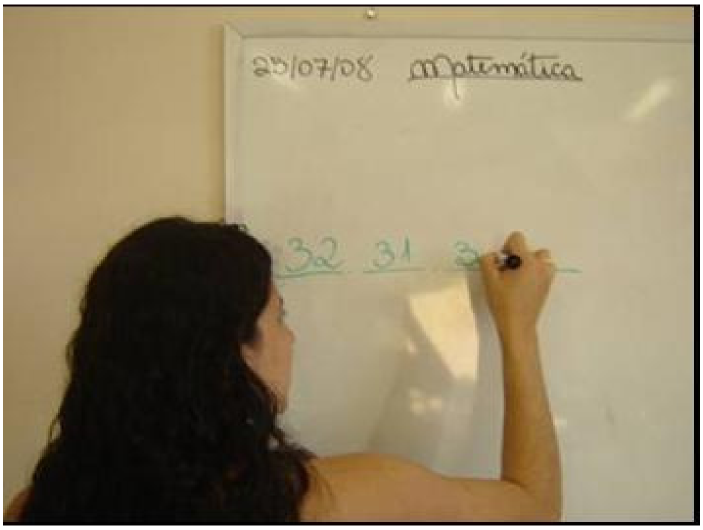
[15] Abreviação utilizada para Compact Disk

Foto 13: Resolução dos alunos, da questão dos CDs



No terceiro e último encontro, foi discutido inicialmente o problema sobre a copa do mundo, em que se supunha que podia-se mudar o resultado dos 4 primeiros lugares da Copa do Mundo de 2006. O número de possibilidade que se obteria com os 32 times participantes era o ponto da questão. Os alunos não tiveram dificuldade para resolver essa questão. A aluna que foi ao quadro resolveu multiplicando 32.31.30.29, explicando que para o primeiro lugar eles tinham 32 times, para o segundo lugar, tínhamos 31 times, para o terceiro 30 times, e para o quarto 29 times. Ressaltou que não dividíamos porque a ordem importava. Os alunos lembraram que essa questão era igual à questão das tampinhas de garrafa da primeira aula.

Foto 14: Resolução dos alunos, da questão da copa do mundo



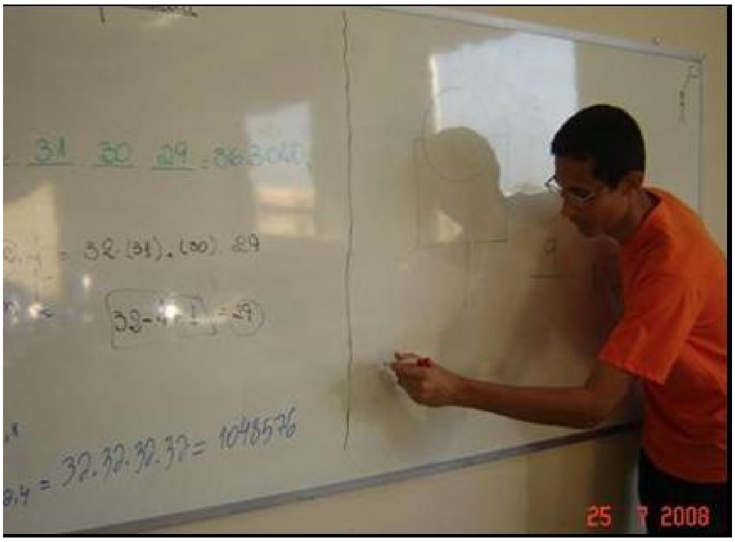
Logo após a resposta da aluna, chamou-se a atenção para o fato de não usar todos os elementos na resolução, e questionou-se o porquê de não termos 32.32.32.32, e eles responderam que isso se dava, pois, não podíamos ter Brasil, no primeiro lugar, Brasil no segundo lugar, Brasil no terceiro lugar e Brasil no quarto lugar.

Após as atividades, foram apresentadas as definições de Arranjo, Permutação e Combinação seguidas da demonstração das fórmulas das mesmas. Resgataram-se junto aos alunos as situações do livro paradidático que se enquadravam na definição de cada um dos tipos de agrupamentos definidos, enfatizando-se que nas permutações usávamos todos os elementos do conjunto; quando a ordem não importava e não usávamos todos os elementos era uma combinação.

Os agrupamentos do tipo Combinação e Arranjo têm em comum o fato de não utilizar todos os elementos na contagem, e diferenciam-se pelo fato de no primeiro a ordem não importar e no segundo sim. O modo para eliminar situações repetidas criadas pela importância dada às ordens nos arranjos é dividir o total de agrupamentos obtidos pelo cálculo relativo ao Arranjo, pela Permutação do número de elementos que se repetiam. Por esse motivo, as combinações nada mais são que arranjos divididos por permutações.

O exemplo com os jogos da mega-sena foram usados para ajudar a compreender os arranjos, e os alunos responderam às questões colocadas.

Foto 15: Exemplo da mega-sena apresentados pelos professores em formação



Mesmo após explicação das fórmulas e de relacioná-las ao contexto das atividades já resolvidas, notou-se a dificuldade dos alunos em compreender o significado dos termos presentes nas fórmulas. Muitos exemplos foram resolvidos até que os alunos compreendessem.

A parte da aula relativa à familiarização, compreensão das fórmulas e também a compreensão da dedução das mesmas ocupou mais tempo do que o previsto, pois era esperado que o nível de escolaridade dos alunos possibilitasse uma compreensão em menor tempo.

Em seguida, foram abordados os casos de permutação circular e soma e multiplicação de permutações.

Para discutir a permutação circular, foi apresentado a seguinte questão: imaginem um grupo de pessoas que na cerimônia de abertura da olimpíada representará os círculos do símbolo olímpico; suponhamos que cada círculo seja formado por 6 pessoas de mãos dadas. De quantas maneiras diferentes cada círculo pode ser arrumado?

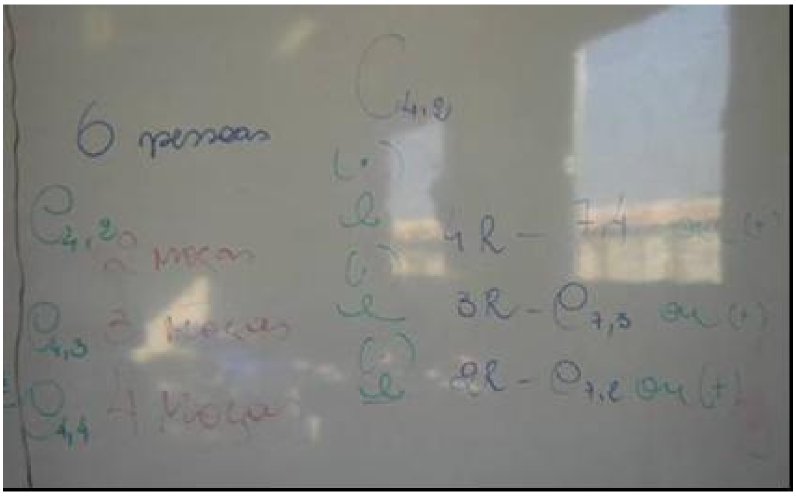
Inicialmente os alunos não encontraram um modo para resolver, discutiam sobre a ordem importar ou não, sabiam que todos os elementos seriam usados, mas não conseguiam pensar em permutação. Os professores em formação perguntaram ao grupo quantas possibilidades havia para ocupar o primeiro lugar no círculo. Os alunos responderam seis. Diante da resposta errada dos alunos, um professor em formação disse que deveriam pensar não em quantas pessoas havia, mas sim em quantas posições a primeira pessoa poderia ocupar, pois num circulo não há posição em destaque, em contraste quando se pensa em uma fila, na qual há 1º lugar, 2º lugar, 3º lugar, etc, o que pareceu ser compreendido pelos alunos.

Prosseguindo, os alunos foram interrogados quanto ao número de possibilidades para o segundo lugar no círculo. Após pensarem, um aluno respondeu uma possibilidade, justificando que a única posição que ela tinha no círculo era ao lado da primeira. Continuando perguntou-se aos alunos quantas possibilidades haviam para a terceira posição na roda; outro aluno respondeu que eram três posições e ele justificou dizendo que havia uma posição entre o primeiro lugar e o segundo lugar, outra posição ao lado do segundo lugar e a terceira posição ao lado do primeiro lugar. Neste momento, os professores em formação optaram por fazer desenhos no quadro representando um círculo com seis lugares em destaque. Esta "materialização" das idéias significou um apoio importante para que os alunos conseguissem pensar em mudanças de lugares.

A próxima situação abordava o problema da composição de grupos de seis pessoas para limpar a quadra, escolhidas dentre sete rapazes e quatro moças de modo que houvesse pelo menos duas moças. A decisão dos professores em formação de resolver esta questão junto com os alunos foi acertada, pois aos poucos eles relembravam alguns conceitos já construídos e escolhiam corretamente o tipo de agrupamento adequado para a resolução de cada problema.

Durante a resolução citada no parágrafo anterior, os professores em formação observaram que, ao responder às perguntas dos mesmos, os alunos compreenderam que, para resolver problemas de Análise Combinatória, não basta conhecer as fórmulas dos agrupamentos e saber identificar em que situação cada um é utilizado. É necessário entender a dinâmica de cada problema e combinar adequadamente as fórmulas conhecidas.

Foto 16: Resolução dos professores em formação, da questão da quadra



3.2.2 - ALGUMAS CONCLUSÕES

Os três encontros foram muito proveitosos não só como teste do material – o livro paradidático – mas também no aspecto didático, ou seja, na preparação para melhor explicar dúvidas que iam surgindo. Sabe-se que cada turma é diferente de outra, suas motivações, seus interesses, e suas experiências, e isso foi percebido nos encontros com a turma do 3º ano do Ensino Médio, que será relatado a seguir.

3.3 – APLICAÇÃO DO LIVRO PARADIDÁTICO NA TURMA DO ENSINO MÉDIO

3.3.1 – ESCOLHA DOS SUJEITOS DA PESQUISA

Em alguns trabalhos (Projeto Fundão, Lopes, 2004) ressalta-se a importância de se introduzir o pensamento combinatório desde a infância. O objetivo desse trabalho é verificar de que modo a utilização de um livro paradidático contribuirá para a compreensão do tema matemático Análise Combinatória.

Por esse motivo escolheram-se como sujeitos para esta pesquisa, alunos do Ensino Médio, pois é neste nível que o tema costuma ser abordado pela primeira vez. Em contato com os professores de Matemática da escola escolhida para aplicar o projeto, verificou-se que os alunos não tinham estudado Análise Combinatória no

2º ano do Ensino Médio, apesar de constar nos currículos, e tampouco estudariam o tema no 3º ano, pois não haveria tempo. Em vista disso, a turma do 3º ano foi escolhida, por se crer que haveria mais interesse de sua parte, já que o curso oferecido pelos professores em formação, estruturado para a aplicação do livro paradidático em questão, além de fornecer certificado de participação, o que é importante para os que terminarão o Ensino Médio e entrarão no mercado de trabalho, também seria um reforço para os exames de vestibular que a maioria prestaria.

Os professores em formação decidiram que 15 alunos seria um número ideal para uma boa avaliação do trabalho. Posto isso disponibilizaram-se essas 15 vagas para 5 turmas de 3º ano (período da manhã), perfazendo 3 vagas para cada turma. Durante a oferta das vagas houve uma grata surpresa, pois ao contrário do que se imaginava, mais de 3 alunos por turma tiveram interesse em participar na atividade, e houve necessidade de pedir que decidissem entre eles quais seriam os escolhidos.

3.3.2 – RELATO

O primeiro dos dois encontros previstos ocorreu no dia nove de agosto de 9h às 12h. Inicialmente os alunos foram interrogados sobre o que sabiam a respeito de livro paradidático, e nenhum deles conhecia. Diante deste fato, houve uma breve explicação do que vem a ser livro paradidático e de seu objetivo no estudo de conteúdos escolares. No caso deste projeto, ressaltou-se que no livro paradidático, que, geralmente, aborda um único tema matemático, é possível explorar-se mais profundamente, incluindo o contexto histórico no qual se insere o conteúdo, além de ilustrações que cumprem funções esclarecedoras[16] e situações cotidianas que auxiliam, muitas vezes, na compreensão do tema.

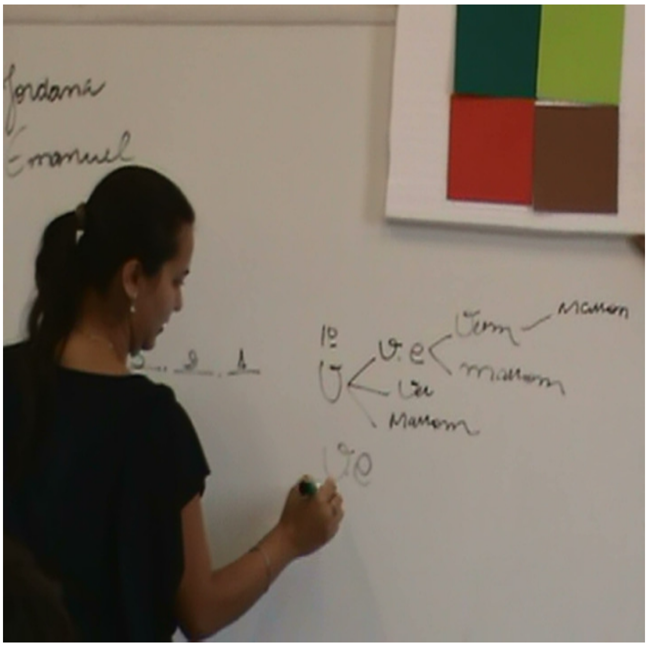
Os alunos informaram que o conhecimento deles a respeito de Análise Combinatória se restringia a noções de probabilidade utilizadas em Biologia.

Para que os alunos pudessem compreender a história do quebra-cabeça denominado *Stomacchion,* relatada no inicio do livro, foi idealizada uma atividade com um quadrado formado por 4 quadrados menores (Foto 17), em E.V.A.

[16] Ver no capítulo 2

montados em um isopor e presos por alfinete, para poder mudar de lugar cada um deles.

Foto 17: Atividade com quadrados



Perguntou-se aos alunos de quantas maneiras diferentes se poderia montar um quadrado com cores diferentes. Alguns responderam 4 maneiras, outros responderam 16 maneiras, porque cada quadrado poderia ocupar 4 lugares diferentes. Somente com a ajuda dos professores em formação, os alunos entenderam que para o 1º quadrado havia 4 cores possíveis, já para o 2º quadrado havia 3 cores possíveis, para o 3º quadrado havia 2 cores possíveis e para o 4º quadrado só havia 1 cor possível, desse modo o número de maneiras de montar esse quadrado seria: 4.3.2.1. Para que entendessem o porquê da multiplicação montou-se um diagrama de árvore com as possibilidades.

Esta atividade serviu para mostrar o que se faz em Análise Combinatória, isto é, de quantos modos diferentes se pode resolver uma dada situação. No caso dos quadrados, interessava saber de quantas maneiras diferentes podia-se montar o quadrado maior com quatro quadradinhos menores; e no caso do *Stomacchion,* de quantos modos as 14 peças diferentes se encaixariam para formar um quadrado

Neste momento, uma aluna perguntou sobre o uso da “exclamaçãozinha”. Ela se referia ao símbolo usado para fatorial, que já conhecia de outros contextos. Respondeu-se à aluna que esse tema seria abordado adiante, e que 4.3.2.1 é o fatorial de 4. Este fato ilustra o grau de interesse dos alunos que esteve presente em todo o trabalho.

Iniciada a leitura do livro, a primeira questão foi a respeito de quantas possibilidades havia para montar o *Stomachion,* e os alunos respondera: 14.13.12..., ou seja, 14 fatorial.

A leitura da história do *Stomachion* e do próprio Archimedes foi um momento muito bom na aula, pois a partir dessa leitura os alunos se descontraíram mais, e começaram a participar comentando que já conheciam a história da *Euréka*.

Na leitura aparecia o termo Binômio de Newton, o que gerou curiosidade nos alunos, e houve uma explicação compatível com o momento.

A primeira atividade sobre quantos modos havia de se vestir alguns alunos resolveram com facilidade. A maioria encontrou 16 como resposta, porém houve também os que encontraram 4, ou 20 como resposta, e estes alunos apresentaram no quadro as respostas obtidas.

O aluno que encontrou 16 como resposta fez um diagrama de árvore somente com a primeira calça e achou 4 opções, logo, ele explicou: *como tenho 4 calças são, 4 opções para cada uma das 4, ou seja, 16 opções*.

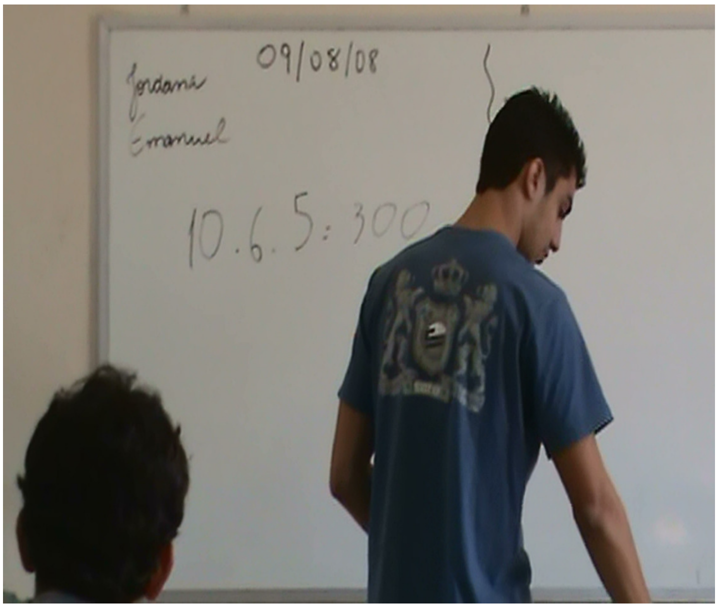
Foto 18: Resolução do aluno no quadro da questão das peças de roupa

Ao observar a resolução do colega no quadro, a aluna que achou 20 como resultado percebeu onde havia errado, como ela mesmo disse, *havia feito o tênis:" no geral, mas tinha que colocar para cada uma das opções".*

Alguns fizeram 2.2.2.2.1, e outros fizeram “de cabeça”, ou seja, tem 4 opções para a parte de baixo do corpo e 4 para a parte de cima, além de 1 para o pé, ou seja 4.4.1.

Na segunda atividade, sobre lanches, todos acharam o resultado 300 e somente um aluno resolveu no quadro (Foto 19).

Foto 19: Resolução da questão dos lanches

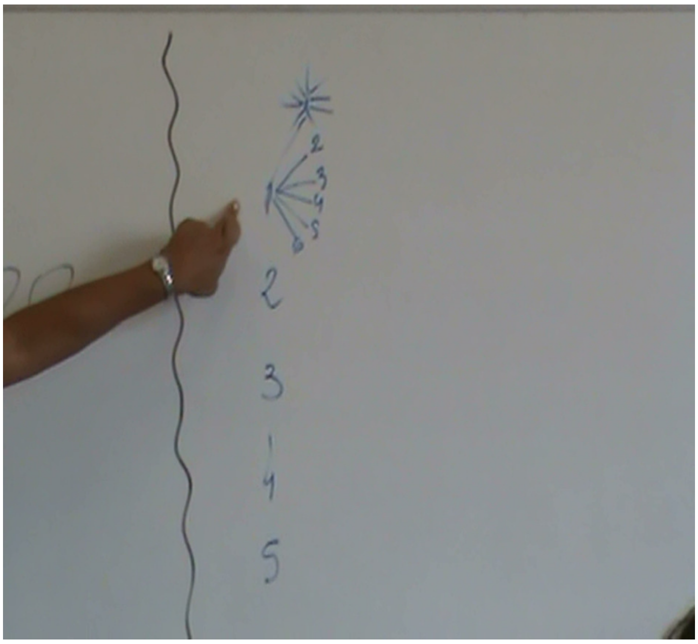


Ainda nesta questão, um aluno argumentou que podia-se fazer a árvore para 1 salgado e multiplicar o resultado dessa árvore por 10, pois eram 10 tipos diferentes de salgados.

Nessa questão refletiu-se sobre porque multiplicar as opções e não somá-las.

Novamente a árvore de opções ajudou a entender o porquê da multiplicação, pois para a 1ª das 5 bebidas há 6 opções de doce e para a 1ª opção dos 6 doces há 10 tipos de salgados, logo para a 1ª bebida há a opções de doce e para cada doce há 10 opções de salgados, ou seja, 6.10, porém, como há 5 bebidas, faz-se 6.10.5. (Foto 20)

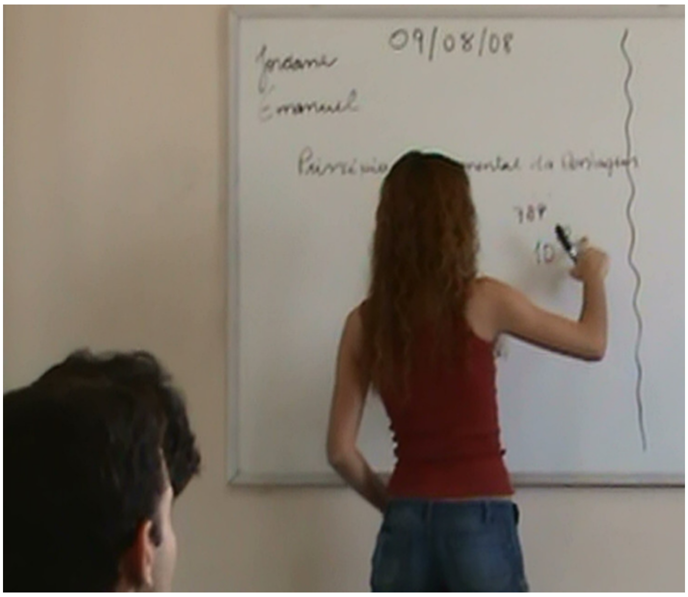
Foto 20: Explicação dos professores em formação.



Durante a leitura foi introduzido, com exemplos, o conceito de diagrama de árvore e de Princípio Fundamental da Contagem.

Na terceira atividade, sobre os códigos de barra, todos os alunos acharam 10^{10} e uma aluna veio ao quadro explicar como fez (Foto 21).

Foto 21: Resolução dos alunos no quadro da questão dos códigos de barra.



Todos compreenderam que os três primeiros números eram fixos, 789, logo só haveria uma opção para cada um deles. O Princípio Fundamental da Contagem foi usado nesse caso, pois, para a primeira “decisão a ser tomada”, havia 1 opção, para a segunda decisão havia 1 opção, para a terceira decisão também havia 1 opção, porém para a quarta até a décima terceira decisão havia 10 opções.

Na quarta atividade, sobre tampinhas de garrafa, alguns alunos acharam 13.824, como resultado, pois elevaram 24 ao cubo. Enquanto o aluno respondia no quadro, outro aluno explicou que não poderia ser 24 ao cubo, pois se há 24 times para o primeiro lugar, só pode haver 23 times para segundo lugar e 22 times para o terceiro lugar, pois a cada lugar diminui um time. O aluno resolveu no quadro e todos os outros concordaram, inclusive aquele que havia achado como resultado 24 ao cubo. (Foto 22).

Foto 22: Resolução dos alunos no quadro, da questão das tampinhas de garrafa.

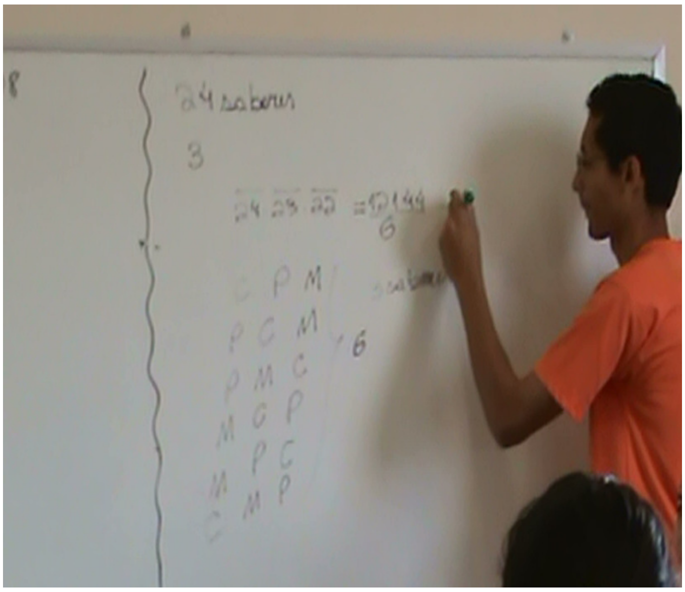
Na quinta atividade, sobre sabores de pizza, a resolução foi feita junto com os alunos, porque notou-se que os alunos que participaram do teste exploratório não conseguiram ver diferença entre as questões pois na primeira tínhamos 24 times de futebol que seriam agrupados de três em três no qual a ordenação implicava em resultados distintos, o que não ocorria na questão seguinte.

Calculou-se junto com eles as 24.23.22 possibilidades e questionou-se se as opções Calabresa, Portuguesa e Mista, Mista, Calabresa e Portuguesa eram diferentes. Todos entenderam que se tratava de opções idênticas logo era necessário eliminá-las. Aritmeticamente isto iria ocorrer por meio da divisão. A incerteza era dividir por que valor. Os professores em formação resolveram junto com os alunos.

Ainda nesta questão, um aluno afirmou que dividiu por 6 *porque são as combinações possíveis entre os 3 sabores*, este fato evidencia a compreensão deste aluno sobre a utilização da divisão para eliminar os casos repetidos, quando a ordem não importa.

Uma outra aluna questionou se não haveria outra possibilidade de se achar o número de pratos repetidos, no caso da pizza, disse ela, *você resolveu na mão, porque eram só 6; e se fossem mais?* Os professores em formação aproveitaram para explicar que para encontrar esse valor também se usa Princípio Fundamental da Contagem (PFC), pois, para a primeira decisão havia 3 opções ou sabores; para a segunda decisão havia 2 opções ou sabores, e para a terceira decisão havia 1 opção ou sabor. Logo, havia 3.2.1, ou seja, 6 possibilidades de ter pratos repetidos com 3 sabores. (foto 23)

Foto 23: Explicação dos professores em formação da questão das pizzas.



Interrogou-se os alunos por que não utilizaram a divisão no caso das tampinhas de garrafa?

Um aluno respondeu que, nesse caso, *a ordem importava para quem ganha*.

Nessas duas atividades ressaltou-se que, além de usar o PFC, também há a preocupação com a ordem.

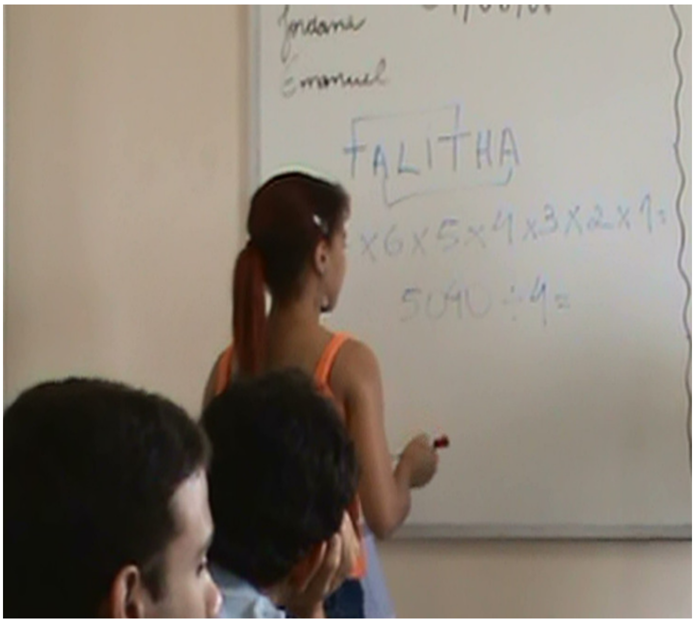
Na sexta atividade, que abordava a criação de senhas, a primeira preocupação dos alunos foi em relação às letras repetidas em seus nomes, e antes mesmo de começar a fazer, eles já perguntam sobre isso.

Um aluno se manifestou, dizendo que como seu nome não tinha letras repetidas, ele faria o fatorial com o número de letras, enquanto uma outra aluna disse que como seu nome possuía 4 letras repetidas, 2 “a” e 2 “t”, ela resolveria fazendo o fatorial do número de letras de seu nome dividido por 4 , que era o número de letras repetidas.

Mesmo sem o conhecimento exato do assunto, e com uma justificativa incorreta, esse comentário mostra que esse era o caminho certo para o trabalho, pois o aluno já demonstrava compreensão de que, para eliminar resultados repetidos haveria necessidade de dividir os valores, e que essa divisão estava relacionada ao número de letras repetidas, restava apenas conduzi-los à compreensão dos valores pelos quais dividiriam. Ora, a questão da divisão para eliminar repetições já havia aparecido no caso dos sabores da pizza, porém naquele caso a divisão ocorreria porque a ordem dos sabores não importava, gerando assim pratos iguais. Esse não era o caso em relação as letras dos nomes, pois ao inverter a ordem das letras da palavra BETO obtém-se outra senha, como BOTE, por exemplo. Logo, em relação a senhas, a ordem dos elementos importa.

Nota-se a diferença nessas 2 questões ao ver que a primeira seria resolvida como combinação de 24 elementos tomados 3 a 3, enquanto a segunda seria resolvida, no caso do nome Talitha, como permutação de 7, com repetição de 2 e 2 (Foto 24). Cabe esclarecer que, até o momento, os termos Combinação e permutação não foram apresentados aos alunos.

Foto 24: Resolução dos alunos no quadro, da questão das senhas.

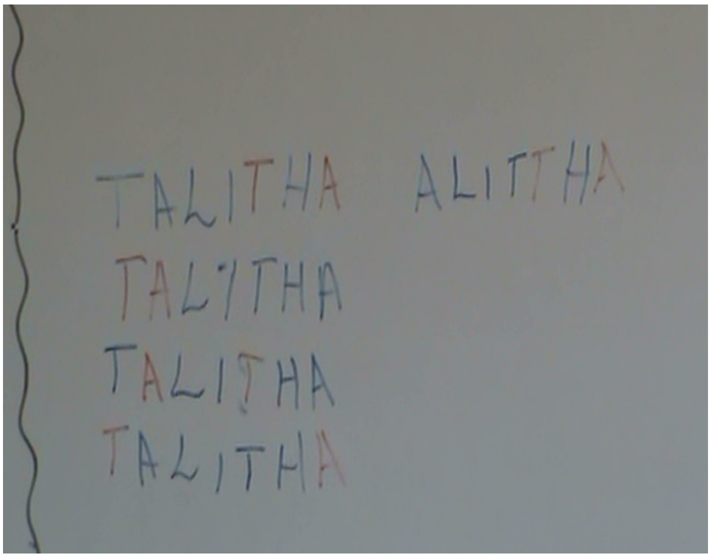


Ainda na questão das senhas, alguns resolveram com o fatorial do número de letras de seus nomes, sem se importar com as letras repetidas. Houve também um aluno que sugeriu fazer o fatorial com um número menor de letras, por exemplo: no nome Talitha, fazer o fatorial de 5, contando só uma letra “t” e uma letra “a”. Nesse momento houve intervenção dos professores em formação para explicar que dessa forma seriam formadas senhas de 5 letras, e não de 7 letras, como a questão pedia.

A questão das senhas foi a que mais envolveu os alunos e o problema da repetição de letras deu aos alunos muitas idéias. Um aluno que resolveu, sem levar em consideração as letras repetidas, questionou o porquê da preocupação com as mesmas e porque não resolver simplesmente sem a considerar. A fim de esclarecer esta dúvida, os professores em formação apresentaram o seguinte exemplo: usando o nome Talitha, escreveu-se um “a” e um “t” em cor diferente e houve a mudança de lugar, o que mostrou que, embora aquela troca estivesse presente nas 5040 senhas possíveis, ela, na realidade, representava a mesma senha, o que foi compreendido imediatamente pelos alunos, confirmando que a utilização de letras em cores ou tipos diferentes ajuda muitíssimo na visualização.

Ao se escrever a senha “ALITTHA”, questionou-se aos alunos quantas senhas iguais se formaria mudando o “t” e o “a” de lugar. Todos responderam quatro. Acredita-se que ficou claro para os alunos, nesse momento, que, a cada 4 senhas formadas, somente 1 era diferente (Foto 25)

Foto 25: Explicação dos professores em formação da questão das senhas.



Mas faltava entender o porquê do número 4, já que Talitha tinha 4 letras repetidas e dividia por 4, Anderson tinha 2 letras repetidas e dividia por 2, e parecia que a divisão seria feita pelo número de letras repetidas. Nesse momento foi apropriado lançar mão do exemplo com o nome RAFAELA, onde há 3 letras repetidas, mas não se divide por 3 e sim por 6, pois esse é o número de formas que esses “a” podem se arrumar para formar o mesmo nome.

Uma aluna questionou se, no caso da Talitha, podia fazer o cálculo das mudanças de cada letra e somar, ou seja, os “a” se mudam 2 vezes e os “t” também se mudam 2 vezes, porque não somar as 2 permutações do “a“ com as 2 permutações do “t” ? Nesse momento, utilizou-se o quadro com o nome OHANNAH, que foi preparado para o teste exploratório e que também, naquele momento, surtiu grande efeito. No nome OHANNAH, não se divide o total de senhas por 6, o que seria lógico na pergunta da aluna, pois são 2 permutações para o “h”, 2 permutações para o “a” e 2 permutações para o “n”, porém, como o quadro mostrava, só obtinha 1 senha diferente a cada 8 senhas, ou seja, há a permutação dos “a” multiplicada pela permutação dos ”n”, multiplicada pela permutação dos “h”, o que foi compreendido pela aluna.

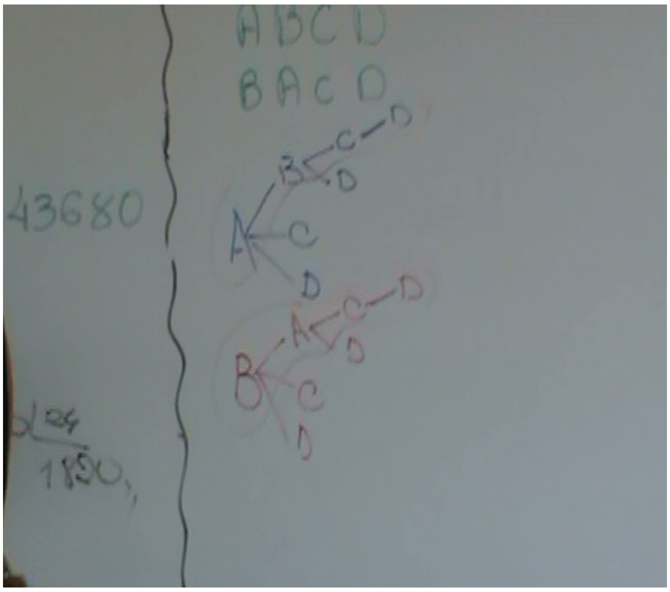
Todos responderam com facilidade a questão sobre quem pagaria a conta, e entenderam quando questionados, porque não se tem 8.8.8 opções, pois, como eles mesmo disseram, isso significaria que ”um pagaria a conta sozinho”. E antes dos professores em formação perguntarem, já responderam que deveria fazer a divisão pelo fatorial de 3, porque como a ordem não importava, haveria o mesmo grupo de pessoas sendo contado várias vezes.

Na nona atividade, sobre criar CDs, os alunos já começaram a se preocupar com a ordem, se ela importava ou não, e decidiram que a ordem não importava. Mas no início da questão alguns tiveram uma certa dificuldade em entender que precisavam escolher 4 músicas em um total de 16 pois pensavam em fazer a questão, por exemplo: escolhendo 1 música do primeiro CD, 1 do segundo e 2 do terceiro, então fariam a escolha de 1 em 6 vezes, 1 em 5 vezes, 2 em 5 (ver figura p. 89). Então explicou-se aos alunos que desse modo se teria o número total de opções para um CD especial, formado com as seguintes condições: com uma música do primeiro CD, uma música do segundo e duas do terceiro. Na realidade esta forma de resolução não contemplava todas as possibilidades, pois havia a possibilidade também de escolher as 4 músicas no primeiro CD, o que não era considerado no caso que eles exemplificaram.

Ao surgirem os primeiros resultados não se disse logo se estava certo ou errado, houve um questionamento sobre a importância da ordem e todos concordaram que a ordem não importava, pois, como disseram, *tanto faz ter forró na primeira ou na última*, e concluiu-se que, se a ordem não importava, havia necessidade de dividir pelas repetições. Surgiu em meio as discussões uma outra tese: quantos CDs repetidos poderia haver?

Estimulados pelos professores em formação, os alunos apresentavam as suas soluções. Uma aluna achou 24 como resposta, outro 43680, valores distantes do resultado correto, que era 1820. Durante este processo, observou-se que clareavam as idéias dos que não acharam o resultado correto, pois quando um aluno foi ao quadro expor a sua resolução, todos concordaram com o resultado e entenderam o porquê de multiplicar 16.15.14.13 e dividir por 4!, pois, o 4! representava as repetições de CDs, e isso foi novamente exemplificado com diagrama de árvore (Foto 26).

Foto 26: Explicação dos professores em formação da questão dos CDs



O diagrama serviu para explicar a um aluno porque divide-se por 24 em vez de diminuir. Pois a cada 4 grupos têm-se 24 repetições. Nesse sentido, a explicação foi feita com as letras A, B, E e F, que representavam quatro músicas e nessas 4 havia também 24 maneiras de escrevê-las em ordem diferente. O mesmo ocorria para o grupo de músicas C, E, G e D. O resultado também poderia ser obtido pela subtração dos casos repetidos, mas isto implicaria em ter-se calculado previamente o número total dos tais casos repetidos, o que demandaria um volumoso trabalho de cálculo.

Na décima questão, que abordava os jogos da Copa do Mundo de futebol de 2006, os alunos teriam de calcular as possibilidades de resultados para o primeiro, segundo, terceiro e quarto lugares e, sem dúvidas, todos responderam: 32.31.30. 29, pois a ordem importava.

Em seguida, discutiram-se com os alunos as classificações dos tipos de contagem em Arranjo, Permutação e Combinação, além de mostrar as fórmulas, e aplicá-las em questões que já haviam sido resolvidas, como por exemplo na própria questão 10, em que se resolve com arranjo de 32 agrupados de 4 em 4. Perguntou-se aos alunos se lembravam de exemplos de arranjo e eles citaram o caso da mega-sena.

Sobre a mega-sena, um aluno perguntou se havia necessidade de dividir por 6! e todos os outros responderam que não, pois a ordem importava, o que não é verdade, pois o bilhete com os números sorteados 13, 19, 25 ,40, 51, 57 é o mesmo se a ordem do sorteio for, 51,19 ,25, 40, 13, 57. Na realidade a mega-sena não é um exemplo de arranjo e sim de combinação.

Na explanação sobre permutação refletiu-se com os alunos que ela nada mais é que um arranjo no qual se usam todos os elementos. Uma aluna lembrou do exemplo das senhas formadas pelas letras dos nomes como uso de permutação, *só que lá tinha que dividir*, disse a aluna. Nesse momento explicou-se que a divisão era para eliminar as senhas repetidas que eram geradas com a permutação de letras repetidas e nesse caso estávamos usando permutação com repetição. Aproveitando esse comentário mostrou-se a definição de permutação com repetição.

Ao apresentar as combinações, ressaltou-se que elas são arranjos divididos por permutação.

Fez-se, a pedido dos alunos, um quadro relacionando, Arranjo, Permutação e Combinação e, com os quesitos, usar todos os elementos e a importância da ordem.

Apresentou-se aos alunos a questão da confecção das placas de carro. Quantas opções seriam possíveis, já que cada placa é composta de 3 letras e 4 números. Os alunos resolveram juntos com os professores em formação. As questões eram: a ordem importa ou não? Usariam todos os elementos ou não? Teria repetição? Os alunos ficaram um pouco confusos, mas concordaram, após discussão, que a ordem importava e que podia haver repetição de números e letras, além de usar todos os elementos. Concordaram também que se tratava de um caso de arranjo com repetição.

Perguntou-se aos alunos por que, quando muda o número de placas se aumenta o número de letras e não de números. E todos responderam porque as letras tem mais opções.

Após a institucionalização dos agrupamentos arranjo, permutação e combinação, foram propostas três atividades que ressaltam alguns casos particulares ou mais complexos. O primeiro caso tratava da formação de um círculo com seis pessoas – permutação circular. A resolução envolveu a formação de uma roda com os alunos dando as mãos, o que facilitou a compreensão dos alunos.

A segunda atividade, sobre meninas que limpam uma quadra de voleybol é mais complexa pois aborda soma de combinações assim como o uso da expressão “pelo menos”. Embora os alunos não tivessem apresentado dificuldades durante a resolução junto com os professores em formação, tiveram dificuldades em resolver exemplos parecidos, que falava sobre homens e mulheres que tocavam instrumentos, e na escolha de vereadores.

Na atividade sobre os instrumentos, a expressão "pelo menos" aparecia e eles não souberam "arrumar" a resolução. E na questão dos vereadores, em que trabalhavam na câmara, 6 vereadores do partido A, 5 vereadores do partido B, e 4 vereadores do partido C e pretendia-se formar comissões de 7 vereadores, de forma que fosse constituída de 3 vereadores do partido A, 2 vereadores do partido B e 2 vereadores do partido C. Mais uma vez a dificuldade em separar as possibilidades, ou seja, eles teriam que achar o número de combinações de 3 elementos em 6 e somar com o número de combinações de 2 elementos em 5 e somar com o número de combinações de 3 elementos em 4.

No último caso, que aborda possíveis caminhos que uma pessoa pode percorrer de um ponto a outro, os alunos não conseguiram notar que era um caso de permutação com repetição, e quiseram fazer por tentativas, até que viram que seria demasiadamente trabalhoso. Esperou-se por sugestões, porém sem auxílio, nenhum deles chegou ao resultado, e, somente após a arrumação no quadro das possibilidades, por exemplo: C,C,C,C,D,D,D (cima, cima, cima, cima, direita, direita, direita), alguns notaram que havia repetição de letras, como no caso de senhas de nomes.

Após encerradas as atividades do livro, foram distribuídas aos alunos folhas com questões selecionadas de vestibular, com o objetivo de avaliar a compreensão do tema Análise Combinatória.

As principais dúvidas que surgiram foram a interpretação da expressão "pelo menos" que significava que poderia ter a quantidade mínima ou mais. Por exemplo: o exercício com instrumentos musicais, a dúvida não era na resolução e sim na compreensão do problema, os alunos tiveram uma certa dificuldade em começar a resolução, separando por grupos, mulheres que tocam (25) e mulheres que não tocam (35), homens que tocam (12) e homens que não tocam (28) , para então resolver a questão. Os alunos tinham que montar o casal e pelo menos um teria que tocar um instrumento. A expressão "pelo menos um" era nova e os alunos tiveram dificuldade para entender que as opções eram um homem tocando e uma mulher não tocando, um homem não tocando e uma mulher tocando e um homem tocando e uma mulher tocando.

Outra atividade com grande dificuldade foi a atividade 7 com anagramas da palavra AMOR. Os alunos mostraram dificuldades não na questão das permutações, mas na compreensão de que teriam que separar primeiro as palavras que começavam com A, depois as com M e assim por diante, para colocar em ordem alfabética, para assim achar a posição da palavra ROMA.

Outra atividade, em que os alunos encontraram dificuldades, foi a questão dos vereadores (questão 6). Mais uma vez os alunos demonstraram dificuldades em separar as possibilidades como no caso dos instrumentos. Nessa questão precisava escolher 7 vereadores, sendo que eram 3 vereadores no partido A que tinha 6, eram 2 vereadores do partido B, que tem 5, e 2 vereadores do partido C, que tem 4.

3.3.3 - ALGUMAS CONCLUSÕES

Apesar de inexperientes nesse projeto, os resultados foram muito bons, não só na avaliação que nós, como professores em formação, fazemos de todo o processo e do resultado, mas também pela própria avaliação dos alunos,segue alguns comentários dos mesmos:

"Dá para entender o tema lendo o livro paradidático sem ajuda do professor"

"A Linguagem é ideal, pelo fato de fazer o aluno entender melhor, pois tira a linguagem difícil e torna-se até meio humorístico."

"Os assuntos do dia-a-dia motivam os alunos a estudar tal situação, onde se visualiza melhor."

"As situações tiveram alto grau de motivação, pois utilizaram todos os recursos possíveis para uma melhor compreensão dos alunos, como a utilização de pessoas para exemplificar."

Após a aplicação do livro houve um momento de atividades, no qual questões selecionadas de vestibular foram usadas com o objetivo de avaliar a compreensão do tema, Análise Combinatória.

A primeira atividade em que tiveram dúvida foi a questão que falava sobre guardar objetos em caixas e um aluno questionou se a ordem importava ou não.

A medida que os alunos iam tendo dúvidas na questões, os professores em formação iam corrigindo junto eles, em vez de corrigir todas as atividades no final.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao fim deste trabalho, buscou-se fazer uma análise dos objetivos do mesmo. Inicialmente desejava-se produzir um livro paradidático que auxiliasse no ensino de um conteúdo matemático, e avaliar em que medida esse livro paradidático, que abordou o tema Análise Combinatória, contribuiria para a compreensão do tema pelos alunos.

A produção do livro foi um desafio à parte, pois nenhum dos professores em formação possuía experiência na criação e confecção de livros, porém é importante ressaltar a colaboração de muitos professores do curso de Licenciatura em Matemática, que contribuíram com suas opiniões e pareceres que enriqueceram o livro. O livro paradidático foi avaliado por quatro professores, e a grande maioria, com uma visão muito positiva e otimista sobre o mesmo, contribuiu muito, não só com suas opiniões e experiências sobre livros paradidáticos, mas também sobre o modo de escrita e como os alunos realmente entenderiam aquilo que estava sendo escrito, aspecto que eles conheciam bem devido a sua grande experiência. Este fato realça a importância de um trabalho colaborativo no ambiente escolar.

Esse projeto contemplava a aplicação do livro paradidático produzido em dois momentos. Inicialmente para alunos do terceiro período do curso de Licenciatura em Matemática, como teste exploratório e, em um segundo momento, para alunos do terceiro ano do Ensino Médio, o público a que se destinava o livro.

A primeira aplicação, para alunos do curso de Licenciatura em Matemática, foi bastante proveitosa, mas com algumas dificuldades, destaca-se principalmente a falta de disponibilidade de horário para os alunos, e por esse motivo tivemos uma baixa assistência, entre três e cinco alunos por encontro.

A aplicação na turma de Ensino Médio também contou com algumas dificuldades, não somente relativas à turma, mas à própria logística do projeto, como por exemplo, a impressão e encadernação do livro para a distribuição para uma turma de 15 alunos. A impressão não foi um grande problema, porém o papel que seria usado para a capa levou um tempo para ser definido. O processo de grampear os livros foi problemático, só resolvido após uma sugestão de usarmos a mecanografia de uma escola para grampeá-los, já que eles possuem equipamentos apropriados. No livro há uma questão com quatro CDs e os mesmo não podiam ser um produto já utilizado, por isso precisamos “criar” nomes de músicas inéditos para os CDs.

Outro ponto foi o cuidado grande que se teve com a mensagem que se passava nas atividades. Por exemplo, decidiu-se não usar jogos de computador em uma questão, porque a maioria deles envolvia violência, e não se desejava estimular essa idéia, além de algumas figuras que foram excluídas, pois embora façam parte do cotidiano dos alunos, incitavam à pornografia, como capas de CDs, por exemplo.

Esse projeto tem por objetivo observar em que medida o livro paradidático contribui para o ensino e aprendizagem de Análise Combinatória, e as duas aplicações do livro paradidático forneceram elementos para responder de maneira clara a essa questão, sobretudo no segundo momento, junto aos alunos do Ensino Médio, que ainda não conheciam o tema abordado, e responderam de maneira positiva a utilização do livro, participando da leitura coletiva com os professores em formação, o que é considerado adequado por estimular a leitura por parte dos alunos e produzir um clima mais descontraído nas aulas. O envolvimento dos alunos com a aula, participando ativamente por meio de discussões, dúvidas e levantamento de muitas questões, evidencia como o livro paradidático contribui para o ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos, em especial de Análise Combinatória.

As respostas dadas às questões propostas e o raciocínio usado para resolver as mesmas estavam dentro do esperado quando se produziu o livro paradidático. As questões no livro foram colocadas de modo que os alunos tivessem autonomia ao resolver as questões propostas, pois se entende que o livro paradidático deve ser usado pelo aluno com o mínimo possível de intervenção do professor, esperando-se que os alunos possam lê-lo em casa e compreender.

As avaliações feitas pelos alunos do Ensino Médio sobre o projeto também atestam que a utilização do livro paradidático na abordagem da Análise Combinatória atendeu às expectativas, que eram grandes, já que muito tempo e dedicação foram despendidos nesse projeto.

Os livros paradidáticos, dependendo de sua linhagem, podem produzir diversos resultados, por isso recomenda-se fazer uma boa pesquisa sobre os muitos livros já produzidos, sobre suas finalidades, por exemplo, se são direcionados a uma abordagem mais histórica do tema, ou se objetivam uma aplicação mais pragmática de assuntos do dia-a-dia.

A produção do paradidático poderá ser aperfeiçoada, não só na escolha dos temas, mas também na escrita dos textos e inserção de figuras, além da própria produção e impressão; e há muito a aperfeiçoar, a partir do momento em que mais professores se tornarem autores e co-autores, desse recurso, que não só auxilia na aprendizagem matemática mas também na divulgação de pesquisas na área de Educação Matemática, o que certamente contribui para a melhoria da qualidade do ensino.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ACESSORIA DE COMUNICAÇÃO DO INEP. *Balanço geral da décima edição do Exame Nacional do Ensino Médio*. Disponível em: <http://www.inep.gov.br/imprensa/noticias/eneml/news07_28.htm.> Acesso em: 23/12/2007.

________________. *Enem: Um exame diferente*. Disponível em: <http;//www.mediasenem.inep.gov.br/resultado.php.> Acesso em: 23/12/2007

________________. *O que é o PISA*. Disponível em: <http://www.inep.gov.br/imprensa/noticias/internacional/news07_05.htm.> Acesso em: 23/12/2007.

________________. *Resultados do SAEB atualizam panorama na qualidade da educação brasileira*. Disponível em: <http://www.inep.gov.br/imprensa/noticias/saeb/news07_01.htm.htm.> Acesso em: 23/12/2007.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2000.

________________. *Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: 2002

CRUZ, Márcia de Oliveira. *Narrativas em Matemática: significado e função*. In. Linguagem, conhecimento e ação: ensaios de epistemologia e didática. São Paulo: Escrituras, 2003.

DALCIN, Andréia. *Um olhar sobre o paradidático de matemática.* Campinas: UNICAMP, 2002. Dissertação de mestrado

D'AMBROSIO, Ubiratan, 1932 – *Educação Matemática: Da teoria à pratica/* 8. ed – Campinas. SP – (Coleção perspectivas em Educação Matemática)

DORNELAS, Augusto César Barbosa. *Resolução de Problemas em Análise Combinatória: Um Enfoque Voltado Para Alunos E Professores do Ensino Médio*. 2004.Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/03/CC46033050444.pdf>. Acesso em: 22/01/09

IMENES, Luis M. P.;LELLIS, Marcelo. *Os números na história das civilizações*. São Paulo: Scipione, 1989. Coleção "Vivendo a Matemática"

IOSCHPE, G. *A educação no Brasil aumenta a desigualdade*. [Editorial] Revista ISTOÉ, 2005 - on-line. Disponível em: <http://www.universia.com.br/html/noticia/noticia_clipping_cfjij.html>. Acesso em: 17/01/2009

JAKUBOVIC, José; IMENES, Luis M. P,; LELLIS, Marcelo C. *Equação do 2º grau* 14. ed..São Paulo: Atual, 1992. (Coleção "Pra que serve a Matemática")

LIBÂNEO, José Carlos. ADEUS PROFESSOR, ADEUS PROFESSORA? *Novas exigências educacionais e profissão docente*. São Paulo: Cortez, 2001.

LOPES, Maria Laura Mouzinho Leite. *Histórias para introduzir noções de combinatória e probabilidade.* Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2004.

LUPINACCI, Vera Lúcia Martins; BOTIN, Mara Lúcia Muller; HOFFMANN, Gertrudes Regina. *O Jogo das torres como recurso didático no ensino de Análise Combinatória*. 2007. Disponível em: < http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Minicurso/Trabalhos/MC18361331034T.doc>. Acesso em: 22/01/09

MACHADO, Silvia Dias Alcântara. *Educação Matemática: uma introdução*: - 2. ed. – São Paulo: EDUC, 2002

MELLO, Guiomar Namo de. *Os 10 Maiores Problemas da Educação Básica no Brasil.* Disponível em: <http://www.faenac.edu.br/imagens/teiadosaber/Arquivos/fala_exclusivo.pdf.> Acesso em: 23/12/2007.

PERRENOUD, Philippe. *Dez novas competências para ensinar*: trad. Patrícia Chittoni Ramos. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000

PINHEIRO, Carlos Alberto de Miranda. *O Ensino de Análise Combinatória: A Prática Pedagógica Predominante Segundo os Docentes*. 2007. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Comunicacao_Cientifica/Trabalhos/CC37047990259T.doc>. Acesso em: 22/01/09

RAMOS, Luzia F.. *A Ficcionista da Matemática*. Disponível em: <http://www.atica.com.br/entrevistas/?e=135.> Acesso em 08/11/08.

REVISTA NOVA ESCOLA. *O Brasil da pré História*. Rio de Janeiro. ed. Maio 2008

SÁ, Ilydio Pereira de. *A Magia da Matemática*: *Atividades Investigativas, curiosidades e histórias da Matemática*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna LTDA., 2007

SANCHES, C. M. *Trabalhando livros paradidáticos nas aulas de matemática. 2007.* Disponível em: <http://www.educador.brasilescola.com/estrategias-ensino/trabalhando-livros-paradidaticos-nas-aulas-matematica.htm>. Acesso em: 17/01/2009

SILVA, Daniel Romão. *Um olhar histórico sobre os livros paradidáticos de Matemática no Brasil*. In: IX ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007, Belo Horizonte/MG. Diálogos entre a pesquisa e a prática educativa. Belo Horizonte: SCIMSA, 2007.

SMOOTHEY, Marion. *Atividades e jogos com escalas*. São Paulo: Scipione, 1997. (Coleção "Investigação Matemática")

__________________. *Atividades e jogos com gráficos*. São Paulo: Scipione, 1997. (Coleção "Investigação Matemática")

Trabalhando livros paradidáticos nas aulas de matemática- <http://www.educador.brasilescola.com/estrategias-ensino/trabalhando-livros-paradidaticos-nas-aulas-matematica.htm> Acesso em: 11/01/09

ZANELLA, Liane; Aprendizagem: uma introdução. In. LA ROSA, Jorge. *Psicologia da Educação: O significado de Aprender*. – 8. ed. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004

ANEXOS

ANEXO 1: SOLICITAÇÃO FEITA POR E-MAIL AS EDITORAS

Solicitação

Estou escrevendo a monografia de conclusão de meu curso, e o tema é livro paradidático de matemática, e gostaria de saber se vocês têm dados, ou informações sobre alguma escola que adote os livros como material para os alunos ou se os paradidaticos são só adquiridos pelas escolas para bibliotecas ou professores para seu arquivo pessoal. Suas informações serão muito úteis para a conclusão de meu trabalho. Desde já agradeço.

RESPOSTA DADA PELAS EDITORAS

Moderna *Fazendo escola com você*

Resposta do seu email de 07/12/2008.

Cara Jordana,

Agradecemos o envio de sua mensagem. Em nosso catálogo não contamos com livros de literatura na disciplina informada. Quando publicávamos, os mesmos eram adotados pelas escolas.

Atenciosamente

Lúcia Lopes

Foram enviados e-mails para as editoras: Ática, Atual, Moderna e FTD. Somente a editora Moderna respondeu.

ANEXO 2: EXERCÍCIOS UTILIZADOS COMO COMPLEMENTO DO LIVRO PARADIDÁTICO

EXERCÍCIOS

1) (Unesp) Um turista, em viagem de férias pela Europa, observou pelo mapa que, para ir da cidade A para à cidade, havia três rodovias e duas ferrovias e que, e para ir de B até uma outra cidade, C, havia duas rodovias e duas ferrovias. O número de percursos diferentes que o turista pode fazer para ir de A até C, passando pela cidade B, e utilizando rodovia e trem obrigatoriamente, mas em qualquer ordem, é:

a)9 b)10 c)12 d)15 e)20

2) (Mackenzie-SP) Tendo-se quatro objetos diferentes e seis caixas numeradas de 1 a 6, o número de formas de se guardar um objeto em cada caixa é:

a)15 b)6^4 c) 4^6 d)360 e)720

3) (Fgv) De quantas formas podemos permutar as letras da palavra ELOGIAR de modo que as letras A e R fiquem juntas em qualquer ordem?

a) 360 b) 720 c) 1080 d) 1440 e) 1800

4) (Ufes) Em um grupo de 60 mulheres e 40 homens existem exatamente 25 mulheres e 12 homens que tocam algum instrumento musical. De quantas maneiras podemos formar uma dupla de um homem e uma mulher de modo que pelo menos uma das pessoas da dupla toque algum instrumento?

a) 300 b) 720 c) 1.000 d) 1.420 e) 1.720

5) (Unirio-RJ) Com os algarismos de 1 a 9, o total de números de 4 algarismos diferentes, formados por 2 algarismos pares e 2 algarismos ímpares, é igual a:

a)126 b)720 c)5.760 d)504 e)1440

6) (UFSM-RS) Numa câmara de vereadores, trabalham 6 vereadores do partido A, 5 vereadores do partido B e 4 vereadores do partido C. O número de comissões de 7 vereadores que podem ser formadas, devendo cada comissão ser constituída de 3 vereadores do partido A, 2 vereadores do partido b e 2 vereadores do partido C, é igual a:

a)7 b)36 c)152 d)1.200 e)28.000

7) (Univale -SC) Formados e dispostos em ordem alfabética todos os anagramas da palavra AMOR, a palavra ROMA, ocupará a:

a)24.º posição   b)23.º posição   c)20.º posição   d)19.º posição   e)18.º posição

8) (Fatec-SP) Sabendo-se que o segredo de um cofre é uma seqüência de 4 algarismos distintos e o primeiro algarismo é igual ao triplo do segundo, o maior número de tentativas diferentes que devemos fazer para conseguir abri-lo é igual a:

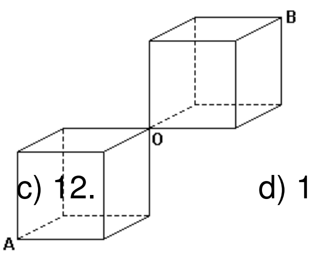
a)56   b)84   c)168   d)253   e)1.054

9) (Uerj) Sete diferentes figuras foram criadas para ilustrar, em grupos de quatro, o Manual do Candidato do Vestibular Estadual 2007.
Um desses grupos está apresentado a seguir.

Considere que cada grupo de quatro figuras que poderia ser formado é distinto de outro somente quando pelo menos uma de suas figuras for diferente.
Nesse caso, o número total de grupos distintos entre si que poderiam ser formados para ilustrar o Manual é igual a:

a) 24   b) 35   c) 70   d) 140

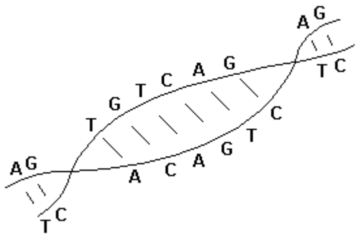
10) (Ufscar) Considere a figura a seguir. O número de caminhos mais curtos, ao longo das arestas dos cubos, ligando os pontos A e B, é.



a) 2.   b) 4.   c) 12.   d) 18.   e) 36.

11) (Uff) O estudo da genética estabelece que, com as bases adenina (A), timina (T), citosina (C) e guanina (G), podem-se formar, apenas, quatro tipos de pares: A-T, T-A, C-G e G-C.

Certo cientista deseja sintetizar um fragmento de DNA com dez desses pares, de modo que:



- dois pares consecutivos não sejam iguais;
- um par A-T não seja seguido por um par T-A e vice-versa;
- um par C-G não seja seguido por um par G-C e vice-versa.

Sabe-se que dois fragmentos de DNA são idênticos se constituídos por pares iguais dispostos na mesma ordem.
Logo, o número de maneiras distintas que o cientista pode formar esse fragmento de DNA é:

a) 2^{11} b) 2^{20} c) 2×10 d) 2^{10} e) $2^{2} \times 10$

ANEXO 3: QUESTIONÁRIO PARA TESTE EXPLORATÓRIO DAS ATIVIDADES

Questionário

Nome(opcional):___________________________________data: ___/___/_____

1) Dinâmica utilizada na aula:

a) Leitura Coletiva: ____
____

b) Aula expositiva: ____
____

c) Participação dos alunos: ____
____

2) Com relação ao livro paradidático:

a) Visual gráfico: ____
____

b) Linguagem utilizada: ____
____

c) grau de motivação das situações apresentadas: _______________________
____

d) Clareza nas explicações do texto: ___________________________________
____

3) O objetivo deste livro paradidático é possibilitar a aprendizagem deste tema de modo significativo. Na sua opinião este objetivo foi:

☐ Completamente atingido

☐ Parcialmente atingido

☐ Não foi atingido

4) Você acredita que o uso do livro paradidático pode ajudar no ensino de Análise Combinatória? Justifique sua resposta.
____
____

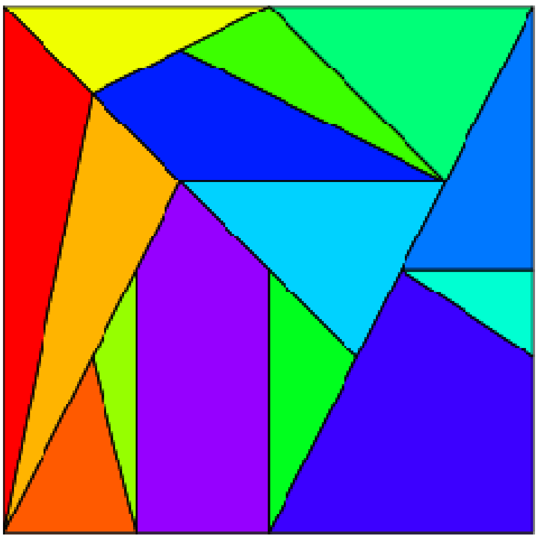
5) Sugestões:
____

ANEXO 4: LIVRO PARADIDÁTICO

UM QUEBRA-CABEÇAS BEM ANTIGO!

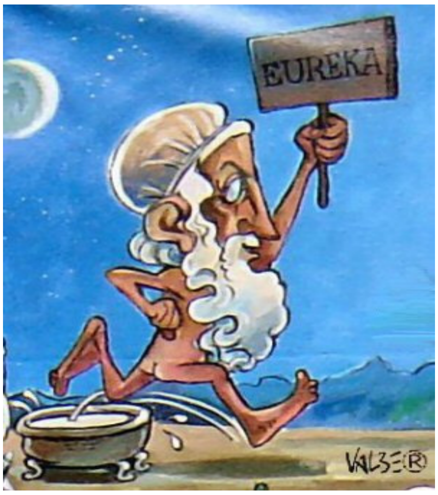
De quantas formas diferentes podemos encaixar as 14 peças para formar um quadrado?

Para o historiador Matemático, Reviel Netz[i], essa era a pergunta que Arquimedes tinha em mente há dois mil e duzentos anos atrás, quando escreveu seu tratado chamado 'Stomachion', baseado no quebra-cabeças abaixo.[ii]



Para esclarecermos melhor essa história vejamos quem foi Arquimedes[iii].

Filho do astrônomo Fídeas, era nativo de Siracusa, na Sicília. Considerado como um dos mais brilhantes matemáticos da antiguidade, ficou conhecido pela famosa frase "Eureka!" que gritou ao descobrir uma maneira de provar ao Rei Hirão, tirano de Siracusa, que sua coroa não tinha sido feita de ouro maciço. Mas como fazer isso sem danificá-la?[iv]



Enquanto tomava banho observou que a quantidade de água que se elevava na banheira, ao submergir, era equivalente ao volume de seu próprio corpo. Ali estava a chave para resolver a questão proposta pelo tirano. Mediu então a quantidade de água que transbordava de um recipiente cheio, quando nele mergulhava, sucessivamente, o volume de um peso de ouro igual ao da coroa, o volume de um peso de prata igual ao da coroa e o volume da própria coroa. Este, sendo intermediário aos outros dois, permitia determinar a proporção de prata que fora misturada ao ouro.

Arquimedes foi morto em 212 a.C., durante a captura de Siracusa pelos Romanos, na segunda guerra Púnica, depois que todos seus esforços para manter os romanos na baía com suas máquinas de guerra falharam. Ele era um brilhante matemático, mas como estrategista de guerra e construtor de armas bélicas se mostrou um verdadeiro fracasso!

[v]Entre todos os trabalhos de Arquimedes o *Stomachion* foi o que menos atenção atraiu, ignorado pelos que o tomavam por um simples quebra-cabeças, ou dispensado como ininteligível, já que a cópia do manuscrito que se possui passou por muitas agruras.

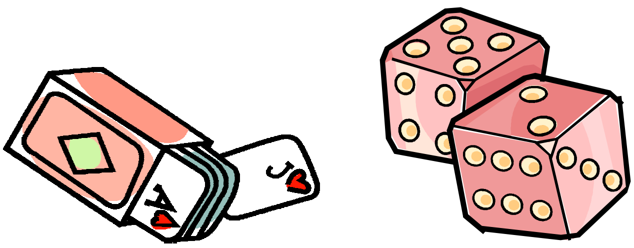
No século 13, monges cristãos precisando de material para compor um livro de orações, despedaçaram o manuscrito, apagaram seu conteúdo, dobraram suas páginas ao meio e a cobriram com textos religiosos.

Após muitos anos e muito auxílio das tecnologias foi que se pode ter acesso a dois terços do conteúdo desse material.

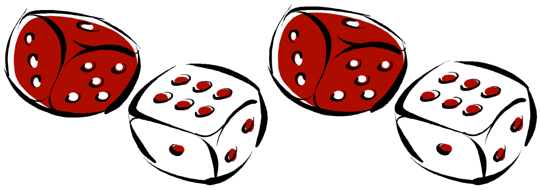
Mas que relação há entre nossos dias, toda essa história e esse quebra-cabeças estranho?

Bem, esse foi o início do que conhecemos hoje como Análise Combinatória.

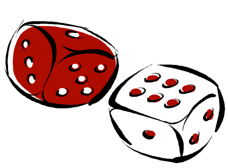
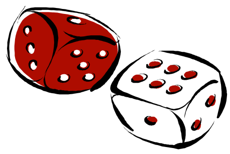
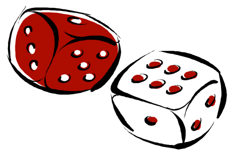
A meta da Análise Combinatória é determinar de quantos modos um dado problema pode ser resolvido, e encontrar o número de modos pelos quais o *Stomachion* se encaixa bem nessa definição.



Mas esse não era o único problema que povoava a cabeça dos homens do passado. O cavalheiro e escritor De Mére discutia a probabilidade de se ganhar em certos jogos de cartas e dados, um de seus problemas era saber qual o número mínimo de vezes necessário para se obter um duplo seis (6 e 6) no lançamento de 2 dados.



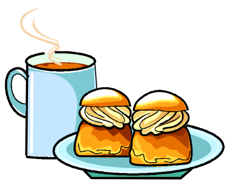
Os jogos de azar foram de grande importância no desenvolvimento da Análise Combinatória, porém sua origem não está ligada a esses jogos ou ao estudo do Binômio de Newton, como se acreditava, mas remonta à genialidade de um homem que estava a frente de seu tempo: Arquimedes.

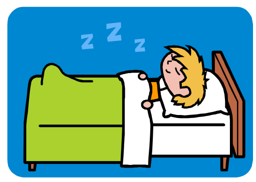
Um mundo de escolhas!

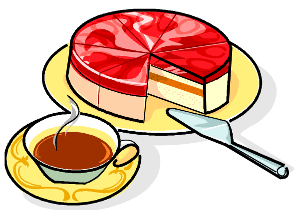
Existe uma relação entre Análise Combinatória e você.

Pensando nessa relação me veio à mente a questão das escolhas. Todos nós fazemos escolhas a todo momento e a quantidade de opções para essas são muito variadas.



Pense no início do seu dia, quando você acorda. Terá de decidir se levanta e vai à aula ou permanece dormindo. Se optar por ir à aula, escolherá entre tomar ou não café; escolhendo tomá-lo, haverá várias opções: café, suco, leite ou chá para beber.



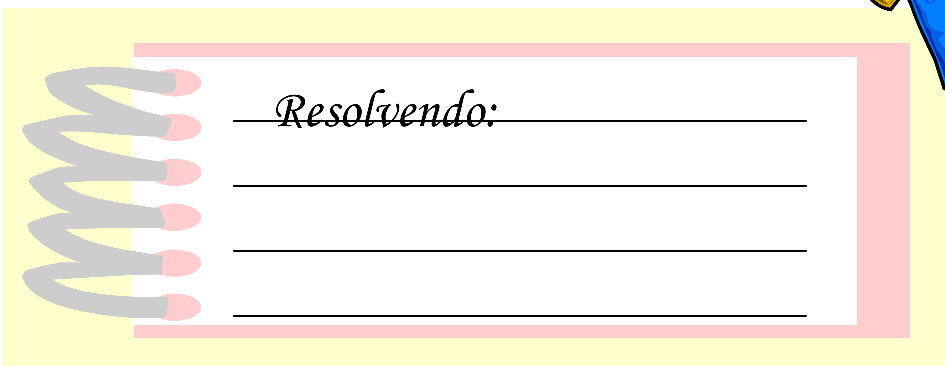


Pão, bolo, torrada ou biscoito para comer, além daqueles complementos deliciosos, como queijo, presunto, geléia, requeijão, manteiga...Imagine a quantidade de lanches diferentes que você pode tomar!

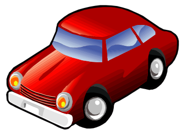
Depois dessas importantes decisões, há a roupa que usará, e que para alguns é uma verdadeira batalha, não é mesmo?

Supondo que você tenha 2 calças, 2 bermudas, 2 camisetas, 2 camisas de manga e 1 tênis, você poderá criar bastante moda!

Pensando assim, de quantos modos diferentes você poderia se vestir? Usando 1 calça ou 1 bermuda, 1 camiseta ou 1 camisa de manga e 1 tênis. Lembrando, que vocês precisam cobrir o tronco, as pernas e os pés.

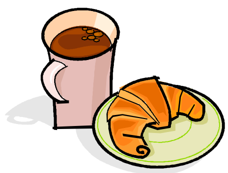


As escolhas não param por aí. Você ainda decidirá se irá para a escola de carro, a pé ou de ônibus.



Já na escola o horário do intervalo oferecerá muitas outras escolhas, como no café da manhã: você poderá decidir entre muitas opções de lanche.

Imagine-se numa cantina sortida, e com uma boa mesada para gastar. São 10 tipos de salgados, 5 tipos de bebida e 6 tipos de doces. Entre quantos apetitosos lanches completos (1 salgado, 1 bebida e 1 doce) você terá de fazer o sacrifício de escolher?

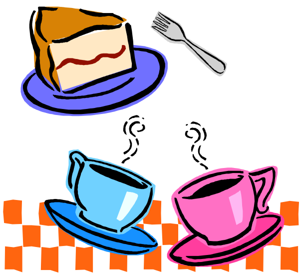


Enfim, você passará o seu dia inteiro fazendo escolhas, umas mais simples, outras mais complexas, na realidade passará toda a sua vida entre muitas escolhas.

Mas onde entrou a Análise Combinatória?

Na contagem das opções de escolha!!!

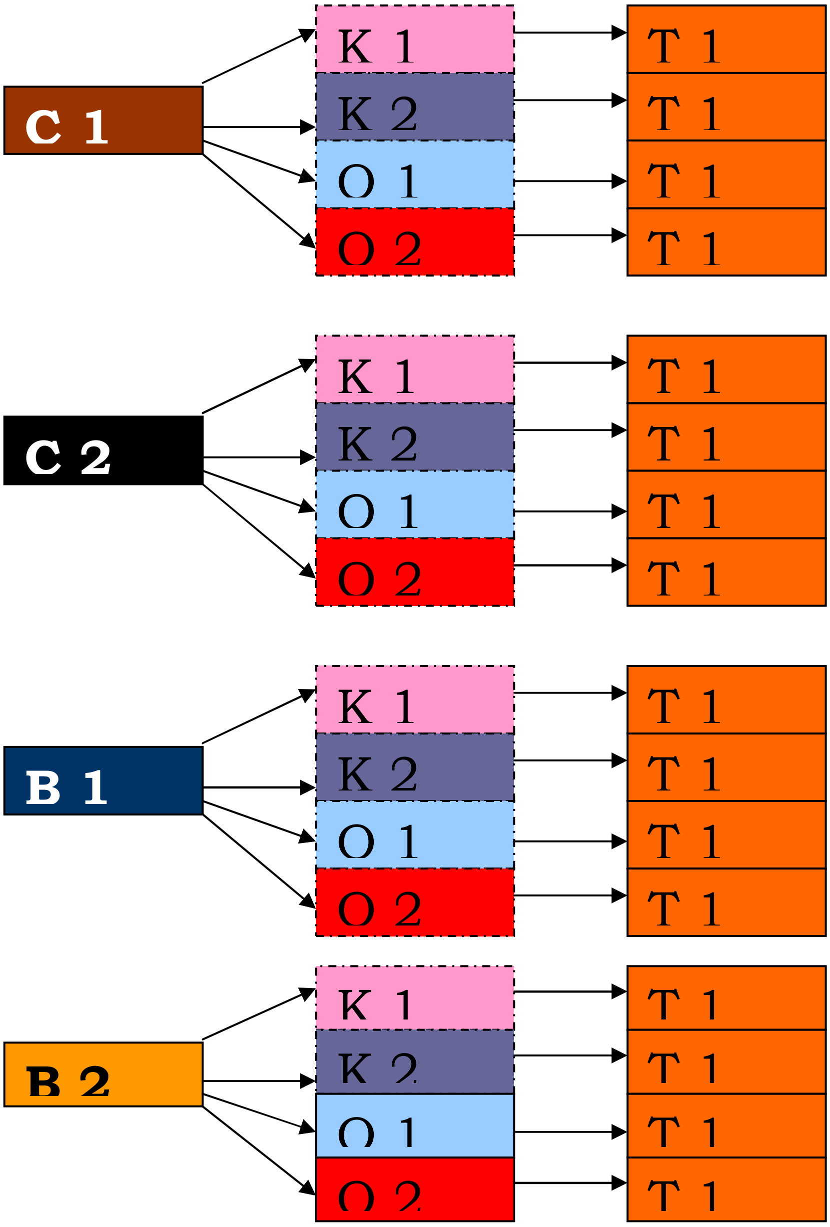
Quando você achou as 16 formas de se vestir ou os 300 lanches que a cantina oferece, aposto que você multiplicou o número de cada um dos elementos possíveis. Isso foi instintivo ao olhar esses números que representam as possibilidades, matematicamente chamamos esse método de Princípio Fundamental da Contagem.



Princípio Fundamental da Contagem é o princípio que estabelece de quantas maneiras duas ou mais decisões relacionados podem ocorrer.

Mas acredito também que alguns possam ter feito "na mão" ou com a ajuda de desenhos como o seguinte:

Construiremos o que se chama diagrama de árvore. Atribuindo a calça a letra C, bermuda a letra B, camisa a letra K, camiseta a letra Q e tênis a letra T, temos as seguintes possibilidades:



C1, K1, T1
C1, K2 ,T1
C1, Q1, T1
C1, Q2, T1
C2, K1, T1
C2, K2, T1
C2, Q1, T1
C2, Q2, T1
B1, K1, T1
B1, K2, T1
B1, Q1, T1
B1, Q2, T1
B2, K1, T1
B2, K2, T1
B2, Q1, T1
B2, Q2, T1

Foi bem interessante fazer esse diagrama, pois ajudou bastante a tornarem concretos os números tão abstratos, mas imagina fazer isso em um guarda roupas bem sortido, com 20 camisas, 12 calças, 15 bermudas e 10 tênis!

Histórias em Códigos de Barra!

Quase tudo em nossa volta possui códigos, nosso número na escola, o CEP da rua e o número de nossa casa. Nosso telefone também tem um código numérico, assim como os produtos nos supermercados. Mas para que todos esses números? Para facilitar o registro e busca de informações. Já pensou se a moça do caixa tivesse que digitar o nome completo de toda mercadoria que comprássemos? Demoraria muito!

O código de Barras desenvolvido nos Estados Unidos pela Uniform Code Council(UCC) é lido por raio laser. O código mais utilizado é o EAN/UCC-13, que usa um conjunto de 13 dígitos.

Na representação pelas barras utiliza-se o sistema binário, em que as barras pretas representam o 1 e as brancas o 0.

Bem, sabendo que os algarismos utilizados vão de 0 a 9 e que são 13 barras, ou 13 posições para formar o código, podemos até saber o número possível de etiquetas que podem ser formadas não é?

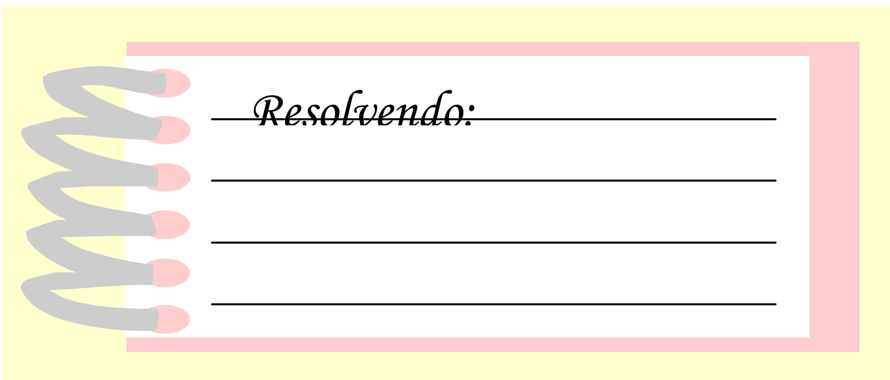
Eu pensei e resolvi assim:

$10.10.10.10.10.10.10.10.10.10.10.10.10 = 10^{13}$ ou

10.000.000.000.000 ou 10 trilhões de etiquetas! Dá para etiquetar muitos produtos não é?

Mas há algo que sei que vocês não sabem. Os 3 primeiros dígitos do código são indicativos do país onde o produto é filiado, no nosso caso vocês vão perceber que todos os códigos começam com 789.

Sabendo disso podemos determinar quantas etiquetas o Brasil pode produzir.



Copa do Mundo em tampinhas de garrafa.

Pensando em outras situações em que a Análise Combinatória está presente, me lembrei da Copa do Mundo de Futebol em 1994.

Na Copa do Mundo de 1994, um fabricante de refrigerante fez uma promoção nas tampinhas das garrafas de seus produtos. Cada tampinha tinha três seleções, com as posições de 1º, 2º e 3º lugares. Quem, no fim da Copa, tivesse a tampinha com a ordem correta das seleções ganharia um prêmio em dinheiro.

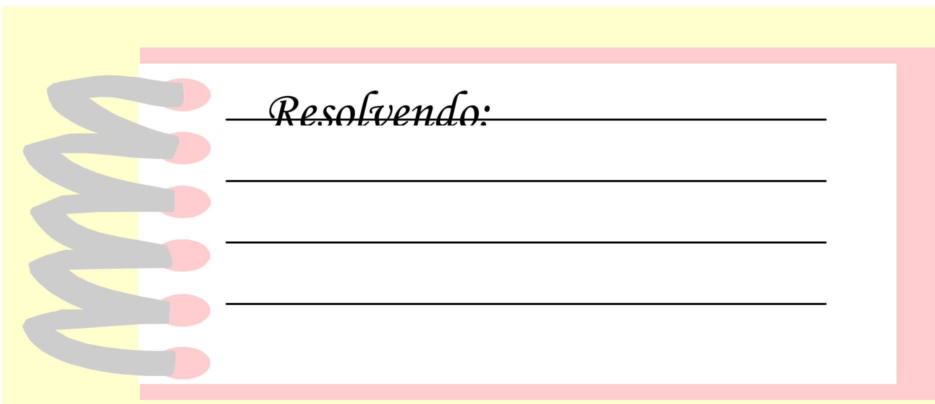
Sabendo que 24 países participaram nessa copa, quantas tampinhas com resultados diferentes o fabricante de refrigerante precisou fazer?

Será que alguém pensou nisso quando juntou as tampinhas?

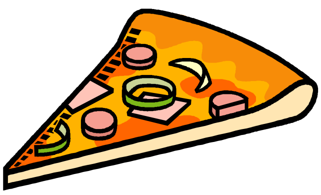
No caso das tampinhas tínhamos de formar trios de times no qual o 1º lugar será para um dos 24 times participantes, o 2º lugar caberá a um dos 23 times restantes, já que 1 está no 1º lugar e o 3º lugar pertencerá a um dos 22 times.

Logo, sabemos que:

1º lugar	2º lugar	3º lugar
24	23	22

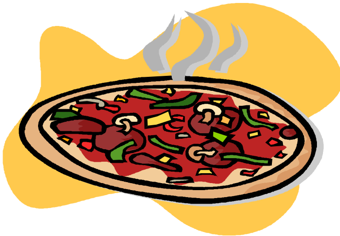


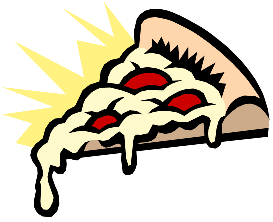
Associando idéias



Agora pense no caso de termos que escolher 3 fatias de pizza numa pizzaria que oferece 24 sabores. Quantos "grupos" de 3 fatias podemos formar, sem repetir os sabores? Será que teremos o mesmo

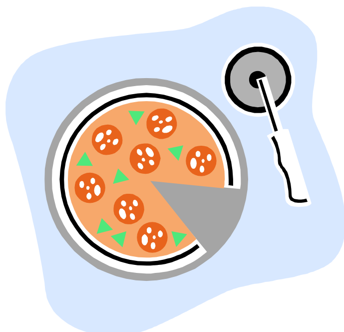
resultado das tampinhas de garrafa, 12144?
Sim ou não?





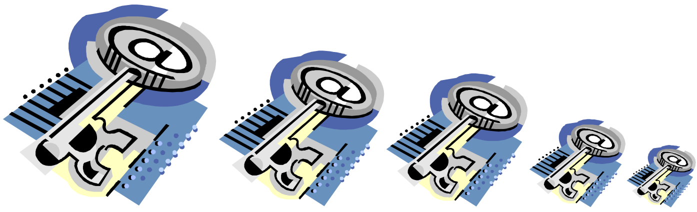
Bem, como nas tampinhas, na pizza temos 24 opções para o 1º pedaço, 23 para o 2º e 22 para o 3º. Porém, diferente das tampinhas, a ordem não importa, pois nas tampinhas ter Brasil no 1º lugar, França no 2º lugar e Bélgica no 3º lugar, por exemplo, é diferente de França no 1º lugar, Bélgica no 2º lugar e Brasil no 3º lugar. Assim, com esse grupo de 3 times podemos formar 6 arranjos de tampinhas diferentes, mas na pizza com 3 sabores só formamos 1 prato diferente, porque comer Calabresa, Portuguesa e Mista, ou Mista, Portuguesa e Calabresa, por exemplo, não faz diferença. Logo, a cada 6 combinações ou pratos formados temos 1 grupo de 3 fatias.

Então o resultado seria (24.23.22) dividido por 6, ou seja, 2024.

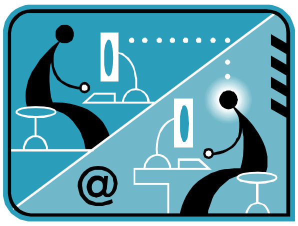


Mesmo depois desses exemplos, Análise Combinatória ainda parece algo bem distante daquilo que fazemos no nosso dia-a-dia, ainda mais com esse nome: Análise Combinatória! Só que, por mais estranho que possa parecer, ela nos ajuda a resolver muitos problemas. Então vamos avaliar alguns deles!

Criando senhas



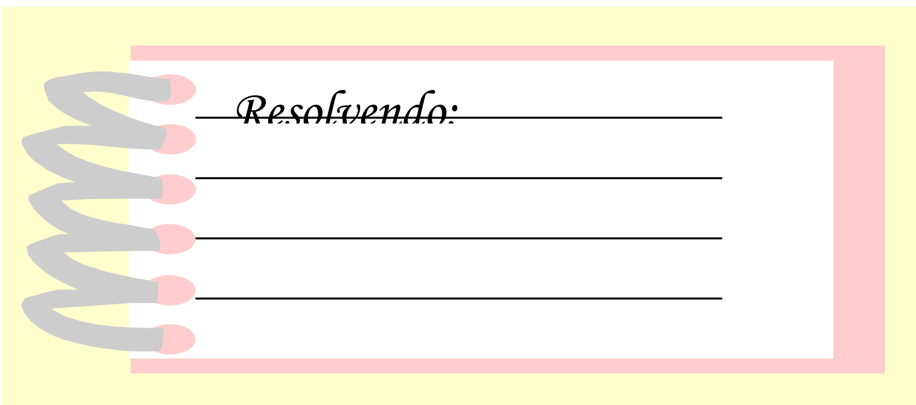
Esse é mesmo um ponto interessante. Quando eu era adolescente não tinha a menor preocupação com senhas, mas hoje não só eu tenho de decorar muitas senhas assim como vocês adolescentes também.



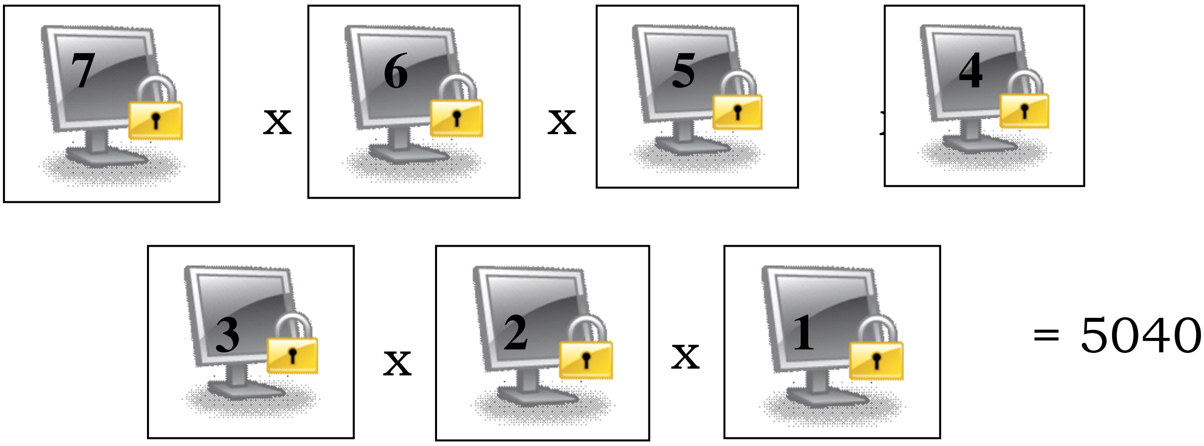
Só para ilustrar, pense nas senhas de seus e-mails, sítios de relacionamentos e de bate-papo, aliás, a internet é uma fonte inesgotável de solicitação de senhas!

Para facilitar costumamos usar dados conhecidos, como data de aniversário ou letras de nosso nome.

Calculem quantas senhas vocês poderiam formar usando todas as letras de seu nome!



Com o nome Jordana podemos criar 2520 senhas. Veja como podemos calcular:



Mas como neste nome temos 2 letras A dividiremos o resultado por 2, isso porque ter AJANORD e AJANORD, por exemplo, são a mesma coisa, mesmo que as letras A tenham sido mudadas de lugar, isso sempre acontecerá com as repetições!

Nesse caso das senhas 7 elementos são ***permutados***, e a cada permutação uma nova seqüência ordenada é formada, em casos como esse para determinar o número total de seqüências diferentes podemos fazer uma multiplicação envolvendo números consecutivos, começando nesse caso por 7 e terminando por 1.

Assim:

7. 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 5040 senhas, mas destas 5040 somente 2520 são diferentes.

No caso da senha, usamos o ***fatorial*** do número 7. Calculamos fatorial de números naturais maiores ou iguais a 2, quando multiplicamos esse número por seus antecessores naturais até o número 1.

Logo, o fatorial de 3, é 3.2.1, ou seja, 6. Considera-se que o fatorial de 0 é 1 e de 1 é 1.

Simbolizamos fatorial com o sinal de exclamação a frente do número. (6! = 6.5.4.3.2.1 = 720)

Quem vai pagar a conta?

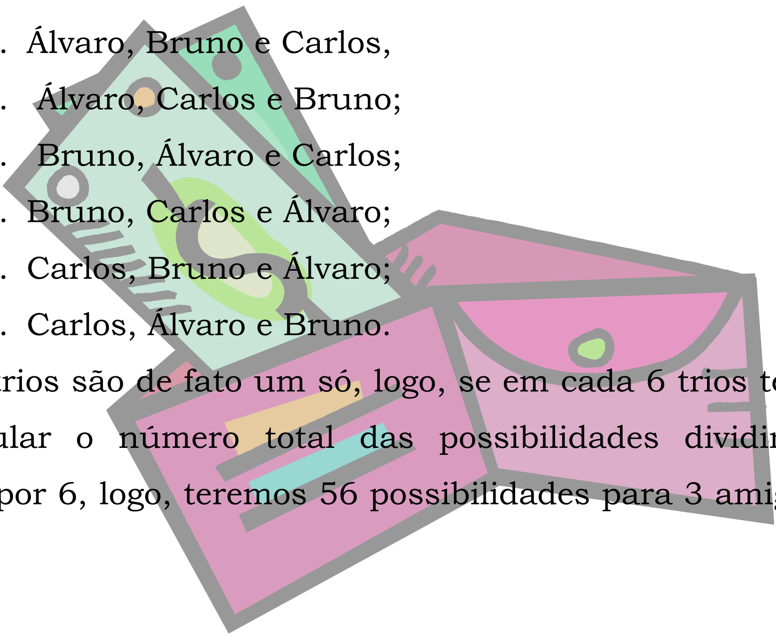
Agora pensem no assunto: você num grupo de 8 amigos saem para lanchar e dessa vez só 3 terão o “privilégio” de pagar a conta; quantas são as possibilidades da formação de grupos com 3 colegas que ficarão mais pobres essa noite?

Pensemos num grupo com os seguintes amigos:
Álvaro; Evandro;
Bruno; Felipe;
Carlos; Douglas;
Guilherme.

= 336

Para a 1ª opção temos 8 amigos, para a 2 ª temos 7 amigos e para a 3ª temos 6 amigos, então calculemos:

Nesses 336 trios possíveis, não há apenas um formado por Álvaro, Bruno e Carlos, mas sim 3!, ou 6 trios.



1. Álvaro, Bruno e Carlos,
2. Álvaro, Carlos e Bruno;
3. Bruno, Álvaro e Carlos;
4. Bruno, Carlos e Álvaro;
5. Carlos, Bruno e Álvaro;
6. Carlos, Álvaro e Bruno.

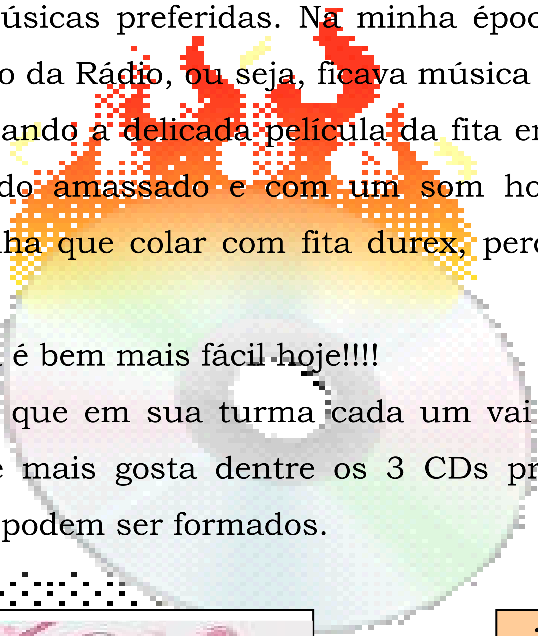
Esses 6 trios são de fato um só, logo, se em cada 6 trios temos um só, podemos calcular o número total das possibilidades dividindo as 336 possibilidades por 6, logo, teremos 56 possibilidades para 3 amigos pagarem a conta.

Esse recurso da divisão foi usado no caso das pizzas, lembra?

Essas são algumas situações em que usamos a matemática para facilitar a nossa vida.

Criando o seu próprio CD.

Hoje a tecnologia nos permite muitas coisas, inclusive gravar um CD somente com as nossas músicas preferidas. Na minha época era tudo com fita cassete e gravado direto da Rádio, ou seja, ficava música com voz do locutor no final, sem contar quando a delicada película da fita embolava no toca-fitas, aí já era, ficava tudo amassado e com um som horrível, isso quando não rasgava e você tinha que colar com fita durex, perdendo uma parte da música!



Concluindo, ouvir música é bem mais fácil hoje!!!!

Pensando nisso, imagine que em sua turma cada um vai gravar um CD com as 4 músicas de que mais gosta dentre os 3 CDs preferidos. E calcule quantos CDs diferentes podem ser formados.

1 – Caindo no Forró - Calypto

2 - Sacode a saia- Calypto

3- Você é minha.- Calypto

4 – Levanta poeira.- Calypto

5 –Menina vem dançar- Calypto

6 – É no meio do povo.- Calypto

1 – Arrebentação- MC Doidinho

2 – Quebrando tudo – MC Elephante

3- Cachorrinho manco – MC Feinha

4 – Vem caindo – MC Doidinho

5 – É nóis! – MC Tranco

1 – I love you so- Lady Lo

2 – You and I – Cristian Cry

3- Folow me – Sandy Flate

4 – Run to you – Amir Lay

5 – Second chance – The blue back

Vamos fazer essa juntos?!

Para a 1ª música temos 16 opções, para a 2ª música são 15, para a 3ª temos 14 opções e para a 4ª música 13 opções, isso claro, porque não queremos repetir nenhuma música.

Então temos:

$$16.15.14.13 = 43.680$$

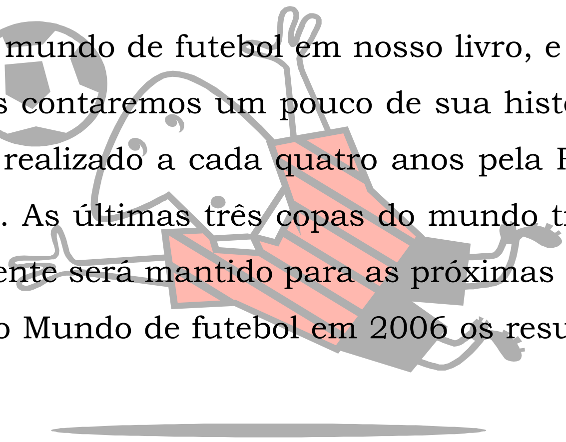
Que número, hein! Bem, mas não paramos por aí, porque temos aqui a questão das ordens, já que não há diferença entre escolher **"Menina vem dançar", "É nóis!" ,"Run to you"** e **"You and I"** ou **, "É nóis!", "You and I", "Run to you"** e **"Menina vem dançar"** ou **"Run to you" , "Menina vem dançar", "You and I"** e **"É nóis!" .** Então precisamos calcular os números de grupos repetidos para podermos dividir o total.

Lembram do exemplo dos meninos que pagariam a conta? Lá, com 3 colegas, poderíamos formar 6, ou 3! grupos iguais; o mesmo ocorre aqui, com 4 músicas podemos formar 24 (ou 4!) combinações iguais de músicas. Isso porque o que não queremos são as permutações, ou seja, as trocas que cada 4 músicas podem fazer e formar o mesmo grupo.

Logo o resultado será:

$$\frac{16.15.14.13}{4.3.2.1} = \frac{43680}{24} = 1820$$

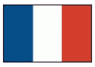
A Copa do Mundo de 2006



Já falamos sobre a Copa do mundo de futebol em nosso livro, e agora, além de usá-la como exemplo, nós contaremos um pouco de sua história. É um torneio de futebol masculino, realizado a cada quatro anos pela FIFA, e teve sua primeira edição em 1930. As últimas três copas do mundo tiveram 32 participantes, o que provavelmente será mantido para as próximas copas.

Na última edição da Copa do Mundo de futebol em 2006 os resultados foram os seguintes

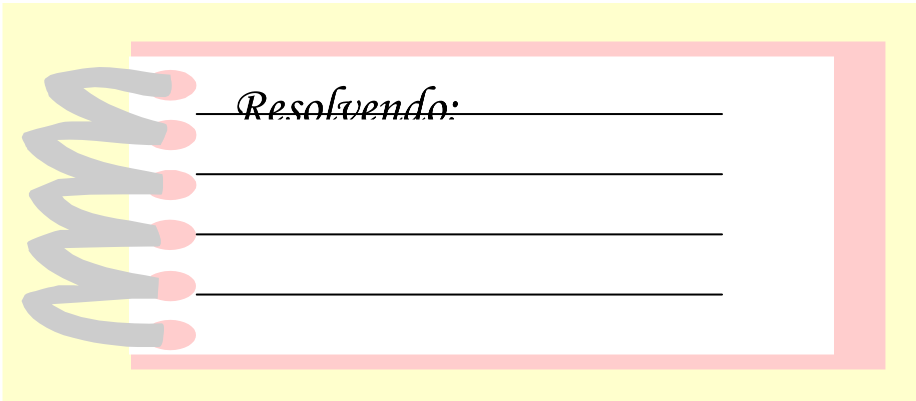
1º Itália 

2º França 

3º Alemanha 

4º Portugal 

Supondo que esse resultado pudesse ser alterado agora, quantas possibilidades poderia haver de resultados para os 4 primeiros lugares?



O Espírito da coisa

Na Análise Combinatória, como o próprio nome sugere, estamos sempre analisando o número de possibilidades de alguma situação, a quantidade de senhas que podemos montar, as formas de combinações de um lanche, dentre outros.

Também analisamos situações em que, por exemplo, usamos todos os elementos, como foi o caso das senhas, ou situações nas quais só utilizamos alguns, como vimos no caso dos colegas que pagariam a conta, ou na criação do CD.

Notaremos também que existem casos nos quais a ordem dos elementos não importa, o que aconteceu com as pizzas, mas há os casos em que a ordem é fundamental, como vimos nas tampinhas de garrafa e na copa do mundo. Há ainda a situação quando os elementos são repetidos, como vimos nas senhas com nomes.

Todas essas observações nos ajudam a entender que procedimento seguiremos para encontrarmos a resposta que procuramos.

Esses agrupamentos podem ser resolvidos pelo Princípio Fundamental da Contagem (PFC), mas, na prática só esse princípio pode se tornar muito complicado.

Por isso existem alguns agrupamentos, baseados no PFC, que facilitam a resolução de muitos problemas.

Dentre estes podemos citar os arranjos que usamos no caso das tampinhas de garrafa, pois a ordem importava e nós não usaríamos todos os elementos. O que fizemos ali, foi o PFC, só que com 3 grupos, ou seja, calculamos os 24 times de 3 em 3 e não dividimos por valor algum, pois cada 3 times formavam 6 grupos diferentes de resultados, mesmo que com os mesmos elementos.

Essa forma de agrupamento é chamada de Arranjo.

E sua fórmula é baseada na multiplicação de todos os elementos distintos tomados de acordo com o que o problema solicita, ou seja, se temos n elementos e queremos tomá-los k a k fazemos:

$A_{n,k} = n.(n-1).(n-2) \ldots (n-k+1)$

Pense num exemplo com número para ver se você realmente entendeu!

Os arranjos também podem ter repetição, isso quando podemos repetir os elementos, o que não se aplica às tampinhas, mas se aplica ao código de barras, pois no Brasil podemos ter o código 7987777777777 e nesse caso o arranjo seria com repetição para os 9 últimos dígitos.

E seria feito assim:

$$AR_{n,k} = \underbrace{n\,.n\,.n\,.n}_{kvezes}$$

Outro agrupamento que usamos sem perceber foi a PERMUTAÇÃO.

A permutação é um Arranjo de “n” elementos tomados “n” a “n”, ou seja, usando todos os elementos, como fizemos nas senhas com o meu nome, Jordana.

Permutação

As permutações também podem ter repetição, exatamente o que ocorreu com o nome Jordana, no qual a letra “A” se repetia, e nesse caso dividimos pelo fatorial do número de letras repetidas.

Outro agrupamento conhecido é a COMBINAÇÃO.

Nela formamos agrupamentos não ordenados de “n” elementos tomados “k” a “k”.

Usamos combinação no exemplo dos CDs e quem pagaria a conta, no caso das pizzas, pois a ordem não importava, e por isso dividimos pelas permutações. Na realidade o que fizemos, no caso dos CDs foi um arranjo de 16 músicas tomadas 4 a 4 e dividimos pela permutação, ou as trocas que essas 4 músicas fariam e formariam o mesmo grupo, ou seja, o mesmo CD. Logo, com a ajuda desses exemplos numéricos, entendemos que as combinações são os arranjos divididos pelas permutações.

Combinação

$$C_{n,k} = \frac{A_{n,k}}{P_k} = \frac{n.(n-1).(n-2)...(n-k+1)}{k!}$$

Decorar fórmulas não é nada agradável, mas em nosso caso acabamos usando cada uma das três fórmulas citadas de maneira intuitiva e baseada no que já sabíamos sobre o PFC.

Coisas que você precisa saber:

As questões que “enfrentamos” até aqui já nos mostraram o espírito da coisa, e nos ajudarão a ser bem sucedidos na maioria dos problemas que envolvem contagem, e que, como já sabemos, estão no nosso meio. Nossos novos conhecidos, que já podemos até chamar carinhosamente de grande PFC (Princípio Fundamental da Contagem), o velho DA (Diagrama da Árvore) e o trio PAC (Permutação, Arranjo, Combinação) são tudo que há para nos darmos bem, porém em Análise Combinatória vamos ter que colocar a boa e velha cuca para funcionar, sabe como é? O cérebro vai ter que entrar em ação em alguns casos. Ou seja: Vá tirando a teia de aranha!

Casos a pensar

Esse ano, teremos jogos Olímpicos e certamente todos nós estaremos torcendo por nossos atletas nas diversas modalidades de jogos em Pequim.

Vocês sabem que os Jogos Olímpicos tiveram início na Grécia por volta de 2.700 a.C. E que em 1896 o Barão Pierre de Coubertin recuperou os jogos, que estavam um pouco abandonados, e os organizou do modo como vemos hoje.

Mas o que vocês provavelmente não sabem é o que significa aquele símbolo dos jogos, sabe aqueles 5 círculos coloridos? Pois é, eles simbolizam o encontro dos 5 continentes e suas 5 cores, azul, preto, vermelho, amarelo e verde, e pelo menos uma dessas cores está presente em qualquer uma das bandeiras das nações do mundo.

Imaginem um grupo de pessoas que na cerimônia de abertura representará os círculos do símbolo; bem suponhamos que cada círculo seja formado por 6 pessoas de mãos dadas: de quantas maneiras diferentes cada círculo pode ser arrumado?

Parece bem simples, afinal vocês pensariam: é só permutar as 6 pessoas. Mas nem tudo é tão simples assim. Pense no detalhe: não estamos falando de pessoas em fila e sim de pessoas em roda, e isso muda bem as coisas!

Olhem esse exemplo. Para facilitar usaremos letras para identificar as crianças:

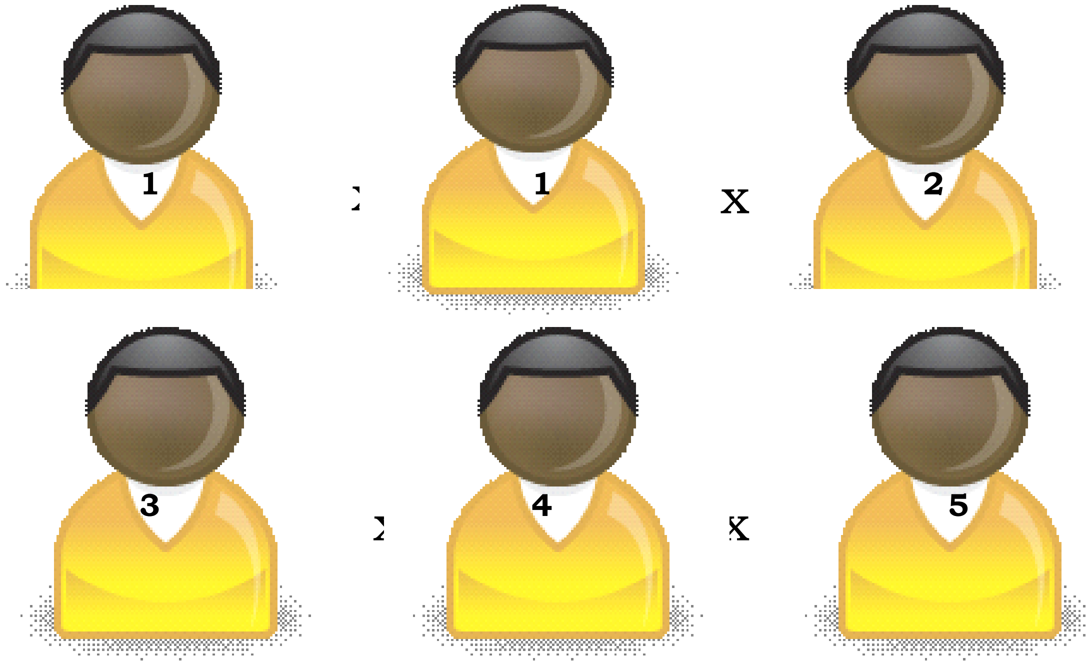
A – Menino blusa azul;
B – Menino blusa cinza;
C – menina blusa verde;
D – Menina blusa vermelha
E – Menino blusa vermelha;
F- Menino blusa amarela

Se eles estivessem em fila, nós os teríamos permutado e encontrado os grupos:
(A,B,C,D,E,F) diferente de (D,E,F,A,B,C) e diferente de (E,F,A,B,C,D), porém em rodas e círculos esses conjuntos são os mesmos, não importa se a menininha de blusa verde está "em cima", ou "em baixo", o que importa é que ela sempre está de mãos dadas com o menininho de cinza e com a menininha de vermelho e isso sempre acontecerá! Então, diferente do que pensávamos no início, a solução não será P_6, 6! ou 720. Mas como calcularemos isso?

Agora, colocando a cabeça para funcionar!

Vamos começar a montar o círculo colocando a 1ª pessoa, só existe 1 único modo de colocá-la, porque não importa: onde quer que ela fique ela vai ser a única mesmo. A 2ª pessoa também só terá 1 único modo de ser colocada no círculo, ao lado da 1ª, já 3ª pessoa poderá ficar ao lado da 2ª ou entre a 1ª e a 2ª então são 2 modos, a 4ª pessoa terá as seguintes possibilidades, entre a 1 ª e a 2ª entre a 2ª e a 3ª ou após a 3ª então são 3 modos de ser posicionada, e assim por diante até a última pessoa.

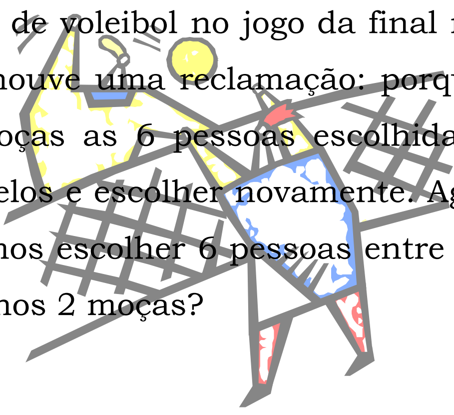
Resumindo, temos:



A resposta certa é 1.1.2.3.4.5 = 120, algo familiar, não? Parece um fatorial, ou uma permutação, só que em vez de 6 é de 5 e isso sempre acontecerá em eventos circulares, se fossem cem pessoas, haveria 1.1.2.3.....99 ou P_{99} modos e se fossem 1000 pessoas 1.1.2.3....999 ou P_{999} modos e, se fosse “n” pessoas, seriam 1.2.3....(n-1) modos ou $P_{(n-1)}$.

Caso 2:

Para secar a quadra de voleibol no jogo da final masculina, 6 pessoas foram escolhidas, porém houve uma reclamação: porque em um grupo que possuía 7 rapazes e 4 moças as 6 pessoas escolhidas foram só rapazes? Decidiu-se atender aos apelos e escolher novamente. Agora, diga de quantas maneiras diferentes podemos escolher 6 pessoas entre 7 rapazes e 4 moças, de modo que haja pelo menos 2 moças?



Talvez você queira primeiro escolher as 2 moças dentre as 4 que temos e depois escolher as 6 outras pessoas entre as 9 que sobraram. Nesse caso faríamos o seguinte:

$C_{4,2} \cdot C_{9,4} = 6 \cdot 126 = 756$

Porém, fazendo assim teríamos conjuntos repetidos.

Vamos dar nomes às pessoas para facilitar.

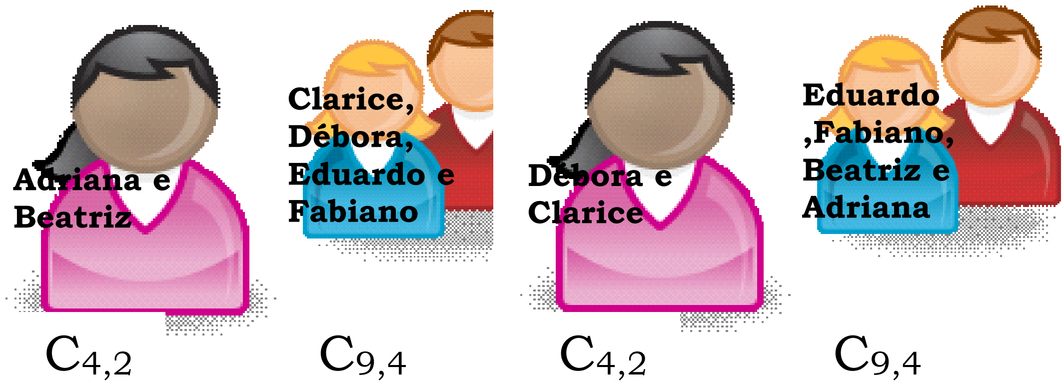
A – Adriana B – Beatriz

C – Clarice D – Débora

E – Eduardo F – Fabiano

G – Guilherme H – Hugo I – Igor J – José L - Leandro

Fazendo $C_{4,2}$ podemos, por exemplo, ter Adriana e Beatriz e com $C_{9,4}$ podemos, por exemplo, ter Clarice, Débora, Eduardo e Fabiano, não podemos? Mas também podemos ter Débora e Clarice com $C_{4,2}$ e Eduardo, Fabiano, Beatriz e Adriana usando $C_{9,4}$ seriam dois subgrupos formados e contados como diferentes, mas não há diferença entre eles, pois são as mesmas pessoas



Essa equipe foi contada 6 vezes uma quando Adriana e Beatriz foram as moças que escolhemos em $C_{4,2}$; outra quando as escolhidas nessa 1ª combinação foram Débora e Clarice; outra quando as escolhidas foram Adriana e Clarice; outra quando as escolhidas foram Adriana e Débora; ainda outra quando as escolhidas foram Beatriz e Débora, e finalmente quando Beatriz e Clarice foram as escolhidas na 1ª combinação.

Assim a solução para esse problema seria separar as possibilidades:

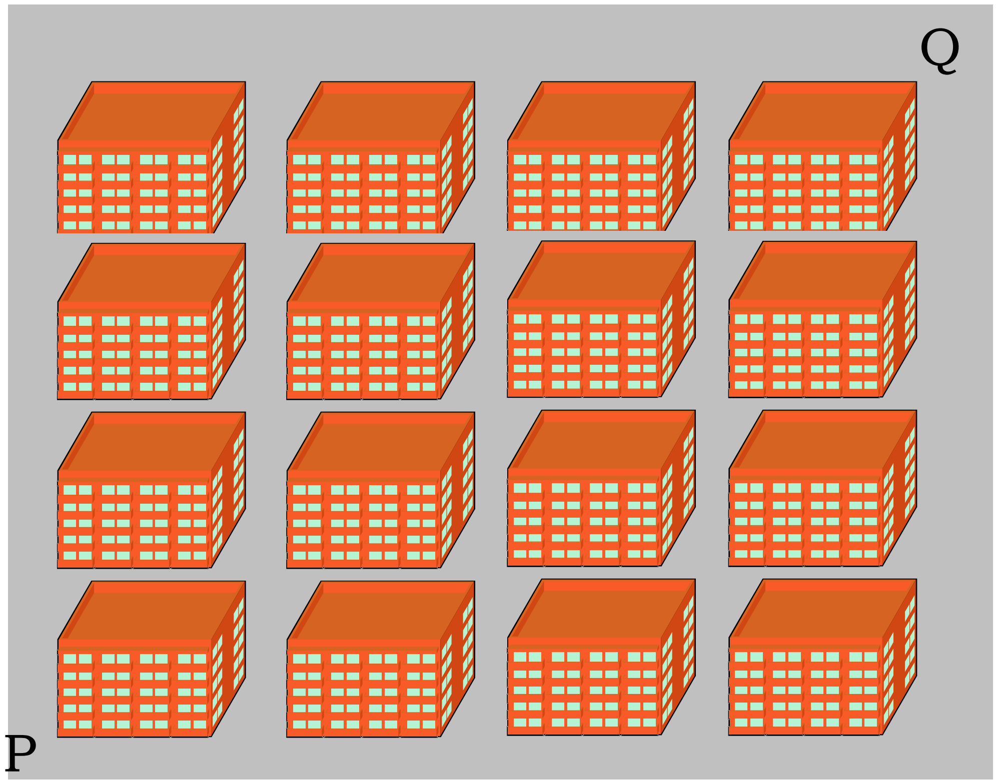
Daí então, fazemos a combinação de cada um deles.

$C_{7,4} \;.\; C_{4,2} + C_{7,3} \;.\; C_{4,3} + C_{7,2} \;.\; C_{4,4} =$

$$\left.\begin{array}{l} C_{7,4} = 35 \\ C_{4,2} = 6 \\ C_{7,3} = 35 \\ C_{4,3} = 4 \\ C_{7,2} = 21 \\ C_{4,4} = 1 \end{array}\right\} = 35.6 + 35.4 + 21.1 = 371$$

Caso 3:

Suponhamos que a vila olímpica em Pequim seja formada por 16 quarteirões, como mostra a figura abaixo. Um jogador de basquete sai do ponto P e vai até o refeitório no ponto Q, sabendo que ele só pode andar da esquerda para a direita e de baixo para cima. Nessas condições, quantos caminhos diferentes ele poderá fazer?



O jogador deve andar 6 quarteirões, sendo 3 para a direita e 3 para cima, um dos caminhos possíveis é:

(D,C,D,C,D,C)

Os outros caminhos possíveis são permutações da opção acima, e, como as direções são repetidas, será uma permutação com repetição. Vamos à solução:

$$P_6^{3,3} = \frac{6!}{3!3!}$$

Palavra dos autores.

Sabemos como Matemática tem sido um bicho-papão para muitos, porém também sabemos da enorme importância dela em nossa vida. Foi pensando nisso que nos esforçamos para colocar em uma linguagem mais simples e de maneira mais descontraída um tema que é bastante temido pelos alunos.

Claro que não colocamos aqui todas as possíveis situações, porque o livro ficaria muito grande. Mas estamos certos de que após a leitura desse livro a visão que vocês terão sobre a Análise Combinatória será bem mais clara.

---

[i] Revista do Professor de Matemática 57, 2005, p33-36.

[ii] Figura retirada da página: http://images.google.com.br/imgres?imgurl=http://mathworld.wolfram.com/images/eps-gif/Stomachion_900.gif&imgrefurl=http://mathworld.wolfram.com/Stomachion.html&h=271&w=568&sz=16&hl=pt-BR&start=12&tbnid=50e1dJ_tFnParM:&tbnh=64&tbnw=134&prev=/images%3Fq%3Dstomachion%26gbv%3D2%26hl%3Dpt-BR

[iii] http://br.geocities.com/saladefisica9/biografias/arquimedes.htm

[iv] Figura retirada da página: http://images.google.com.br/imgres?imgurl=http://isidreb.files.wordpress.com/2007/12/arquimedes.jpg&imgrefurl=http://isidreb.wordpress.com/2007/12/16/arquimedes/&h=411&w=300&sz=43&hl=pt-BR&start=3&tbnid=RO_N2YCwMlc60M:&tbnh=125&tbnw=91&prev=/images%3Fq%3DArquimedes%26gbv%3D2%26hl%3Dpt-BR

[v] Todas as figuras não referenciadas foram retiradas do Microsoft clip-art.