INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE
Campus Campos-Centro

Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

ANA PAULA FLOR PEIXOTO FERREIRA

FILOMENA DE FÁTIMA DE SOUZA CALDAS

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DE SISTEMAS LINEARES COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE WINPLOT

Monografia apresentada ao IFFluminense Campus Campos-Centro, como requisito parcial para a conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Prof.ª MSc. Márcia Valéria Azevedo de Almeida Ribeiro

CAMPOS DOS GOYTACAZES / RJ

2009

ANA PAULA FLOR PEIXOTO FERREIRA

FILOMENA DE FÁTIMA DE SOUZA CALDAS

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DE SISTEMAS LINEARES COM O AUXÍLIO DO SOFTWARE WINPLOT

Monografia apresentada ao IFFluminense Campus Campos-Centro, como requisito parcial para a conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovada em 26 de maio de 2009.

Banca Avaliadora:

Prof.ª Márcia Valéria Azevedo de Almeida Ribeiro (orientadora)
Mestre em Educação Matemática
IFFluminense Campus Campos-Centro

Prof. Salvador Tavares
Mestre em Educação Matemática
IFFluminense Campus Campos-Centro

Prof.ª Carmem Lúcia Vieira Rodrigues Azevedo
Mestre em Economia Empresarial
IFFluminense Campus Campos-Centro

AGRADECIMENTOS

Agradecemos a Deus, por iluminar nossa caminhada tornando possível a realização deste trabalho.

Aos nossos pais, por muito se esforçarem para nos educar, proporcionando-nos liberdade de escolha e apoio em todos os momentos.

A nossa professora e orientadora Márcia Valéria Azevedo de Almeida Ribeiro, pelo seu empenho, profissionalismo e amparo durante a elaboração deste trabalho.

A David Faria Caldas, pelo incentivo, apoio e compreensão em todos os momentos.

Aos nossos colegas e amigos, pelo companheirismo e apoio durante nossa caminhada na elaboração deste trabalho, que sempre com palavras de força nos ajudaram a superar os momentos de dificuldades.

Aos professores do IFFluminense Campus Campos-Centro, que foram excelentes mestres e contribuíram para nossa formação.

A coordenação do curso de Licenciatura em Matemática do IFFluminense Campus Campos-Centro.

Aos alunos que participaram da aplicação das atividades.

Enfim, a todos que de alguma forma contribuíram para a conclusão deste trabalho.

RESUMO

O presente estudo tem o objetivo de desenvolver um trabalho sobre a interpretação geométrica de sistemas lineares de duas e três incógnitas com o auxílio do *software* Winplot. O Winplot foi utilizado com a finalidade de viabilizar o estudo integrado entre os métodos algébrico e geométrico, permitindo a visualização e a compreensão das soluções dos sistemas lineares. As atividades dessa pesquisa foram aplicadas para alunos do terceiro ano do Ensino Médio de uma Escola Estadual do Município de Campos dos Goytacazes, Estado do Rio de Janeiro. As atividades foram elaboradas e divididas em duas partes: Atividade I e Atividade II. As atividades I e II abordavam, respectivamente, sistemas lineares de duas e três incógnitas, explorando a relação entre a álgebra e a representação geométrica tendo o Winplot como apoio. A aplicação das atividades foi realizada em um laboratório de informática de uma instituição federal de ensino, tendo um computador disponível para cada dupla, o que propiciou a ajuda mútua e o desenvolvimento integrado do trabalho. A análise de todo o trabalho permite concluir que o objetivo deste estudo foi alcançado.

Palavras-chave: Interpretação geométrica. Método algébrico. Sistemas lineares.

ABSTRACT

The present study has the objective of developing a work about the geometric interpretation of lineal systems of two three incognito with the aid of the software Winplot. Winplot was used with the purpose of making possible the study integrated among the algebraic and geometric methods, allowing the visualization and the understanding of the solutions of the lineal systems. The activities of that research were applied for students of the third year of the Medium Teaching of a State School of the Municipal district of "Campos dos Goytacazes", State of "Rio de Janeiro". The activities were elaborated and divided in two parts: Activity I and Activity II. The activities I and II approached, respectively, lineal systems of two three incognito, exploring the relationship between the algebra and the geometric representation tends Winplot as support. The application of the activities, it was accomplished at a laboratory of computer science of a federal institution of teaching, it tends an available computer for each couple, what propitiated the mutual help and the integrated development of the work. The analysis of whole the work allows to conclude that the objective of this study was reached.

Word-key: Geometric interpretation. Algebraic method. Lineal Systems.

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FOTOGRAFIAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Estamos vivendo num mundo em que é possível perceber mudanças rápidas, e estas acabam influenciando no processo de ensino e aprendizagem, exigindo dos educadores uma postura reflexiva perante as novas situações que surgem.

Diante deste cenário, o professor desempenha um papel relevante no processo de construção do conhecimento, buscando formar cidadãos críticos, conscientes de seus direitos e deveres, atendendo às exigências da sociedade.

Segundo Perez (2004), o professor precisa refletir sobre a escola como instituição que transmite o conhecimento e que ajuda o aluno a desenvolver seu potencial, que o ensina a pensar e o ajuda a descobrir caminhos para transformar a sociedade em que vive.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998a) recomendam alternativas para que se desenvolva um ensino de Matemática que possibilite ao aluno compreender a realidade em que está inserido e desenvolver capacidades cognitivas que o ajudem no exercício da cidadania.

Dentre as muitas alternativas sugeridas, podemos destacar a importância que deve ser dada ao desenvolvimento de habilidades de caráter gráfico, geométrico e algébrico.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998b), um dos objetivos do ensino da Matemática nas instituições escolares é levar o educando a expressar-se oral, escrita e graficamente em diversas situações.

Refletindo sobre a importância da conexão entre a Álgebra e a Geometria, pensamos num trabalho que pudesse minimizar as dificuldades enfrentadas pelos alunos ao estudarem sistemas lineares.

Durante o curso de Licenciatura em Matemática do IFFluminense Campus Campos-Centro, tivemos a oportunidade de vivenciar a interpretação geométrica de sistemas lineares no IR^2 e no IR^3, com o uso do *software* Winplot, nas disciplinas de Educação Matemática e Novas Tecnologias e Geometria Analítica. Percebemos que o uso do Winplot facilitou a visualização da interpretação geométrica desses sistemas.

Embora tivéssemos visto a interpretação geométrica de sistemas lineares somente no Ensino Superior, bem como a maioria dos nossos colegas, consideramos viável e importante a sua abordagem no Ensino Médio.

Dessa forma, o trabalho desenvolvido na Licenciatura em Matemática nos inspirou a desenvolver o estudo da interpretação geométrica de sistemas lineares com alunos do Ensino Médio, utilizando o *software* Winplot como ferramenta facilitadora.

Sendo assim, o presente estudo tem o objetivo de desenvolver um trabalho sobre a interpretação geométrica de sistemas lineares de duas e três incógnitas com o auxílio do *software* Winplot.

O *software* Winplot foi utilizado com o objetivo de possibilitar o estudo integrado dos métodos algébrico e geométrico, permitindo a visualização e compreensão das soluções dos sistemas lineares.

Segundo Lima (1992), a variedade de interpretações no estudo de sistemas lineares enriquece a sua gama de aplicações, permitindo a utilização de diferentes instrumentos para resolvê-los.

No Ensino Médio, os sistemas lineares constituem um tópico do conteúdo programático de Matemática, no entanto, a interpretação geométrica é pouco explorada, conforme afirma Lima

> Devido a sua importância, utilidade e simplicidade conceitual, os sistemas lineares fazem parte dos currículos das escolas, a partir do segundo grau. Entretanto, nas exposições elementares desse assunto, raramente se mostra que, embora se trate de um problema algébrico, a resolução dos sistemas lineares contém uma forte componente geométrica, indispensável para a sua boa compreensão.(LIMA, 1992, prefácio).

Buscando-se um embasamento teórico, para trabalhar o tema em questão, foram realizadas pesquisas em livros do Ensino Médio, a fim de encontrar autores que fizessem menção ao tema seja no IR^2 ou no IR^3. Constatou-se, então, que poucos são aqueles que abordam sistemas lineares com interpretação geométrica.

Fizemos também uma pesquisa por meio de um questionário (ANEXO I), que foi aplicado a 30 professores do Ensino Médio, com o objetivo de obter informações sobre o livro adotado e quanto à postura do professor em relação à abordagem do tema desta pesquisa, em suas aulas.

Os relatórios dos livros pesquisados e dos questionários aplicados encontram-se no Capítulo II desta monografia

Com a finalidade de facilitar o processo de ensino e aprendizagem, foram desenvolvidas atividades (ANEXO II) que aliavam as resoluções algébrica e gráfica de sistemas lineares de duas e três incógnitas, tendo como instrumento auxiliar, o *software* Winplot.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998a), as tecnologias têm como perspectiva desenvolver habilidades que sejam mecanismos de construção do conhecimento.

Com o objetivo de detectar possíveis falhas e aperfeiçoar as atividades da monografia, que seriam trabalhadas no Ensino Médio, estas foram aplicadas, inicialmente, para doze alunos de uma turma de Licenciatura em Matemática de uma instituição federal de ensino. Dos doze alunos que participaram desse trabalho inicial, todos declaram que estudaram sistemas lineares de duas incógnitas no Ensino Médio, porém sem a interpretação geométrica. Sete alunos disseram que não estudaram, no Ensino Médio, sistemas lineares de três incógnitas e os outros cinco declararam que aprenderam a resolver esses sistemas por escalonamento, porém sem a interpretação geométrica.

Durante a aplicação das atividades para os alunos da Licenciatura, percebemos que, a partir das linguagens oral, escrita e gráfica, eles demonstravam aquisição do conhecimento de forma satisfatória.

Após as devidas correções, as atividades foram aplicadas em uma turma do 3.º ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual do município de Campos dos Goytacazes.

Antes de aplicar as atividades para a referida turma do Ensino Médio, fizemos uma sondagem para saber se esses alunos haviam estudado sistemas lineares. O professor de Matemática que havia dado aula para eles também no 2.º ano nos informou que tinha trabalhado, ao final do 2.º ano, a resolução de sistemas lineares de duas incógnitas e a interpretação geométrica destes foi feita com lápis e papel. Já os sistemas de três incógnitas foi trabalhado por meio do escalonamento, sem interpretação geométrica.

Esse relato nos mostrou que a aplicação das atividades para esta turma seria significativa e viabilizaria nosso trabalho, pois os alunos já tendo noção de como resolver um sistema, esta etapa seria menos trabalhosa, podendo ser dada maior ênfase à interpretação geométrica com o uso do *software* Winplot, proporcionando aos alunos a aquisição de novos conhecimentos e a incorporação destes aos já adquiridos em séries anteriores.

As atividades desta monografia foram desenvolvidas em um laboratório de informática de uma instituição federal de ensino, durante quatro encontros, totalizando 12 aulas de 50 minutos cada.

Os dezesseis alunos do Ensino Médio que participaram da aplicação das atividades estavam sempre dispostos em dupla, tendo um computador disponível para cada dupla. A organização dos alunos, dessa forma, propiciou o desenvolvimento integrado e participativo dos mesmos.

Esta monografia é composta de três capítulos, além da introdução e das considerações finais.

O Capítulo I apresenta algumas considerações sobre a Tecnologia na Educação.

No Capítulo II, há um relatório dos livros pesquisados e dos questionários aplicados aos professores do Ensino Médio, como dito anteriormente.

No Capítulo III, encontram-se os comentários das atividades aplicadas para os alunos do Ensino Médio durante os encontros.

Finalizando, apresentamos considerações que julgamos interessantes, referências bibliográficas e anexos.

CAPÍTULO I

1.1- A TECNOLOGIA NA EDUCAÇÃO: algumas considerações

Diante do grande desenvolvimento tecnológico das últimas décadas e das mudanças ocorridas na sociedade, houve a necessidade do ensino acompanhar o ritmo das transformações tecnológicas e utilizar os novos recursos em sala de aula.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998b), as tecnologias constituem um dos principais agentes de transformação da sociedade e o uso de recursos tecnológicos contribui significativamente no processo de ensino e aprendizagem, sendo assim há a necessidade de que professores e alunos compreendam a importância do uso da tecnologia, bem como acompanhem suas mudanças.

D'Ambrósio (1996) destaca que a utilização de tecnologias na educação não substituirá o professor, porém aquele incapaz de usá-las não terá espaço na educação. Ele ainda ressalta que o novo papel do professor será o de gerenciar e facilitar o processo de aprendizagem, interagindo com o aluno criticamente na produção de novos conhecimentos.

Nogueira e Andrade (2004) afirmam que apesar do grande potencial que a tecnologia oferece, sua utilização pedagógica ainda é pequena.

Há alguns anos, a informática vem se disseminando no Brasil e hoje já faz parte da realidade de muitos brasileiros. Diante da inserção da informática na sociedade, muitos educadores levantaram e levantam questões sobre a utilização de recursos tecnológicos no ambiente educacional.

Sendo assim, várias iniciativas surgiram com o objetivo de discutir e implementar ações tecnológicas visando disseminar o uso de computadores na escola.

No Brasil, o I Seminário Nacional de Informática Educativa ocorreu em 1981, teve o apoio do Governo Federal, e contou com a presença de educadores de diversas partes do país. Desta iniciativa surgiram alguns projetos, dentre os quais destacamos EDUCOM, FORMAR, PRONINFE e PROINFO. (PENTEADO, BORBA, GRACIAS, 1998, p.78).

Penteado, Borba e Gracias (1998) ressaltam que a necessidade de mudanças imposta pela Informática vem promovendo ações de desenvolvimento curricular, formação de professores e metodologias de ensino, dentre outras.

> ...acreditamos que a introdução da Informática na escola é irreversível, e que grande parte dessas iniciativas em relação à Informática Educativa conduzem a questionamentos e evidenciam a necessidade de mudanças que vão além da criação de um laboratório ou disciplinas específicas. É preciso que estudiosos oriundos das diversas áreas se debrucem sobre este problema, pois, embora o uso da Informática esteja apontando para uma tendência interdisciplinar, a formação tanto de docentes quanto dos alunos é, ainda, fundamentalmente baseada na divisão do conhecimento em áreas como Matemática, Biologia, História, etc. (PENTEADO, BORBA, GRACIAS, 1998, p.80).

Nogueira e Andrade (2004) destacam que o problema não se restringe apenas à inclusão da Informática nos currículos escolares, mas sim da reorganização dos pressupostos educacionais com o propósito de viabilizar a construção e elaboração de conhecimentos a partir das novas tecnologias computacionais. Além disso, ressaltam o uso de recursos computacionais como ferramentas didáticas auxiliares para a superação de dificuldades no ensino de Matemática em todos os níveis.

Segundo Ponte, Boavida, Graça e Abrantes (1997), a forte relação entre a Matemática e a Informática reforça a utilização de recursos computacionais no processo de ensino e aprendizagem, provocando mudanças significativas nas práticas tradicionais e dando à Matemática uma nova dimensão. Eles destacam ainda que o uso do computador possibilita o desenvolvimento de um trabalho participativo, estimulando a atitude crítica e investigativa e enriquecendo a capacidade do aluno de raciocinar.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998b) destacam que o uso do computador pode contribuir para que o ensino e a aprendizagem de Matemática se torne uma atividade mais rica e desenvolva no aluno o pensamento crítico, a curiosidade, a observação e a análise, tendo o professor o papel fundamental na preparação, condução e aperfeiçoamento das situações de aprendizagem.

O uso das tecnologias na educação requer um olhar mais abrangente e cuidadoso, pois envolve novas formas de ensinar e aprender, exigindo reestruturações e redefinições de metodologias de ensino. Não há como ignorar a importância da tecnologia como instrumento auxiliar de ensino e aprendizagem para alunos e professores.

Segundo Roque (1999), o conceito de escola está mudando com as novas tecnologias, a escola do futuro será composta de alunos, professores e suporte tecnológico e certamente integrará as novas tecnologias dentro dos conceitos clássicos de ensino e aprendizado, porém essa escola do futuro deve ser pensada com cuidado, as tecnologias não podem ser usadas indiscriminadamente, alguns cuidados devem ser tomados, principalmente em relação à massificação uniforme de um padrão de ensino. Ele ainda comenta que uma coisa é definitiva: as novas tecnologias são uma realidade e devem permanecer, sendo assim devemos procurar os nossos próprios caminhos para proporcionarmos aos nossos estudantes uma melhor e mais moderna formação e informação.

CAPÍTULO II

2.1- Relatório dos livros pesquisados

Foram pesquisados 25 livros de Matemática do Ensino Médio, sendo 14 referentes à segunda série e 11 volumes únicos, com o objetivo de verificar se estes abordavam a resolução de sistemas lineares de duas e três incógnitas e a interpretação geométrica destes sistemas.

As datas de edição dos livros variavam de 1993 a 2005, sendo 17 livros (68%) de 2000 a 2005.

Todos os livros consultados traziam a abordagem de sistemas lineares de duas e três incógnitas.

Dos 25 livros pesquisados, 10 apresentavam a interpretação geométrica de sistemas lineares de duas incógnitas. O Gráfico 2.1 ilustra esta situação em percentuais.

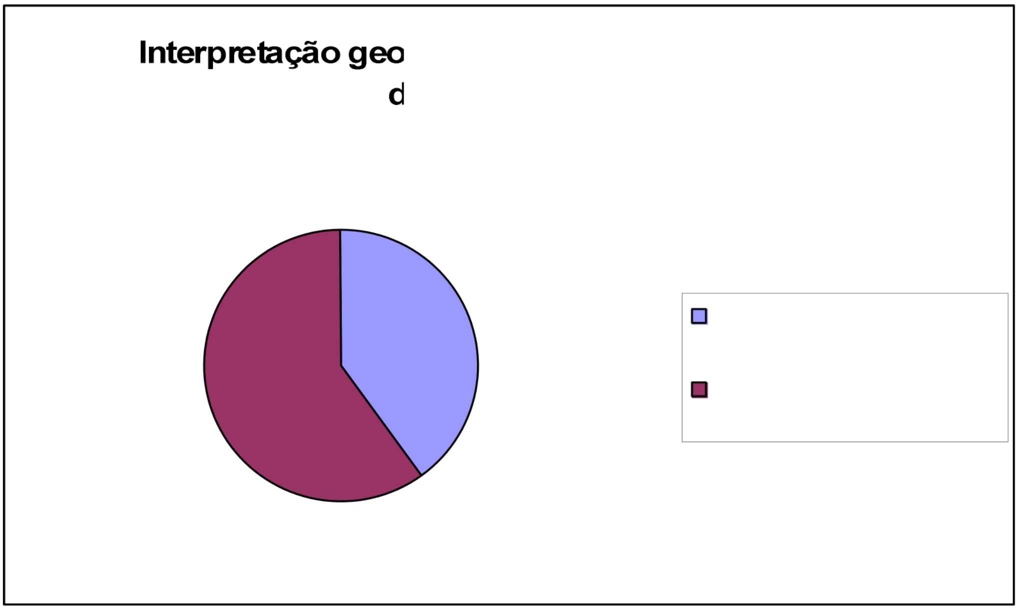


Gráfico 2.1: Interpretação geométrica de sistemas lineares de duas incógnitas

Quanto à interpretação geométrica de sistemas lineares de três incógnitas, apenas 4 livros fazem este estudo, um editado em 2003 e três editados no ano de 2005. A seguir, temos Gráfico 2.2 com os percentuais referentes a esta análise.

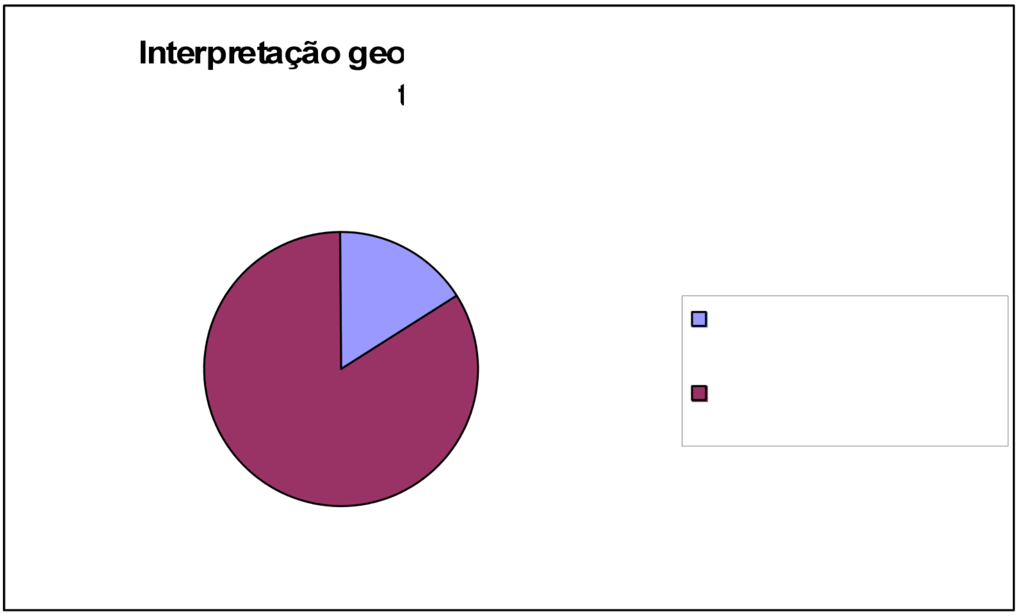


Gráfico 2.2: Interpretação geométrica de sistemas lineares de três incógnitas

Tendo como base os livros do Ensino Médio, consultados nesta pesquisa, observamos que a interpretação geométrica de sistemas lineares de duas e três incógnitas ainda é um assunto pouco discutido pelos autores ao abordarem a resolução desses sistemas.

2.2- Relatório dos questionários aplicados aos professores do Ensino Médio

Elaboramos um questionário (ANEXO I), que foi aplicado para professores do Ensino Médio, com o objetivo de obter informações sobre o livro adotado e quanto à postura do professor, em suas aulas, em relação à abordagem do tema desta pesquisa.

Foram entrevistados 30 professores, sendo 12 da rede particular e 18 da rede pública. Vale ressaltar que 100% dos professores fazem uso de livro didático.

Na pesquisa feita com os professores, eles declararam que abordam sistemas lineares de duas incógnitas, bem como o livro didático adotado por eles.

Quanto à interpretação geométrica de sistemas lineares de duas incógnitas, 11 dos livros adotados pelos professores fazem a interpretação geométrica, enquanto 20 professores afirmaram que trabalham com seus alunos a interpretação geométrica.

Ao perguntarmos sobre a utilização de algum recurso tecnológico para auxiliar este trabalho, 9 professores (dos 20 que fazem a interpretação geométrica) responderam que utilizam o computador, tendo a maioria citado o *software* Winplot.

Em relação à abordagem de sistemas lineares de três incógnitas, todos os professores relataram que o livro adotado por eles aborda esse tema e 22 professores declararam fazer este estudo com seus alunos. Dentre aqueles que declaram não estudar este tema, alguns deram como justificativa a falta de tempo.

No que se refere à interpretação geométrica de sistemas lineares de três incógnitas, 9 dos livros adotados pelos professores fazem essa interpretação e 8 professores (dos 22 citados no parágrafo anterior) afirmaram que trabalham com seus alunos a interpretação geométrica. Ao perguntarmos sobre a utilização de algum recurso tecnológico para auxiliar na interpretação geométrica, 5 professores (dos 8 que fazem a interpretação geométrica) responderam que usam o computador e o *software* Winplot e um professor declarou utilizar montagens com cartolina para facilitar a visualização.

A seguir, temos alguns relatos de professores justificando o estudo de sistemas lineares.

"Esse assunto se faz necessário com instrumento para resolução de problemas."

"Sistemas lineares é um assunto do programa de ensino. Também por ser um conteúdo que é muito utilizado para resolver problemas de outras áreas do conhecimento e do cotidiano."

"Abordado na resolução de matriz inversa."

A seguir, citamos algumas justificativas apresentadas por professores para fazer a interpretação geométrica.

"A visualização através da construção facilita a aprendizagem."

"Pois dessa forma o aluno tem uma melhor visualização."

"Para fazer relação entre álgebra e geometria."

"A interpretação geométrica ajuda a visualizar o que foi feito algebricamente.."

"Esse momento permite uma analogia com a geometria analítica."

A seguir, temos algumas justificativas apresentadas por professores pela ausência da interpretação geométrica em suas aulas.

" Pelo fato do livro não trazer não focalizo a interpretação geométrica."

"Pois não há tempo suficiente para fazer a interpretação geométrica desses sistemas."

"Não há necessidade momentânea."

"Pela falta de tempo e pela pequena carga horária."

"Falta de recurso tecnológico."

"Não está no planejamento."

CAPÍTULO III

3.1- Comentários das atividades aplicadas para os alunos do Ensino Médio

As atividades que fazem parte deste trabalho monográfico (Anexo II) foram aplicadas para alunos do 3.º ano do Ensino Médio de uma escola da rede pública estadual de Campos dos Goytacazes.

As atividades foram elaboradas e divididas em duas partes: Atividade I e Atividade II. As Atividades I e II abordavam, respectivamente, sistemas lineares de duas e três incógnitas, explorando a relação entre a Álgebra e a representação geométrica com o auxílio do *software* Winplot.

Ocorrida em quatro encontros, a aplicação das atividades foi realizada em um laboratório de informática de uma instituição federal de ensino, pois para desenvolvê-las, fez-se necessário o uso de computadores.

Os dezesseis alunos que participaram da aplicação das atividades estavam sempre dispostos em dupla, tendo um computador disponível para cada dupla. A organização dos alunos, dessa forma, propiciou a ajuda mútua e o desenvolvimento do trabalho de forma integrada. Apesar dos alunos estarem em dupla, seus registros eram feitos individualmente a partir das discussões entre eles.

Tanto para a aplicação da atividade I, quanto da atividade II, foram necessários dois encontros, cada um com 2h30min de duração, perfazendo um total de 10 horas.

Observamos que os alunos, apesar de interessados, apresentaram dificuldades na resolução dos sistemas, sendo assim, solicitavam nossa ajuda ou a dos colegas sempre que necessário.

Porém, no que diz respeito à utilização do *software* Winplot, percebemos que eles apresentaram um bom desempenho, apesar de nunca terem trabalhado com este programa. À medida que as atividades eram realizadas, eles aprendiam os comandos e até descobriam outros que poderiam ser utilizados para facilitar e agilizar o trabalho.

A seguir, faremos um relato das atividades aplicadas em cada encontro.

3.1.1- Primeiro encontro

No primeiro encontro, foram aplicadas as sete primeiras questões da atividade I (Anexo II), referentes a sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas.

Demos início a este primeiro encontro fazendo comentários sobre o programa Winplot, que seria utilizado para desenvolver as atividades. Comentamos que este software é gratuito e de fácil manuseio e foi produzido por Richard Parris, da Phillips Exeter Academy (http://math.exeter.edu/rparris).

Apresentamos para os alunos as ferramentas básicas que seriam utilizadas para o bom desenvolvimento do trabalho.

Ao trabalhar a primeira questão, os alunos utilizaram o Winplot, a partir dos comandos: Janela/2-dim/Equação/Implícita, para representar graficamente, num mesmo sistema de eixos, as equações $2x + y = 5$ e $x - y = 1$. Enfocamos que trabalharíamos em 2dim, pois desenharíamos gráficos no plano, ou seja, estávamos trabalhando em $IR^2 = \{(x, y) | x \in IR \text{ e } y \in IR\}$.

A partir da representação gráfica, os alunos identificaram que cada equação era representada geometricamente por uma reta e estas apresentavam ponto comum ou seja, eram concorrentes no ponto (2,1).

Pedimos aos alunos que marcassem o ponto de intersecção das retas por meio dos comandos: dois/intersecções (marcar ponto).

No Gráfico 3.1, temos o que foi observado por eles.

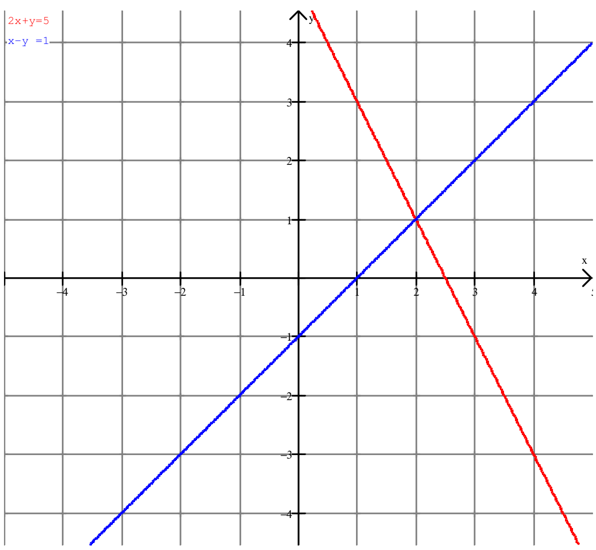


Gráfico 3.1: Retas da primeira questão

A seguir, pedimos que os alunos resolvessem algebricamente o sistema formado pelas equações das retas representadas anteriormente.

A maioria dos alunos resolveu o sistema por adição e encontrou como solução o par ordenado (2, 1). Ao pedirmos para que eles comparassem o ponto comum das retas com a solução do sistema, os alunos perceberam que eram iguais. Um aluno comentou em voz alta: *”o ponto de intersecção das retas é a solução do sistema”*. Os outros colegas ouviram o comentário e concordaram com ele.

Na questão dois, as ferramentas utilizadas para representar graficamente as equações das retas foram: Janela/2-dim/Equação/Explícita. Neste momento explicamos para os alunos quando uma equação encontra-se na forma implícita (questão 1) ou explícita (questão 2). A partir desta compreensão, os alunos tiveram a oportunidade de optar por uma forma ou outra nas questões seguintes.

Assim como a primeira questão, as questões 2 e 3 traziam exemplos de duas equações lineares de duas incógnitas, cujas representações gráficas eram retas concorrentes. Nestas duas questões, os alunos também puderam perceber que o ponto de intersecção das retas era a solução do sistema formado pelas equações das mesmas.

Mostramos para os alunos que os sistemas das questões 1, 2 e 3 poderiam ser resolvidos, algebricamente, usando o método da substituição. Os alunos acompanharam e entenderam a explicação dada, porém, a maioria deles tinha preferência pelo método da adição. Declararam que achavam mais fácil resolver por adição do que por substituição.

Ao representar graficamente as equações dadas na quarta questão, os alunos perceberam que as retas traçadas eram paralelas distintas e sendo assim não apresentavam ponto comum.

Os alunos resolveram algebricamente o sistema formado pelas equações representadas graficamente. Ao resolver o sistema, eles chegaram a $0 = 17$ e falaram: “isso é falso, então o sistema não tem solução”. Interferimos e falamos que eles tinham razão e neste caso, estávamos diante de um sistema impossível, sendo o conjunto solução $S = \varnothing$. Eles perceberam que se o sistema não tem solução então as retas traçadas não irão apresentar ponto comum.

Ao final desta questão, pedimos aos alunos que voltassem às equações dadas: $-x + 2y = 3$ e $4x - 8y = 5$ e observassem que $\frac{-1}{4} = \frac{2}{-8}$, ou seja há uma proporcionalidade entre os coeficientes de x e y, o que não aconteceu nas questões anteriores.

Falamos para os alunos que, quando esta proporcionalidade acontece as retas são paralelas e caso contrário elas são concorrentes, como nas três primeiras questões.

Quando os alunos representaram, com o auxílio do Winplot, as equações dadas na questão 5 ($5x + y = 2$ e $10x + 2y = 4$), eles perceberam que as retas ficavam sobrepostas e concluíram que elas eram coincidentes. Nesta questão as equações estavam na forma implícita, porém pedimos aos alunos que utilizassem a forma explícita, pois ao traçar a segunda equação, utilizando esta forma, havia mudança na cor do gráfico, facilitando a visualização da sobreposição. Perguntamos aos alunos se essas retas apresentavam pontos comuns e eles disseram: “todos” e após indagações, concluíram que as retas apresentavam infinitos pontos comuns.

Ao resolver o sistema formado pelas equações representadas graficamente nesta questão, os alunos encontraram $0 = 0$ ou $0x + 0y = 0$ tivemos que interferir neste momento e explicar que, neste caso, quaisquer valores atribuídos a x e y satisfazem a igualdade $0x + 0y = 0$ e isolando, por exemplo, y em qualquer das equações dadas nessa questão, encontramos $y = 2 - 5x$, assim as soluções do sistema são todas as duplas $(x, 2 - 5x)$, para qualquer x real. Dessa forma a solução do sistema pode ser dada pelo conjunto $S = \{(x, 2 - 5x), x \in IR\}$. Estávamos diante de um sistema possível e indeterminado, ou seja, este apresentava infinitas soluções e estas eram os pares (x, y) do plano que pertenciam à reta de equação $5x + y = 2$ ou $10x + 2y = 4$, e a solução do sistema também poderia ser dada por $S = \{(x, y) \in IR^2 \mid 5x + y = 2\}$. Explicamos que IR^2 é o conjunto de todos os pontos (x, y) do plano, ou seja, $IR^2 = \{(x, y) \mid x \in IR \text{ e } y \in IR\}$.

Os alunos constataram que as equações dadas nessa questão são representadas geometricamente por uma única reta e todo ponto desta reta representa a solução do sistema. Logo, o sistema admite infinitas soluções, sendo possível e indeterminado.

Pedimos aos alunos que voltassem às equações dadas: 5x + y = 2 e 10x + 2y = 4 e observassem que $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$, ou seja, há uma proporcionalidade entre os coeficientes de x e y, como na questão anterior, porém esta proporcionalidade se estende aos termos independentes, o que não aconteceu na questão quatro, sendo assim, as retas são paralelas coincidentes ou simplesmente coincidentes. Dessa forma, dadas as equações de duas retas r: ax + by = c e s: a’x +b’y = c’, estas serão paralelas se $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$, sendo paralelas coincidentes, quando $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ (questão 5) e paralelas distintas quando $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ (questão 4).

Na questão 6, pedimos aos alunos que dessem duas equações que representassem duas retas paralelas distintas e utilizando o Winplot traçassem essas retas e a seguir resolvessem o sistema formado pelas equações sugeridas.

Alguns alunos apresentaram alguma dificuldade ao montar as equações, sendo assim, houve necessidade de nossa interferência como elemento mediador do processo de ensino e aprendizagem.

Esclarecidas as dúvidas os alunos fizeram a sétima questão que pedia um exemplo de duas retas coincidentes.

Nas questões 6 e 7, os alunos puderam verificar se os exemplos dados por eles estavam corretos, tanto a partir da representação gráfica no Winplot, quanto por meio da resolução algébrica.

Em todas as questões desse encontro, o aluno era solicitado a comparar a solução do sistema com a representação gráfica, dando mais significado ao estudo.

3.1.2- Segundo encontro

Neste encontro, foram trabalhadas as questões restantes da atividade I, que eram relativas a sistemas lineares de três equações e duas incógnitas e também o exercício I (Anexo II).

Como nas questões anteriores, os alunos representavam as equações no Winplot, resolviam algebricamente o sistema formado por estas e comparavam a representação geométrica com a solução encontrada a partir da resolução algébrica.

Na questão 8, ao representar graficamente as três equações dadas, os alunos perceberam que as retas traçadas eram concorrentes no ponto (3, 2).

Ao tentar resolver algebricamente o sistema, percebemos que os alunos apresentaram dificuldade e se mostraram confusos, sem saber o que fazer. Sendo assim, eles foram orientados a escolher, livremente, duas das três equações e resolver o sistema formado por elas. Ao fazer isto, eles encontraram o par ordenado (3, 2). Chamamos a atenção deles para o fato de que um ponto só é solução de um sistema se tornar verdadeira todas as suas equações, sendo assim, seria necessário substituir as coordenadas do ponto encontrado na equação que não foi escolhida inicialmente. Feito isto, os alunos concluíram que a solução do sistema era S = {(3, 2)}.

Os alunos observaram que o ponto de intersecção das retas era a solução do sistema.

Na questão 9, as três retas dadas não apresentavam ponto comum, sendo concorrentes duas a duas, como mostra o Gráfico 3.2.

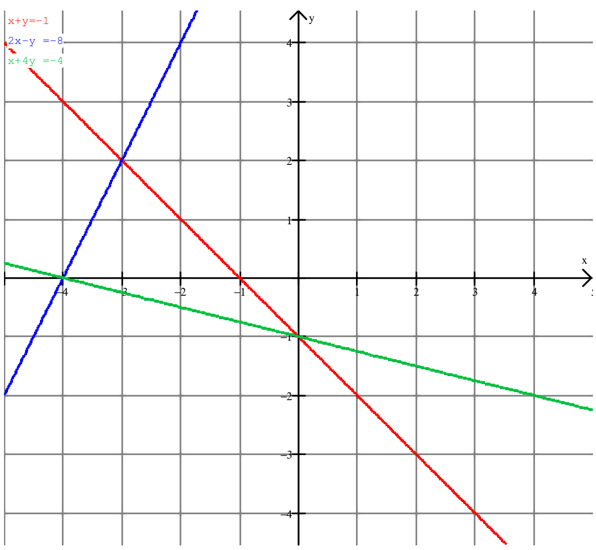


Gráfico 3.2: Retas da nona questão

Como na questão anterior, os alunos escolheram duas equações e resolveram o sistema formado por elas, encontrando um ponto (comum às retas cujas equações foram escolhidas). Ao substituir os valores encontrados de x e y na outra equação eles chegaram a uma sentença falsa, concluindo assim que o ponto não era solução da outra equação, sendo assim também não era solução do sistema e este era impossível.

Ao representar graficamente, com o auxílio do Winplot, as equações dadas na questão 10, os alunos puderam visualizar uma reta concorrente com duas retas paralelas distintas, ou seja, não há ponto comum às três retas, conforme mostra o Gráfico 3.3.

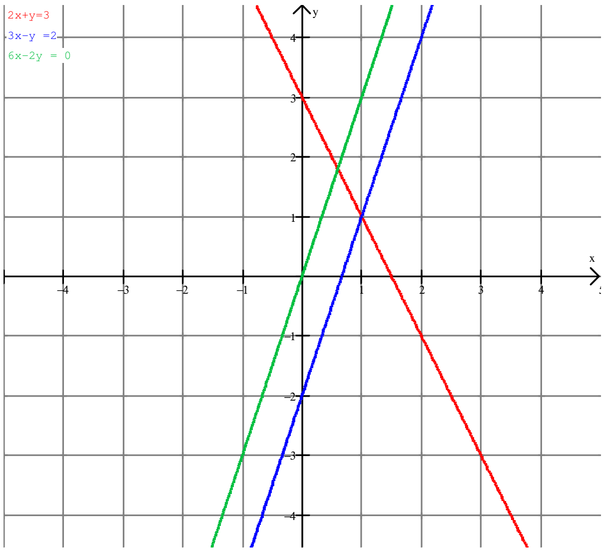


Gráfico 3.3: Retas da décima questão

Ao resolver o sistema, os alunos escolheram as equações $2x + y = 3$ e $3x - y = 2$, por ser mais fácil aplicar o método da adição, e encontraram o ponto (1, 1), a seguir substituíram este ponto na equação $6x - 2y = 0$ e chegaram a uma sentença falsa, concluído assim que este sistema também não possui solução.

Chamamos atenção para a proporcionalidade existente entre os coeficientes de x e y nas equações $3x - y = 2$ e $6x - 2y = 0$, confirmando, assim, o paralelismo entre elas, fato observado graficamente.

Na questão 11, as retas também não possuíam ponto comum, pois tínhamos exemplos de equações de retas paralelas distintas, fato observado por eles ao representar graficamente as equações num mesmo sistema de eixos, e confirmado, devido à proporcionalidade entre os coeficientes de x e y de todas as três equações e não estendida aos termos independentes.

Ao escolher duas equações quaisquer para a resolução algébrica do sistema os alunos logo chegaram a uma sentença falsa, concluindo assim que estavam diante de um sistema impossível.

As questões 9, 10 e 11 do segundo encontro, bem como a questão 4 do primeiro encontro possibilitaram que os alunos concluíssem que quando não há ponto comum a todas as retas, o sistema é impossível.

Na questão 12, trabalhamos com as equações $x + y = 2$, $2x + 2y = 4$ e $3x + 3y = 6$. Ao representar, com o auxílio do Winplot, essas equações, os alunos verificaram que as retas que as representavam estavam sobrepostas e concluíram, como no caso da questão 5, que elas eram coincidentes, possuindo assim, infinitos pontos comuns.

Ao resolver, algebricamente, o sistema formado pelas equações da questão 12, os alunos concluíram que estavam diante de um sistema possível e indeterminado, ou seja este apresentava infinitas soluções e estas eram representadas pelos pares (x, y) do plano que pertenciam à reta de equação $x + y = 2$ ou $2x + 2y = 4$ ou $3x + 3y = 6$ sendo assim, a solução do sistema poderia ser dada por $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 2\}$.

Nessa questão, bem como na questão 5, os alunos puderam observar que tendo o sistema infinitas soluções, então as retas que representam cada equação serão coincidentes.

Os alunos constataram a proporcionalidade existente entre os coeficientes de x e y de todas as três equações com extensão aos termos independentes, fato que confirmou o caso de coincidência das retas.

As questões da atividade I foram trabalhadas pelos alunos com participação e interesse.

Alguns alunos apresentaram dificuldade na resolução de alguns sistemas, porém à medida que eles interagiam com seus colegas ou solicitavam nossa ajuda para esclarecer suas dúvidas, percebemos que iam relembrando o que já haviam estudado e minimizando suas dificuldades.

Vale destacar que os alunos apresentaram desenvoltura com os comandos do software utilizado, o Winplot, apesar de nunca terem trabalhado antes com este programa.

Ao final do segundo encontro, aplicamos o exercício I, que se encontra no Anexo II, com a finalidade do aluno fazer a correspondência entre a representação gráfica e a classificação do sistema, quanto ao número de soluções.

Sugerimos que os alunos fizessem esse exercício individualmente para que pudéssemos verificar se a assimilação do conteúdo foi satisfatória. Observamos que os alunos não apresentaram dificuldade ao responder os itens do exercício I, o que nos causou satisfação.

A análise das respostas dadas neste exercício, bem como a observação de todo o trabalho de aplicação da atividade I, nos propiciou chegar à conclusão de que o processo de ensino e aprendizagem, nessa etapa, foi alcançado a partir da superação das dificuldades que surgiram no decorrer do trabalho.

3.1.3- Terceiro encontro

Neste encontro, foram trabalhadas as questões 1, 2, 3, 4 e 5 da atividade II (Anexo II), formadas por sistemas lineares de três equações e três incógnitas.

Em todas as questões, primeiramente pedia-se que os alunos resolvessem os sistemas algebricamente, e após, utilizando o Winplot, os alunos representavam graficamente, num mesmo sistema de eixos, as equações lineares que formavam cada sistema. Nas questões da atividade II, a representação geométrica foi feita utilizando os comandos: Janela/3-dim/Equação/Explícita.

Na questão 1, os alunos resolveram, por escalonamento, o sistema formado pelas equações $x + 2y + z = 1$, $2x + 5y + z = 6$ e $3x + y + z = 4$ e encontraram como única solução o terno ordenado (2, 1, -3), sendo o sistema possível e determinado. Os alunos nos relataram que já tinham estudado escalonamento de sistemas, porém percebemos que estavam um pouco esquecidos, sendo assim, fizemos esta primeira questão com eles, para recordar o escalonamento.

Dando continuidade, pedimos aos alunos que, utilizando o Winplot, representassem, num mesmo sistema de eixos os gráficos das equações que formavam o sistema resolvido por eles. Para isso enfocamos que trabalharíamos em 3dim, devido às três incógnitas x, y e z, ou seja, estávamos trabalhando em $IR^3 = \{(x, y, z) | x \in IR, y \in IR \text{ e } z \in IR\}$.

Ao representar a primeira equação, os alunos tiveram a oportunidade de visualizar o gráfico que se encontra a seguir.

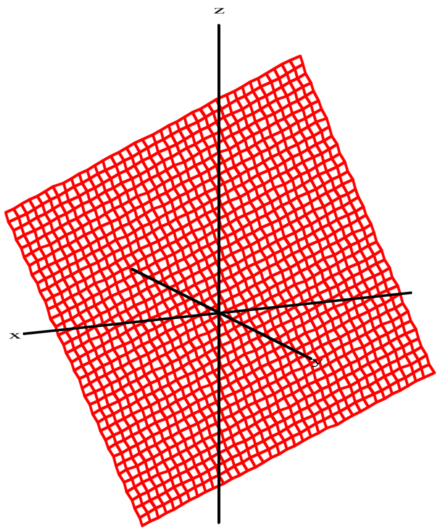


Gráfico 3.4: Representação gráfica do plano de equação x + 2y + z = 1

Utilizando os comandos de setas $\leftarrow$, $\downarrow$, $\rightarrow$, $\uparrow$, no teclado, os alunos conseguiam movimentar o gráfico, o que facilitou a visualização.

Falamos para os alunos que na atividade II iríamos trabalhar com equações do tipo $ax + by + cz + d = 0$ ($a \neq 0$ ou $b \neq 0$ ou $c \neq 0$) e estas são equações de planos. Sendo assim, o Gráfico 3.4 representa o plano cuja equação é $x + 2y + z = 1$.

Ao representar as três equações num mesmo sistema de eixos, os alunos observaram o gráfico que se encontra a seguir.

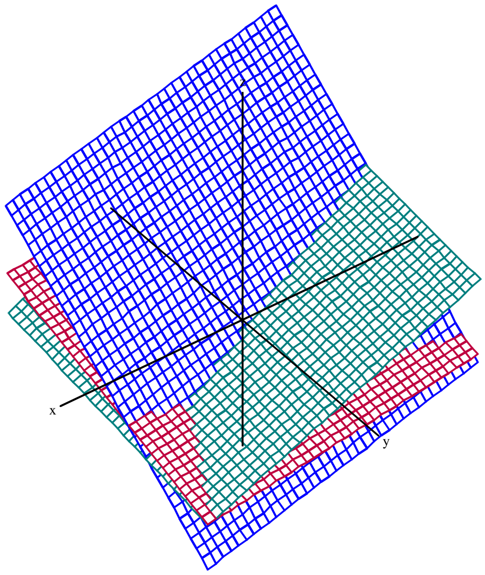


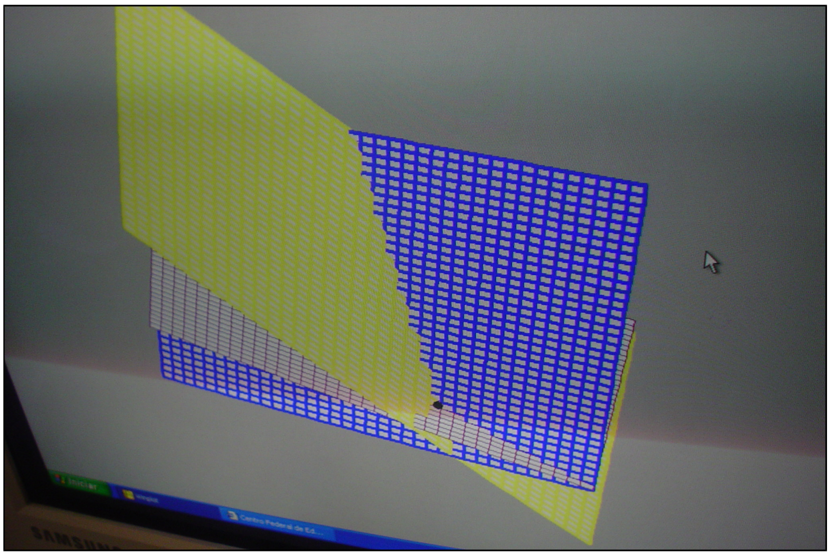
Gráfico 3.5: Representação gráfica dos três planos

Observando o traçado e movimentando o gráfico, os alunos suspeitaram que os três planos se intersectavam em um único ponto.

Pedimos aos alunos que selecionassem: Equação/Ponto/Cartesiano e digitassem para x, y e z os valores encontrados ao resolver o sistema formado pelas equações dos planos e dessem OK. Ao fazer isso, os alunos observaram que o ponto (2, 1, -3) foi marcado no gráfico. Esta marcação possibilitou visualizar que os planos se intersectavam neste ponto. Sendo assim, os alunos perceberam que a solução do sistema era o ponto comum aos três planos.

Interferimos falando para os alunos que estávamos realmente diante de três planos concorrentes num único ponto, ponto este cujas coordenadas foram encontradas ao resolver o sistema cujas equações eram dos planos.

A seguir, temos a fotografia dos planos da questão 1 e do ponto de intersecção destes, representados no Winplot, por um aluno.



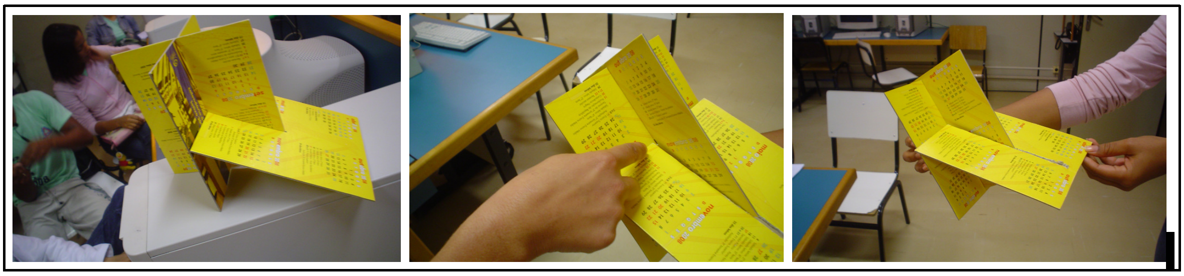
Fotografia 3.1: Representação gráfica dos três planos e do ponto

Como na atividade I, os alunos concluíram que a solução do sistema corresponde ao ponto comum dos planos.

Para facilitar o trabalho de visualização, além do computador, utilizamos folhas de papelão para representar os planos.

Entregamos para os alunos folhas de papelão e pedimos que eles representassem com elas o que estava sendo visto na tela do computador.

No quadro a seguir, temos as fotografias de algumas representações montadas pelos alunos.



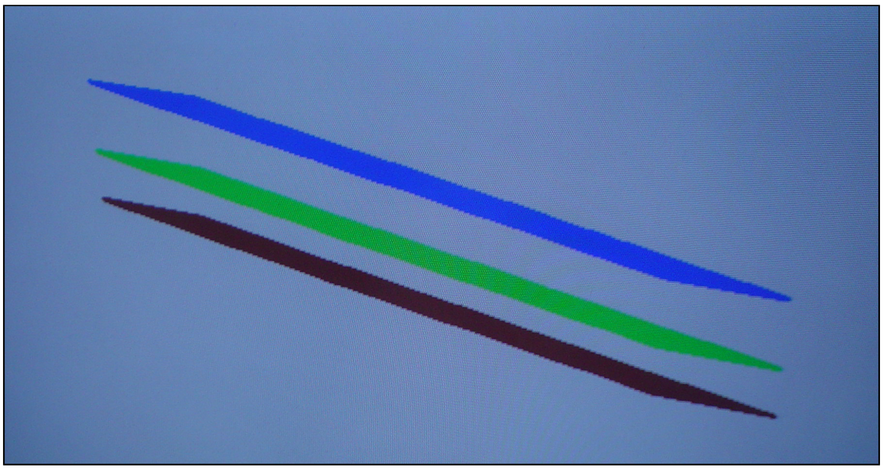
Quadro 3.1: Montagem dos planos

Ao escalonar o sistema da segunda questão, formado pelas equações $x + 2y + z = 5$, $-x - 2y - z = 1$ e $2x + 4y + 2z = 3$, os alunos chegaram a uma sentença falsa, o que os fez concluir que estavam diante de um sistema impossível cuja solução é $S = \varnothing$.

Ao representar graficamente as equações, os alunos perceberam que os três planos pareciam ser paralelos distintos.

Chamamos a atenção dos alunos que, dadas as equações de dois planos γ_1 : ax + by + cz = d e γ_2 : a'x + b'y + c'z = d', estes serão paralelos se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$, sendo paralelos distintos quando $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \neq \frac{d}{d'}$ e paralelos coincidentes (ou simplesmente coincidentes) quando $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$. A partir destas explicações, os alunos concluíram que as equações dadas nessa questão representavam planos paralelos distintos conforme a representação geométrica sugeria.

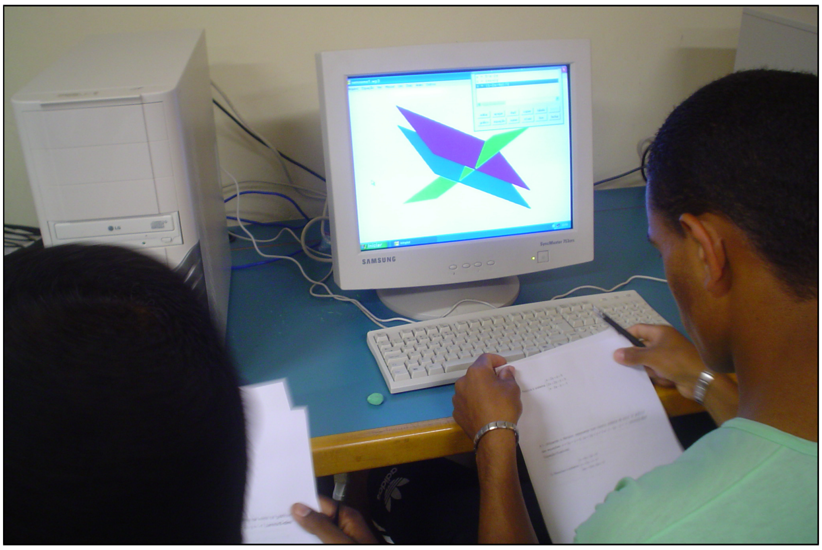
A seguir, temos a fotografia dos três planos representados no Winplot.



Fotografia 3.2: Representação gráfica dos três planos paralelos

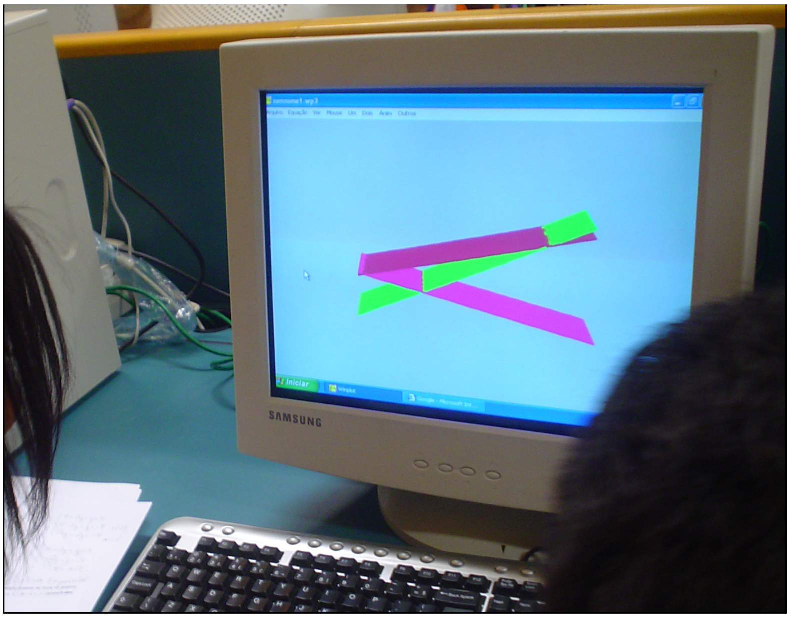
Os sistemas das questões 3 e 4 também eram exemplos de sistemas impossíveis, fato constatado pelos alunos, ao resolvê-los.

Na questão 3, as equações x + 2y + z = 5 e 2x + 4y + 2z = 1 apresentavam somente os coeficientes das incógnitas proporcionais, logo os planos que as representavam eram paralelos distintos e a equação x – 2y – z = –1, representava um plano concorrente aos outros dois, como mostra a Fotografia 3.3.



Fotografia 3.3: Representação gráfica dos três planos

Na questão 4, os alunos visualizaram por meio da representação gráfica (Fotografia 3.4) que os planos que representavam as equações dadas eram concorrentes dois a dois, não havendo portanto, ponto comum aos três planos, o que justificava o sistema ser impossível.



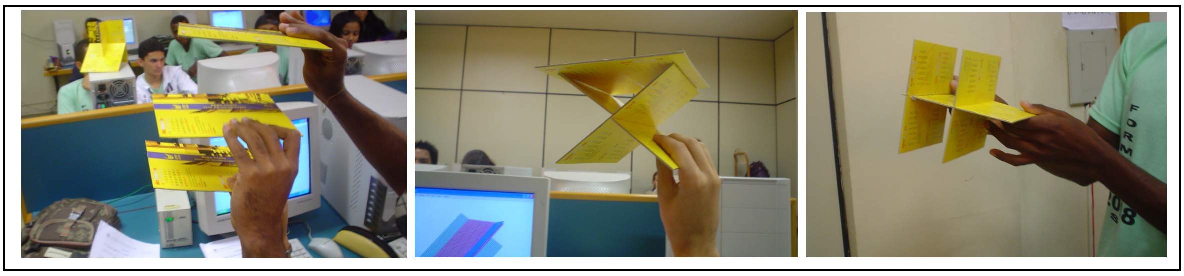
Fotografia 3.4: Representação gráfica dos três planos

As questões 2, 3 e 4, exemplificavam sistemas impossíveis, fato que os alunos puderam constatar ao resolvê-los. As representações geométricas das equações dadas em cada uma dessas questões mostraram que não havia ponto comum aos três planos representados.

Essas questões permitiram a percepção, por parte dos alunos, de que quando o sistema é impossível, os três planos não possuem intersecção comum, bem como propiciaram a visualização de possíveis posições relativas de três planos cujas equações formam sistemas impossíveis.

Diante do que os alunos puderam visualizar, pedimos que eles representassem com as folhas de papelão diferentes posições relativas de três planos de modo que o sistema formado por suas equações fosse impossível.

No Quadro 3.2, temos as fotografias das representações feitas pelos alunos.



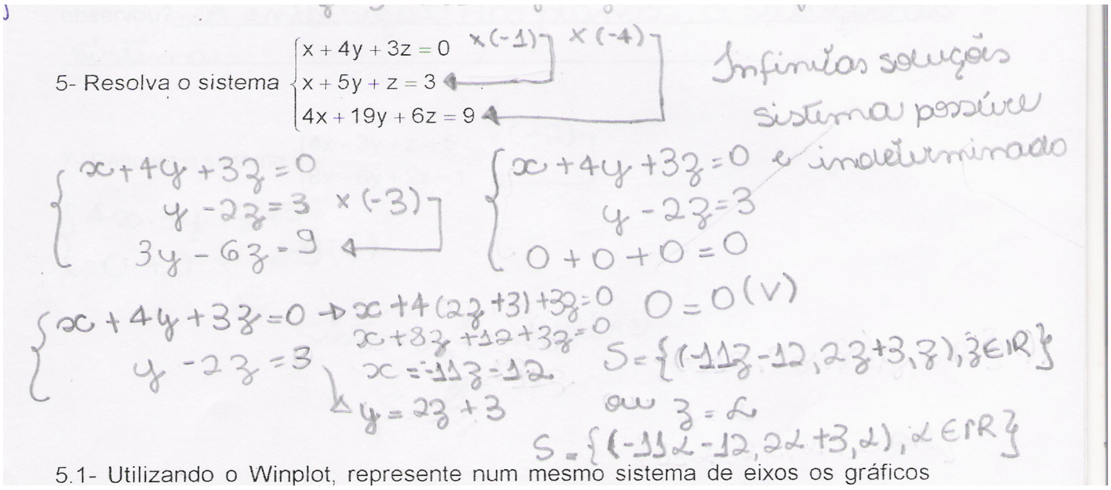
Quadro 3.2: Representação dos planos com folhas de papelão

Após escalonar o sistema proposto na quinta questão, os alunos chegaram a I) $\begin{cases} x+4y+3z=0 \\ y-2z=3 \\ 0=0 \end{cases}$. Sendo assim, escrevemos II) $\begin{cases} x+4y+3z=0 \\ 0x+y-2z=3 \\ 0x+0y+0z=0 \end{cases}$. Os alunos entenderam que as formas I e II eram equivalentes e em II constataram que a terceira equação é válida para qualquer terno ordenado, sendo assim sugerimos que esta equação fosse deixada de lado e trabalhássemos com as outras duas, visto que para um terno ser solução do sistema deveria ser solução de **todas** as equações deste.

Ao analisar as equações $\begin{cases} x+4y+3z=0 \\ y-2z=3 \end{cases}$ os alunos concluíram que para resolver o sistema, eles deveriam explicitar y em função de z ou z em função de y. Fazendo $z=\alpha$ escreveram $y = 3 + 2\alpha$ e substituindo na primeira equação chegaram a $x = -12-11\alpha$, sendo a solução do sistema o conjunto

$S = \{(-12-11\alpha, 3+2\alpha, \alpha), \alpha \in IR\}$. Neste caso, estavam diante de um sistema que apresenta infinitas soluções, ou seja, um sistema possível e indeterminado.

A seguir, temos a resolução de um aluno para essa questão.


5- Resolva o sistema $\begin{cases} x+4y+3z=0 \\ x+5y+z=3 \\ 4x+19y+6z=9 \end{cases}$ $\times(-1)$ $\times(-4)$

Infinitas soluções sistema possível e indeterminado

$\begin{cases} x+4y+3z=0 \\ y-2z=3 \\ 3y-6z=9 \end{cases}$ $\times(-3)$

$\begin{cases} x+4y+3z=0 \\ y-2z=3 \\ 0+0+0=0 \end{cases}$ $0=0\,(V)$

$\begin{cases} x+4y+3z=0 \\ y-2z=3 \end{cases}$ $\to x+4(2z+3)+3z=0$

$x+8z+12+3z=0$

$x=-11z-12$

$y=2z+3$

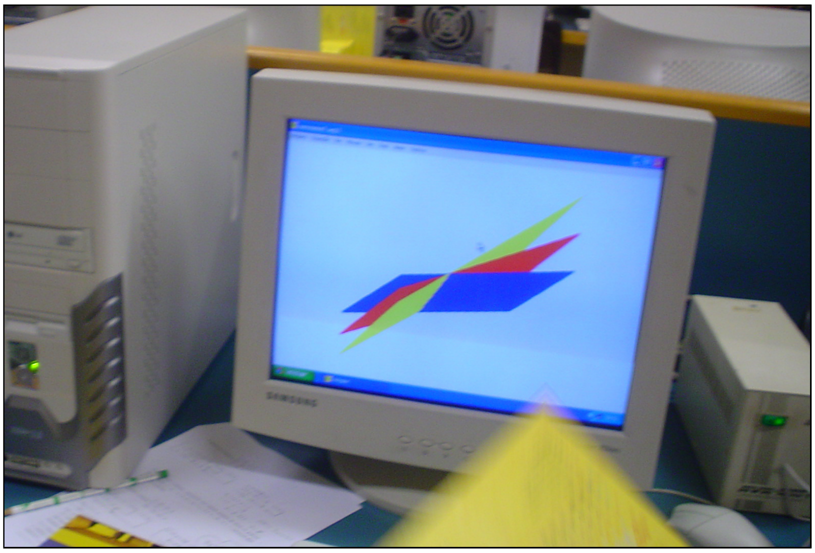
$S=\{(-11z-12, 2z+3, z), z \in IR\}$

ou $z=\alpha$

$S=\{(-11\alpha-12, 2\alpha+3, \alpha), \alpha \in IR\}$

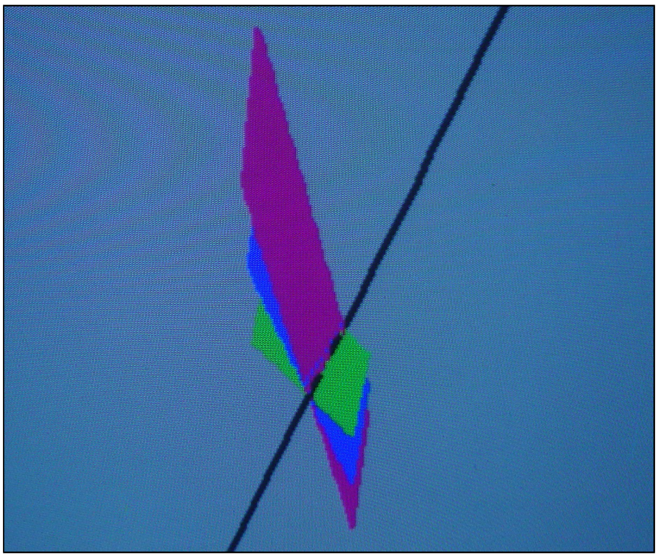
5.1- Utilizando o Winplot, represente num mesmo sistema de eixos os gráficos

A representação geométrica permitiu que os alunos percebessem que os três planos dados pelas equações dessa questão eram concorrentes segundo uma reta, conforme podemos observar na Fotografia 3.5.



Fotografia 3.5: Três planos se intersectando segundo uma reta

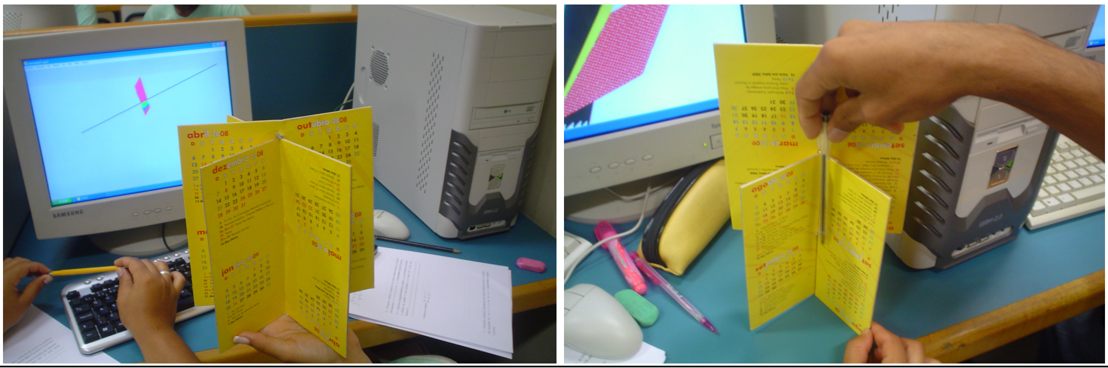
Após a representação geométrica dos três planos, pedimos aos alunos que selecionassem Equação/Paramétrica e digitassem x, y e z encontrados ao resolver o sistema da questão 5, utilizando parâmetro t, conforme sugerido pelo Winplot. Após clicar OK os alunos observaram que foi traçada a reta intersecção dos planos, conforme a Fotografia 3.6.



Fotografia 3.6: Três planos e a reta de intersecção deles

Falamos para os alunos que, neste caso, a solução do sistema é representada geometricamente pela reta intersecção dos três planos. Informamos também que as equações $x = -12-11\alpha$, $y = 3+2\alpha$ e $z = \alpha$, $\alpha \in IR$, constituem a forma paramétrica, no IR^3, da reta intersecção dos planos.

A seguir, temos representações referentes à questão 5, montadas pelos alunos, com as folhas de papelão.



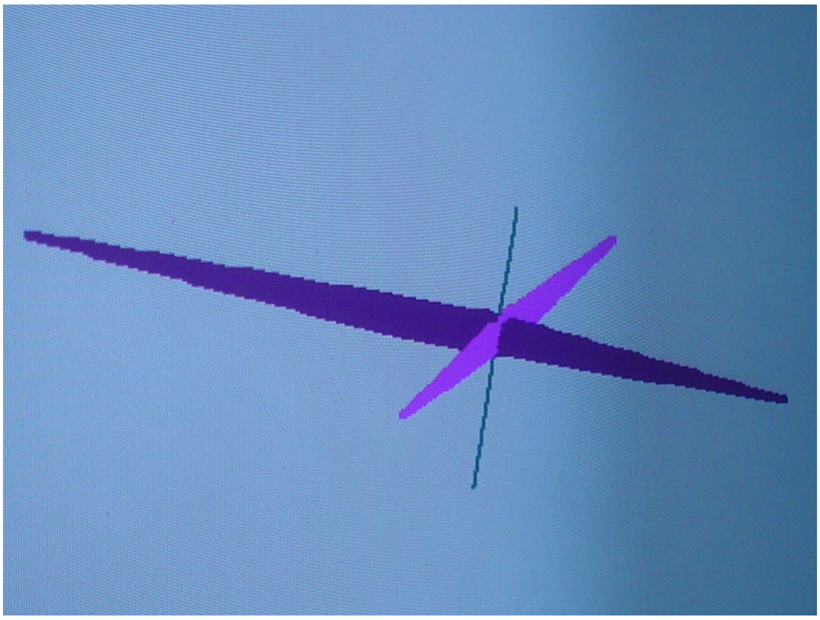
Quadro 3.3: Montagem dos três planos concorrentes segundo uma reta

3.1.4- Quarto encontro

Neste encontro, foram resolvidas as questões restantes da segunda atividade e o exercício II.

As questões 6, 7 e 8 apresentavam sistemas lineares de duas equações e três incógnitas, ou seja tínhamos em cada questão equações de dois planos.

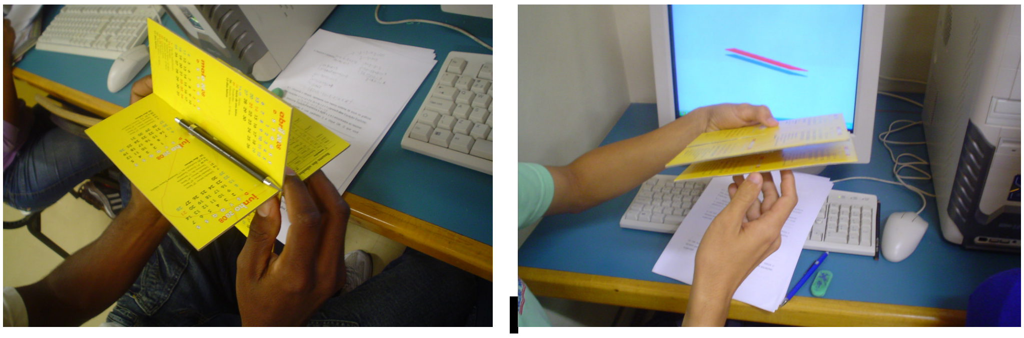
Ao escalonar o sistema da questão 6, os alunos perceberam que se tratava de um sistema possível e indeterminado e encontraram como solução o conjunto $S = \{(5\alpha + 11, -4\alpha - 8, \alpha), \alpha \in IR\}$. Ao representar, geometricamente, as equações perceberam que se tratava de um exemplo de planos concorrentes segundo uma reta, conforme a questão anterior. Sugerimos que selecionassem Equação/Paramétrica e digitassem x, y e z encontrados ao resolver o sistema, utilizando parâmetro t. Após clicar OK os alunos observaram que foi traçada a reta intersecção dos planos, conforme mostra a Fotografia 3.7.



Fotografia 3.7: Dois planos e a reta de intersecção deles

O sistema sugerido na questão 7 era impossível, fato constatado pelos alunos ao escaloná-lo. Ao representar graficamente as duas equações, os alunos observaram que os planos pareciam ser paralelos distintos, fato confirmado a partir da proporcionalidade somente entre os coeficientes das incógnitas das equações.

A seguir, temos as montagens com folhas de papelão feitas pelos alunos, referentes às questões 6 e 7, respectivamente.



Quadro 3.4: Montagem dos planos referentes às questões 6 e 7

Ao escalonar o sistema $\begin{cases} x - 2y + z = 5 \\ 3x - 6y + 3z = 15 \end{cases}$ da questão 8, os alunos chegaram a $\begin{cases} x - 2y + z = 5 \\ 0 = 0 \end{cases}$, neste momento ficaram confusos e solicitaram nossa ajuda. Falamos que, neste caso, deveríamos explicitar uma incógnita em função das outras duas e então escrevemos x = 2y – z + 5. Substituindo y por α e z por β, os alunos encontraram como solução o conjunto S = {(2α - β +5, α , β), $\alpha \in$ IR e $\beta \in$ IR}. Os alunos constataram que este sistema apresentava infinitas soluções e que estas estavam relacionadas com α e β, ou seja, este também era um sistema possível e indeterminado, porém o conjunto solução foi dado em função de duas incógnitas. Chamamos a atenção dos alunos que α e β são denominadas variáveis livres e podem assumir qualquer valor real.

Ao representar geometricamente as duas equações dessa questão, os alunos ficaram surpresos e alguns falaram: "ficou um plano sobre o outro". Dissemos então que a observação feita por eles tinha sentido, visto que estávamos diante de planos coincidentes.

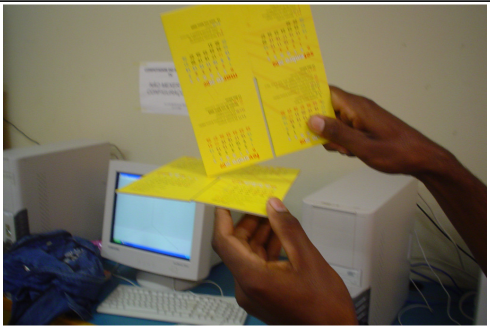
Analisando as duas equações dadas, os alunos observaram que dividindo a segunda equação por três resultava na primeira e ainda mostramos que havia a proporcionalidade entre os coeficientes das incógnitas e esta se estendia aos termos independentes ou seja $\frac{1}{3}=\frac{-2}{-6}=\frac{1}{3}=\frac{5}{15}$, sendo os planos paralelos coincidentes, ou simplesmente, coincidentes.

Pedimos que selecionassem Equação/Paramétrica e digitassem x, y e z encontrados ao resolver o sistema da questão 8, utilizando os parâmetros t e u, utilizados pelo Winplot. Após clicar OK os alunos perceberam que foi traçado outro plano coincidente com os dois anteriormente já traçados. Neste caso, a solução do sistema é representada geometricamente por um plano, cujas equações paramétricas são

$$\begin{cases} x = 2\alpha - \beta + 5 \\ y = \alpha \\ z = \beta, \quad \alpha \in IR, \quad \beta \in IR \end{cases}.$$

Comparamos com os alunos o conjunto solução encontrado na questão 8 com os das questões 5 e 6, pois estas três questões eram exemplos de sistemas possíveis e indeterminados. Os alunos perceberam que os conjuntos solução das questões 5 e 6 apresentavam apenas uma variável livre e estes representavam geometricamente uma reta, enquanto na questão 8 a solução com duas variáveis livres representava um plano.

A seguir, perguntamos aos alunos se havia possibilidade de dois planos se intersectarem em apenas um ponto. Eles fizeram algumas simulações com as folhas de papelão como as mostradas no Quadro 3.5.

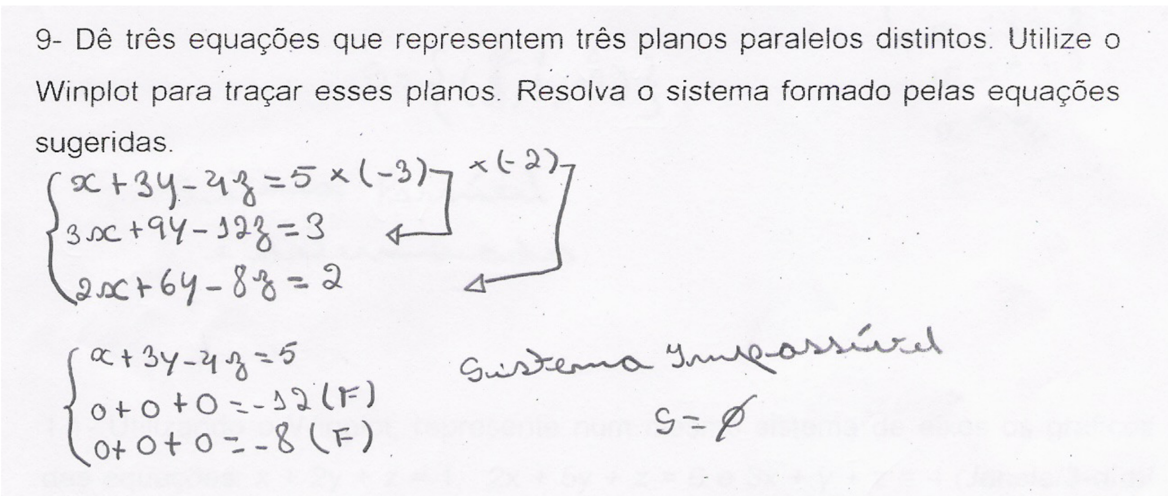


Quadro 3.5: Simulações

Após algumas simulações e discussões, os alunos chegaram à conclusão de que isto não era possível, pois os planos são infinitos, sendo assim, os planos representados no Quadro 3.5 se estendem infinitamente e a intersecção deles é uma reta. Logo o sistema formado por duas equações e três incógnitas nunca será possível e determinado, podendo ser somente impossível ou possível e indeterminado.

Na questão 9, pedimos aos alunos que dessem três equações que representassem três planos paralelos distintos e utilizando o Winplot traçassem esses planos e resolvessem o sistema formado pelas equações sugeridas.

A seguir, temos um exemplo dado por um aluno.



9- Dê três equações que representem três planos paralelos distintos. Utilize o Winplot para traçar esses planos. Resolva o sistema formado pelas equações sugeridas.

$$\begin{cases} x+3y-4z=5 \quad \times(-3) \quad \times(-2) \\ 3x+9y-12z=3 \\ 2x+6y-8z=2 \end{cases}$$

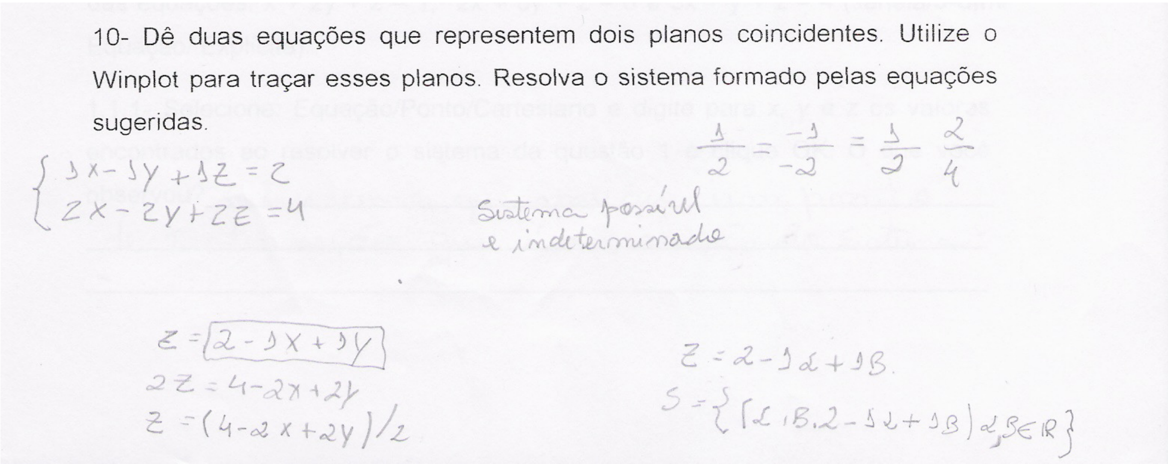
$$\begin{cases} x+3y-4z=5 \\ 0+0+0=-12 \ (F) \\ 0+0+0=-8 \ (F) \end{cases}$$

Sistema Impossível

$S=\emptyset$

Na décima questão pedimos um exemplo de duas equações que representassem dois planos coincidentes. A seguir, os alunos representaram graficamente, no Winplot, esses planos e resolveram o sistema formado pelas equações dadas por eles.

A seguir, temos um exemplo sugerido por um aluno.


10- Dê duas equações que representem dois planos coincidentes. Utilize o Winplot para traçar esses planos. Resolva o sistema formado pelas equações sugeridas.

$$\begin{cases} 1x-1y+1z=2 \\ 2x-2y+2z=4 \end{cases} \qquad \frac{1}{2}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}\;\frac{2}{4}$$

Sistema possível e indeterminado

$$z=\boxed{2-1x+1y}$$
$$2z=4-2x+2y$$
$$z=(4-2x+2y)/2$$

$$z=2-1\alpha+1\beta.$$
$$S=\{(\alpha,\beta,2-1\alpha+1\beta)\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$$

Nas questões 9 e 10, os alunos puderam verificar se os exemplos dados por eles estavam corretos, tanto a partir da representação gráfica no Winplot, quanto por meio da resolução algébrica.

Em todas as questões da atividade II, assim como da atividade I, os alunos comparavam a solução do sistema com a representação gráfica, o que os levou a conclusões a partir de observações, reflexões e questionamentos.

Ao final do quarto encontro, aplicamos o exercício II que se encontra no Anexo II, com a finalidade do aluno fazer a correspondência entre a representação gráfica dos planos e a classificação, quanto ao número de soluções, do sistema formado pelas equações desses planos.

Assim como no exercício I, sugerimos aos alunos que fizessem o exercício II, individualmente, para que pudéssemos verificar se a assimilação do conteúdo foi satisfatória. Observamos que os alunos indicaram corretamente as respostas, não apresentando dificuldade.

A firmeza com que os alunos responderam ao exercício II, bem como o acompanhamento do que foi feito por eles na atividade II, nos mostrou que a aquisição do conhecimento foi alcançada de forma gradativa e satisfatória.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Alguns autores concordam que o estudo de sistemas lineares constitui um tópico interessante e necessário.

Segundo Lipschutz (1994), a Álgebra Linear tornou-se essencial para matemáticos, físicos, engenheiros e outros cientistas e os sistemas lineares são empregados na resolução de muitos problemas de Álgebra Linear.

Leon (1999) destaca que muitos problemas matemáticos encontrados em aplicações científicas e industriais envolvem a resolução de um sistema linear, e provavelmente o problema mais importante em Matemática é resolver um sistema de equações lineares.

Segundo Lima (1992), a resolução de sistemas lineares apresenta uma forte componente geométrica, indispensável para a sua boa compreensão.

A reflexão sobre a importância do estudo de sistemas lineares e o anseio de minimizar as dificuldades enfrentadas pelos alunos ao estudarem este tópico nos motivou a desenvolver um trabalho sobre a interpretação geométrica de sistemas lineares, tendo como instrumento auxiliar o *software* Winplot.

As atividades desenvolvidas aliavam as resoluções algébrica e gráfica de sistemas lineares de duas e três incógnitas e foram desenvolvidas em um laboratório de Informática, tendo um computador disponível para cada dupla de alunos. O trabalho, dessa forma, integrou os alunos e propiciou a reflexão e descoberta. Apesar de os alunos estarem em dupla, seus registros eram feitos individualmente, resultantes das observações e discussões entre eles.

A comunicação oral fez com que os alunos exprimissem suas ideias e as confrontassem com seus colegas. A escrita favoreceu a organização do pensamento sobre o que era falado e visualizado graficamente no computador.

Percebemos que, a partir das linguagens oral, escrita e gráfica, os alunos iam desenvolvendo os conceitos. As diferentes representações envolvidas neste trabalho ajudaram e promoveram a aquisição do conhecimento.

Segundo Damm (2002), não existe conhecimento matemático que possa ser mobilizado por uma pessoa, sem o auxílio de uma representação e é importante a coordenação entre os registros de representação para a apreensão do objeto matemático.

O uso do computador, mais particularmente do *software* Winplot, facilitou a representação gráfica.

No caso da atividade I que envolvia sistemas lineares de duas incógnitas, sabemos que a representação gráfica das equações envolvidas poderia ser feita com lápis e papel, porém o uso do programa gráfico tornou ágil e preciso o traçado das retas, propiciando uma comparação mais rápida e eficiente entre os métodos algébrico e geométrico.

Já na atividade II, em que havia equações lineares de três incógnitas, a dificuldade de representar graficamente cada equação, sem o auxílio de um programa gráfico, seria muito grande, visto que as equações envolvidas representavam planos. O uso do Winplot propiciou a representação dos planos de forma rápida e precisa, além disso, estes podiam ser movimentados, proporcionando uma compreensão dinâmica e promovendo para os alunos diferentes possibilidades para visualizar graficamente cada situação.

Em todas as questões das atividades I e II, os alunos comparavam a solução algébrica do sistema com a representação gráfica visualizada na tela do computador, chegando assim a conclusões a partir de observações, reflexões e questionamentos.

Os exercícios I e II foram respondidos pelos alunos sem o uso do computador, com a finalidade de fazer a correspondência entre a representação gráfica e a classificação do sistema quanto ao número de soluções. A firmeza com que os alunos responderam aos exercícios I e II, bem como o acompanhamento do que foi feito por eles no decorrer da aplicação das atividades I e II nos mostrou que o objetivo deste trabalho foi alcançado de forma satisfatória.

Sabemos que muitas escolas não estão equipadas devidamente com computadores para que a utilização da tecnologia seja possível, porém o trabalho com outros recursos alternativos pode proporcionar situações ricas e interessantes. A interpretação geométrica em IR^2 pode ser feita com lápis e papel, e em IR^3, embora o aluno não trace cada plano referente à situação exemplificada, o professor pode lançar mão de folhas de papelão, como mostramos no desenvolvimento, para ilustar as possíveis posições relativas de planos e assim fazer a conexão entre a álgebra da resolução de sistemas e o significado geométrico destes.

É preciso ressaltar que a presença do computador na aplicação das atividades dinamizou o trabalho e colocou o aluno como agente ativo do processo de construção do conhecimento, diferentemente do papel passivo que este assume diante de apresentações formais de conteúdos. Percebemos que apesar de nunca terem trabalhado com o Winplot, à medida que as atividades iam sendo realizadas os alunos aprendiam os comandos com facilidade e descobriam outros que poderiam ser utilizados para agilizar e facilitar o trabalho.

Segundo D'Ambrósio (1996), o professor não deve temer o uso da tecnologia, pois esta não o deixará em segundo plano, muito pelo contrário, neste novo contexto, o professor terá um papel importantíssimo de gerenciar as novas ações, interagindo criticamente com o aluno e a tecnologia para facilitar a produção de novos conhecimentos.

O uso das tecnologias na educação requer um olhar mais atento, pois envolve novas formas de ensinar e aprender, exigindo reestruturações de metodologias de ensino. Não há como ignorar a importância da tecnologia como instrumento auxiliar de ensino e aprendizagem para alunos e professores.

Percebemos, com este trabalho, que o significado geométrico que muitas vezes é deixado de lado, constitui uma etapa importante no processo de construção do conhecimento de sistemas lineares e servirá de base em estudos futuros, visto que segundo autores como Steven Leon (1999), Seymour Lipschutz (1994), Howard Anton(2001) e Chris Rorres (2001), os sistemas lineares aparecem como um dos principais tópicos de Álgebra Linear e em aplicações em Administração, Economia, Demografia, Eletrônica, Engenharia e Física.

Embora este trabalho tenha sido desenvolvido no Ensino Médio, recomendamos a sua continuidade no Ensino Superior, em disciplinas como Geometria Analítica e Álgebra Linear, bem como a aplicação da interpretação geométrica de sistemas lineares de duas incógnitas, com o auxílio do Winplot, no Ensino Fundamental.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMORIM, Joni de Almeida. *A Educação Matemática, a Internet e a exclusão digital no Brasil*. Educação Matemática em Revista, n.º 14., ano 10. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2003.

ANTON, Howard; RORRES, Chris. *Álgebra Linear com aplicações*. Porto Alegre: Bookman, 2001.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. *Parâmetros Curriculares Nacionais* – Matemática: Ensino Médio. Brasília: Ministério da Educação/ Secretaria de Educação Fundamental, 1999.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. *Parâmetros Curriculares Nacionais* – Introdução. Brasília: Ministério da Educação/ Secretaria de Educação Fundamental, 1998 a.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. *Parâmetros Curriculares Nacionais* – Matemática: Ensino Fundamental. Brasília: Ministério da Educação/ Secretaria de Educação Fundamental, 1998 b.

BORBA, Marcelo de Carvalho. *Tecnologias Informáticas na Educação Matemática e reorganização do pensamento*. Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. *Educação Matemática: Da teoria à prática*. (Coleção Perpectivas em Educação Matemática). Campinas, São Paulo: Papirus, 1996.

DAMM, Regina Fleming. *Registros de representação*. Educação Matemática: uma introdução. São Paulo: EDUC, 2002.

DANTE, Luiz Roberto. *Matemática*. Ensino Médio. Volume único. São Paulo: Ática, 2005.

GRANDO, Neiva Ignês; GIRARDELLO, Lisandra Zelinda. *Representações gráficas: da percepção do objeto ao registro gráfico*. Educação Matemática em Revista, n.º 18/19, ano 12. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2005.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David Mauro; PERIGO, Roberto. *Matemática*. Volume único. São Paulo: Atual, 2005.

LEON, Steven J. *Álgebra Linear com aplicações*. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

LIPSCHUTZ, Seymour. *Álgebra Linear: teoria e problemas*. São Paulo: Makron Books, 1994.

LIMA, Elon Lages. *Coordenadas no Espaço.* IMPA. VITAE. Rio de Janeiro. 1992.

LIMA, Elon Lages. *Matemática e Ensino*. Coleção do professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Auguto César. A *Matemática do Ensino Médio*. Volume 3. Coleção do professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

MACHADO, Antônio dos Santos. *Álgebra Linear e Geometria Analítica*. São Paulo: Atual, 1982.

NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius; ANDRADE, Doherty. *Você quer discutir com o computador ?* Educação Matemática em Revista, n.º 16, ano 11. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2004.

PAIVA, Manoel Rodrigues. *Matemática.* Ensino Médio. Volume único. São Paulo: Moderna, 2005.

PASTORE, José Luiz (coordenação). *Matemática: construção e significado*. Ensino Médio. Volume único. São Paulo: Moderna, 2005.

PENTEADO, Miriam Godoy; BORBA, Marcelo de Carvalho; GRACIAS, Telma de Souza. *Informática como veículo para mudança*. Zetetiké/Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Círculo de Estudo, Memória e Pesquisa em Educação Matemática. São Paulo: UNICAMP-FE-CEMPEM, 1998.

PENTEADO, Miriam Godoy. *Novos atores, novos cenários: discutindo a inserção dos computadores na profissão docente*. Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

PEREZ, Geraldo. *Formação de professores de matemática sob a perspectiva do desenvolvimento profissional*. São Paulo, 2004.

PONTE, João Pedro da; BOAVIDA, Ana Maria; GRAÇA, Margarida. ABRANTES, Paulo. *Didáctica da Matemática*, 1997.

ROQUE, Waldir L. *Novas tecnologías computacionais e o ensino de Matemática*. Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo: EDUC, 1999.

SOUZA, Maria Helena Soares de. SPINELLI, Walter. *Matemática.* 2.º grau. Volume 2. São Paulo: Scipione, 1996.

TAVARES, Salvador. RIBEIRO, Márcia Valéria Azevedo de Almeida. *Utilizando a tecnologia para a compreensão da interpretação gráfica da resolução de sistemas lineares*. Anais do IV CIBEM, Cochabamba - Bolívia, 2001.

ANEXOS

ANEXO I: Questionário

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE CAMPOS
Universidade da Tecnologia e do Trabalho
Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

QUESTIONÁRIO

Nome da escola:____

Livro Adotado:____________________________________Série:___________

Autor:____

Editora: ____Ano:____________

1- O livro adotado aborda sistemas lineares de duas incógnitas?

( ) sim ( ) não

1.1- O livro adotado faz a interpretação geométrica desses sistemas lineares?

( ) sim ( ) não

2- O livro adotado aborda sistemas lineares de três incógnitas?

( ) sim ( ) não

2.1- O livro adotado faz a interpretação geométrica desses sistemas lineares?

( ) sim ( ) não

3- Sistemas lineares de duas incógnitas é um assunto abordado em suas aulas?

( ) sim ( ) não

Justificativa:____

____

____

____

3.1- Você trabalha com seus alunos a interpretação geométrica desses sistemas lineares?

( ) sim ( ) não

Justificativa:____

____

____

3.1.1- Você faz uso de algum recurso tecnológico para interpretar geometricamente esses sistemas lineares? Qual?

____

____

____

Justificativa:____

____

____

____

4- Sistemas lineares de três incógnitas é um assunto abordado em suas aulas?

( ) sim ( ) não

Justificativa:____

____

____

____

4.1- Você trabalha com seus alunos a interpretação geométrica desses sistemas lineares?

( ) sim ( ) não

Justificativa:____

____

____

____

4.1.1- Você faz uso de algum recurso tecnológico para interpretar geometricamente esses sistemas lineares? Qual?

____

____

____

Justificativa:____

____

____

ANEXO II: Atividades

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE CAMPOS
Universidade da Tecnologia e do Trabalho
Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

ATIVIDADE I

ALUNO:____

1- Utilizando o Winplot, represente num mesmo sistema de eixos os gráficos das equações: $2x + y = 5$ e $x - y = 1$ (Janela/ **2-dim**/ Equação/ Implícita).

1.1- As retas traçadas, anteriormente, apresentam ponto comum?_____________
Qual?_________________________

1.2- Observando as retas traçadas na questão 1, é possível dizer que elas são:
( ) paralelas distintas ( ) concorrentes ( ) coincidentes

1.3- Resolva algebricamente o sistema $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$.

1.4- Compare as respostas encontradas nos itens 1.1 e 1.3.
____

2- Utilizando o Winplot, represente num mesmo sistema de eixos os gráficos das equações: $y = -x - 1$ e $y = 2x + 8$ (Janela/ 2-dim/ Equação/ Explícita).

2.1- As retas traçadas, anteriormente, apresentam ponto comum?_____________
Qual?_________________________

2.2- Observando as retas traçadas na questão 2, é possível dizer que elas são:
( ) paralelas distintas ( ) concorrentes ( ) coincidentes

2.3- Resolva algebricamente o sistema $\begin{cases} y = -x - 1 \\ y = 2x + 8 \end{cases}$

2.4- Compare as respostas encontradas nos itens 2.1 e 2.3.

____

3- Utilizando o Winplot, represente num mesmo sistema de eixos os gráficos das equações: $3x + y = -3$ e $4x - 3y = 9$ (Janela/ 2-dim/ Equação).

3.1- As retas traçadas, anteriormente, apresentam ponto comum?_____________
Qual?_________________________

3.2- Observando as retas traçadas na questão 3, é possível dizer que elas são:
( ) paralelas distintas ( ) concorrentes ( ) coincidentes

3.3- Resolva algebricamente o sistema $\begin{cases} 3x + y = -3 \\ 4x - 3y = 9 \end{cases}$.

3.4- Compare as respostas encontradas nos itens 3.1 e 3.3.

____

4- Utilizando o Winplot, represente num mesmo sistema de eixos os gráficos das equações: $-x + 2y = 3$ e $4x - 8y = 5$ (Janela/ 2-dim/ Equação).

4.1- As retas traçadas, anteriormente, apresentam ponto comum?_____________

4.2- Observando as retas traçadas na questão 4, é possível dizer que elas são:
( ) paralelas distintas ( ) concorrentes ( ) coincidentes

4.3- Resolva algebricamente o sistema $\begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 4x - 8y = 5 \end{cases}$.

5- Utilizando o Winplot, represente num mesmo sistema de eixos os gráficos das equações: 5x + y = 2 e 10x + 2y = 4 (Janela/ 2-dim/ Equação/Explícita).

5.1- Observando as retas traçadas na questão 5, é possível dizer que elas são:

( ) paralelas distintas ( ) concorrentes ( ) coincidentes

5.2- Resolva algebricamente o sistema $\begin{cases} 5x + y = 2 \\ 10x + 2y = 4 \end{cases}$.

6- Dê duas equações que representem duas retas paralelas distintas. Utilize o Winplot para traçar essas retas. Resolva o sistema formado pelas equações sugeridas.

7- Dê duas equações que representem duas retas coincidentes. Utilize o Winplot para traçar essas retas. Resolva o sistema formado pelas equações sugeridas.

8- Utilizando o Winplot, represente num mesmo sistema de eixos os gráficos das equações: x + y = 5 , x – y = 1 e x + 2y = 7.

8.1- As retas traçadas, anteriormente, apresentam ponto comum?_____________
Qual?_________________________

8.2- Observando as retas traçadas na questão 8, é possível dizer que elas são:

( ) paralelas distintas ( ) concorrentes ( ) coincidentes

8.3- Resolva algebricamente o sistema $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \\ x+2y=7 \end{cases}$.

8.4- Compare as respostas encontradas nos itens 8.1 e 8.3.

____

9- Utilizando o Winplot, represente num mesmo sistema de eixos os gráficos das equações: x + y = –1 , 2x – y = – 8 e x + 4y = – 4.

9.1- Há ponto comum às três retas traçadas na questão 9 ?________________

9.2- Resolva algebricamente o sistema $\begin{cases} x+y=-1 \\ 2x-y=-8 \\ x+4y=-4 \end{cases}$.

10- Utilizando o Winplot, represente num mesmo sistema de eixos os gráficos das equações: 2x + y = 3 , 3x – y = 2 e 6x – 2y = 0.

10.1- Há ponto comum às três retas traçadas na questão 10 ?________________

10.2- Resolva algebricamente o sistema $\begin{cases} 2x+y=3 \\ 3x-y=2 \\ 6x-2y=0 \end{cases}$.

11- Utilizando o Winplot, represente num mesmo sistema de eixos os gráficos das equações: x + y = 2 , 2x + 2y = 1 e 3x + 3y = 8.

11.1- Há ponto comum às três retas traçadas na questão 11?________________

11.2- Observando as retas traçadas na questão 11, é possível dizer que elas são:

( ) paralelas distintas ( ) concorrentes ( ) coincidentes

11.3- Resolva algebricamente o sistema $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=1 \\ 3x+3y=8 \end{cases}$.

12- Utilizando o Winplot, represente num mesmo sistema de eixos os gráficos das equações: x + y = 2 , 2x + 2y = 4 e 3x + 3y = 6.

12.1- Há ponto comum às três retas traçadas na questão 12 ?________________

12.2- Observando as retas traçadas na questão 12, é possível dizer que elas são:

( ) paralelas distintas ( ) concorrentes ( ) coincidentes

12.3- Resolva algebricamente o sistema $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=4 \\ 3x+3y=6 \end{cases}$.

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE CAMPOS

Universidade da Tecnologia e do Trabalho

Ministério da Educação

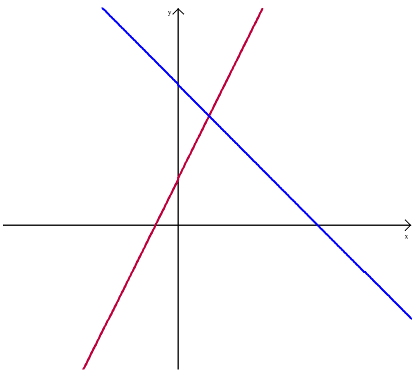
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

EXERCÍCIO I

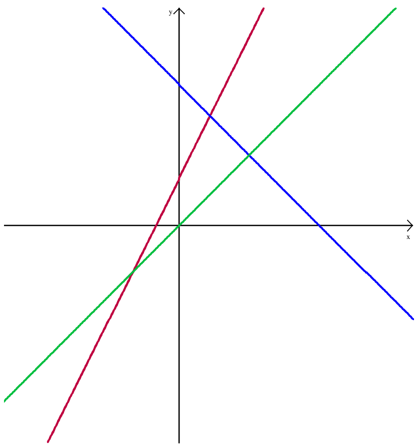
ALUNO:____

1- Marque a opção que corresponde à classificação do sistema, quanto ao número de soluções, formado pelas equações das retas representadas em cada item.

a)



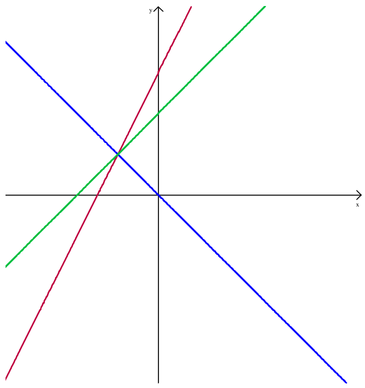
b)



( ) Sistema possível e determinado
( ) Sistema possível e indeterminado
( ) Sistema impossível

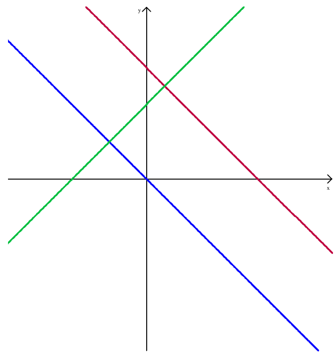
( ) Sistema possível e determinado
( ) Sistema possível e indeterminado
( ) Sistema impossível

c)



( ) Sistema possível e determinado
( ) Sistema possível e indeterminado
( ) Sistema impossível

d)



( ) Sistema possível e determinado
( ) Sistema possível e indeterminado
( ) Sistema impossível

CEFET CAMPOS
CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE CAMPOS
Universidade da Tecnologia e do Trabalho

Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

ATIVIDADE II

ALUNO:____

1- Resolva o sistema $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x+5y+z=6 \\ 3x+y+z=4 \end{cases}$.

1.1- Utilizando o Winplot, represente num mesmo sistema de eixos os gráficos das equações: x + 2y + z = 1, 2x + 5y + z = 6 e 3x + y + z = 4 (Janela/**3-dim**/ Equação/ Explícita).

1.1.1- Selecione: Equação/Ponto/Cartesiano e digite para x, y e z os valores encontrados ao resolver o sistema da questão 1 e clique OK. O que você observou?

____

____

____

2- Resolva o sistema $\begin{cases} x+2y+z=5 \\ -x-2y-z=1 \\ 2x+4y+2z=3 \end{cases}$.

2.1- Utilizando o Winplot, represente num mesmo sistema de eixos os gráficos das equações: x + 2y + z = 5, – x – 2y – z = 1 e 2x + 4y + 2z = 3 (Janela/**3-dim**/ Equação/ Explícita).

3- Resolva o sistema $\begin{cases} x+2y+z=5 \\ x-2y-z=-1 \\ 2x+4y+2z=1 \end{cases}$.

3.1- Utilizando o Winplot, represente num mesmo sistema de eixos os gráficos das equações: x + 2y + z = 5, x – 2y – z = –1 e 2x + 4y + 2z = 1 (Janela/**3-dim**/ Equação/ Explícita).

4- Resolva o sistema $\begin{cases} x+2y+z=5 \\ 2x+2y+z=3 \\ x-2y-z=-1 \end{cases}$.

4.1- Utilizando o Winplot, represente num mesmo sistema de eixos os gráficos das equações: x + 2y + z = 5, 2x + 2y + z = 3 e x – 2y – z = –1 (Janela/**3-dim**/ Equação/ Explícita).

5- Resolva o sistema $\begin{cases} x+4y+3z=0 \\ x+5y+z=3 \\ 4x+19y+6z=9 \end{cases}$.

5.1- Utilizando o Winplot, represente num mesmo sistema de eixos os gráficos das equações: x + 4y + 3z = 0, x + 5y + z = 3 e 4x + 19y + 6z = 9 (Janela/**3-dim**/ Equação/ Explícita).

5.1.1- Selecione: Equação/Paramétrica e digite x, y e z encontrados ao resolver o sistema da questão 5 (use parâmetro t) e clique OK. O que você observou?

____

____

6- Resolva o sistema $\begin{cases} x+y-z=3 \\ 3x+4y+z=1 \end{cases}$.

6.1- Utilizando o Winplot, represente num mesmo sistema de eixos os gráficos das equações: x + y – z = 3 e 3x + 4y + z = 1 (Janela/**3-dim**/ Equação/ Explícita).

6.1.1- Selecione: Equação/Paramétrica e digite x, y e z encontrados ao resolver o sistema da questão 6 (use parâmetro t) e clique OK. O que você observou?

____

____

7- Resolva o sistema $\begin{cases} 4x-3y+z=5 \\ 8x-6y+2z=1 \end{cases}$.

7.1- Utilizando o Winplot, represente num mesmo sistema de eixos os gráficos das equações: 4x – 3y + z = 5 e 8x – 6y + 2z = 1 (Janela/**3-dim**/ Equação/ Explícita).

8- Resolva o sistema $\begin{cases} x-2y+z=5 \\ 3x-6y+3z=15 \end{cases}$.

8.1- Utilizando o Winplot, represente num mesmo sistema de eixos os gráficos das equações: x – 2y + z = 5 e 3x – 6y + 3z = 15 (Janela/**3-dim**/ Equação/ Explícita).

8.1.1- Selecione: Equação/Paramétrica e digite x, y e z encontrados ao resolver o sistema da questão 6 (use parâmetros t e u) e clique OK. O que você observou?

____

____

9- Dê três equações que representem três planos paralelos distintos. Utilize o Winplot para traçar esses planos. Resolva o sistema formado pelas equações sugeridas.

10- Dê duas equações que representem dois planos coincidentes. Utilize o Winplot para traçar esses planos. Resolva o sistema formado pelas equações sugeridas.

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE CAMPOS

Ministério da Educação

CEFET CAMPOS Universidade da Tecnologia e do Trabalho

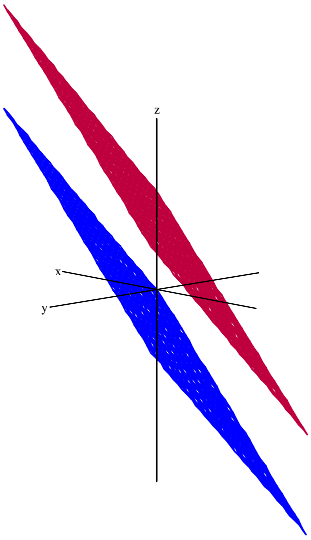
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

EXERCÍCIO II

ALUNO:____

1- Marque a opção que corresponde à classificação do sistema, quanto ao número de soluções, formado pelas equações dos planos α e β representados em cada item.

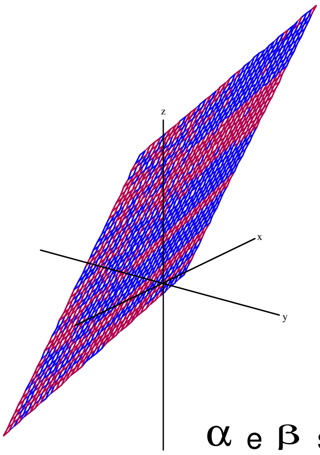
a)



$\alpha // \beta$

( ) Sistema possível e determinado
( ) Sistema possível e indeterminado
( ) Sistema impossível

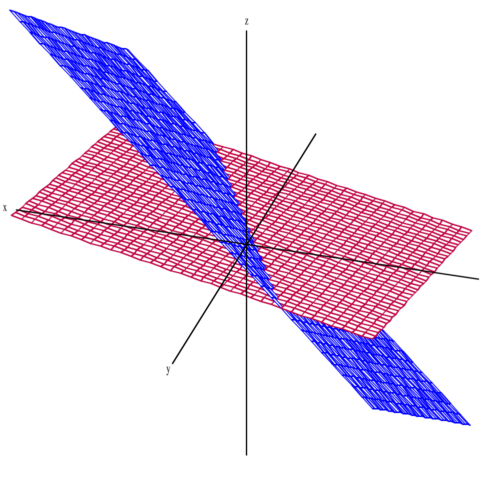
b)



α e β são coincidentes

( ) Sistema possível e determinado
( ) Sistema possível e indeterminado
( ) Sistema impossível

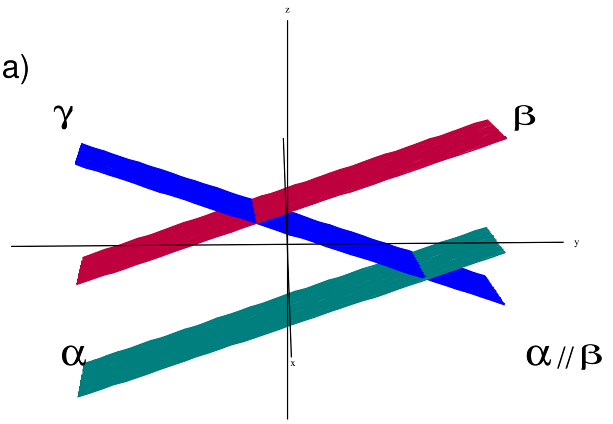
c)



( ) Sistema possível e determinado
( ) Sistema possível e indeterminado
( ) Sistema impossível

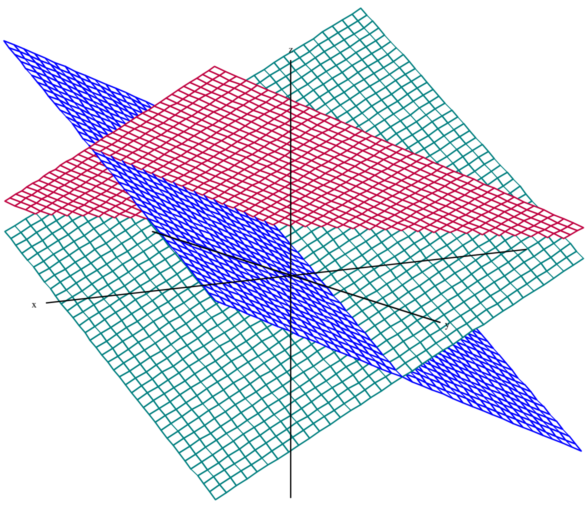
2- Marque a opção que corresponde à classificação do sistema, quanto ao número de soluções, formado pelas equações dos planos α, β e γ representados em cada item.

a)



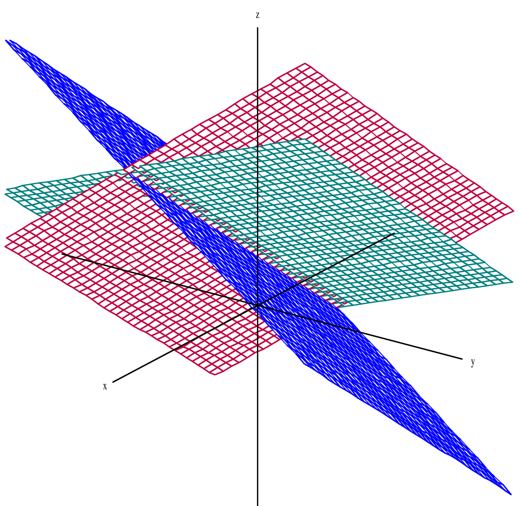
( ) Sistema possível e determinado
( ) Sistema possível e indeterminado
( ) Sistema impossível

b)



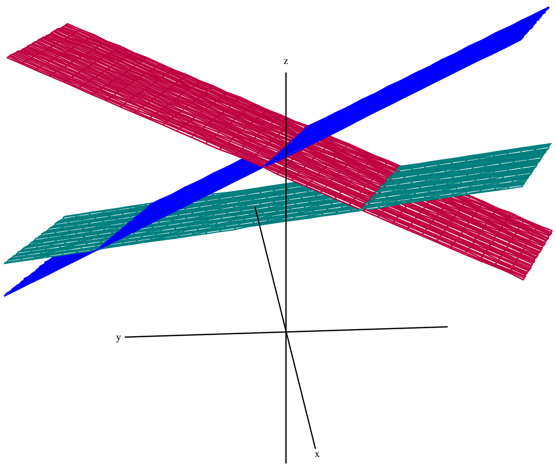
( ) Sistema possível e determinado
( ) Sistema possível e indeterminado
( ) Sistema impossível

c)



( ) Sistema possível e determinado
( ) Sistema possível e indeterminado
( ) Sistema impossível

d)



( ) Sistema possível e determinado

( ) Sistema possível e indeterminado

( ) Sistema impossível

ANEXO III: Algumas atividades resolvidas pelos alunos

1

CEFET CAMPOS

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE CAMPOS

Universidade da Tecnologia e do Trabalho

Ministério da Educação

Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

ATIVIDADE I

ALUNO: ______________________________

1- Utilizando o Winplot, represente num mesmo sistema de eixos os gráficos das equações: 2x + y = 5 e x – y = 1 (Janela/ **2-dim/** Equação/ Implícita).

1.1- As retas traçadas, anteriormente, apresentam ponto comum? Sim

Qual? $\overset{x\ ,\ y}{(2, 1)}$

1.2- Observando as retas traçadas na questão 1, é possível dizer que elas são:

( ) paralelas distintas (X) concorrentes ( ) coincidentes

1.3- Resolva algebricamente o sistema $\begin{cases} 2x + \cancel{y} = 5 \\ x - \cancel{y} = 1 \end{cases}$

$$3x = 6$$

$$x = \frac{6}{3} = 2$$

$$2 - y = 1$$

$$-y = 1 - 2 \quad .(-1)$$

$$y = -1 + 2$$

$$y = 1$$

$$S = \{(2, 1)\}$$

1.4- Compare as respostas encontradas nos itens 1.1 e 1.3.

São exatamente iguais. ou seja, a solução do sistema é o ponto de intersessão das retas.

2- Utilizando o Winplot, represente num mesmo sistema de eixos os gráficos das equações: $y = -x - 1$ e $y = 2x + 8$ (Janela/ 2-dim/ Equação/ Explícita).

2.1- As retas traçadas, anteriormente, apresentam ponto comum? Sim

Qual? (-3, 2)

2.2- Observando as retas traçadas na questão 2, é possível dizer que elas são:

( ) paralelas distintas (X) concorrentes ( ) coincidentes

2.3- Resolva algebricamente o sistema $\begin{cases} y = -x - 1 \cdot (-1) \\ y = 2x + 8 \end{cases}$

$$-\cancel{y} = x + 1$$
$$\cancel{y} = 2x + 8$$
$$0 = 3x + 9$$
$$3x + 9 = 0$$
$$3x = -9$$
$$x = \frac{-9}{3}$$
$$x = -3$$

$$y = -x - 1$$
$$y = \underbrace{-(-3)} - 1$$
$$y = 3 - 1$$
$$y = 2$$

$$S = \{(-3, 2)\}$$

2.4- Compare as respostas encontradas nos itens 2.1 e 2.3.

São iguais, ou seja, a solução do sistema é o ponto de interseção das retas.

3- Utilizando o Winplot, represente num mesmo sistema de eixos os gráficos das equações: $3x + y = -3$ e $4x - 3y = 9$ (Janela/ 2-dim/ Equação).

3.1- As retas traçadas, anteriormente, apresentam ponto comum? Sim

Qual? $\{(0, -3)\}$

3.2- Observando as retas traçadas na questão 3, é possível dizer que elas são:

( ) paralelas distintas (X) concorrentes ( ) coincidentes

3.3- Resolva algebricamente o sistema $\begin{cases} 3x + y = -3 \quad (\cdot 3) \\ 4x - 3y = 9 \end{cases}$.

$$9x + \cancel{3y} = -\cancel{9}$$
$$4x - \cancel{3y} = \cancel{9}$$
$$13x = 0$$
$$x = \frac{0}{13} = 0$$

$$3 \cdot 0 + y = -3$$
$$y = -3$$

$$S = \{(0, -3)\}$$

3.4- Compare as respostas encontradas nos itens 3.1 e 3.3.

A solução do sistema é o ponto de intercessão da reta.

4- Utilizando o Winplot, represente num mesmo sistema de eixos os gráficos das equações: $-x + 2y = 3$ e $4x - 8y = 5$ (Janela/ 2-dim/ Equação).

4.1- As retas traçadas, anteriormente, apresentam ponto comum? Não

4.2- Observando as retas traçadas na questão 4, é possível dizer que elas são:

(X) paralelas distintas ( ) concorrentes ( ) coincidentes

4.3- Resolva algebricamente o sistema $\begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 4x - 8y = 5 \end{cases}$ x(4)

$$-\cancel{4x} + \cancel{8y} = 12$$
$$\cancel{4x} - \cancel{8y} = 5$$
$$0 = 17 \ (F)$$
$$S = \{ \ \} \text{ impossível}$$

5- Utilizando o Winplot, represente num mesmo sistema de eixos os gráficos das equações: $5x + y = 2$ e $10x + 2y = 4$ (Janela/ 2-dim/ Equação/Explícita).

5.1- Observando as retas traçadas na questão 5, é possível dizer que elas são:

( ) paralelas distintas ( ) concorrentes (X) coincidentes

5.2- Resolva algebricamente o sistema $\begin{cases} 5x + y = 2 \\ 10x + 2y = 4 \end{cases}$ $*(-2)$

~~$0x + y =$~~

$5x + y = 2$ Implícita $\rightarrow$ $y = 2 - 5x$ Explícita

$-10x - 2y = -4$

$10x + 2y = 4$

$0 = 0$

(V)

x Sistema possível e indeterminado.

$10x + 2y = 4$

$2y = 4 - 10x$

$y = \frac{4 - 10x}{2}$

$y = (4 - 10x)/2$

$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 5x + y = 2\}$

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Note que!

$\frac{-1}{4} = \frac{2}{-8} \neq \frac{3}{5}$

Note que! Para que ela seja coincidente tem que hacer

$\frac{5}{10} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

6- Dê duas equações que representem duas retas paralelas distintas. Utilize o Winplot para traçar essas retas. Resolva o sistema formado pelas equações sugeridas.

$S = \{ \}$

$-x + 5y = 2$

$+x - 5y = 3$

$0 = 5$ (F) sistema impossível

Nota-se que!

$\frac{-1}{1} = \frac{5}{-5} \neq \frac{2}{3}$

7- Dê duas equações que representem duas retas coincidentes. Utilize o Winplot para traçar essas retas. Resolva o sistema formado pelas equações sugeridas.

$\frac{-1}{1} = \frac{5}{-5} = \frac{-1}{1}$ $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -x + 5y = -1\}$

$\begin{cases} -x + 5y = -1 \\ +x - 5y = 1 \end{cases}$

8- Utilizando o Winplot, represente num mesmo sistema de eixos os gráficos das equações: x + y = 5 , x – y = 1 e x + 2y = 7.

8.1- As retas traçadas, anteriormente, apresentam ponto comum? Sim

Qual? (3, 2)

8.2- Observando as retas traçadas na questão 8, é possível dizer que elas são:

( ) paralelas distintas (X) concorrentes ( ) coincidentes

8.3- Resolva algebricamente o sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$.

$\cancel{x} + \cancel{y} = 5$
$\cancel{x} - \cancel{y} = 1$
$2x = 6$
$x = \frac{6}{2} = 3$

$x + y = 5 \rightarrow 3 + y = 5$
$y = 5 - 3$
$y = 2$

$3 + 2 \cdot 2 = 7$
7

$S = \{(3, 2)\}$

8.4- Compare as respostas encontradas nos itens 8.1 e 8.3.

Sistema possível determinado

9- Utilizando o Winplot, represente num mesmo sistema de eixos os gráficos das equações: $x + y = -1$, $2x - y = -8$ e $x + 4y = -4$.

9.1- Há ponto comum as três retas traçadas na questão 9 ? Não

9.2- Resolva algebricamente o sistema $\begin{cases} x + y = -1 \\ 2x - y = -8 \\ x + 4y = -4 \end{cases}$. $S = \{ \ \}$

$x + y = -1$
$2x - y = -8$
$3x = -9$
$x = -3$

$-3 + y = -1$
$y = -1 + 3$
$y = 2$

$-3 + 4 \cdot 2 = -4$
8
$\boxed{5 \neq -4}$ Solução Sistema impossível.
$S = \emptyset$

10- Utilizando o Winplot, represente num mesmo sistema de eixos os gráficos das equações: $2x + y = 3$, $3x - y = 2$ e $6x - 2y = 0$.

10.1- Há ponto comum as três retas traçadas na questão 10 ? Não

10.2- Resolva algebricamente o sistema $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x - y = 2 \\ 6x - 2y = 0 \end{cases}$.

$2 \cdot 1 + y = 3$
$y = 3 - 2$
$y = 1$

$5x = 5$
$x = \frac{5}{5} = 1$

$6 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 0$
$6 - 2 = 0$
$\boxed{4 = 0}$ (F)
$S = \emptyset$

11- Utilizando o Winplot, represente num mesmo sistema de eixos os gráficos das equações: x + y = 2 , 2x + 2y = 1 e 3x + 3y = 8.

11.1- Há ponto comum as três retas traçadas na questão 11? Não.

11.2- Observando as retas traçadas na questão 11, é possível dizer que elas são:

(X) paralelas distintas ( ) concorrentes ( ) coincidentes

11.3- Resolva algebricamente o sistema $\begin{cases} x+y=2 \;\; x(-2) \\ 2x+2y=1 \\ 3x+3y=8 \end{cases}$.

$-\cancel{2x}-\cancel{2y}=-4$

$\cancel{2x}+\cancel{2y}=1$

$0+0=-3$

$\boxed{0=-3}$ (F)

R: Sistema impossível

Solução vazia

$S=\emptyset$

12- Utilizando o Winplot, represente num mesmo sistema de eixos os gráficos das equações: x + y = 2 , 2x + 2y = 4 e 3x + 3y = 6.

12.1- Há ponto comum as três retas traçadas na questão 12 ? Sim, infinitos.

12.2- Observando as retas traçadas na questão 12, é possível dizer que elas são:

( ) paralelas distintas ( ) concorrentes (X) coincidentes

12.3- Resolva algebricamente o sistema $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=4 \\ 3x+3y=6 \end{cases}$.

Sistema Possível e indeterminado

$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y=2\}$

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE CAMPOS

CEFET CAMPOS Universidade da Tecnologia e do Trabalho

Ministério da Educação

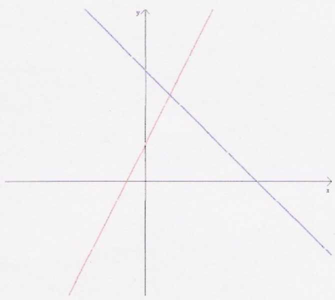
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

EXERCÍCIO I

ALUNO: ____________________

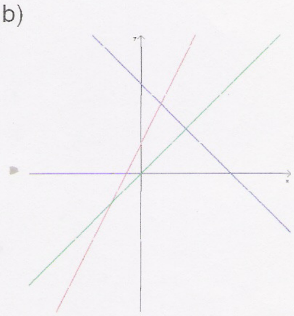
1- Marque a opção que corresponde à classificação do sistema, quanto ao número de soluções, formado pelas equações das retas representadas em cada item.

a)



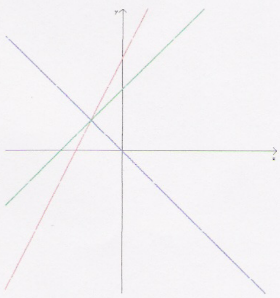
(X) sistema possível e determinado
( ) sistema possível e indeterminado
( ) sistema impossível

b)



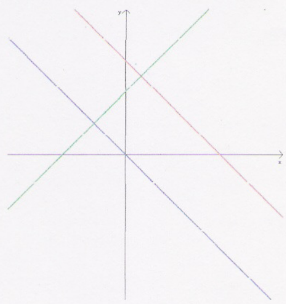
( ) sistema possível e determinado
( ) sistema possível e indeterminado
(X) sistema impossível

c)



(X) sistema possível e determinado
( ) sistema possível e indeterminado
( ) sistema impossível

d)



( ) sistema possível e determinado
( ) sistema possível e indeterminado
(X) sistema impossível

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE CAMPOS
CEFET CAMPOS Universidade da Tecnologia e do Trabalho

Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

ATIVIDADE II

ALUNO:____________________________

1- Resolva o sistema $\begin{cases} x + 2y + z = 1 & \times(-2) \quad \times(-3) \\ 2x + 5y + z = 6 \\ 3x + y + z = 4 \end{cases}$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ y - z = 4 & \times(5) \\ -5y - 2z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \rightarrow x - 2.1 + (-3) = 1 \\ y - z = 4 \rightarrow y - (-3) = 4 \\ -7z = 21 \end{cases}$$

$y = 4 - 3$

$y = 1$

$z = \dfrac{21}{-7}$

$z = -3$

$S = \{(2, 1, -3)\}$ (x, y, z)

Sistema Possível e Determinado

$x - 2 - 3 = 1$

$x - 1 = 1$

$x = 1 + 1$

$x = 2$

1.1- Utilizando o Winplot, represente num mesmo sistema de eixos os gráficos das equações: $x + 2y + z = 1$, $2x + 5y + z = 6$ e $3x + y + z = 4$ (*Janela*/**3-dim**/ Equação/ Explícita).

1.1.1- Selecione: Equação/Ponto/Cartesiano e digite para x, y e z os valores encontrados ao resolver o sistema da questão 1 e clique OK. O que você observou? Que eles tem um ponto em comum aos três planos. O ponto em comum é a solução do sistema.

2- Resolva o sistema $\begin{cases} x+2y+z=5 \\ -x-2y-z=1 \\ 2x+4y+2z=3 \end{cases}$ $\times(1)$ $\times(-2)$

$$\begin{cases} x+2y+z=5 \\ 0+0+0=6 \ (F) \\ 0+0+0=-7 \ (F) \end{cases}$$

Sistema Impossível

$S=\emptyset$

2.1- Utilizando o Winplot, represente num mesmo sistema de eixos os gráficos das equações: x + 2y + z = 5, – x – 2y – z = 1 e 2x + 4y + 2z = 3 (Janela/**3-dim**/ Equação/ Explícita).

3- Resolva o sistema $\begin{cases} x+2y+z=5 \\ x-2y-z=-1 \\ 2x+4y+2z=1 \end{cases}$ $\times(-1)$ $\times(-2)$

$$\begin{cases} x+2y+z=5 \\ -4y-2z=-6 \\ 0+0=-9 \ (F) \end{cases}$$

Sistema Impossível

$S=\emptyset$

3.1- Utilizando o Winplot, represente num mesmo sistema de eixos os gráficos das equações: x + 2y + z = 5, x – 2y – z = –1 e 2x + 4y + 2z = 1 (Janela/**3-dim**/ Equação/ Explícita).

4- Resolva o sistema $\begin{cases} x+2y+z=5 & \times(-2) \quad \times(-1) \\ 2x+2y+z=3 \\ x-2y-z=-1 \end{cases}$

$\begin{cases} x+2y+z=5 \\ -2y-z=-7 & \times(-2) \\ -4y-2z=-6 \end{cases}$ $\begin{cases} x+2y+z=5 \\ -2y-z=-7 \\ 0=8 \ (F) \end{cases}$

Sistema Impossível

$S=\emptyset$

4.1- Utilizando o Winplot, represente num mesmo sistema de eixos os gráficos das equações: x + 2y + z = 5, 2x + 2y + z = 3 e x – 2y – z = –1 (Janela/**3-dim**/ Equação/ Explícita).

$z=5-x-2y$ $\quad -z=-1-x+2y \ \times(-1)$

$z=3-2x-2y$ $\quad z=1+x-2y$

5- Resolva o sistema $\begin{cases} x+4y+3z=0 & \times(-1) \quad \times(-4) \\ x+5y+z=3 \\ 4x+19y+6z=9 \end{cases}$

Infinitas soluções
sistema possível
e indeterminado

$\begin{cases} x+4y+3z=0 \\ y-2z=3 & \times(-3) \\ 3y-6z=9 \end{cases}$ $\begin{cases} x+4y+3z=0 \\ y-2z=3 \\ 0+0+0=0 \end{cases}$

$0=0 \ (V)$

$\begin{cases} x+4y+3z=0 \\ y-2z=3 \end{cases}$ $\rightarrow x+4(2z+3)+3z=0$

$x+8z+12+3z=0$

$x=-11z-12$

$y=2z+3$

$S=\{(-11z-12, 2z+3, z), z\in\mathbb{R}\}$

ou $z=\alpha$

$S=\{(-11\alpha-12, 2\alpha+3, \alpha), \alpha\in\mathbb{R}\}$

5.1- Utilizando o Winplot, represente num mesmo sistema de eixos os gráficos das equações: x + 4y + 3z = 0, x + 5y + z = 3 e 4x + 19y + 6z = 9 (Janela/**3-dim**/ Equação/ Explícita).

5.1.1- Selecione: Equação/Paramétrica e digite x, y e z encontrados ao resolver o sistema da questão 5 (use parâmetro t) e clique OK. O que você observou? Percebi que a reta é solução do sistema

6- Resolva o sistema $\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 3x + 4y + z = 1 \end{cases}$. $\times(-3)$

$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ y + 4z = -8 \end{cases}$ → $x - 8 - 4z - z = 3$

$x - 8 - 5z = 3$

$x = 5z + 11$

$y = -8 - 4z$

$S = \{(5z + 11, -8 - 4z, z), z \in \mathbb{R}\}$

Sistema Possível e indeterminado

6.1- Utilizando o Winplot, represente num mesmo sistema de eixos os gráficos das equações: $x + y - z = 3$ e $3x + 4y + z = 1$ (Janela/**3-dim**/ Equação/ Explícita).

6.1.1- Selecione: Equação/Paramétrica e digite x, y e z encontrados ao resolver o sistema da questão 6 (use parâmetro t) e clique OK. O que você observou? A intersição dos planos é a solução do sistema.

7- Resolva o sistema $\begin{cases} 4x - 3y + z = 5 \\ 8x - 6y + 2z = 1 \end{cases}$. $\times(-2)$

$\begin{cases} 4x - 3y + z = 5 \\ 0 + 0 + 0 = -9 \text{ (F)} \end{cases}$

Sistema Impossível

$S = \emptyset$

7.1- Utilizando o Winplot, represente num mesmo sistema de eixos os gráficos das equações: $4x - 3y + z = 5$ e $8x - 6y + 2z = 1$ (Janela/**3-dim**/ Equação/ Explícita).

8- Resolva o sistema $\begin{cases} x - 2y + z = 5 & \times(-3) \\ 3x - 6y + 3z = 15 \end{cases}$

$z = \alpha$

$y = \beta$

$x = 5 + 2\beta - \alpha$

$\begin{cases} x - 2y + z = 5 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \ (V) \end{cases}$

$S = \{(5+2\beta-\alpha, \beta, \alpha), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$x = 5 + 2y - z$

Sistema Possível e Indeterminado

8.1- Utilizando o Winplot, represente num mesmo sistema de eixos os gráficos das equações: x – 2y + z = 5 e 3x – 6y + 3z = 15 (Janela/**3-dim**/ Equação/ Explícita).

$z = 5 - x + 2y$

8.1.1- Selecione: Equação/Paramétrica e digite x, y e z encontrados ao resolver o sistema da questão 6 (use parâmetros t e u) e clique OK. O que você observou? A intersecção dos planos é o mesmo plano.

9- Dê três equações que representem três planos paralelos distintos. Utilize o Winplot para traçar esses planos. Resolva o sistema formado pelas equações sugeridas.

$\begin{cases} x + 3y - 4z = 5 & \times(-3) \quad \times(-2) \\ 3x + 9y - 12z = 3 \\ 2x + 6y - 8z = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} x + 3y - 4z = 5 \\ 0 + 0 + 0 = -12 \ (F) \\ 0 + 0 + 0 = -8 \ (F) \end{cases}$

Sistema Impossível

$S = \emptyset$

10- Dê duas equações que representem dois planos coincidentes. Utilize o Winplot para traçar esses planos. Resolva o sistema formado pelas equações sugeridas.

$\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 & \times(-2) \\ 2x + 4y - 6z = 6 \end{cases}$

Sistema Possível e Indeterminado

$\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \ (V) \end{cases}$ $y = \alpha$, $z = \beta$

$S = \{(3 - 2\alpha + 3\beta, \alpha, \beta), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$x = 3 - 2y + 3z = 3 - 2\alpha + 3\beta$

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE CAMPOS
CEFET CAMPOS Universidade da Tecnologia e do Trabalho

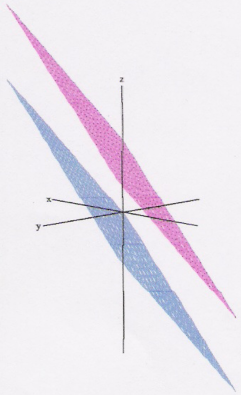
Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

EXERCÍCIO II

ALUNO: ________

1- Marque a opção que corresponde à classificação do sistema, quanto ao número de soluções, formado pelas equações dos planos α e β representados em cada item.

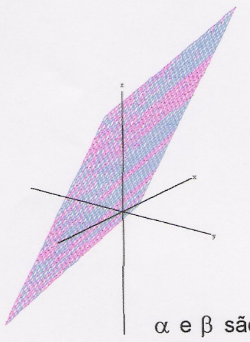
a)



( ) Sistema possível e determinado
( ) Sistema possível e indeterminado
(X) Sistema impossível

$\alpha // \beta$

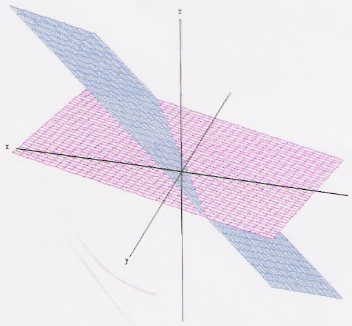
b)



( ) Sistema possível e determinado
(X) Sistema possível e indeterminado
( ) Sistema impossível

α e β são coincidentes

c)



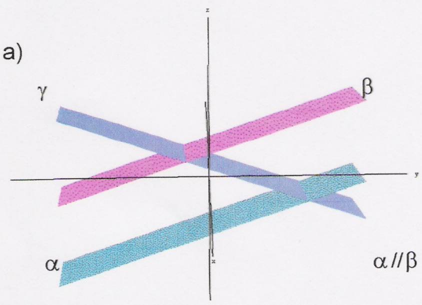
( ) Sistema possível e determinado

(X) Sistema possível e indeterminado

( ) Sistema impossível

2- Marque a opção que corresponde à classificação do sistema, quanto ao número de soluções, formado pelas equações dos planos α, β e γ representados em cada item.

a)

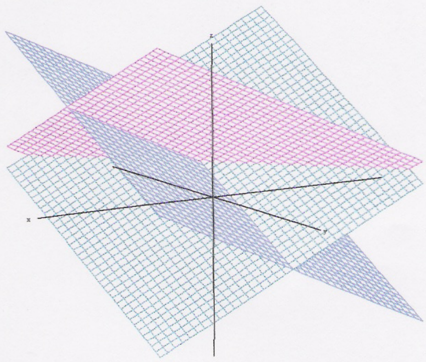


( ) Sistema possível e determinado

( ) Sistema possível e indeterminado

(X) Sistema impossível

b)

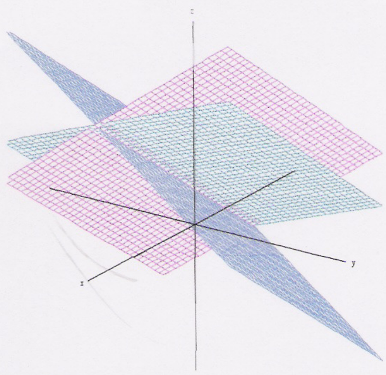


(X) Sistema possível e determinado

( ) Sistema possível e indeterminado

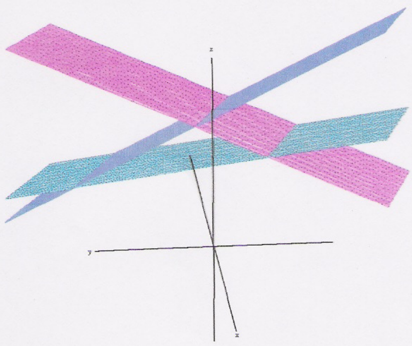
( ) Sistema impossível

c)



( ) Sistema possível e determinado
(X) Sistema possível e indeterminado
( ) Sistema impossível

d)

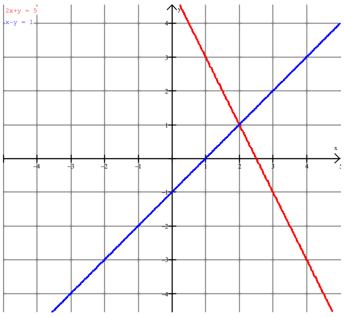


( ) Sistema possível e determinado
( ) Sistema possível e indeterminado
(X) Sistema impossível

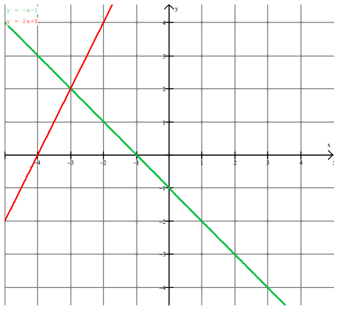
ANEXO IV: Gráficos visualizados pelos alunos no Winplot: Atividades I e II

Atividade I

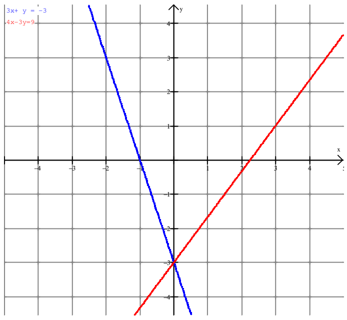
1)



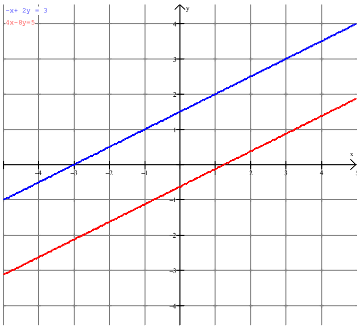
2)



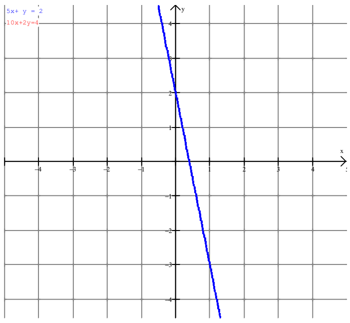
3)



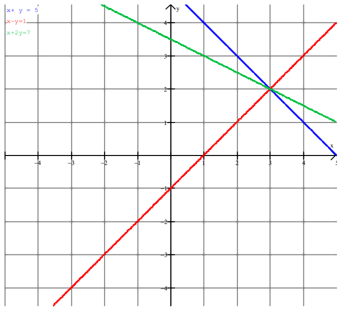
4)



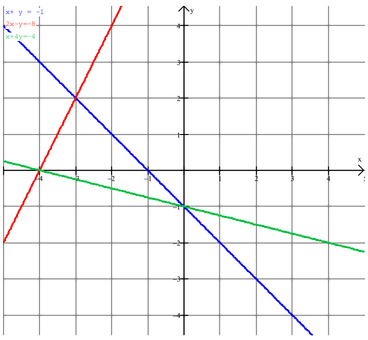
5)



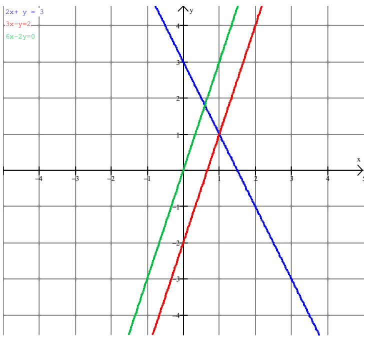
8)



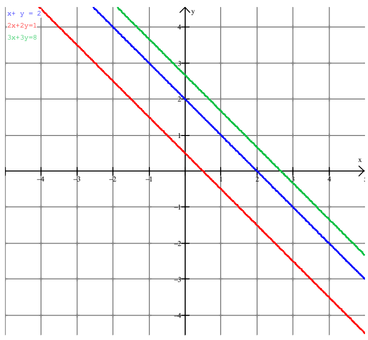
9)



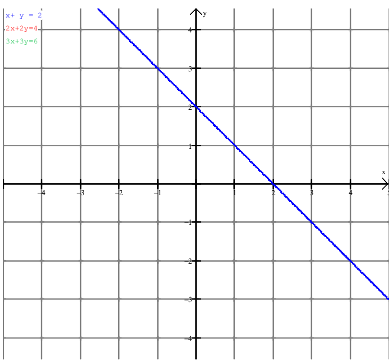
10)



11)

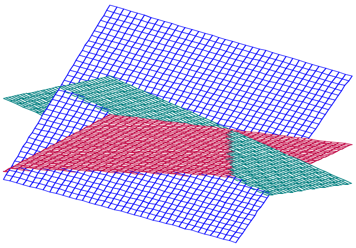


12)

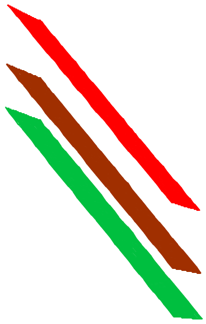


Atividade II

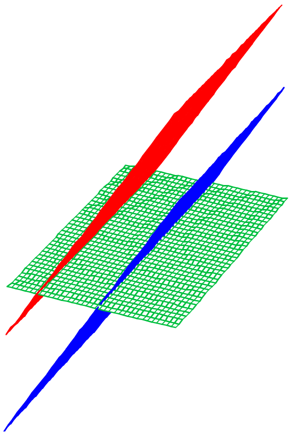
1)



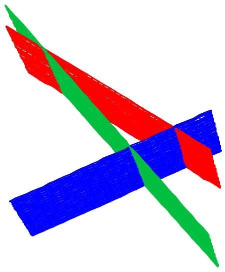
2)



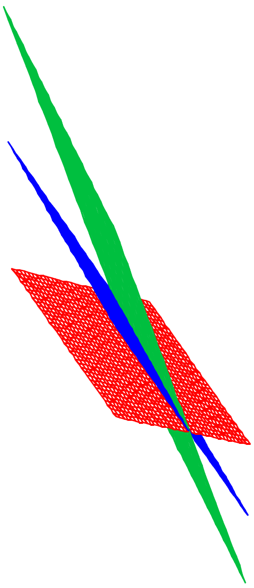
3)



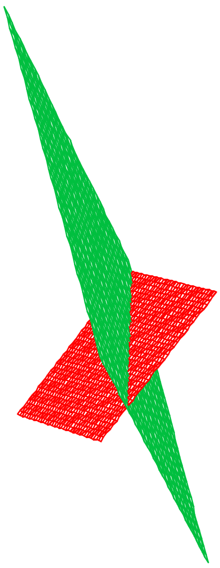
4)



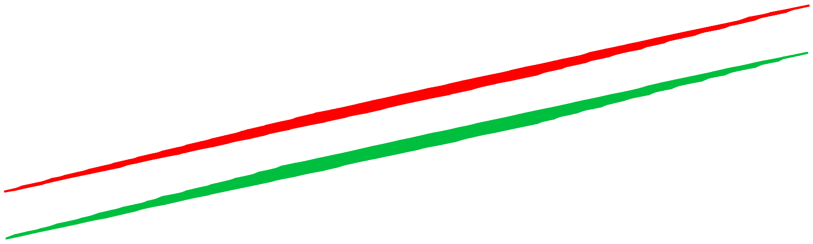
5)



6)



7)



8)