INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Ministério da Educação

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DANIELLY SILVA DE OLIVEIRA RIBEIRO

REJANE WAIANDT SCHUWARTZ FARIA

RAZÃO ÁUREA: UM ELEMENTO MOTIVADOR PARA O ESTUDO DE RAZÕES E SEQUÊNCIAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Campos dos Goytacazes / RJ

2009

DANIELLY SILVA DE OLIVEIRA RIBEIRO

REJANE WAIANDT SCHUWARTZ FARIA

RAZÃO ÁUREA: UM ELEMENTO MOTIVADOR PARA O ESTUDO DE RAZÕES E SEQUÊNCIAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense como requisito parcial para a conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática

Orientadora: Profª Mônica Souto da Silva Dias
Mestre em Educação Matemática / USU / RJ

Coorientadora: Profª Ana Mary Fonseca Barreto de Almeida
Especialista em Matemática Superior / USS / RJ

Campos dos Goytacazes / RJ

2009

Monografia intitulada **Razão Áurea: *Um elemento motivador para o estudo de razões e sequências na Educação Básica*** elaborada por ***Danielly Silva de Oliveira Ribeiro e Rejane Waiandt Schuwartz Faria*** e apresentada publicamente perante a Banca Avaliadora, como parte dos requisitos para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos Centro - RJ

Aprovada em 28 de julho de 2009.

Banca Avaliadora:

Profª Mônica Souto da Silva Dias (orientadora)
Mestre em Educação Matemática / USU / RJ
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense

Profª Ana Mary Fonseca Barreto de Almeida (coorientadora)
Especialista em Matemática Superior / USS / RJ
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense

Prof. Salvador Tavares
Mestre em Educação Matemática / USU / RJ
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense

Profª Gilmara Teixeira Barcelos
Mestre em Ciências de Engenharia / UENF / RJ
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense

AGRADECIMENTOS

Esta monografia não poderia ser publicada sem que antes manifestássemos a nossa gratidão pelas pessoas que nos apoiaram ao longo dos dias em que ela foi realizada. Tentaremos retribuir durante a nossa trajetória como educadoras, a todos aqui relacionados, a contribuição que deram para nossa formação.

Somos Gratas:

A Deus, por ser nosso Refúgio e Fortaleza.

Às professoras Ana Mary Fonseca Barreto de Almeida e Mônica Souto da Silva Dias, pela paciência, dedicação e competência na orientação desta monografia.

Aos nossos pais e familiares que sempre nos apoiaram e incentivaram.

Aos professores Carmem Lúcia Vieira Rodrigues Azevedo, Gilmara Teixeira Barcelos, Márcia Valéria Azevedo de Almeida Ribeiro, Mylane dos Santos Barreto, Sandra de Aquino Maia Duncan, Salvador Tavares, Selma Gomes da Silva, Simone Souto da Silva e Susana Vieira Tuler por terem contribuído significativamente para o aprimoramento desta monografia.

Aos alunos que participaram da aplicação das atividades.

À professora de Língua Portuguesa Ermany Salles Aguiar dos Santos que com toda sua competência e dedicação, fez a revisão ortográfica desta monografia.

À Professora de Língua Inglesa Gilza Márcia Nunes que dispôs de sua capacidade para revisar a ortografia do *abstract* desta monografia.

Vejo a nossa missão de uma outra maneira, com muita paixão,
fé na humanidade e sobretudo muito amor.
Ubiratan D'Ambrósio

RESUMO

O presente trabalho objetivou elaborar e validar atividades que possuem como elemento motivador a Razão Áurea para o estudo de razões e sequências no Ensino Médio e nos ciclos finais do Ensino Fundamental. Com este objetivo foram elaboradas e aplicadas atividades em escolas da rede pública, localizadas no Município de Campos dos Goytacazes, para duas turmas do Ensino Fundamental, sendo uma do terceiro e outra do quarto ciclo, e para um grupo de alunos do Ensino Médio. Buscando alcançar as competências e habilidades propostas, durante a realização das atividades foram utilizados diversos recursos, de acordo com a faixa etária dos alunos e com os conteúdos matemáticos a serem abordados. Com relação ao desempenho dos alunos, pode-se afirmar que a utilização da Razão Áurea como elemento motivador para o estudo de razões e sequências cumpriu seu objetivo, ou seja, os alunos não só tomaram conhecimento desta razão antes desconhecida pela grande maioria deles, mas também se sentiram motivados durante o estudo dos conteúdos matemáticos citados. Os referenciais teóricos desta monografia foram os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997), D'Ambrósio (1997), Santos (2007) e Miguel e Miorim (2004) no que diz respeito à História da Matemática; Barcelos (2004), Libâneo (2002), D'Ambrósio (1997), Perrenoud (2000) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997) no que se refere às Tecnologias de Informação e Comunicação; Menezes e Santos (2002), Duarte (2002), D'Ambrósio (1997), Santos (2007), Pais (2002), Garbi (2009) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (2002) que orientam sobre a importância da contextualização no âmbito escolar.

Palavras-chave: Razão Áurea. Razões. Sequências.

ABSTRACT

This study aimed to develop and validate that activities are as motivator to Golden Ratio for the study of reasons and sequences in high school and in the final cycles of elementary school. With this purpose were drawn up and implemented activities in the public schools, located in the city of Campos dos Goytacazes for two classes of elementary school, one of the other third and fourth cycle, and a group of students from high school. Seeking achieve the skills and abilities proposals for the implementation of activities were used various resources, according to the age of the students and the mathematical content to be addressed. Regarding the performance of students, one can say that using the Golden Ratio as a motivator for the study of ratio and sequences fulfill its objective, ie, students not only aware of this ratio before the great majority of them unknown, but also felt motivated during the study of mathematical content cited. The theoretical references were the monograph of the National Curriculum Parameters (1997), D'Ambrósio (1997), Santos (2007) and Miorim and Miguel (2004) regarding the History of Mathematics; Barcelos (2004), Libâneo (2002), D'Ambrósio (1997), Perrenoud (2000) and the National Curricular Parameters (1997) regarding Information and Communication Technologies, Menezes (2002), Duarte e Santos (2002), D'Ambrosio (1997), Santos (2007), Pais (2002), Garbi (2009) and the National Curricular Parameters (2002) that drive the importance of contextualization within school.

Keywords: Golden Ratio. Ratio. Sequences.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Ao longo do processo de formação acadêmica no Ensino Básico das professoras em formação, autoras desta monografia, observou-se que existem barreiras entre a Matemática e a vida real devido à ausência de aulas contextualizadas e ao modo como ela é apresentada em sala de aula, distanciando-a de sua aplicação.

Estas observações surgiram por meio das reflexões no curso de Licenciatura em Matemática, tomando por parâmetros a vivência acadêmica e as observações de aulas no estágio supervisionado. Percebeu-se que os professores enfatizam algoritmos e esquemas perpetuados de resolução de problemas prototípicos.

Diante do exposto, que conexão seria possível o aluno construir entre o concreto e o abstrato? Em meio a esta realidade deparou-se com um tema - Razão Áurea - que tem encantado pessoas como D'Ambrósio que fez a seguinte afirmação sobre a Razão Áurea: "O tema é um dos mais fascinantes da história da humanidade não restrito à Matemática." (D'AMBRÓSIO, 1996, *apud* BIEMBENGUT, 1996. p.9).

No segundo período do curso de Licenciatura em Matemática ocorreu o primeiro contato das autoras desta monografia com a Razão Áurea. No âmbito da disciplina Construções Geométricas e Geometria Descritiva II, foi solicitado pela professora uma atividade sobre a Razão Áurea de tal forma que respondêssemos o roteiro a seguir:

- Definir Segmento Áureo.
- Construir Segmento Áureo Interno e Externo de AB. (Considere AB = 7 cm).
- Qual é o número de ouro e por que recebe o nome de Phi?
- Aplicações do número Phi no pentagrama e no decágono regular.
- Pesquisar a existência do Número de Ouro na arquitetura e nas obras de Arte.
- Construir Retângulo Áureo.
- Construir a Espiral Logarítmica.
- Fazer a conexão da sequência de Fibonacci com o Número de Ouro.

As autoras deste trabalho surpreenderam-se com o resultado encontrado na pesquisa para a atividade citada. Como uma única razão poderia estar presente em tantas áreas de conhecimento diferentes?

Apesar de tê-la admirado, o próximo contato das autoras desta monografia com a Razão Áurea só ocorreu no quinto período, no âmbito da disciplina Matemática no Currículo da Educação Básica, quando a professora desta disciplina propôs a apresentação de seminários em grupo sobre modelagem matemática, nos quais os temas seriam sorteados. Neste sorteio, o grupo formado pelas professoras em formação, autoras desta monografia, juntamente com outro aluno, foi contemplado com o tema Razão Áurea, que deveria ser abordado segundo o texto Razão Áurea de Maria Sallet Biembengut, que se encontra no livro Modelagem Matemática no Ensino (2003, p. 84).

Este seminário motivou a realização do terceiro trabalho das autoras desta monografia sobre a Razão Áurea em um evento da área de Educação Matemática[1]. Sua elaboração despertou um interesse ainda maior por esta Razão, pois cada nova aplicação encontrada para o tema era admirável. A revisão bibliográfica realizada para a elaboração do texto do trabalho a ser inscrito no evento possibilitou uma ampliação significativa do conhecimento sobre o tema.

Após a apresentação do referido trabalho, optou-se pelo aprofundamento deste assunto e decidiu-se que este seria o tema desta monografia.

Por meio da Razão Áurea é possível estabelecer um padrão de beleza de acordo com a proporcionalidade do corpo humano, revelando uma proporção entre os membros deste. Esta Razão faz um *link* entre o concreto e o abstrato, entre arquiteturas antigas e modernas, entre a Matemática e a arte, mostrando a Matemática imersa na vida real, e que utilizando a Razão Áurea pode-se produzir polígonos, obras arquitetônicas e artísticas numa “Divina Proporção” com a natureza.

A abordagem proposta nesta monografia explora um tema matemático de relevância que não se restringe a tal disciplina escolar. A Razão Áurea é encontrada em polígonos áureos, na sequência de Fibonacci, na natureza, na arquitetura, na música e na arte. Esta razão pode ser entendida como um meio eficaz de mostrar a utilização da Matemática na vida real.

---

[1] Comunicação Científica intitulada Razão Áurea – A Divina Proporção, apresentada na II Semana de Matemática do CEFETCampos em 2008.

Desde a antiguidade, a Razão Áurea vem sendo utilizada. Segundo Biembengut (1996, p.12):

> Muito dos feitos realizados pelos Gregos, tais como: nas esculturas de Fhideas; nas obras arquitetônicas; no símbolo da escola pitagórica (V a.C.) um pentagrama, na demonstração da beleza do pentagrama, por processos geométricos, feita por Euclides (III a.C.), comprovam a familiaridade a respeito das Secções Áureas.

Pela vivência escolar e por observações realizadas ao longo da graduação das autoras desta monografia, verificou-se que a Razão Áurea tem sido muito pouco utilizada na sala de aula, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio.

De forma geral, esta monografia objetivou elaborar e validar atividades para a sala de aula que possuem como elemento motivador a Razão Áurea para o estudo de razões e sequências no Ensino Médio e nos ciclos finais do Ensino Fundamental, e se desdobrou nos seguintes objetivos específicos:

- Realizar um estudo histórico da Razão Áurea;
- Investigar as aplicações e ocorrências da Razão Áurea;
- Investigar as propostas do uso da Razão Áurea para a sala de aula e pesquisas correlatas;
- Elaborar e validar atividades que utilizam a Razão Áurea como elemento motivador para o estudo e o aprofundamento de tópicos em matemática escolar, usando, entre outros recursos, os *softwares* matemáticos.

Dentre as finalidades do ensino de matemática do Ensino Médio, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), esta monografia contempla:

> O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, <u>ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência.</u> [grifo das autoras] (BRASIL, 1997, p.43).

Portanto, entende-se que quanto mais aproximarmos o conhecimento escolar e a realidade em que o aluno encontra-se inserido, englobando desde o seu cotidiano à sociedade em geral, maior será a importância dada pelo aluno a este conhecimento. A Razão Áurea, sendo um tema amplo, por si mesma abre caminhos para vincular o conhecimento a sua origem e a sua aplicação.

Nesta monografia foram elaboradas e validadas três atividades.

A atividade “Razão Áurea no corpo humano” relaciona razões com medidas do corpo humano e o Número Phi. Os recursos utilizados nesta atividade foram a calculadora, a figura do corpo humano e um filme. Esta atividade é destinada a alunos do 3º ciclo do Ensino Fundamental.

A atividade “Sequência de Fibonacci” tem como recursos facilitadores do processo de ensino e aprendizagem a planilha eletrônica para construir uma sequência e seu gráfico além de dois filmes. Esta atividade é destinada a alunos do 4º ciclo do Ensino Fundamental.

A atividade “Segmento Áureo - Polígonos de Ouro - Razão Áurea com enfoque em questões de vestibulares” utiliza o *software* GeoGebra para relacionar a Razão Áurea com o Segmento Áureo e os Polígonos de Ouro e a Espiral Logarítmica. Esta atividade traz ainda questões de vestibulares sobre a Razão Áurea e dois vídeos. Esta atividade é destinada a alunos do Ensino Médio.

Esta monografia encontra-se estruturada em quatro capítulos além desta introdução e das considerações finais.

No Capítulo 1 é abordada a história da Razão Áurea no que tange o seu surgimento, os estudiosos que se dedicaram a ela, as suas propriedades e as suas aplicações.

No Capítulo 2, apresentam-se os referenciais teóricos que embasaram este trabalho no âmbito educacional.

O relato da aplicação das atividades, e sua análise constituem o capítulo 3.

O Capítulo 4 contém o processo de elaboração dos Procedimentos Pedagógicos e a análise feita pelos professores aos mesmos.

Por fim, apresentou-se as considerações finais e as sugestões de continuidade deste trabalho.

1 BREVE HISTÓRICO SOBRE RAZÃO ÁUREA

Pitágoras, observando a confecção de armas e utensílios com determinadas relações numéricas que seu pai e um amigo de seu pai faziam, cujas profissões eram ourives e armeiro, respectivamente, aprendeu a traçar as proporções humanas (CONTE, 2006).

Tais proporções não eram de conhecimento humano e para Pitágoras, elas só poderiam ser descobertas por meio de observações e raciocínio. Foi o que ele fez, observando a natureza pôde esclarecer esse mistério:

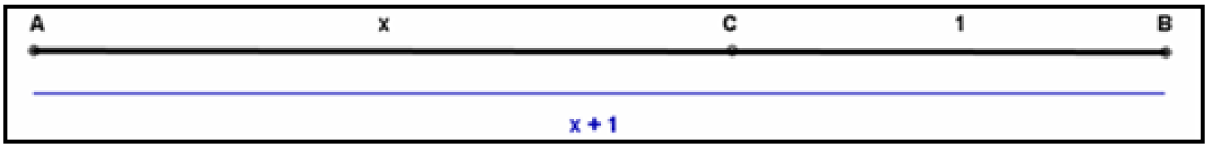
> [...] certo dia, deparou com uma belíssima concha marinha *(Nautilus Pompilius),* trazida pelo eterno fluxo e refluxo das marés. Recolheu-a com cuidado, admirando a beleza de suas formas e a sua perfeição geométrica. Percebeu, então, de um relance, que ali estava a resposta que ele tanto procurava; as espirais perfeitas, as cores harmônicas, a simetria rigorosa daquela peça, não era obra humana, mas, um trabalho dos deuses.(CONTE, p.147, 2006).

Fonte: BROWN (2005, p. 93)
Figura 1: Náutilo *(Nautilus Pompilius)*

Ao longo dos estudos realizados por Pitágoras, ele entendeu que havia uma proporção entre as câmaras internas do náutilo (Figura 1) e percebeu que esta concha havia sido projetada para crescer indefinidamente (CONTE, 2006). O processo de crescimento desta concha deveria seguir um padrão matemático, uma proporção. A partir daí, ele começou a pesquisar se esta proporção era encontrada em outros seres vivos (CONTE, 2006).

A primeira definição do que mais tarde ficou conhecido como Segmento Áureo, foi dada por volta de 300 a.C. pelo fundador da geometria, Euclides de Alexandria (LÍVIO, 2006). Ele juntou e organizou o conhecimento matemático descoberto até então, registrando-o em sua coleção de livros intitulada “Elementos”, que é composta de treze livros. O aspecto mais importante desta coleção é a forma dada à organização dos fatos, num esplêndido encadeamento lógico-dedutivo. Historicamente, os *Elementos* de Euclides é a primeira corporificação desse “método axiomático” (ÁVILA, 2002). Euclides definiu Segmento Áureo (Figura 2) desta forma:

> Diz-se que uma linha reta é cortada na razão extrema e média quando, assim como a linha toda está para o maior segmento, o maior segmento está para o menor. (LÍVIO, 2006, p.14)



Fonte: Autoras

Figura 2: Segmento Áureo como descrito por Euclides

Lívio (2006) sugere tomar o comprimento do segmento menor, CB, como sendo uma unidade, e o comprimento maior AC como x unidades. Assim sendo, o comprimento do segmento AB é x + 1. Com isso, pode-se estabelecer a proporção a seguir, tomando por base a definição de Euclides.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$$

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1}$$

Aplicando a propriedade fundamental das proporções[2] obtém-se a equação abaixo que pode ser resolvida pela fórmula resolutiva da equação do segundo grau:

$$x^2 = x + 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4.1.(-1)$$

$$\Delta = 5$$

[2] Em toda proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos (IEZZI; *et al*. 1997, p.178)

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Portanto, as raízes da equação são $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Como se trata da razão entre as medidas que compõem o segmento áureo, entende-se que o resultado que convém é o positivo e igual a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

A Razão Áurea é um número irracional que foi calculado com 4.599 casas decimais com o auxílio de um computador, no ano de 1966, por M. Berg. Mais tarde, em 1996, a Razão Áurea foi calculada com 10 milhões de casas decimais (LÍVIO, 2006).

1,61803398874989484820458683436563811772030917980576286213544862270526046281890244970720720418939113748475408807538689175212663386222353693179318006076672635443338908659593958290563832266131992829026788067520876689250171169620703222104321626954862629631361443814975870122034080588795445474924618569536486444924104432077134494704956584678850987433944221254487706647809158846074998871240076521705751797883416625624940758906970400028121042762177111777805315317141011704666599146697987317613560067087480710(...)

Quadro 1: Razão Áurea calculada com 500 casas decimais

A principal representação da Razão Áurea é a letra grega φ (lê-se fi), que, no início do século XX, passou a simbolizar esta razão por ser a primeira letra do nome de Fídias (490 - 430 a.C.) que foi um grande escultor grego. Foi o Matemático americano Mark Barr que, numa homenagem póstuma a Fídias, decidiu homenagear o escultor. Barr o fez porque alguns historiadores da arte sustentavam que Fídias fazia uso frequente e meticuloso da Razão Áurea nas suas esculturas. De fato, a Razão Áurea pode ser encontrada nas maiores realizações de Fídias: o “Partenon de Atenas” e “Zeus” no templo de Olímpia (LÍVIO, 2006).

O Número de Ouro é um número irracional, que possui algumas propriedades interessantes (LÍVIO, 2006), que podem ser comprovadas usando uma calculadora científica de bolso. Essas propriedades são:

Somando uma unidade a φ encontra-se φ^2;

$1 + \varphi = \varphi^2 = 2{,}6180339887...$

Subtraindo de φ uma unidade encontra-se $\frac{1}{\varphi}$;

$\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi} = 0{,}6180339887...$

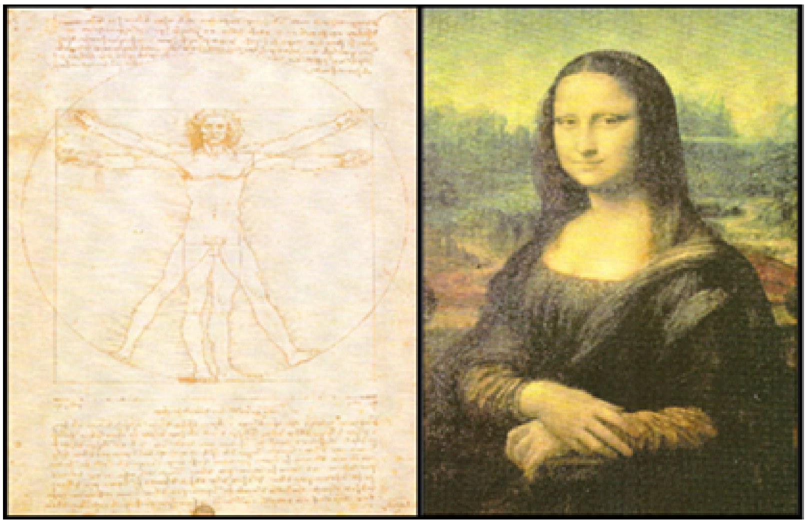
Como pode-se observar, as casas decimais de φ, φ^2 e $\frac{1}{\varphi}$ são idênticas. A Razão Áurea é a única razão em que para se obter seu quadrado basta somar uma unidade e para determinar seu inverso basta subtrair uma unidade (LÍVIO, 2006).

O número φ pode ser encontrado no corpo humano, na arte, na sequência de Fibonacci, na natureza, em arquiteturas antigas e modernas, na geometria, na música e até mesmo na literatura.

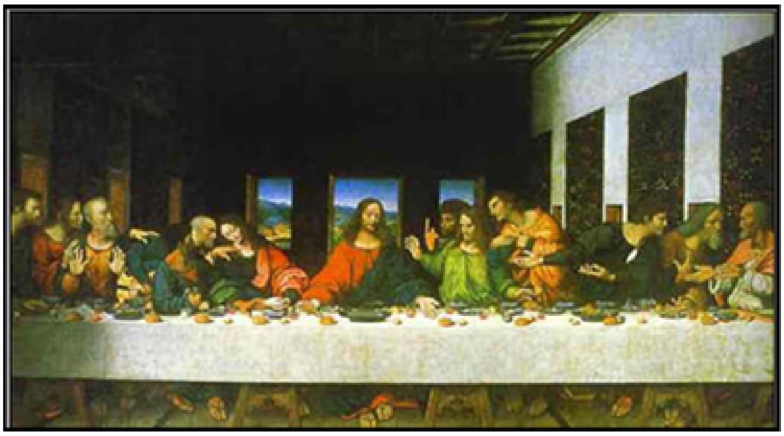
Em várias partes do corpo humano pode-se encontrar razões iguais ou muito próximas de φ. Um dos matemáticos que aprofundou seus estudos sobre a Razão Áurea foi Leonardo Da Vinci (1445 – 1519), que além de ser um ilustre matemático, destacou-se como escultor, pintor, astrônomo, anatomista, entre outros. Da Vinci estudou mais de 30 corpos de homens e mulheres de diversas idades, desde o esqueleto até os órgãos. Com base nesses estudos ele descobriu várias razões iguais a φ (LÍVIO, 2006).

Da Vinci utilizou a Razão Áurea em diversas obras por ele criadas, como, “A Última Ceia” (Figura 4), “Mona Lisa” e “O Homem Vitruviano” (Figura 3),. Esta última foi assim chamada para homenagear Marcos Vitruvius Pollio (70 - 25 a. C.), um arquiteto que também estudou a Razão Áurea e afirmou:

> [...] no corpo humano, o ponto central naturalmente é o umbigo. Porque se um homem for colocado deitado de costas, com as mãos e os pés estendidos e um compasso for centrado no seu umbigo, os dedos de suas mãos e de seus pés irão tocar a circunferência do círculo descrito a partir desse ponto. E assim como o corpo humano produz um contorno circular, uma figura quadrada também pode ser encontrada a partir dele. Pois se medirmos a distância das solas dos pés até o topo da cabeça e depois aplicarmos essa medida aos braços esticados, veremos que a largura será a mesma que a altura, como no caso de superfícies planas que são perfeitamente quadradas. (LÍVIO, 2006, p.157)



Fonte: BROWN (2005, p. 51 e p.115)
Figura 3: “O Homem Vitruviano” e “A Mona Lisa”, respectivamente, ambas de Leonardo Da Vinci



Fonte: www.danbrown.com/secrets/davinci_code/last_supper.html
Figura 4: “A Última Ceia” de Leonardo Da Vinci

Contemporâneo de Da Vinci, Lucca Pacioli (1445 – 1517) escreveu um dos importantes trabalhos acerca da Razão Áurea em três volumes, intitulado *Divina Proportione*, publicado em 1509. Dentre outros fatores importantes, este livro explica porque a Razão Áurea também é chamada de Divina Proporção. Pacioli fez diversas comparações entre Deus e a Razão Áurea. Ele afirmou que:

i. o valor da Razão Áurea é único assim como o epíteto[3] de Deus;
ii. que o Segmento Áureo envolve três comprimentos, embora seja um, fazendo alusão à Santíssima Trindade;
iii. relaciona a impossibilidade da compreensão de Deus com a autossimilaridade da Razão Áurea;

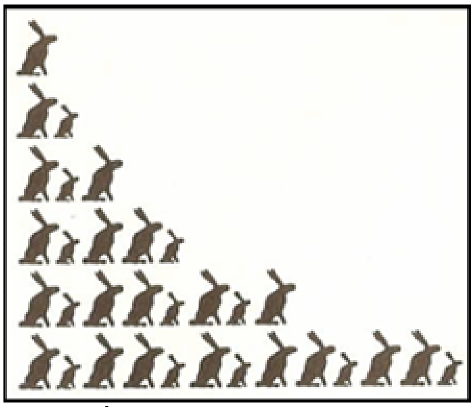
---

[3] Palavra ou frase que qualifica pessoa ou coisa

iv. afirma ainda que assim como Deus conferiu existência a todo o cosmo através da quinta essência (visão platônica) representado pelo dodecaedro, a Razão Áurea conferiu existência ao dodecaedro (LÍVIO, 2006).

Outro matemático que deu grande contribuição aos estudos da Razão Áurea foi Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci (1180-1250). Em 1202 no seu livro *Liber Abaci*, registrou o seguinte problema (Figura 5):

> Um casal de coelhos torna-se produtivo após dois meses de vida e, a partir de então, produz um novo casal a cada mês. Começando com um único casal de coelhos recém-nascidos, quantos casais existirão ao final de um ano? (CARVALHO, 1990, p.6)



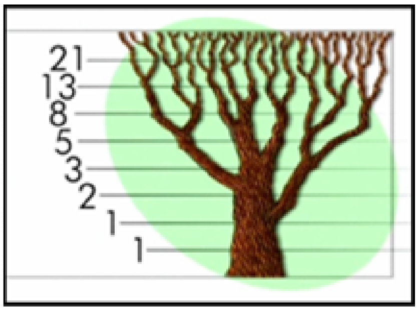
Fonte: LÍVIO (2006, p.116)

Figura 5: Representação do problema dos coelhos (Coelho grande representa um par de coelhos maduros e coelho pequeno representa um par de coelhos jovens).

A solução deste problema é dada pela sequência 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144..., denominada Sequência de Fibonacci, em que cada termo (após o segundo) é igual à soma dos dois termos que o antecedem (LÍVIO, 2006).

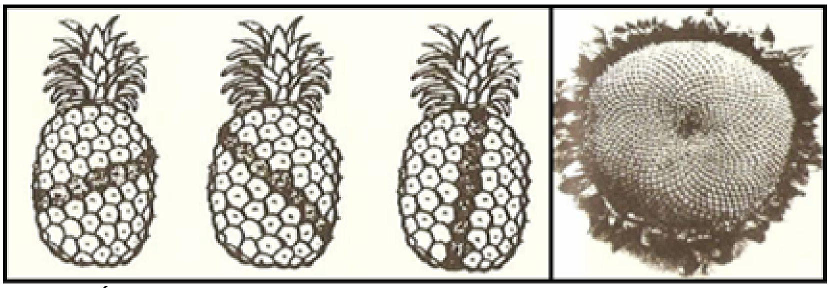
A relação dessa Sequência com a Razão Áurea consiste no fato de que ao dividir um termo pelo seu anterior, o resultado tende a φ. Mas tal relação não foi encontrada por Fibonacci. Somente em 1753, Robert Simson, um matemático escocês, a descobriu (LÍVIO, 2006).

Na natureza, esta relação aparece em muitas situações. No arranjo dos galhos e nos troncos das árvores, partindo de uma folha baixa, o número de voltas em torno do galho até chegar à outra folha, exatamente acima da inicial, segue a Sequência de Fibonacci (Figura 6).



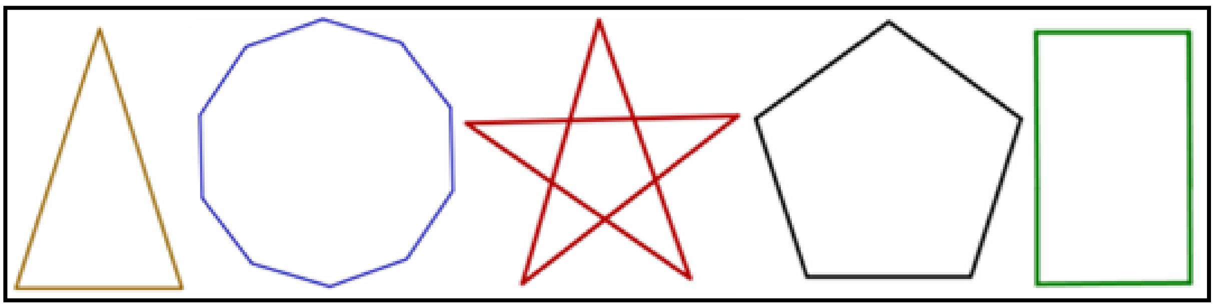
Fonte: TV ESCOLA (s.d.) (a)
Figura 6: Arranjo dos galhos e troncos de árvores

No abacaxi (Figura 7), pode-se observar que cada camada hexagonal da superfície é parte de três espirais diferentes. Outra exposição esplêndida destas espirais ocorre tanto no sentido horário quanto no anti-horário no arranjo dos flósculos nos girassóis. A contagem e a disposição das pétalas de algumas flores também estão ligadas com a Sequência de Fibonacci e com a Razão Áurea. As margaridas-do-campo são exemplos destas flores, pois a maioria delas possuem treze, vinte e uma ou trinta e quatro pétalas, todos números que compõem a Sequência de Fibonacci (LÍVIO, 2006).



Fonte: LÍVIO (2006, p.131 e p.133)
Figura 7: Abacaxi, com destaque das três espirais distintas nele existente e girassol, com destaque no arranjo das espirais formadas por seus flósculos (respectivamente).

A Razão Áurea também pode ser encontrada em algumas figuras geométricas. Quando esta razão é encontrada em um polígono este é chamado de Polígono de Ouro (Figura 8). Exemplos desses polígonos são o triângulo de ouro, o decágono regular, o pentagrama, o pentágono regular e o retângulo de ouro.



Fonte: AUTORAS
Figura 8: Polígonos de Ouro

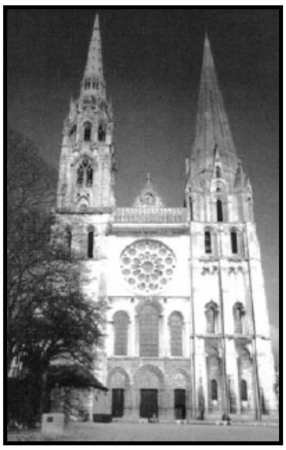
Na arquitetura antiga, a Razão Áurea é encontrada, no “Partenon de Atenas” (Figura 9), “Zeus” no templo de Olímpia e nas pirâmides egípcias.

> A divisão de um segmento em média e extrema razão já aparece no Livro VI de *Euclides* e retângulos áureos são encontrados com freqüência nas esculturas e obras arquitetônicas da Grécia antiga. Por esse motivo a razão áurea é normalmente atribuída aos gregos. Ao que parece, ela já estava presente nas pirâmides do antigo Egito! (SARAIVA, 2002, p.10)

Fonte: TV ESCOLA, (s.d.) (a)
Figura 9: Partenon de Atenas

A Razão Áurea, também é encontrada na Catedral de Notre Dame de Chartrês (Figura 10), na França (LAURO, 2005, p.42):

> A razão áurea se encontra em muitas proporções espaciais na catedral. O retângulo áureo foi utilizado na própria planta da igreja: No portal oeste, entrada principal da catedral, há “figuras vestidas”, esculturas que representam o profeta Davi, a rainha de Sabá e o rei Salomão, e que foram estruturadas de acordo com a razão áurea.



Fonte: KLUG (2002, p.1)
Figura 10: Catedral de Chartres

Esta razão encontra-se também em obras arquitetônicas modernas como a nova sede da ONU (Organizações das Nações Unidas), localizada em Nova Iorque, na qual há três retângulos áureos dispostos horizontalmente. Existe ainda uma residência projetada pelo arquiteto Le Corbusier (Figura 11), em que há dois retângulos áureos, um deles representado pelo corpo inteiro da casa e o outro, disposto verticalmente (LAURO, 2005).

Fonte: ÁVILA (1985, p.9)

Figura 11: Residência projetada pelo arquiteto Le Corbusier

Mas as aplicações da Razão Áurea não param por aí, surpreendentemente o número de ouro também foi utilizado na literatura e na música. Na literatura Duckworth afirma que Virgílio compôs “Eneida” com base na Razão Áurea, utilizando-a em pequenas unidades e nas divisões principais desta obra (LÍVIO, 2006).

Na música, muitos artigos afirmam que as sonatas para piano de Mozart e a técnica cromática da música de Bartók são obedientes a Razão Áurea em cada movimento (LÍVIO, 2006).

Ainda na música, esta razão é encontrada no violino, onde o arco plano na base quase sempre é centrado no ponto da Seção Áurea, a partir da linha do centro, e no piano cada oitava consiste em treze teclas, sendo oito brancas e cinco pretas. Além disso, as cinco teclas pretas formam um grupo de duas teclas e outro de três. Observe que a organização das oitavas do piano forma, em ordem crescente, a sequência: 2, 3, 5, 8, 13 números da Sequência de Fibonacci (LÍVIO, 2006).

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Buscando melhores resultados no processo de ensino e aprendizagem das razões e sequências, as atividades elaboradas para o Ensino Básico apresentam a Razão Áurea, tendo como recursos facilitadores da aprendizagem a História da Matemática e as Tecnologias de Informação e Comunicação. Tais atividades relacionam o tema em estudo com vivências do cotidiano, sendo assim contextualizadas.

Deste modo, neste capítulo serão apresentados os referenciais teóricos que respaldaram todo o processo de elaboração desta monografia. Inicialmente será discorrido acerca da História da Matemática no ensino e aprendizagem de Matemática, em seguida sobre as Tecnologias de Informação e Comunicação na Educação Matemática e finalizando a contextualização na sala de aula.

2.1 A História da Matemática no ensino e aprendizagem de Matemática

A Razão Áurea é um tema que tem um grande valor histórico e tem sido pesquisado há muitos séculos, por isso, as atividades que foram elaboradas abordaram a História da Matemática. Segundo os PCN:

> A História da Matemática, mediante um processo de transposição didática e juntamente com outros recursos didáticos e metodológicos, pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem em Matemática (BRASIL, 1997, p.34).

D' Ambrósio (1997) afirma que é muito difícil motivar os alunos somente com fatos e situações do mundo atual, pois a Matemática é uma ciência que foi criada e desenvolvida em prol dos problemas, de uma realidade, de percepções, de necessidades e de urgências de outros tempos, que hoje são estranhas, e que por esses motivos ela poderia ser ensinada com um fato histórico. Esta afirmação é ratificada por Santos (2007, p.19):

> O uso da História da Matemática pode auxiliar no conhecimento matemático (...). Além disso, pode motivar o aluno a se aprofundar no assunto tendo uma visão de como esses tipos de problemas eram resolvidos antes de existir o que hoje nos é familiar.

Miguel e Miorim (2004) recomendam utilizar a história como um fio condutor que direciona as explicações dadas aos porquês da Matemática, bem como, para a promoção de ensino e da aprendizagem da Matemática escolar baseado na compreensão e na significação. Assim sendo, entende-se que a História da Matemática deve possibilitar ao estudante o entendimento do conhecimento matemático no âmbito histórico.

Neste trabalho, o uso da História da Matemática foi imprescindível, devido a importância do tema na mesma.

2.2 Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) na Educação Matemática

Estamos diante de um período de globalização no qual a tecnologia de informação e comunicação se caracteriza como importante instrumento para a inovação (BARCELOS, 2004). No cotidiano, pode-se observar que as TIC vem alterando vários campos da sociedade em diversos setores. Este fato não ocorre diferente na vida dos alunos fora da escola. Libâneo (2002) afirma que diante de tanta tecnologia sempre haverá espaço para os professores, contudo, faz-se necessário a atualização constante destes profissionais:

> [...] professores são necessários, sim. Todavia, novas exigências educacionais pedem às universidades e cursos de formação para o magistério um professor capaz de ajustar sua didática às novas realidades da sociedade, do conhecimento, do aluno, dos diversos universos culturais, dos meios de comunicação. O novo professor precisaria, no mínimo, de uma cultura geral mais ampliada, capacidade de aprender a aprender, competência para saber agir na sala de aula, habilidades comunicativas, domínio da linguagem informacional, saber usar meios de comunicação e <u>articular as aulas com as mídias e multimídias</u>. [grifo das autoras] (LIBÂNEO, 2002, p.10)

Neste contexto, entende-se que os professores devem articular as mídias e multimídias durante as aulas, visando auxiliar a aprendizagem. Assim sendo, o professor tem um novo papel, ele é gerenciador e facilitador do processo de aprendizagem, interagindo com o aluno na produção de novos conhecimentos, valorizando o desenvolvimento crítico, formando, assim, pesquisadores.

Existem questões que não cumprem seus objetivos devido ao excesso de tarefas que se restringem a repetição de esquemas. De acordo com Perrenoud (2000), a utilização de *softwares* é uma alternativa nestas questões. Cabe ao professor destinar a estes as tarefas repetitivas, permitindo que os alunos se dediquem às mais qualificadas.

> [...] O poder dos instrumentos permite uma maior concentração nas mais qualificadas tarefas, deixando ao *software* as mais repetitivas. [...] No domínio da matemática ou das ciências, imagina-se o que se pode fazer com uma planilha eletrônica [...]. PERRENOUD (2000, p.133)

Nas atividades elaboradas nesta monografia contou-se com o auxílio de vários recursos didáticos, dentre os quais destacou-se o uso consciente das TIC, em particular o uso de computadores na aprendizagem de Matemática, conforme citado nos PCN:

> Ele é apontado como um instrumento que traz versáteis possibilidades ao processo de ensino e aprendizagem de Matemática, seja pela sua destacada presença na sociedade moderna, seja pelas possibilidades de sua aplicação nesse processo (BRASIL, 1997, p.34).

D'AMBRÓSIO (1997) afirma que as TIC estão cada vez mais presentes no cotidiano, por isso é importante utilizá-las na sala de aula, como ferramenta auxiliar no processo de ensino e aprendizagem de temas matemáticos.

> Estamos entrando na era do que se costuma chamar a ‘sociedade do conhecimento’. A escola não se justifica pela apresentação de conhecimento obsoleto e ultrapassado e muitas vezes morto. Sobretudo ao se falar em ciências e tecnologia. Será essencial para a escola estimular a aquisição, a organização, a geração e a difusão do conhecimento vivo, integrado nos valores e expectativas da sociedade. Isso será impossível de se atingir sem a ampla utilização de tecnologia na educação. Informática e comunicações dominarão a tecnologia do futuro. (D’AMBRÓSIO, 1997, p.80).

2.3 A contextualização na sala de aula.

Menezes e Santos (2002) afirmam que foi através da reforma do Ensino Médio, com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB) de 1996, que se iniciou a ideia de contextualização, com origem nas recomendações descritas nos PCN. Esses documentos orientam para uma organização curricular que desenvolva os conteúdos de forma contextualizada, para dar significado ao aprendido, estimulando assim o protagonismo do aluno, de tal maneira que incentive a autonomia intelectual.

Duarte (2002) recomenda que, para a aprendizagem de Matemática se tornar significativa, é imprescindível a contextualização, levando sempre em conta os conhecimentos prévios dos alunos no que diz respeito ao meio social, histórico e cultural no qual ele encontra-se inserido. Afirma também que é dever do professor possibilitar ao educando ações que o ajudem a conjecturar os novos conhecimentos.

Entende-se que em Matemática, o ato de contextualizar está ligado a proporcionar a problematização. Duarte (2002) recomenda criar-se condições de problematização a partir dos “saberes” já internalizados pelos alunos, suas vivências e sonhos. Se assim ocorrer, eles se sentirão parte dessa construção, (co)autores desse conhecimento, se colocando como atores principais desse teatro que é o processo contínuo e dinâmico do aprender (DUARTE, 2002).

D’Ambrósio (1997) afirma que as aulas devem encadear as ideias em conformidade com a realidade, pois do ponto de vista de motivação contextualizada, a Matemática que se ensina hoje nas escolas é morta. Mas, segundo Santos (2007, p.7):

> Ultimamente, os professores estão se dando conta de que o interesse da maioria de seus alunos aumenta consideravelmente quando o que está sendo ensinado faz parte de seu cotidiano, ou, pelo menos, o aluno consegue vislumbrar uma aplicação prática do que aprendeu no cotidiano. Se sentem motivados ao perceber que poderão usar esse conhecimento também fora da sala de aula.

Assim sendo, o conhecimento deve ser construído em consonância com a realidade. A Contextualização das ciências deve ser entendida no âmbito sócio-cultural, na forma de análise crítica das ideias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico (BRASIL, 2002).

A contextualização na educação escolar é uma ideia considerada fundamental por Pais (2002, p.27):

> A contextualização do saber é uma das mais importantes noções pedagógicas que deve ocupar um lugar de maior destaque na análise da didática contemporânea. Trata-se de um conceito didático fundamental para a expansão do significado da educação escolar. O valor educacional de uma disciplina expande na medida em que um aluno compreende os vínculos do conteúdo estudado com um contexto compreensível por ele.

Pode-se afirmar que a contextualização propicia a construção do conhecimento porque possibilita a formação de relações entre o saber acadêmico e o cotidiano do aluno (PAIS, 2002).

Por outro lado, Garbi (2009) atenta para o perigo da contextualização excessiva, pois nem todo conteúdo matemático corresponde a uma situação do cotidiano dos alunos, e nem por isso tais conteúdos perdem seu valor, pois a matemática muitas vezes é abstrata. Além disso, a contextualização excessiva faz com que o assunto se restrinja às aplicações práticas, o que empobrece o aprendizado do aluno.

3 RELATO E ANÁLISE DA PESQUISA

Nesta monografia foram elaboradas e validadas três atividades destinadas a públicos-alvo distintos. A atividade “Razão Áurea no Corpo Humano” foi destinada a alunos do 3º ciclo do Ensino Fundamental. A atividade “Sequência de Fibonacci” foi destinada a alunos do 4º ciclo do Ensino Fundamental. E a atividade “Segmento Áureo - Polígonos de Ouro - Razão Áurea com enfoque em questões de vestibulares” foi destinada a alunos do Ensino Médio.

Deste modo, neste capítulo é apresentado o relato das atividades aplicadas. O relato é entremeado com a análise segundo o referencial teórico descrito no capítulo 2.

3.1 Atividade “Razão Áurea no Corpo Humano”

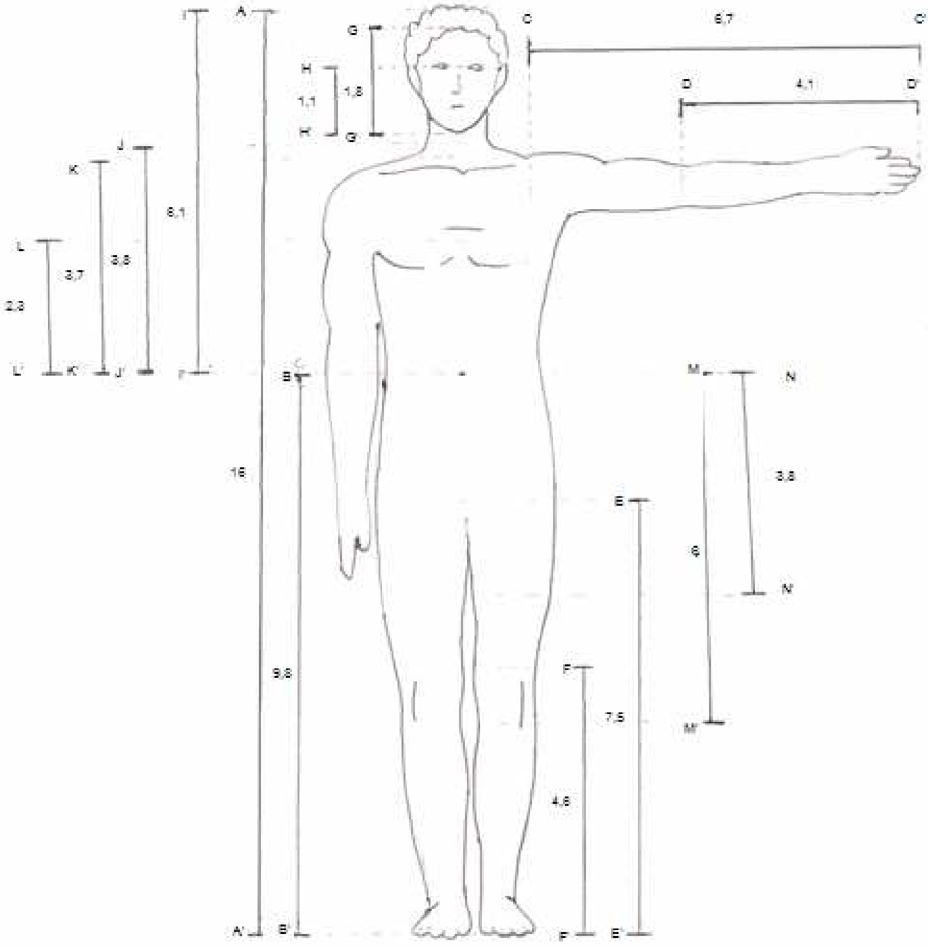
Esta atividade foi aplicada em uma turma do 3º ciclo do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública com duração de 1h 40min. A professora da turma esteve presente auxiliando na disciplina da turma e orientação das atividades.

Ao iniciar a aula, as professoras em formação se apresentaram como alunas do Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Fluminense, informando que as atividades que seriam aplicadas eram parte integrante desta monografia. Em seguida foi entregue a atividade, “Razão Áurea no Corpo Humano” (Apêndice 1) aos alunos e à professora da turma.

Conforme previsto nas orientações pedagógicas para esta atividade (Apêndice 5), uma das professoras em formação fez a leitura do enunciado da questão *1* (Quadro 2). Em seguida, analisou com os alunos a figura do Corpo Humano, identificando os segmentos de reta e relacionando-os com suas respectivas medidas.

Para resolver a questão *1*, os alunos foram agrupados em duplas e trios, devido ao número reduzido de calculadoras necessárias para a resolução da mesma. Foi observado que os alunos permaneceram inertes, evidenciando que eles não sabiam o que era para fazer. Diante desta atitude, as professoras em formação responderam o item *a* da questão *1,* solicitando a participação da turma e registrando as soluções no quadro de giz.

1. Utilizando a figura do corpo humano abaixo e a calculadora, calcule as divisões, sabendo que a unidade de medida dos segmentos indicados é centímetro (considere uma casa decimal):



a. $\dfrac{\text{Altura do corpo}}{\text{distância do umbigo até o pé}} = \dfrac{AA'}{BB'} = \rule{2cm}{0.4pt} =$...

b. $\dfrac{\text{Comprimento do ombro até a ponta dos dedos das mãos}}{\text{distância do cotovelo até a ponta dos dedos das mãos}} = \dfrac{CC'}{DD'} = \rule{2cm}{0.4pt} =$ ....

c. $\dfrac{\text{Comprimento da perna}}{\text{distância do do joelho até o pé}} = \dfrac{EE'}{FF'} = \rule{2cm}{0.4pt} =$ ....

d. $\dfrac{\text{Comprimento da testa até o queixo}}{\text{distância dos olhos até o queixo}} = \dfrac{GG'}{HH'} = \rule{2cm}{0.4pt} =$...

Quadro 2: Questão *1* da atividade Razão Áurea no Corpo Humano

Em seguida, foi pedido que os alunos calculassem as razões com o auxílio da calculadora, mas estes apresentaram dificuldade relacionada ao reconhecimento do traço de fração como sendo uma divisão. De acordo com Nunes e Bryant (1997), é comum que os erros com as operações em frações ocorram e passem despercebidos ao longo dos anos.

> Com as frações as aparências enganam. Às vezes as crianças parecem ter uma compreensão completa das frações e ainda não a têm. Elas usam os termos fracionários certos; falam sobre frações coerentemente, resolvem alguns problemas fracionais; mas diversos aspectos cruciais das frações ainda lhes escapam. De fato, as aparências podem ser tão enganosas que é possível que alguns alunos passem pela escola sem dominar as dificuldades das frações, e sem que ninguém perceba. (NUNES& BRYANT, 1997, p.191)

Depois que uma das professoras em formação explicou que o traço da fração indicava uma divisão, os alunos puderam calcular a razão requerida, obtendo o resultado esperado. Solicitou-se, então, que os alunos respondessem os demais itens. Foi notado que alguns alunos concluíram a tarefa rapidamente, enquanto outros apresentavam muitas dificuldades na identificação dos segmentos ou até mesmo em escrever o nome da parte do corpo pedido (tórax). À medida que avançavam na questão, alguns alunos começaram a ficar preocupados, achando que estavam errando os cálculos. Um aluno comentou:

Professora, o meu deu errado, deu o mesmo número!

Fonte: AUTORAS

Figura 12: Alunos calculando as razões solicitadas na questão *1*

Este fato evidencia uma participação ativa do aluno, pois mostra que ele estava realizando comparações e buscando uma justificativa para a igualdade das razões. Notamos uma semelhança deste fato ocorrido com uma aula de simbologia da arte lecionada pelo professor Langdon, em Harvard, descrita no capítulo XX do livro de ficção “O Código Da Vinci”, em que os alunos se surpreendiam em ver que Phi estava relacionado com as medidas do corpo humano de tal forma que a divisão entre várias medidas dava esta razão:

> [...]Meçam a distância que vai do alto da cabeça até o chão, depois dividam o resultado pela distância do umbigo até o chão. Adivinhem só o número que vão obter.
> -Não é o Phi, é?[...]
> -É o Phi, sim – respondeu Langdon – Um vírgula seis um oito. Querem mais um exemplo? Meçam a distância de um ombro até a ponta dos dedos, depois dividam-na pela distância do cotovelo até a ponta dos dedos. Phi outra vez.[...] Meus amigos, cada um de vocês é um tributo ambulante à Divina Proporção.
> Mesmo no escuro, Langdon percebia o assombro deles.[...]
> (BROWN, 2005, p.94)

Após o comentário do aluno, uma das professoras em formação esclareceu aos alunos afirmando:

> *Podem ficar tranquilos que é isso mesmo, no final da atividade vocês irão descobrir porque aparece o mesmo número.*

Quando a maioria da turma concluiu a atividade, fez-se a conferência no quadro, para que a outra parte da turma que estava com dificuldades também acompanhasse a aula.

No fechamento da questão *1* foi esclarecido o porquê de encontrar-se o mesmo resultado para as razões solicitadas. Para isso falou-se sobre:

- A descoberta do Número de Ouro;
- A vida de Leonardo Da Vinci, suas pesquisas e descobertas;
- A relação do Número de Ouro com o Corpo Humano e sugestão para realização de medições em casa, como indicadas na figura utilizada na questão *1*;
- Aplicações do Número de Ouro.

Notou-se que os alunos ficaram atentos às informações históricas e, surpresos em saber como ocorreram as descobertas acerca do Número de Ouro e como este possui aplicações em diversas áreas do conhecimento. Segundo D'Ambrósio (1997, p.29):

> A história da matemática é um elemento fundamental para se perceber como teorias e práticas matemáticas foram criadas, desenvolvidas e utilizadas num contexto específico de sua época. Essa visão crítica da matemática através de sua história não implica necessariamente o domínio das teorias e práticas que estamos analisando historicamente.

Assim como afirma D’Ambrósio, contar a história das descobertas, das relações e das aplicações do Número de Ouro foi essencial para relacionar os conteúdos com a realidade. Este fato pôde ser observado, apesar dos alunos não dominarem os conteúdos matemáticos que foram trabalhados nesta atividade (como relatado da dificuldade deles de reconhecerem o traço de fração como sendo uma divisão),

Após as informações históricas sobre o Número de Ouro, fez-se a leitura da segunda questão (Quadro 3) e solicitou-se que os alunos resolvessem-na. Todos os alunos conseguiram realizar esta atividade com muita agilidade e aparentando maior motivação. O último item dessa questão causou estranheza devido à diferença do resultado em relação aos resultados anteriores. Explicou-se, então, que o resultado obtido (1,58cm) era um número bem próximo dos resultados anteriores (1,60cm) e que, além de não se tratar de exímios medidores, não dispunha-se de instrumentos de medição precisos.

2. Agora vamos observar: a. O que podemos concluir, observando o resultado das razões encontradas na questão anterior? ____ ____ b. Com o auxílio da figura do corpo humano, determine outros quocientes cujos resultados sejam aproximadamente iguais às razões encontradas anteriormente: ________________________ = _____ = _____ = ... ________________________ = _____ = _____ = ... ________________________ = _____ = _____ = ...

Quadro 3: Questão *2* da atividade Razão Áurea no Corpo Humano

Fonte: AUTORAS

Figura 13: Professoras em formação orientando a Questão *2* da atividade Razão Áurea no Corpo Humano

Logo após o término desta questão os alunos foram liberados para o intervalo. No retorno, foram conduzidos à sala de vídeo, na qual assistiram ao filme: *Donald no país da Matemágica,* disponível no endereço http://youtube.com/watch?v=fUcWN1BJDP8, que além de abordar o conceito estudado de uma forma bem interessante, mostra ainda outros conceitos matemáticos que podem ser, ou que já tenham sido, trabalhados no contexto da Razão Áurea, numa linguagem adequada para o público alvo.

Durante a exibição do filme os alunos estavam atentos. Alguns comentavam, com os colegas, cenas específicas do filme. Considera-se que o modo descontraído e a linguagem informal utilizada pelo filme estimularam os comentários sobre a utilização da Matemática.

Fonte: AUTORAS

Figura 14: Alunos assistindo ao filme *Donald no país da Matemágica*

3.2 Atividade "Sequência de Fibonacci"

Esta atividade foi aplicada em uma turma do 4º ciclo do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública com duração de 1h 40min. Ela foi planejada para ter início às sete horas, contudo iniciou-se com quarenta minutos de atraso devido à ausência do responsável pela sala de informática da escola na qual foi aplicada a atividade.

O *layout* da sala de informática permitiu acomodar apenas 20 dos 26 alunos presentes, embora dispusesse de 14 computadores funcionando, por esse motivo, seis alunos não puderam participar.

Borba e Penteado (2005) falam sobre os contratempos de se utilizar a sala de informática. Segundo estes autores, existem casos em que o acesso à chave desta sala fica quase impossível, porque ela está em poder de um determinado funcionário que nem sempre está presente. Afirma ainda que o espaço físico das salas de informática, que algumas vezes é menor que 6 metros quadrados, impossibilita o seu uso com mais de 10 alunos.

Ao iniciar a aula, as professoras em formação se apresentaram como alunas do Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Fluminense, informando que as atividades que seriam aplicadas eram parte integrante desta monografia. Em seguida foi entregue aos alunos a atividade intitulada, “Sequência de Fibonacci” (Apêndice 2).

Fez-se a leitura sobre sequências numéricas que consta na folha da atividade (Quadro 4), seguida de uma conversa informal sobre o assunto. Neste momento observou-se que a turma, em geral, estava entusiasmada com a possibilidade de acessar a *internet*, e surpreenderam-se ao saber que teriam uma aula de Matemática.

Sequências Numéricas

Vamos pensar nos anos bissextos que virão a partir do ano 2012. Eles formam uma sequência ou sucessão:

2012,2016,2020,2024,...

No exemplo, 2012 é o primeiro termo da sequência, 2016 é o segundo termo, e assim por diante. Há situações em que a sequência é finita enquanto que em outras ela é infinita.

Quadro 4: Sequências Numéricas

Prosseguindo, foi solicitado que os alunos sozinhos resolvessem a questão *1* (Quadro 5). Para a realização das questões que compõem esta atividade, os alunos encontraram a tabela 1 aberta na planilha eletrônica dos computadores. Esta tabela estava apenas com a primeira coluna preenchida (Apêndice 4).

Percebeu-se que muitos apresentaram dificuldades em compreender o que era para ser feito, pois estavam apáticos, olhando para a tela do computador. Considera-se que a indiferença deveu-se a uma “preguiça mental”. A falta de autonomia dos alunos, alimentada por anos de estudos tradicionais, pode explicar esta “preguiça”.

Isto pode ser mudado se começarmos a usar com mais intensidade tarefas de cunho investigativo (PONTE, BROCARDO, OLIVEIRA, 2005), uma vez que, após uma breve explicação do enunciado, eles executaram corretamente o que foi solicitado (Quadro 6). Devido à dificuldade descrita, foi necessário orientar os alunos em todas as questões.

1. Com o auxílio da tabela 1 da planilha eletrônica Excel, forme uma sequência seguindo os itens abaixo:

a. Escolha um número natural qualquer diferente de zero (de preferência um número de valor absoluto baixo), e digite-o na terceira linha da segunda coluna (Célula B3). Este será o primeiro termo de sua sequência;

b. Repita o mesmo número no segundo termo(célula B4);

c. Some o primeiro e o segundo termos para obter o terceiro termo da sua sequência, para isto clique na célula B5 e digite na barra de fórmulas a função **=B4+B3** (pressione *enter* para obter o resultado);

d. Complete a segunda coluna, sabendo que os próximos termos da sequência, são obtidos somando os dois termos anteriores a ele, para tal ação não é necessário efetuar a soma em cada linha da coluna. A planilha Excel nos auxilia nesta operação, basta selecionar a célula B5 que no canto aparecerá um quadrado. Clique nele e arraste até a última linha da coluna;

e. Vamos completar a terceira coluna dessa tabela dividindo os números consecutivos, ou seja, divida cada número da segunda coluna pelo seu antecessor, a partir do segundo termo. Para isto clique na célula C4 e digite na barra de fórmulas a função **=B4/B3** (pressione *enter* para obter o resultado). Para completar a coluna selecione a célula C4 e clique no quadrado que aparecerá no canto da célula e arraste até a última linha da coluna.

Quadro 5: Questão *1* da atividade Sequência de Fibonacci

ATIVIDADE 1		
TERMO	SEQUÊNCIA	DIVISÃO
1º	2	/////////
2º	2	1
3º	4	2
4º	6	1,5
5º	10	1,666666667
6º	16	1,6
7º	26	1,625
8º	42	1,615384615
9º	68	1,619047619
10º	110	1,617647059
11º	178	1,618181818
12º	288	1,617977528
13º	466	1,618055556
14º	754	1,618025751
15º	1220	1,618037135
16º	1974	1,618032787
17º	3194	1,618034448
18º	5168	1,618033813
19º	8362	1,618034056
20º	13530	1,618033963
21º	21892	1,618033999
22º	35422	1,618033985
23º	57314	1,61803399
24º	92736	1,618033988
25º	150050	1,618033989

Quadro 6: Tabela 1 completada

Nas questões *2* (Quadro 7) e *3* (Quadro 9) item f, ao serem solicitados para que descrevessem o que haviam observado, os alunos apresentaram dificuldades em registrar suas ideias, embora compreendessem e relatassem oralmente o que estavam pensando.

2. O que é possível observar com relação aos resultados obtidos na terceira coluna?____

Quadro 7: Questão *2* da atividade Sequência de Fibonacci

Alguns alunos aguardavam o registro do colega ao lado para que pudessem escrever o mesmo. Com o objetivo de estimular a escrita dos alunos, uma das professoras em formação indagou-os durante a questão 2:

> *O que podemos observar que está acontecendo com os números da terceira coluna?*

E alguns alunos responderam:

> *Todos os números têm vírgula.*
>
> *Todos começam com o numeral 1.*

Contudo, nenhum aluno percebeu que na coluna em que efetuaram a divisão, os números estavam em torno de 1,618 (Quadros 8).

2. O que é possível observar com relação aos resultados obtidos na terceira coluna? os numeros estão se aproximando de uma virgula...

2. O que é possível observar com relação aos resultados obtidos na terceira coluna? Eu observei que os numeros não são inteiros

2. O que é possível observar com relação aos resultados obtidos na terceira coluna? Estão se aproximando de um número com virgula

Quadro 8: Respostas dos alunos – Questão *2* da atividade Sequência de Fibonacci

Na socialização das respostas desta questão, enfatizou-se que para qualquer número natural diferente de zero que eles escolhessem, preferencialmente um número de valor absoluto baixo, a terceira coluna da tabela que eles formaram era composta de números próximos a 1,618. Portanto, a sequência numérica formada não era qualquer. Foi afirmado que a turma assistiria a um filme sobre essa sequência.

Fonte: AUTORAS

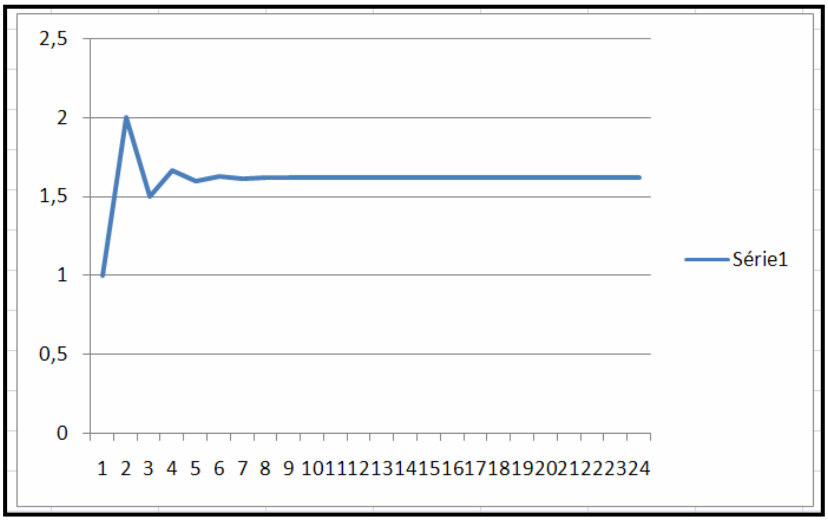
Figura 15: Alunos realizando as questões que compõem a atividade Sequência de Fibonacci

A questão 3 (Quadro 9) solicitava que os alunos construíssem um gráfico (Quadro 10) com os dados da tabela por eles formada, na questão *1*. Para isto, eles deveriam seguir um roteiro dado no enunciado. O objetivo desta tarefa era permitir aos alunos, a observação no gráfico formado que a proximidade dos valores da terceira coluna geraria uma curva que tenderia para uma reta (y = 1,618), pois os valores da divisão entre um número e o seu antecessor na sequência se aproximam cada vez mais de 1,618.

3. Ainda com o auxílio da planilha eletrônica Excel, vamos traçar o gráfico de linhas dessa tabela. Para isso:

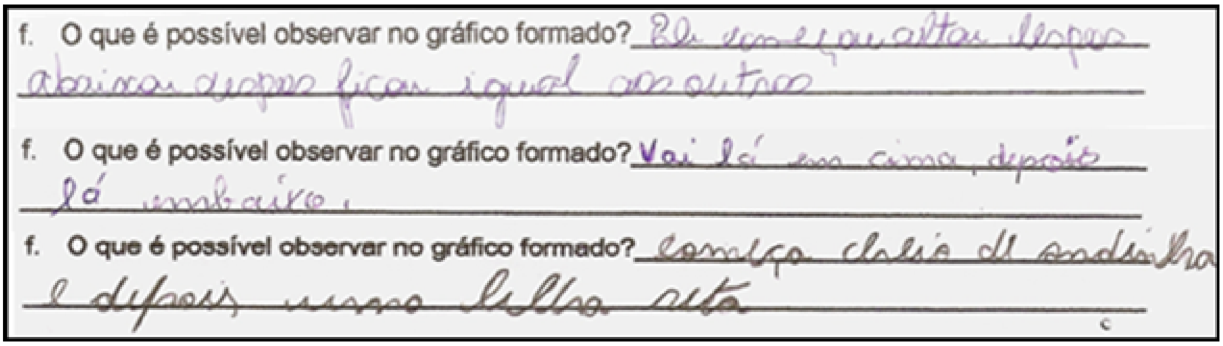
a. Selecione a coluna C da célula C4 à célula C27;
b. Clique em inserir na barra de ferramentas;
c. Clique em gráfico;
d. Selecione em tipo de gráfico a opção linha;
e. Selecione em subtipo de gráfico a opção linha e clique em *Avançar* até concluir;
f. O que é possível observar no gráfico formado?__________________________

Quadro 9: Questão *3* da atividade Sequência de Fibonacci



Quadro 10: Gráfico formado com os itens da questão *3*

O fato dos computadores da sala de informática possuírem sistemas operacionais distintos e, o roteiro ter sido planejado para um deles, gerou um obstáculo na resolução, pois alguns alunos não conseguiram executar um dos itens. Mas isto foi resolvido, tão logo as professoras em formação perceberam o ocorrido.


f. O que é possível observar no gráfico formado? Ele começou alto depois abaixou depois ficou igual aos outros

f. O que é possível observar no gráfico formado? Vai lá em cima, depois lá embaixo.

f. O que é possível observar no gráfico formado? começa cheia de ondinha e depois uma linha alta

Quadro 11: Respostas dos alunos – Letra f da questão 3 da atividade Sequência de Fibonacci

As respostas dos alunos (Quadro 11) mostram uma descrição em linguagem coloquial própria dos mesmos, mas que evidencia uma compreensão adequada do resultado obtido, ainda que os alunos não tenham respondido como esperado.

Alguns fatores prejudicaram o desenvolvimento da aula, tais como a inquietude da turma e o tamanho reduzido da sala de informática que implicaram na proximidade dos alunos, e consequentemente em desatenção à aula.

Ao terminarem a questão *3*, os alunos foram conduzidos à sala de vídeo, na qual assistiram trechos do filme intitulado *Número de Ouro* do DVD escola número 019, que é uma produção da TV ESCOLA, disponível no endereço eletrônico: http://www.dominiopublico.gov.br/download/video/me001034.wmv. A exibição do filme foi planejada para proporcionar aos alunos uma visão contextual do número

Phi, que eles encontraram ao resolver a questão, possibilitando fazer um *link* entre a sequência numérica que eles construíram, a Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro.

Entretanto, durante a exibição do filme, observou-se grande desinteresse por parte dos alunos, em vista disso, interrompeu-se a exibição deste filme, trocando-o pelo filme *Donald no país da Matemágica,* na expectativa de que este produzisse um maior interesse por parte deles.

No entanto notou-se que os alunos continuaram desinteressados, por esse motivo, logo após às cenas deste que mostravam a Razão Áurea especificamente (aproximadamente metade do filme), interrompeu-se novamente a exibição e encerrou-se a aula agradecendo a presença de todos.

Nada se pode afirmar acerca dos alunos desta turma, pois a aplicação desta atividade foi o único contato que se teve com eles. Contudo pode-se pensar que as dificuldades encontradas ocorreram por questões que não se limitam a Matemática. Segundo Markarian (1998), o grave problema do ensino da Matemática não é exclusividade desta disciplina, atualmente admite-se que todo o sistema educacional está em crise. Ele afirma ainda, que na Matemática, o conhecimento inclui a memorização sistemática e classificada de uma quantidade muito grande de dados e quem possui dificuldades para recordar algumas dessas informações elementares, dificilmente poderá acompanhar raciocínios mais complicados ou fazer exercícios que envolvam essas operações.

Além das dificuldades encontradas na questões *1, 2* e *3*, foi notória a falta de interesse deles durante o filme, especificamente, no decorrer das cenas com características interdisciplinares. Por exemplo, as cenas que exibiam a relação existente entre a Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro com uma poesia (*Eneida* de Virgílio) e com obras de arte de diversos autores, por isso, considera-se que estes alunos também não se interessam pelo estudo de Literatura e de Arte.

3.3 Atividade “Segmento Áureo - Polígonos de Ouro - Razão Áurea com enfoque em questões de vestibulares”

A aplicação desta atividade deu-se em forma de minicurso para um grupo de alunos do Ensino Médio da rede pública com duração de 3h 20min. Esta atividade foi aplicada neste formato devido a ser o que melhor se adequou a estrutura curricular da instituição em que a mesma foi aplicada.

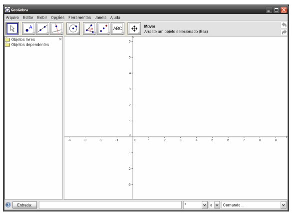
Ao iniciar o minicurso, as professoras em formação se apresentaram como alunas do Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Fluminense, informando que as atividades que seriam aplicadas eram parte integrante desta monografia. Em seguida foi entregue aos alunos a atividade intitulada, "Segmento Áureo - Polígonos de Ouro - Razão Áurea com enfoque em questões de vestibulares" (Apêndice 3).

Dando continuidade, foi apresentada a Razão Áurea de um modo sucinto seguida da definição de Euclides para o Segmento Áureo. Na sequência, realizou-se o reconhecimento do *software* GeoGebra[4] segundo o roteiro disponibilizado na folha da atividade (Quadro 12).

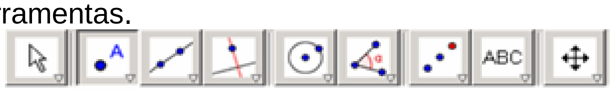
Reconhecimento do *Software* GeoGebra

O *software* GeoGebra é um *software* livre de geometria dinâmica, que pode ser encontrado no endereço eletrônico www.geogebra.at .

No lado direito da tela são feitas as construções geométricas e do lado esquerdo, a parte algébrica.



Cada ícone tem uma pequena seta no canto, ao clicar nessa seta aparecerão outras opções de ferramentas.



➢ Faremos algumas construções:

- Construir um segmento de reta ($\overline{AB}$).
- Marcar o ponto médio deste segmento.
- Mover o segmento construído e observar a janela algébrica.
- Construir uma circunferência com centro no ponto médio e raio do ponto médio ao extremo do segmento.
- Marcar um ponto D na circunferência (com D ≠ de A e B).
- Traçar o segmento $\overline{DB}$.

➢ Operações

Podemos também fazer adições, subtrações, multiplicações e divisões com as medidas dos segmentos utilizando a caixa de entrada do *software*.

- Divida a medida do segmento $\overline{AB}$ pela medida do segmento $\overline{DB}$.

Quadro 12: Reconhecimento do *software* GeoGebra

[4] O software GeoGebra é um software livre de Geometria Dinâmica disponível em www.geogebra.at

Logo após leu-se o enunciado do item I.I (Quadro 13). Foi dado então o tempo necessário para que os alunos realizassem individualmente a construção do Segmento Áureo seguindo o roteiro fornecido neste item (Figura 16). Ao longo desta atividade, notou-se que as dificuldades encontradas por eles consistiam em localizar os ícones solicitados e em identificar os entes geométricos requeridos, por exemplo, alguns alunos construíram reta e semirreta no lugar de segmento de reta. Não foi investigado o motivo desta dificuldade, contudo pode-se inferir que a mesma deve-se a distração deles.

I. Construção do Segmento Áureo

I.I. Utilizando o *software* GeoGebra, construa o segmento áureo, seguindo os passos abaixo:

a. Construa um segmento $\overline{AB}$ qualquer;

b. Marque o ponto médio de $\overline{AB}$ e nomeie-o de M;

c. Trace uma perpendicular a $\overline{AB}$ passando pelo ponto B;

d. Trace uma circunferência com raio $\overline{BA}$ e centro em B;

e. Marque o ponto de interseção superior da circunferência com a perpendicular e nomeie-o de O;

f. Trace uma circunferência com centro em M e raio $\overline{MO}$;

g. Construa a semi-reta $\overrightarrow{AB}$;

h. Marque e nomeie o ponto de interseção de $\overrightarrow{AB}$ com a circunferência de centro em M de C;

i. Marque o segmento $\overline{AC}$;

j. Marque o segmento $\overline{BC}$;

k. Marque o segmento $\overline{MO}$;

l. Efetue a divisão da medida do segmento $\overline{AC}$ pela medida do segmento $\overline{AB}$;

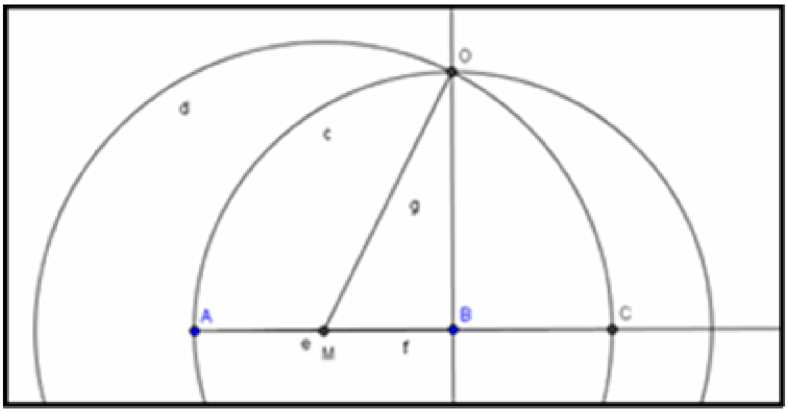
m. Efetue a divisão da medida do segmento $\overline{AB}$ pela medida do segmento $\overline{BC}$;

n. Observe os resultados obtidos nos itens l. e m. na janela algébrica;

o. Mova um dos vértices dos extremos do segmento $\overline{AB}$ e observe novamente os resultados obtidos nos itens l. e m. na janela algébrica;

p. Porque o resultado é sempre este? Existe alguma forma de provar isto?

Quadro 13: Item I.I da atividade Segmento Áureo - Polígonos de Ouro - Razão Áurea com enfoque em questões de vestibulares



Fonte: AUTORAS

Figura 16: Segmento Áureo construído a partir do roteiro fornecido no item I.I

Quando todos os alunos terminaram a construção, eles foram direcionados a provarem o que analisaram. Oralmente, eles afirmaram que AC/AB=1,6 e AB/BC=1,6, ou números próximos a este. Nesse momento alguns alunos ficaram inquietos por entenderem que sua construção estava errada, ao ver que o colega tinha obtido resultado “diferente” do seu.

Percebeu-se então, que as professoras em formação esqueceram de ativar cinco casas decimais para facilitar a identificação da Razão Áurea. Detectado o problema, configurou-se o *software* para que apresentasse o quociente com cinco casas decimais.

Os alunos constataram que ao movimentar a figura construída, os comprimentos dos segmentos eram alterados, mas as razões calculadas continuavam as mesmas. Daí foram indagados:

Porque o resultado é sempre este?

Existe alguma forma de provar isto?

Ao iniciar a demonstração, os alunos fizeram os seguintes comentários:

Isso é muito difícil;

Não tenho a menor ideia do que tenho que fazer.

Tendo em vista esta reação, fez-se necessário uma conversa buscando analisar a figura construída, lembrando que o triângulo MOB era retângulo (Figura 16), no qual dois lados eram conhecidos.

Deste ponto em diante, alguns alunos conseguiram caminhar sozinhos, percebendo que MO=MC e que por meio do Teorema de Pitágoras poderiam encontrar a medida do terceiro lado MC. Entretanto, poucos conseguiram concluir a demonstração, sendo necessária a realização da mesma pelas professoras em formação no quadro.

Entende-se que as afirmações feitas pelos alunos, manifestando suas dificuldades em iniciar a demonstração, não surgiram por se tratar de uma questão difícil. Segundo Borba (2005), investigar não representa obrigatoriamente trabalhar em problemas muito difíceis, pelo contrário, trabalhar com questões que interpelam e que se apresentam no início de modo confuso, mas que se procura clarificar e estudar de modo organizado.

A partir da reação dos alunos, supõe-se que as dificuldades que eles tiveram, surgiram por não ser comum para eles a prática de demonstração. Garbi (2009) diz que atualmente tem-se fingido não saber que adolescentes estão sendo levados a decorar, sem entender alguns fatos da matemática e defende a necessidade de uma demonstração, ou de uma simples justificativa. Concorda-se com o autor, que é importante incentivar os alunos a justificar as suas ações nas atividades matemáticas.

Dando continuidade ao minicurso, foi realizado o item II.I (Quadro 14). Inicialmente foi solicitado aos alunos que construíssem um pentágono regular, traçassem uma de suas diagonais e efetuassem a divisão desta diagonal pela medida do lado do pentágono e em seguida movimentassem a figura construída (Figura 17). Nesta parte, facilmente os alunos concluíram que ao movimentar o pentágono as medidas da diagonal e do lado do pentágono se alteravam, contudo a razão entre elas continuava a mesma. Afirmou-se que devido a este fato o pentágono é um Polígono de Ouro.

II.I. Utilizando o *software* GeoGebra, vamos construir alguns Polígonos de Ouro, seguindo o roteiro abaixo:

a. Construa um pentágono regular;

b. Trace a diagonal $\overline{AD}$;

c. Efetue a divisão da medida da diagonal $\overline{AD}$ pela medida do segmento $\overline{AB}$;

d. Mova o pentágono construído (no ponto A ou no ponto B) e observe o resultado obtido no item c. na janela algébrica.

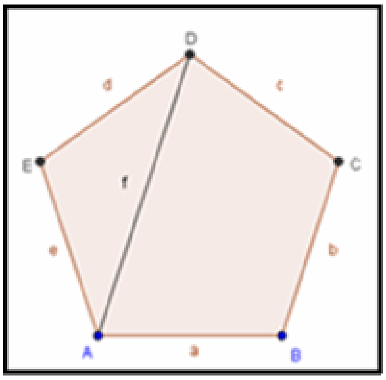
Comentário 1: ____

____

____

Quadro 14: Item II.I (letras a à d) da atividade Segmento Áureo - Polígonos de Ouro - Razão Áurea com enfoque em questões de vestibulares

Desde o início deste item (II.I, letras a à d) ficaram claras as recomendações de PERRENOUD (2000), citadas no capítulo 2 desta monografia, sobre deixar aos *softwares* as tarefas repetitivas, permitindo que os alunos se dediquem às mais qualificadas. Não eram, por exemplo, objetivos desta atividade ensinar os alunos a construir polígonos, por este motivo não foi utilizado as mídias lápis, papel e instrumentos de desenho, nem tampouco construir polígonos no *software* utilizando os métodos de construções geométricas. Encarregou-se ao *software* a tarefa de construir os polígonos pentágono e quadrado, através do ícone polígono regular, pois o objetivo da atividade era que os alunos percebessem a regularidade dos resultados.



Fonte: AUTORAS

Figura 17: Pentágono Regular construído a partir do roteiro fornecido no item II.I (letras a à d)

Em seguida, os alunos traçaram mais uma diagonal do pentágono (Quadro 15) de modo que um dos extremos coincidisse com a extremidade da diagonal traçada anteriormente (Figura 18). A reunião dessas duas diagonais com um dos lados do pentágono formava um triângulo isósceles, no qual a razão entre um dos lados congruentes e a base era igual a 1,618. Os alunos observaram que ao movimentar o triângulo a razão continuava a mesma. Foi dito então que, por isso, esse triângulo é um Polígono de Ouro.

e. Nessa mesma figura marque a diagonal $\overline{BD}$;

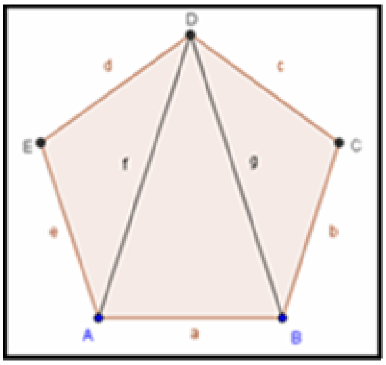
f. Efetue a divisão da medida da diagonal $\overline{BD}$ pela medida do segmento $\overline{AB}$;

g. Mova o triângulo construído (no ponto A ou no ponto B) e observe o resultado obtido no item f. na janela algébrica.

Comentário 2: ____

____

Quadro 15: Item II.I (letras e à g) da atividade Segmento Áureo - Polígonos de Ouro - Razão Áurea com enfoque em questões de vestibulares



Fonte: AUTORAS

Figura 18: Triângulo Áureo construído a partir do roteiro fornecido no item II.I (letras e à g)

Logo após, os alunos construíram as demais diagonais do pentágono (Quadro 16). Foi esclarecido que a figura obtida (Figura 19) pela reunião das diagonais é um pentagrama ou pentágono regular estrelado, uma figura geométrica que foi usada como distintivo pelos pitagóricos.

h. Nessa mesma figura, construa as demais diagonais do pentágono regular.

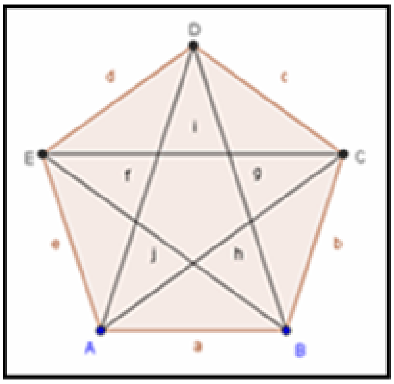
Comentário 3: ____

____

____

____

Quadro 16: Item II.I (letra h) da atividade Segmento Áureo - Polígonos de Ouro - Razão Áurea com enfoque em questões de vestibulares



Fonte: AUTORAS

Figura 19: Pentagrama construído a partir do roteiro fornecido no item II.I (letra h)

Em seguida, foi solicitado que marcassem todos os pontos de interseção das diagonais (Quadro 17) e, as professoras em formação afirmaram que cada um desses pontos divide cada diagonal em dois segmentos, sendo solicitado que efetuassem a divisão da medida do maior segmento determinado na diagonal BD pela medida do menor segmento determinado nesta mesma diagonal. Os alunos observaram que ao mover o pentagrama as medidas se alteravam, mas a razão continuava a mesma. Afirmou-se então que por isso o pentagrama também é um Polígono de Ouro (Figura 20).

i. Marque todos os pontos de intersecção das diagonais;

j. Cada um dos pontos de intersecção divide cada diagonal em dois segmentos. Efetue a divisão da medida do maior segmento determinado na diagonal $\overline{BD}$ pela medida do menor segmento determinado nesta mesma diagonal.

k. Mova o pentagrama (no ponto A ou no ponto B) e observe o resultado obtido no item j. na janela algébrica.

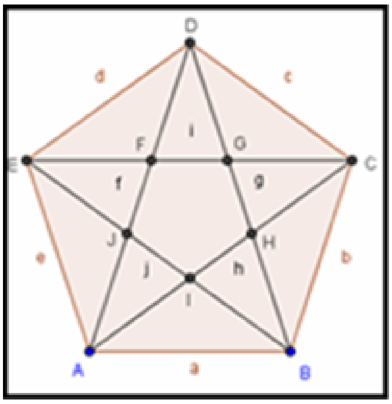
Comentário 4: ____

____

____

____

Quadro 17: Item II.I. (letras i à k) da atividade Segmento Áureo - Polígonos de Ouro - Razão Áurea com enfoque em questões de vestibulares



Fonte: AUTORAS

Figura 20: Pentagrama com intercessão das diagonais traçadas construído a partir do roteiro fornecido no item II.I (letras i à k)

Finalizando o item II.I os alunos foram indagados sobre o que aconteceria se o processo de construção anterior fosse repetido no interior do pentágono menor (Quadro 18).

I. E se repetíssemos esta construção no interior do pentágono menor? O que aconteceria?

___

___

___

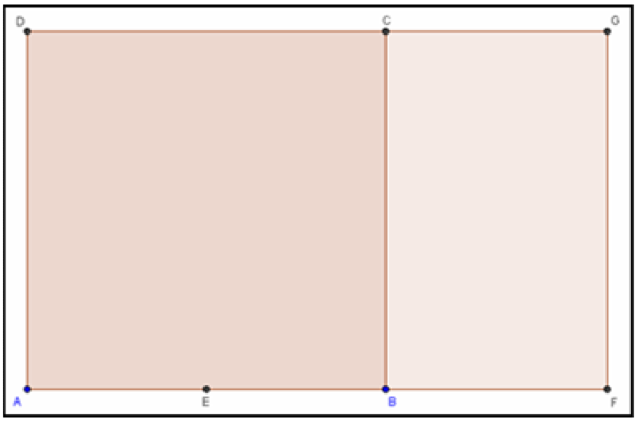
Quadro 18: Item II.I (letra l) da atividade Segmento Áureo - Polígonos de Ouro - Razão Áurea com enfoque em questões de vestibulares

Após este questionamento, alguns alunos realizaram a construção a fim de observar com maior precisão. E responderam:

> *Dentro de um pentágono dá pra colocar outro pentagrama sempre e dentro do pentagrama dá pra colocar um pentágono. É só dar zoom na figura que cabe outro dentro.*

Os alunos concluíram que o processo de construção no interior de pentágonos/pentagramas é infinito, pois sempre no interior de um pentagrama é possível construir um pentágono e vice e versa. Com essa construção foi possível, nitidamente observar que, como afirma Borba (2005), a imagem que o computador fornece tem um poder muito grande de convencimento.

Logo após, os alunos iniciaram o item II.II (Quadro 19). Primeiramente foi solicitada a construção de um retângulo com algumas condições (Figura 22). Ao concluir a construção deste retângulo, os alunos puderam observar que o retângulo construído era Áureo (Figura 21), pois ao dividir a medida do maior lado do retângulo pela medida de seu menor lado, obtêm-se o Número de Ouro e que movimentando o Retângulo Áureo, as medidas dos seus lados se alteravam, contudo a razão entre elas não se alterava.



Fonte: AUTORAS

Figura 21: Retângulo Áureo construído a partir do roteiro fornecido no item II.II (letras a à k)

II.II. Utilizando o *software* GeoGebra, vamos construir o Retângulo de Ouro e a Espiral Logarítmica, seguindo os passos abaixo:

a. Construa um quadrado;

b. Marque o ponto médio do segmento $\overline{AB}$;

c. Construa uma circunferência com centro no ponto médio E e raio $\overline{EC}$.

d. Marque a semi-reta $\overline{AB}$;

e. Marque o ponto de intercessão da circunferência com a semi-reta;

f. Construa uma paralela ao segmento $\overline{BC}$ passando por essa intercessão;

g. Construa uma paralela ao segmento $\overline{AB}$ passando por C;

h. Marque a intercessão das duas paralelas construídas;

i. Observe que foi construído o retângulo AFGD. Para melhor visualização una seus vértices através da ferramenta polígono .

j. Efetue a divisão da medida do maior lado do retângulo pela medida de seu menor lado (se o nome do segmento for $\mathbf{a_1}$ por exemplo, digite no campo de entrada **a_1**);

k. Mova o retângulo construído (no ponto A ou no ponto B) e observe a janela algébrica.

Comentário 1: ____

____

____

____

Quadro 19: Item II.II (letras a à k) da atividade Segmento Áureo - Polígonos de Ouro - Razão Áurea com enfoque em questões de vestibulares

Fonte: AUTORAS

Figura 22: Alunos efetuando as construções solicitadas e professora em formação fazendo o comentário sobre o Retângulo Áureo

Na sequência foram construídos Retângulos Áureos sucessivos. A letra o do item II.II continha uma falha (Quadro 20). Nesta letra era solicitado a construção de um quadrado de lado ML, nessa ordem, enquanto, na verdade era o quadrado de lado LI, tão logo percebido, o erro foi corrigido oralmente e os alunos puderam realizar a questão.

l. Nessa mesma figura construa um quadrado de lado DG nessa ordem (isso quer dizer que você deve clicar primeiro em D depois em G, caso contrário o quadrado não ficará na posição adequada).

m. Repita o processo do item anterior, mas agora construindo o quadrado de lado HF, nessa ordem.

n. Mais uma vez repita o processo do item l. construindo o quadrado de lado JA, nessa ordem.

o. Construa um último quadrado de lado ML, nessa ordem, repetindo o processo do item l.

p. Finalizando trace os seguintes arcos circulares dados o centro e dois pontos:

p_1 : Centro: C; pontos: D e B nessa ordem;

p_2 : Centro: G; pontos: H e D nessa ordem;

p_3 : Centro: F; pontos: J e H nessa ordem;

p_4 : Centro: A; pontos: M e J nessa ordem;

p_5 : Centro: L; pontos: Q e M nessa ordem.

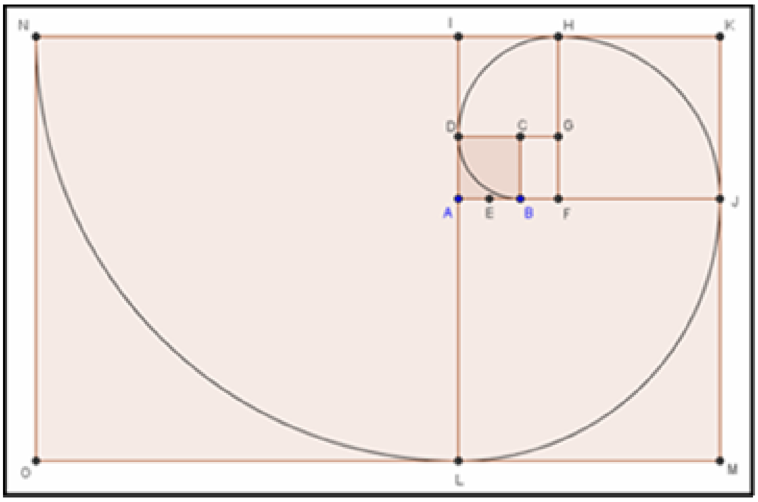
Comentário 2: ____

____

____

____

Quadro 20: Item II.II (letras l à p) da atividade Segmento Áureo - Polígonos de Ouro - Razão Áurea com enfoque em questões de vestibulares



Fonte: AUTORAS

Figura 23: Espiral Logarítmica no Retângulo Áureo construído a partir do roteiro fornecido no item II.II (letras l à p)

Decorrentes da falha citada, a letra p também continha falhas em p_4 e p_5 (Quadro 20), pois onde era solicitado que marcassem centro A e pontos M e J, nessa ordem; era para ser solicitado para marcar o centro A e pontos L e J, nessa ordem; e onde era solicitado que marcassem centro L e pontos Q e M, nessa ordem; era para ser solicitado para marcar centro I e pontos N e L, nessa ordem. Estas falhas também foram corrigidas oralmente e os alunos realizaram sem dificuldades o que foi solicitado.

Finalizando, foi comentado que a espiral formada (Figura 23) é a Espiral Logarítmica e que o nome Espiral Logarítmica foi criado pelo matemático francês Pierre de Varignon em decorrência da proporcionalidade existente entre ângulos formados por elementos dessa Espiral e seus logaritmos (BIANCHINI, PACCOLA, 2004).

Após um intervalo de vinte minutos foi exibido o capítulo intitulado *Número de Ouro* do DVD escola número 019[5] e as cenas compreendidas entre 5min 25s e 11min do capítulo intitulado *A Espiral e as Proporções Áureas* do DVD escola número 021[6], ambas produções da TV ESCOLA que mostram a relação que está sendo estudada, de maneira impressionante e dinâmica.

O interesse dos alunos pelos filmes exibidos (Figura 24) pôde ser observado. Eles estavam em silêncio, olhando fixamente para a tela. Notou-se que ao ser

[5] disponível no endereço eletrônico: http://www.dominiopublico.gov.br/download/video/me001034.wmv
[6] disponível no endereço eletrônico: http://www.dominiopublico.gov.br/download/video/me001051.wmv

exibido no filme o processo infinito de construção de pentágonos/pentagramas, os alunos demonstraram interesse especial comentando:

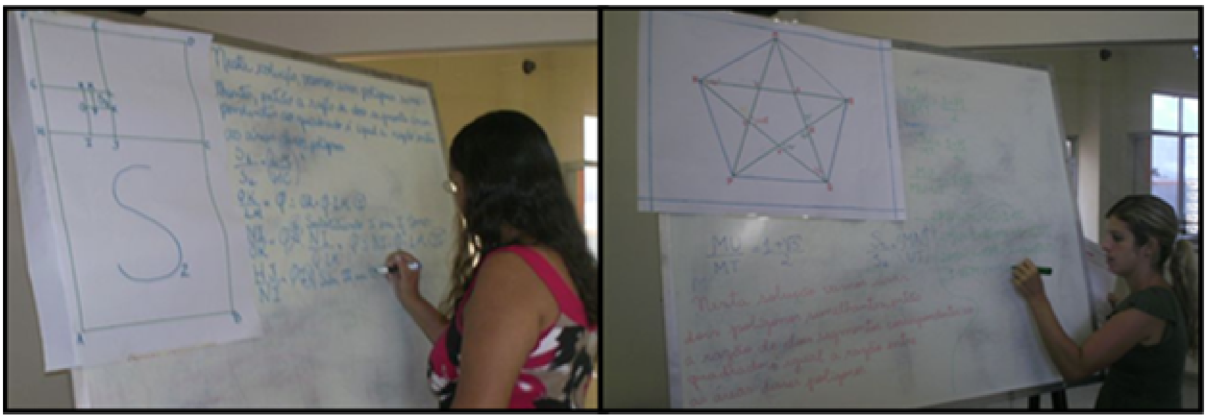
> *Olha o que fizemos no computador.*
>
> *É muito legal isso de sair um pentágono de dentro de um pentagrama.*

Fonte: AUTORAS

Figura 24: Alunos assistindo à exibição dos filmes

Ao final do filme não foi aberto espaço para discussão devido ao tempo escasso, contudo, diante dos comentários feitos durante a exibição destes, entendeu-se que nesta atividade os alunos conseguiram conectar o que haviam construído no *software*, com a Razão Áurea e suas aplicações.

Após a exibição dos filmes, foram solucionadas as questões de vestibulares que envolviam a Razão Áurea. A primeira (Quadro 21) e a segunda questão (Quadro 22) foram solucionadas conforme o padrão de respostas dos procedimentos pedagógicos (Apêndice 7).

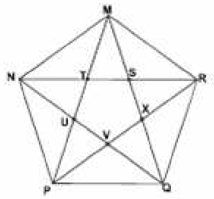


Fonte: AUTORAS

Figura 25: Professoras em formação solucionando as questões de vestibulares

III.I. (UFF - 2006)

A escola Pitagórica desenvolvia estudos em Matemática, Filosofia e Astronomia. O símbolo dessa Escola era a estrela de cinco pontas, que pode ser construída ligando-se os vértices de um pentágono regular, conforme a figura.



Sejam S_1 e S_2 as áreas dos pentágonos regulares MNPQR e STUVX, respectivamente. Sabendo que $\frac{MU}{MT} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, assinale a opção que contém a razão $\frac{S_1}{S_2}$.

a. $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\right)^2$ b. $\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4}$ c. $\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{\sqrt{5}-1}$ d. $\frac{(1-\sqrt{5})^2}{1+\sqrt{5}}$ e. $\frac{(1+\sqrt{5})^4}{4}$

Quadro 21: Item III.I da atividade Segmento Áureo - Polígonos de Ouro - Razão Áurea com enfoque em questões de vestibulares

III.II. (UFF – 2007)

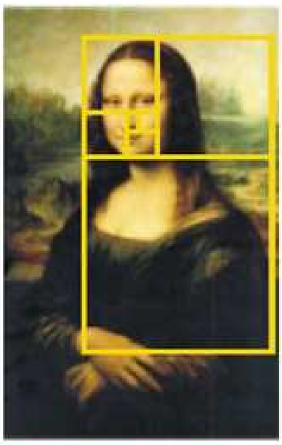


Fig. 1: Mona Lisa e proporcões áureas

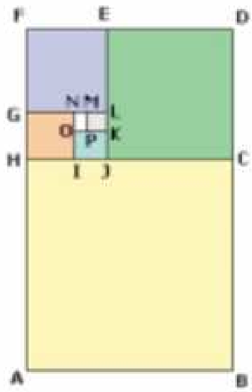


Fig. 2: Retângulos áureos

A "Divina Proporção" também conhecida como proporção áurea foi usada por Leonardo da Vinci para pintar a Mona Lisa, uma de suas mais notáveis obras. Em vários pontos do quadro aparece o retângulo áureo, como ilustrado na figura 1.

Na fig. 2 os quadriláteros ABDF, CDFH, EFHJ, GHJL, IJLN e KLNO são retângulos áureos semelhantes e os quadriláteros ABCH, CDEJ, EFGL, GHIN, IJKO e KLMP são quadrados.

Sabendo-se que a razão entre o maior lado do retângulo áureo é igual ao número de ouro φ, pode-se afirmar que a razão entre a área do quadrado KLMP e a área do quadrado ABCH é igual a:

a. $\frac{1}{\varphi^6}$ b. $\frac{1}{\varphi^{10}}$ c. $\frac{1}{\varphi^8}$ d. $\frac{1}{\varphi^5}$ e. $\frac{1}{\varphi^{12}}$

Quadro 22: Item III.II da atividade Segmento Áureo - Polígonos de Ouro - Razão Áurea com enfoque em questões de vestibulares

Na segunda questão, uma falha foi encontrada, onde lê-se: "*Sabendo-se que a razão entre o maior lado do retângulo áureo é igual ao número de ouro φ*" deveria estar "Sabendo-se que a razão entre o maior e o menor lado do retângulo áureo é igual ao número de ouro φ". Tal falha foi corrigida oralmente, e a questão pode ser realizada.

A última questão (Quadro 23) foi rapidamente realizada, pois seu objetivo consistia em perceber que, embora sua solução fosse por meio de uma simples resolução de equação do segundo grau, o número Phi seria representado apenas pela solução positiva, dado que Phi é a razão entre as medidas do maior e do menor lado de um Retângulo Áureo.

III.III. (UERJ/UENF – 2005(adaptada)) O retângulo de ouro é utilizado em Arquitetura desde a Grécia Antiga.

A razão entre as medidas do maior e do menor lado desse retângulo é o número de ouro, representado por φ.

- Sabendo que φ é uma das raízes da equação $x^2 = x + 1$, calcule o valor de φ.

Quadro 23: Item III.III da atividade Segmento Áureo - Polígonos de Ouro - Razão Áurea com enfoque em questões de vestibulares

Durante o minicurso, os alunos foram indagados se já haviam estudado ou conheciam a Razão Áurea. Eles afirmaram, oralmente, que nunca haviam estudado esta razão e, com exceção de um aluno, todos a desconheciam. Os alunos afirmaram ainda que não sabiam que a Razão Áurea era conteúdo de vestibulares.

Foi comentado que as três questões de vestibulares encontradas, que envolvem a Razão Áurea, são possíveis de serem resolvidas por pessoas que desconhecem esta razão, mas que dominam relação entre lados de polígonos semelhantes e suas áreas (nas questões *1* e *2*), equações do segundo grau (questão *3*). Contudo, quando alguém conhece a Razão Áurea, a solução pode ser feita com mais facilidade.

De modo geral, a turma tinha um mesmo ritmo, embora contivesse alunos provenientes dos diferentes anos do Ensino Médio. No decorrer do minicurso, todos estavam atentos, realizaram as construções solicitadas, acompanharam atentamente a exibição dos filmes e mostraram-se interessados na resolução das questões de vestibulares.

4 PROCEDIMENTOS PEDAGÓGICOS

Será descrito neste capítulo o processo de elaboração dos procedimentos pedagógicos e a análise realizada pelos professores aos mesmos. Tal descrição será feita entremeada com o devido respaldo teórico.

4.1 A proposta geradora

Inicialmente planejou-se registrar como seria realizada cada atividade, objetivando nortear as professoras em formação, autoras desta monografia, durante a aplicação das atividades em sala de aula. Sentiu-se esta necessidade devido à produção de três atividades distintas destinadas a públicos alvos diferentes. Elaborou-se, então, um roteiro de cada aula registrando os métodos a serem utilizados na aplicação das atividades, bem como a previsão de intervenções e rotina de ações. Neste roteiro registraram-se os *sites* em que estão disponíveis os filmes a serem exibidos e o *software* a ser utilizado.

Para melhor utilização destes roteiros registrou-se o público alvo, as horas aulas previstas para aplicação e os conteúdos matemáticos que cada atividade abordaria. Como para cada atividade seriam necessários recursos diferentes, fez-se necessário a descrição dos mesmos.

Buscando delinear o que se pretendia com as atividades, foram descritas as habilidades e competências a serem alcançadas por meio da aplicação dessas. Após finalizar a elaboração das atividades, criou-se um padrão de respostas para as questões visando descrever de forma minuciosa a resposta que considera-se ser a mais adequada, e a esperada dos alunos. Tais padrões foram criados para avaliar as atividades do ponto de vista pedagógico, e também fornecer dados para a análise.

4.2 O amadurecimento da proposta

Ao desenvolver um conteúdo em sala de aula, o professor realiza a sua transposição didática[7], que está envolvida pela epistemologia do professor, ou seja, pela compreensão matemática e histórica que o professor tem do conteúdo, da sua

[7] Transposição didática são as transformações adaptativas por que passa um objeto de saber para se tornar um objeto de ensino (PAIS, 2002).

importância no currículo, da sua concepção de aprendizagem, determinam o tipo de abordagem que ele utilizará para apresentar um determinado tema para os alunos (PAIS, 2002).

Monteiro (2001) chama esta abordagem particular de cada professor de conhecimento pedagógico dos conteúdos. Afirma, ainda, que este é um conhecimento do tema a ser ensinado, que diz respeito aos saberes necessários para ensinar tal conteúdo, incluindo os modos de representação das ideias, analogias, ilustrações, exemplos, explicações e demonstrações, ou seja, as formas de apresentação de um conteúdo visando torná-lo compreensível para os outros.

As opções metodológicas do professor influenciam a aprendizagem do conteúdo pelos alunos. Tendo em vista esta hipótese, considera-se que apenas uma proposta de atividades, sem esclarecimentos do que se pretendia alcançar pedagogicamente por meio desta, bem como a sua condução, poderia suscitar muitas abordagens distintas, e consequentemente, aprendizagens diferentes daquela prevista pelos autores da proposta.

Por isso, decidiu-se disponibilizar a reunião dos itens (Conteúdo matemático, Público alvo, Recursos, Aulas previstas, Competência, Habilidades, Roteiro da Aula e Padrão de Respostas, descritos em 4.1 ao qual intitulou-se Procedimentos Pedagógicos. Tais Procedimentos almejam orientar o professor que queira aplicar as atividades desta monografia, de modo a desenvolver as habilidades planejadas.

4.3 Avaliação dos Procedimentos Pedagógicos pelos Professores

Para avaliar os Procedimentos Pedagógicos, enviou-se uma carta (Apêndice 8) a treze professores da Educação Básica, solicitando a gentileza de avaliarem as atividades e seus respectivos Procedimentos Pedagógicos, visando verificar (avaliar) se tais procedimentos cumprem a sua função de orientar o professor na aplicação da atividade de modo a desenvolver as habilidades planejadas.

O critério de escolha da amostra que compôs o grupo de professores foi lecionar em instituições públicas no segundo segmento do Ensino Fundamental, no Ensino Médio e/ou na Licenciatura em Matemática.

A fim de nortear estas avaliações, sugeriu-se considerar os seguintes aspectos:

- Pertinência dos conteúdos relacionados às atividades;
- Viabilidade dos recursos descritos nos Procedimentos Pedagógicos;

- Coerência das atividades para o desenvolvimento das competências e das habilidades propostas;
- Clareza e Objetividade dos roteiros das aulas descritos nos Procedimentos Pedagógicos;
- Completude e exatidão do padrão de respostas das atividades.

Dentre os treze professores que receberam a carta enviada, nove responderam. Analisando a avaliação feita por esses professores, constatou-se que nenhum deles seguiu os aspectos, tais quais foram sugeridos. Devido a este fato, resolveu-se considerar todas as observações feitas e registrá-las sem seguir a ordem destes aspectos. É importante registrar que, embora não tivessem sido solicitados, os professores também avaliaram as atividades.

4.3.1 Avaliação da atividade “Razão Áurea no Corpo Humano”

Nesta atividade, foi sugerido por dois professores que os segmentos e as linhas pontilhadas traçadas na figura estivessem mais nítidos, para uma melhor identificação das referidas partes do corpo.

Como relatado no capítulo 3, esta atividade foi realizada em dupla devido à falta de calculadoras necessárias. Mesmo sem saber deste fato, um professor afirmou que é previsível, nas escolas públicas, a indisponibilidade de todo o alunado possuir calculadora, sugerindo que esta atividade fosse realizada em grupos.

4.3.2 Avaliação da atividade “Sequência de Fibonacci”

Com respeito a esta atividade foi sugerido por dois professores que no padrão de respostas descritos nos Procedimentos Pedagógicos, especificamente no gráfico da questão *3*, fosse orientado aos professores que dissessem que a reta é horizontal, aproveitando para relembrar os conceitos de horizontal e vertical, mesmo não sendo o conteúdo em pauta.

Um professor sentiu falta de um exemplo desta atividade no padrão de respostas, tendo em vista que cada aluno pode utilizar um número diferente para formação da sequência. Outro professor recomendou digitar a função na própria célula da tabela construída na planilha eletrônica, ao invés de digitar na barra de fórmulas.

No roteiro desta atividade foi previsto proceder da seguinte forma: entregar a atividade, em seguida dar um tempo para os alunos tentarem resolver individualmente e após fazer-se uma discussão dos resultados obtidos. Contudo, ela só pode ser realizada diante da explicação pelas professoras em formação, autoras desta monografia, como relatado no capítulo anterior. Assim como ocorrido, na avaliação desta atividade, três professores afirmaram que esta deve ser orientada pelo professor, registrando que alguns alunos têm dificuldades com informática em geral.

Ainda em relação a esta atividade, uma falha foi encontrada por um professor no Padrão de Respostas na atividade “Sequência de Fibonacci”. Onde encontrava-se a resposta apropriada para a questão *3* letra f, estava indicado como letra g sem dizer a qual questão esta letra pertencia.

Especificamente sobre as duas atividades destinadas aos ciclos finais do Ensino Fundamental, os professores que as analisaram afirmaram que são viáveis para aplicação, que apresentam os conteúdos matemáticos de forma objetiva e coerente, que os conteúdos matemáticos estão bem relacionados com as atividades propostas, e que estas atividades estão muito bem elaboradas nos focos competências, habilidades, roteiro e tempo previsto. Afirmaram ainda que estas são dinâmicas, aprazíveis e diferenciadas do tradicional livro didático, mas que são um desafio, e que por isso, talvez docentes hesitem em realizá-las. Um professor afirmou que elas também são viáveis para aplicação no Ensino Médio.

4.3.3 Avaliação da atividade “Segmento Áureo - Polígonos de Ouro - Razão Áurea com enfoque em questões de vestibulares”

Com relação a esta atividade, três professores, que nunca haviam utilizado o *software* GeoGebra, relataram terem tido muitas dificuldades para realizar a operação solicitada no reconhecimento deste *software*. Eles afirmaram que as informações fornecidas não eram suficientes para que um professor, que não conhece o *software,* realizasse as operações. Sugeriram então, que esta parte fosse melhor explicada.

Foi encontrada, por três professores que a analisaram, uma falha nesta atividade. Eles perceberam que a palavra intercessão estava sendo usada equivocadamente. A palavra que exprime o sentido almejado é interseção.

Sobre esta atividade, um professor afirmou que sentiu falta de atividades com lápis e papel, contudo, Considera-se que o computador, especificamente para esta atividade, é a mídia de melhor eficácia para atingir-se os objetivos e habilidades previstas nos Procedimentos Pedagógicos. Se esta atividade fosse realizada com lápis e papel, provavelmente levaria um tempo muito superior às 3h20min para ser realizada, o que poderia ser fator de desmotivação e desinteresse na turma.

Dois professores afirmaram que, nesta atividade foram muito enfatizadas as questões de vestibulares, contudo, não relataram o porquê desta opinião.

Um professor afirmou que o conteúdo matemático *relação de lados e áreas de polígonos* não foi alcançado, que os alunos não têm prerrequisitos para responder: *por que o resultado é sempre este? Existe alguma forma de provar isso?* Este professor sugeriu recomendar nos procedimentos a discussão e socialização dos resultados além de indagar se os comentários não seriam definições e considerar que as atividades não possibilitam o desenvolvimento de todas as competências listadas, mas sim de todas as habilidades.

Acerca da indicação do tempo necessário para realizar a atividade, um professor afirmou que, atualmente tem se usado o tempo de duração de uma atividade em hora e não em horas/aula, afirmando que os documentos oficiais vêm rompendo com esse rótulo.

Alguns professores afirmaram que deveria ser mais enfatizado as aplicações da Razão Áurea, contudo, durante a elaboração de todas as atividades, optou-se por deixar que os filmes utilizados realizassem esta função.

Acerca dos Procedimentos Pedagógicos, foi dito que eles cumprem a função de orientar o professor na aplicação da atividade de modo a desenvolver as habilidades planejadas.

Sobre as atividades, foi dito que são viáveis para aplicação e apresentam os conteúdos matemáticos de forma objetiva e coerente, e que esses conteúdos estão bem relacionados com as atividades propostas. Foi dito ainda que tais atividades são de muita importância para o estudo do tema.

4.3.4 Avaliação de aspectos gerais

Englobando as atividades “Sequência de Fibonacci” e “Segmento Áureo - Polígonos de Ouro - Razão Áurea com enfoque em questões de vestibulares”, foi afirmado por dois professores que alguns alunos não sabem nada de computação. Outro professor afirmou que os recursos utilizados podem não estar disponíveis numa escola pública e que tais recursos ainda não estão ao alcance de todos os alunos em suas casas, onde eles acabam estudando e fazendo exercícios de fixação.

De forma geral, foi afirmado pelos professores que o tema é interessante, contudo pouco utilizado e até mesmo desconhecido, e que assim sendo, é relevante e importante a sua utilização.

Sobre o roteiro foi afirmado que está claro e objetivo. O padrão de respostas das atividades foi considerado completo e exato.

Esperava-se, com a avaliação dos Procedimentos Pedagógicos, sugestões, críticas e modificações, mas o que ocorreu superou as expectativas. Com as avaliações realizadas pelos professores, pôde-se aprimorar o trabalho desenvolvido nesta monografia, não somente nos Procedimentos Pedagógicos, mas também nas três atividades elaboradas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse último capítulo, descrevem-se as considerações finais da pesquisa realizada a partir de uma análise dos objetivos desta monografia. Relatam-se a relevância da História da Matemática, do uso das TIC e da contextualização no processo de ensino e aprendizagem, especificamente nas atividades aplicadas, relacionando-as com as dificuldades e os resultados obtidos na sua aplicação. Relatam-se ainda o valor dos Procedimentos Pedagógicos para aplicação posterior das atividades elaboradas. Ao final, expõem-se as sugestões para dar continuidade ao trabalho realizado.

Realizou-se um estudo da Razão Áurea, analisando sua importância e utilização desde a antiguidade, reconhecendo suas aplicações por obras humanas e por obras da natureza.

Por meio desse estudo, foi possível analisar a relação existente entre a Razão Áurea e:

- o Corpo Humano;
- a Sequência de Fibonacci;
- os Polígonos de Ouro;
- sua atual utilização em questões de vestibulares.

A partir dessa ampla abrangência, elaborou-se atividades em que a Razão Áurea fosse o elemento motivador para o estudo de Razões e Sequências.

Devido à riqueza histórica dessa razão, a utilização da História da Matemática foi imprescindível nas atividades. A forma usada para expor aos alunos a história da Razão Áurea foi exibir os filmes *Número de Ouro* do DVD Escola Número 019, *A Espiral e as Proporções Áureas* do DVD Escola Número 021, e *Donald no país da Matemágica*, a saber que estes foram exibidos de acordo com o tema e o público alvo a que cada atividade destinava-se. Algumas informações que julgou-se necessárias aos alunos e que não eram trazidas no filme foram contadas oralmente no momento da aplicação das atividades, como relatado no capítulo 3.

Durante a exibição dos filmes utilizados, verificou-se que eles permitem que o momento da aula, em que se explora a História da Matemática, torne-se mais interessante. Tais recursos abordaram o surgimento da Razão Áurea, suas aplicações, sua relação com o Corpo Humano e com a Sequência de Fibonacci. Por meio de imagens e sons, e com uma linguagem descontraída, eles atraíram a atenção de grande parte dos alunos.

Contudo, notou-se que na turma em que foi aplicada a atividade "Sequência de Fibonacci", a inquietude dos alunos contribuiu para a dispersão durante a assistência ao filme. Com essa experiência conclui-se que, para auxiliar na escolha adequada do recurso que se utilizará, e decidir se uma mídia é atraente para os alunos, é preciso conhecer a turma em que se irão realizar as atividades.

Mas os filmes não foram os únicos recursos tecnológicos utilizados. Nas atividades realizadas, foram utilizados ainda a calculadora, a planilha eletrônica e o *software* GeoGebra. Verificou-se, com o uso destes recursos, que as TIC permitiram ao aluno, compreender o que foi objetivado nas atividades, possibilitando o enriquecimento do processo de ensino e aprendizagem, favorecendo a construção de conhecimentos.

Observou-se durante a aplicação das atividades, que especificamente, a calculadora, a planilha eletrônica e o *software* GeoGebra, simplificam os cálculos e permitem aos alunos se dedicarem ao que é mais importante na realização da atividade, deixando a esses recursos as tarefas repetitivas.

Nesta monografia, a geometria dinâmica foi representada pelo *software* GeoGebra. Segundo Brandão (2002), esta geometria é a implementação no computador de construções com régua e compasso, na qual o estudante pode mover alguns dos objetos construídos. Ele afirma que ela possibilita ao aluno, a partir de uma única construção, efetuar um número considerável de testes, o que seria praticamente impossível somente com régua e compasso, pois a geometria dinâmica é do tipo: uma construção, *n* testes; enquanto a geometria de "régua e compasso" é do tipo: uma construção, um teste.

Assim sendo, os alunos puderam perceber, movimentando os polígonos construídos na atividade "Segmento Áureo - Polígonos de Ouro - Razão Áurea com enfoque em questões de vestibulares", que independente das medidas dos entes considerados, a Razão Áurea estava presente nestes, o que os tornava Áureos.

As atividades elaboradas uniram os conceitos com a realidade, pois a Razão Áurea está presente na vida em diversas partes. Assim sendo, tais atividades tiveram caráter contextualizado. Com elas, pode-se verificar que, o conhecimento construído em consonância com a vivência dos alunos permite o alcance significativo da aprendizagem valorizando a Matemática, enquanto disciplina escolar.

Sobre os Procedimentos Pedagógicos, que objetivaram orientar os professores que vierem utilizar as atividades desenvolvidas nesta monografia de modo a desenvolver as habilidades planejadas, entende-se que este será de grande valia para determinar o tipo de abordagem que será utilizada para apresentar a Razão Áurea aos alunos.

Os Procedimentos Pedagógicos ajudarão também na compreensão matemática e histórica da Razão Áurea, incluindo as formas de reprodução das ideias, as explicações, demonstrações e respostas adequadas. Tais procedimentos encontram-se disponíveis nesta monografia (Apêndices 5, 6 e 7) com as alterações sugeridas que foram acatadas pelas autoras.

Deve-se, no entanto, dar continuidade ao trabalho desenvolvido nesta monografia, para torná-lo ainda mais válido e consistente na construção de conhecimentos. Para isso, sugere-se investigar a influência da mídia filme no processo de ensino e aprendizagem, pois existem muitos autores que falam da importância de recursos tecnológicos, enfatizando o uso de computadores, e pouco encontra-se sobre a mídia citada. Sabe-se que o Ministério da Educação disponibiliza em seu *site* oficial diversos filmes que trazem assuntos trabalhados na sala de aula de forma mecânica, numa perspectiva informal e dinâmica. Porém, não foram encontrados os objetivos de disponibilizar essa mídia.

A principal sugestão que esta monografia traz para dar continuidade a este trabalho é que, outros professores e professores em formação, disponibilizem suas pesquisas e atividades elaboradas, e realizem o que chamou-se de Procedimentos Pedagógicos, para que todos que queiram aplicar as atividades tenham um norteador e para que os trabalhos desenvolvidos não se limitem a um número muito restrito de alunos (os que participaram da aplicação). Considera-se que estas ações possibilitarão um grande avanço na Educação ao permitir que todos tenham acesso a atividades diferenciadas.

De forma audaz, sugere-se também que o Ministério da Educação crie um *site*, para que cada professor pesquisador, seja ele licenciando ou licenciado, disponibilize suas atividades elaboradas e suas pesquisas, para que se saiba, de uma fonte segura, a origem do material que se está tendo acesso e valorize o professor pesquisador.

Acerca do objetivo desta monografia, que consistiu em elaborar e validar atividades para a sala de aula, englobando variados conteúdos matemáticos que possuem como elemento motivador a Razão Áurea, as autoras concluem que eles foram alcançados.

Registra-se ainda, a contribuição deste trabalho para as professoras em formação, autoras desta monografia, são elas:

- Desenvolver habilidades na escrita, ampliar o vocabulário e o interesse pela leitura.
- Aumentar o empenho em pesquisas, se conscientizando da importância de ser um professor pesquisador.
- Realizar um estudo histórico da Razão Áurea;
- Investigar as aplicações e ocorrências da Razão Áurea;
- Investigar as propostas do uso da Razão Áurea para a sala de aula e pesquisas correlatas;
- Elaborar e validar atividades que utilizam a Razão Áurea como elemento motivador para o estudo e o aprofundamento de tópicos em matemática escolar, usando, entre outros recursos, os *softwares* matemáticos.
- Ampliar os conhecimentos acerca da História da Matemática, das TIC e da contextualização no ensino.
- Adquirir experiência na prática com atividades que utilizam a História da Matemática, as TIC e a contextualização no ensino.

Mediante as considerações expostas, espera-se estar propagando a relevância de compartilhar pesquisas e atividades desenvolvidas no âmbito educacional.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, A. M. B. de; RIBEIRO, D. S. de O.; SOARES, L. G. M.; FARIA, R. W. S. *Razão Áurea: A Divina Proporção*, Anais da II Semana de Matemática. Campos dos Goytacazes, RJ: Essentia Editora, 2008.

ÁVILA, G. *Retângulo áureo, divisão áurea e sequência de Fibonacci*. Revista do Professor de Matemática. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 6, p. 9-14. 1985.

ÁVILA, G. *Euclides, Geometria e Fundamentos.* Revista do Professor de Matemática. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 45, p. 1- 5. 2002.

BARCELOS, G. T. *Inovação no Sistema de Ensino: o Uso Pedagógico das Tecnologias de Informação e Comunicação nas Licenciaturas em Matemática da Região Sudeste.* Dissertação (Mestrado em Ciências de Engenharia). Campos dos Goytacazes, RJ, Universidade Estadual do Norte Fluminense – UENF, 2004.

BIANCHINI, E.; PACCOLA, H. *Matemática - volume 1*, São Paulo: Moderna, p. 147, 2004.

BIEMBENGUT, M. S. *Número de Ouro e Secção Áurea. Considerações e Sugestões para a Sala de Aula.* Blumenau- SP: Editora da FURB, 1996.

BIEMBENGTT, M. S. HEIN, N. *Modelagem Matemática no Ensino.* 3.ªed. São Paulo: Contexto, 2003.

BRANDÃO, L. de O. *Algoritmos e Fractais com Programas de GD*. Revista do Professor de Matemática. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 49, p. 27- 34. 2002.

BRASIL, *PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais): Ensino Fundamental – Bases Legais*, v.1. Brasília: Ministério da Educação / Secretaria de Educação Média e Tecnológica.1997.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto, *Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: 2002

BROWN, D. *O Código Da Vinci – edição especial ilustrada*. Tradução: Celina Cavalcante. Rio de Janeiro: Sextante, 2005.

BORBA, M.; PENTEADO, M. *Informática e Educação Matemática,* 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

CARVALHO, J. P. *Um Problema de Fibonacci*. Revista do Professor de Matemática. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 17, p. 4 - 9. 1990.

CONTE, C. B. *Pitágoras: Ciência e Magia na Antiga Grécia*. São Paulo: Madras, p. 147-155. 2006.

D'AMBRÓSIO, U. Educação Matemática: da teoria à prática. 2ª ed. Campinas: Papirus, 1997.

DUARTE, E. F. *Contextualização em Educação Matemática*, 2002. Disponível em: http://www2.funedi.edu.br/revista/revista-eletronica2/artigo1-1.htm. Acesso em: 29 de janeiro de 2009.

GARBI, G. *Decorar é preciso Demonstrar também é.* Revista do Professor de Matemática. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 68, p. 1- 6. 2009.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.M.; PÉRIGO, R. *Matemática: volume único.* São Paulo: Atual, 1997

KLUG, S. U. *Catedral de Chartres: A geometria sagrada do cosmos*. 1.ed. São Paulo: Madras, 2002.

LAURO, M. M. *A razão áurea e os padrões harmônicos na natureza, artes e arquitetura*. São Paulo: Exacta, v.3, p. 35 - 48, 2005.

LIBÂNEO, J. C. *Adeus Professor, Adeus Professora? Novas Exigências Educacionais e Profissão Docente*. SP: Cortez, 2002.

LÍVIO, M. *Razão Áurea: A História de Fi, um Número Surpreendente*. São Paulo: Record, 2006.

MARKARIAN, R. *Alguns Problemas e suas Causas*. Revista do Professor de Matemática. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 38, p. 23-32. 1998.

MENEZES, E. T. de; SANTOS, T. H. dos. "Contextualização" (verbete). *Dicionário Interativo da Educação Brasileira* - EducaBrasil. São Paulo: Midiamix Editora, 2002. Disponível em: http://www.educabrasil.com.br/eb/dic/dicionario.asp?id=55, Acesso em 28 de janeiro de 2009.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. *História na educação matemática; propostas e desafios*. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

MONTEIRO; A. M. F. da C. *Professores: Entre Saberes e Práticas*. vol. 22 número 74. Capinas: Educação & Sociedade, 2001.

NUNES, T. BRYANT, P. *Crianças fazendo Matemática*. Porto Alegre: Ed. Artes Médica, 1997.

PAIS, Luis Carlos. *Didática da Matemática: uma análise da influência francesa*. 2ª ed. *Belo Horizonte: Autêntica, 2002.*

PERRENOUD, P. *Dez Novas Competências para Ensinar*. Porto Alegre: Artmed Editora, 2000.

PONTE, J. P. da; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. Investigações Matemáticas na Sala de Aula. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

SANTOS, C. A. dos. *A história da Matemática como ferramenta no processo de ensino-aprendizagem da matemática* (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP, 2007.

SARAIVA, J. C. V. *As pirâmides do Egito e a Razão Áurea*. Revista do Professor de Matemática. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 48, p. 10 – 14, 2002.

TV ESCOLA. DVD escola número 019. São Paulo: TV ESCOLA, s.d. (a). Disponível em: http://www.dominiopublico.gov.br/download/video/me001034.wmv. Acesso em 05 de junho de 2009.

TV ESCOLA. DVD escola número 021. São Paulo: TV ESCOLA, s.d. (b). Disponível em: http://www.dominiopublico.gov.br/download/video/me001051.wmve. Acesso em 05 de junho de 2009.

APÊNDICES

APÊNDICE 1: ATIVIDADE RAZÃO ÁUREA NO CORPO HUMANO (APLICADA)

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE
Campus Campos-Centro

Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

Ministério da Educação

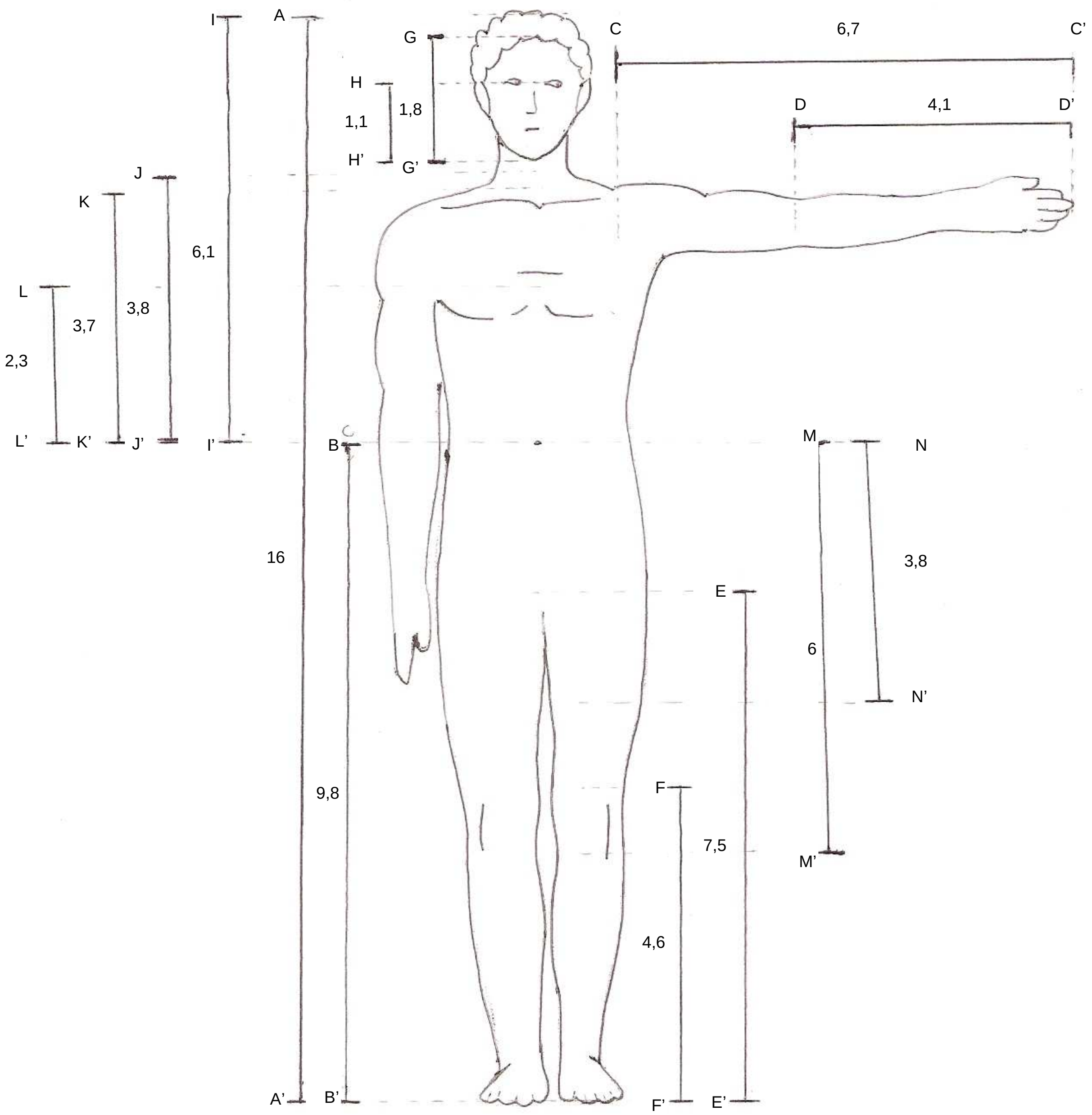
BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

7º Período do Curso Superior de Licenciatura em Matemática - Atividades de Aplicação de Monografia

Aluno(a) :_______________________________________ 3º ciclo do Ensino Fundamental Data: / / .

Professoras em formação: Danielly Silva de Oliveira e Rejane Waiandt Schuwartz Faria

1. Utilizando a figura do corpo humano abaixo e a calculadora, calcule as divisões, sabendo que a unidade de medida dos segmentos indicados é centímetro (considere uma casa decimal):



a. $\dfrac{\text{Altura do corpo}}{\text{distância do umbigo até o pé}} = \dfrac{AA'}{BB'} = \dfrac{\quad}{\quad} =$ ....

b. $\dfrac{\text{Comprimento do ombro até a ponta dos dedos das mãos}}{\text{distância do cotovelo até a ponta dos dedos das mãos}} = \dfrac{CC'}{DD'} = \dfrac{\quad}{\quad} =$ ....

c. $\dfrac{\text{Comprimento da perna}}{\text{distância do do joelho até o pé}} = \dfrac{EE'}{FF'} = \dfrac{\quad}{\quad} =$ ....

d. $\dfrac{\text{Comprimento da testa até o queixo}}{\text{distância dos olhos até o queixo}} = \dfrac{GG'}{HH'} = \dfrac{\quad}{\quad} =$ ....

Os resultados das divisões que você encontrou na questão 1, são chamados de razões. Portanto o resultado encontrado no item a. *representa a razão entre a altura do corpo e a distância do umbigo até o pé.*

2. Agora vamos observar:

a. O que podemos concluir, observando o resultado das razões encontradas na questão anterior?

____

____

____

b. Com o auxílio da figura do corpo humano, determine outros quocientes cujos resultados sejam aproximadamente iguais às razões encontradas anteriormente:

$\dfrac{\qquad\qquad\qquad\qquad}{\qquad\qquad\qquad\qquad} = \dfrac{\quad}{\quad} = \dfrac{\quad}{\quad} =$ ....

$\dfrac{\qquad\qquad\qquad\qquad}{\qquad\qquad\qquad\qquad} = \dfrac{\quad}{\quad} = \dfrac{\quad}{\quad} =$ ....

$\dfrac{\qquad\qquad\qquad\qquad}{\qquad\qquad\qquad\qquad} = \dfrac{\quad}{\quad} = \dfrac{\quad}{\quad} =$ ....

APÊNDICE 2: ATIVIDADE SEQUÊNCIA DE FIBONACCI (APLICADA)

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE
Campus Campos-Centro

Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

Ministério da Educação

BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

7º Período do Curso Superior de Licenciatura em Matemática- Atividades de Aplicação de Monografia

Aluno(a) :_______________________________________ 4º ciclo do Ensino Fundamental Data: / /09

Professoras em formação: Danielly Silva de Oliveira e Rejane Waiandt Schuwartz Faria

Sequências Numéricas

Vamos pensar nos anos bissextos que virão a partir do ano 2012. Eles formam uma sequência ou sucessão:

2012,2016,2020,2024,...

No exemplo, 2012 é o primeiro termo da sequência, 2016 é o segundo termo, e assim por diante. Há situações em que a sequência é finita enquanto que em outras ela é infinita.

Atividades

1. Com o auxílio da tabela 1 da planilha eletrônica Excel, forme uma sequência seguindo os itens abaixo:

a. Escolha um número natural qualquer diferente de zero (de preferência um número de valor absoluto baixo), e digite-o na terceira linha da segunda coluna (Célula B3). Este será o primeiro termo de sua sequência;

b. Repita o mesmo número no segundo termo(célula B4);

c. Some o primeiro e o segundo termos para obter o terceiro termo da sua sequência, para isto clique na célula B5 e digite na barra de fórmulas a função **=B4+B3** (pressione *enter* para obter o resultado);

d. Complete a segunda coluna, sabendo que os próximos termos da sequência, são obtidos somando os dois termos anteriores a ele, para tal ação não é necessário efetuar a soma em cada linha da coluna. A planilha Excel nos auxilia nesta operação, basta selecionar a célula B5 que no canto aparecerá um quadrado. Clique nele e arraste até a última linha da coluna;

e. Vamos completar a terceira coluna dessa tabela dividindo os números consecutivos, ou seja, divida cada número da segunda coluna pelo seu antecessor, a partir do segundo termo. Para isto clique na célula C4 e digite na barra de fórmulas a função **=B4/B3** (pressione *enter* para obter o resultado). Para completar a coluna selecione a célula C4 e clique no quadrado que aparecerá no canto da célula e arraste até a última linha da coluna.

2. O que é possível observar com relação aos resultados obtidos na terceira coluna?____

____

____

3. Ainda com o auxílio da planilha eletrônica Excel, vamos traçar o gráfico de linhas dessa tabela. Para isso:

a. Selecione a coluna C da célula C4 à célula C27;
b. Clique em inserir na barra de ferramentas;
c. Clique em gráfico;
d. Selecione em tipo de gráfico a opção linha;
e. Selecione em subtipo de gráfico a opção linha e clique em *Avançar* até concluir;
f. O que é possível observar no gráfico formado?___________________________

____

APÊNDICE 3: ATIVIDADE SEGMENTO ÁUREO - POLÍGONOS DE OURO - RAZÃO ÁUREA COM ENFOQUE EM QUESTÕES DE VESTIBULARES (APLICADA)

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE
Campus Campos-Centro

Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica — Ministério da Educação

7º Período do Curso Superior de Licenciatura em Matemática- Atividades de Aplicação de Monografia

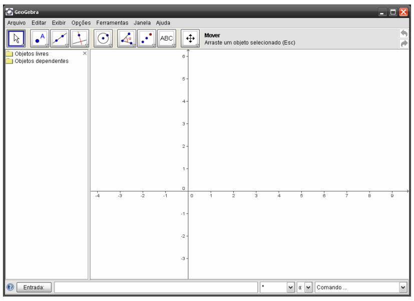
Aluno(a) :____ Ensino Médio Data: / /09

Professoras em formação: Danielly Silva de Oliveira e Rejane Waiandt Schuwartz Faria

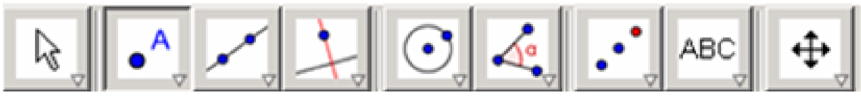
Reconhecimento do *Software* GeoGebra

O *software* GeoGebra é um software livre de geometria dinâmica, que pode ser encontrado no endereço www.geogebra.at .

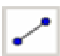
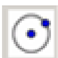
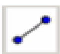
No lado direito da tela são feitas as construções geométricas e do lado esquerdo, a parte algébrica.



Cada ícone tem uma pequena seta no canto, ao clicar nessa seta aparecerá outras opções de ferramentas.



- Faremos algumas construções:

- Construir um segmento de reta ($\overline{AB}$).
- Marcar o ponto médio deste segmento.
- Mover o segmento construído e observar a janela algébrica.
- Construir uma circunferência com centro no ponto médio e raio do ponto médio ao extremo do segmento.
- Marcar um ponto D na circunferência (com D $\neq$ de A e B).
- Traçar o segmento $\overline{DB}$.

- **Operações**

- Podemos também fazer adições, subtrações, multiplicações e divisões com as medidas dos segmentos utilizando a caixa de entrada do *software*.

- Divida a medida do segmento $\overline{AB}$ pela medida do segmento $\overline{DB}$.

I. Construção do Segmento Áureo

I.I. Utilizando o *software* GeoGebra, vamos construir o segmento áureo, seguindo os passos abaixo:

a. Construa um segmento $\overline{AB}$ qualquer;

b. Marque o ponto médio de $\overline{AB}$ e nomeie-o de M;

c. Trace uma perpendicular a $\overline{AB}$ passando pelo ponto B;

d. Trace uma circunferência com raio $\overline{AB}$ e centro em B;

e. Marque o ponto de interseção superior da circunferência com a perpendicular e nomeie-o de O;

f. Trace uma circunferência com centro em M e raio $\overline{MO}$;

g. Construa a semi-reta $\overrightarrow{AB}$;

h. Nomeie o ponto de interseção de $\overrightarrow{AB}$ com a circunferência de centro em M de C;

i. Marque o segmento $\overline{AC}$;

j. Marque o segmento $\overline{BC}$;

k. Marque o segmento $\overline{MO}$;

l. Efetue a divisão da medida do segmento $\overline{AC}$ pela medida do segmento $\overline{AB}$;

m. Efetue a divisão da medida do segmento $\overline{AB}$ pela medida do segmento $\overline{BC}$;

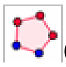
n. Observe os resultados obtidos nos itens l. e m. na janela algébrica;

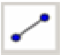
o. Mova um dos vértices dos extremos do segmento $\overline{AB}$ e observe novamente os resultados obtidos nos itens l. e m. na janela algébrica;

p. Porque o resultado é sempre este? Existe alguma forma de provar isto?

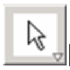
II. Construção de Polígonos de Ouro e da Espiral Logarítmica

II.I. Utilizando o *software* GeoGebra, vamos construir alguns Polígonos de Ouro, seguindo o roteiro abaixo:

a. Construa um pentágono regular;

b. Trace a diagonal $\overline{AD}$;

c. Efetue a divisão da medida da diagonal $\overline{AD}$ pela medida do segmento $\overline{AB}$;

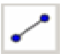
d. Mova o pentágono construído (no ponto A ou no ponto B) e observe o resultado obtido no item c. na janela algébrica.

*Comentário 1:*____

____

____

____

e. Nessa mesma figura marque a diagonal $\overline{BD}$;

f. Efetue a divisão da medida da diagonal $\overline{BD}$ pela medida do segmento $\overline{AB}$;

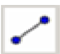
g. Mova o triângulo construído (no ponto A ou no ponto B) e observe o resultado obtido no item f. na janela algébrica.

*Comentário 2:*____

____

____

____

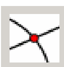
h. Nessa mesma figura, construa as demais diagonais do pentágono regular.

*Comentário 3:*____

____

____

____

i. Marque todos os pontos de intersecção das diagonais;

j. Cada um dos pontos de intersecção divide cada diagonal em dois segmentos. Efetue a divisão da medida do maior segmento determinado na diagonal $\overline{BD}$ pela medida do menor segmento determinado nesta mesma diagonal.

k. Mova o pentagrama (no ponto A ou no ponto B) e observe o resultado obtido no item j. na janela algébrica.

*Comentário 4:*____

____

____

____

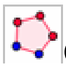
l. E se repetíssemos esta construção no interior do pentágono menor? O que aconteceria? ____

____

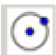
____

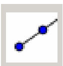
____

II.II. Utilizando o *software* GeoGebra, vamos construir o Retângulo de Ouro e a Espiral Logarítmica, seguindo os passos abaixo:

a. Construa um quadrado;

b. Marque o ponto médio do segmento $\overline{AB}$;

c. Construa uma circunferência com centro no ponto médio E e raio $\overline{EC}$.

d. Marque a semi-reta $\overline{AB}$;

e. Marque o ponto de intercessão da circunferência com a semi-reta;

f. Construa uma paralela ao segmento $\overline{BC}$ passando por essa intercessão;

g. Construa uma paralela ao segmento $\overline{AB}$ passando por C;

h. Marque a intercessão das duas paralelas construídas;

i. Observe que foi construído o retângulo AFGD. Para melhor visualização una seus vértices através da ferramenta polígono .

j. Efetue a divisão da medida do maior lado do retângulo pela medida de seu menor lado (se o nome do segmento for $\mathbf{a_1}$ por exemplo, digite no campo de entrada **a_1**);

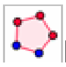
k. Mova o retângulo construído (no ponto A ou no ponto B) e observe a janela algébrica.

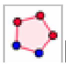
*Comentário 1:*____

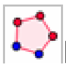
____

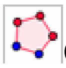
____

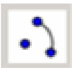
____

l. Nessa mesma figura construa um quadrado de lado DG nessa ordem (isso quer dizer que você deve clicar primeiro em D depois em G, caso contrário o quadrado não ficará na posição adequada).

m. Repita o processo do item anterior, mas agora construindo o quadrado de lado HF, nessa ordem.

n. Mais uma vez repita o processo do item l. construindo o quadrado de lado JA, nessa ordem.

o. Construa um último quadrado de lado ML, nessa ordem.repetindo o processo do item l.

p. Finalizando trace os seguintes arcos circulares dados o centro e dois pontos:

p_1 : Centro: C; pontos: D e B nessa ordem;

p_2 : Centro: G; pontos: H e D nessa ordem;

p_3 : Centro: F; pontos: J e H nessa ordem;

p_4 : Centro: A; pontos: M e J nessa ordem;

p_5 : Centro: L; pontos: Q e M nessa ordem.

*Comentário 2:*____

____

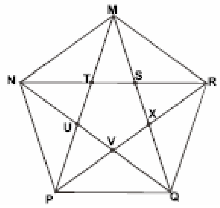
____

____

III. Razão Áurea com enfoque em questões de vestibulares

III.I. (UFF - 2006)

A escola Pitagórica desenvolvia estudos em Matemática, Filosofia e Astronomia. O símbolo dessa Escola era a estrela de cinco pontas, que pode ser construída ligando-se os vértices de um pentágono regular, conforme a figura.



Sejam S_1 e S_2 as áreas dos pentágonos regulares MNPQR e STUVX, respectivamente. Sabendo que $\frac{MU}{MT} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, assinale a opção que contém a razão $\frac{S_1}{S_2}$.

a. $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\right)^2$ b. $\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4}$ c. $\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{\sqrt{5}-1}$ d. $\frac{(1-\sqrt{5})^2}{1+\sqrt{5}}$ e. $\frac{(1+\sqrt{5})^4}{4}$

III.II. (UFF - 2007)

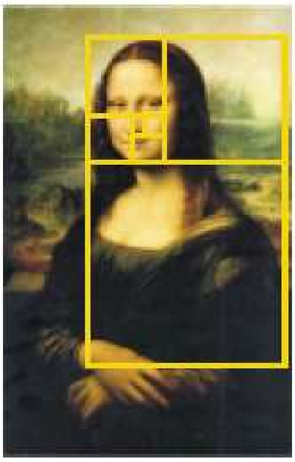


Fig. 1: Mona Lisa e proporções áureas

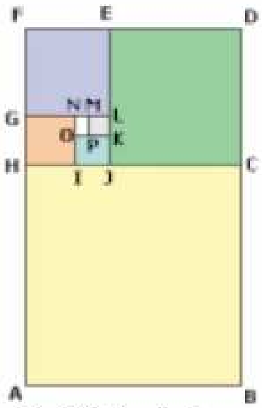


Fig. 2: Retângulos áureos

A "Divina Proporção" também conhecida como proporção áurea foi usada por Leonardo da Vinci para pintar a Mona Lisa , uma de suas mais notáveis obras. Em vários pontos do quadro aparece o retângulo áureo, como ilustrado na figura 1.

Na fig. 2 os quadriláteros ABDF, CDFH, EFHJ, GHJL, IJLN e KLNO são retângulos áureos semelhantes e os quadriláteros ABCH, CDEJ, EFGL, GHIN, IJKO e KLMP são quadrados.

Sabendo-se que a razão entre o maior lado do retângulo áureo é igual ao número de ouro φ, pode-se afirmar que a razão entre a área do quadrado KLMP e a área do quadrado ABCH é igual a:

a. $\frac{1}{\varphi^6}$ b. $\frac{1}{\varphi^{10}}$ c. $\frac{1}{\varphi^8}$ d. $\frac{1}{\varphi^5}$ e. $\frac{1}{\varphi^{12}}$

III.III. (UERJ/UENF – 2005(adaptada)) O retângulo de ouro é utilizado em Arquitetura desde a Grécia Antiga.

A razão entre as medidas do maior e do menor lado desse retângulo é o número de ouro, representado por φ.

- Sabendo que φ é uma das raízes da equação $x^2 = x + 1$, calcule o valor de φ.

APÊNDICE 4: TABELA I: UTILIZADA NA ATIVIDADE SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

ATIVIDADE 1		
TERMO	SEQUÊNCIA	DIVISÃO
1º		/////////
2º		
3º		
4º		
5º		
6º		
7º		
8º		
9º		
10º		
11º		
12º		
13º		
14º		
15º		
16º		
17º		
18º		
19º		
20º		
21º		
22º		
23º		
24º		
25º		

APÊNDICE 5: PROCEDIMENTOS PEDAGÓGICOS DA ATIVIDADE RAZÃO ÁUREA NO CORPO HUMANO

PROCEDIMENTOS PEDAGÓGICOS DA ATIVIDADE RAZÃO ÁUREA NO CORPO HUMANO

Conteúdo matemático: Razão e números decimais.

Público alvo: 3º ciclo do Ensino Fundamental – 6 º e 7º anos

Recursos: Figura do corpo humano e calculadora.

Tempo previsto: 1h 40min.

Competência:

Ampliar e construir novos significados para os números naturais, inteiros e racionais a partir de sua utilização no contexto social e da análise de alguns problemas históricos que motivaram sua construção. (BRASIL,1998, p.64)

Habilidades:

- Reconhecer a razão como operador para identificação de números racionais em diferentes contextos.
- Reconhecer o número de ouro.
- Operar a calculadora.
- Relacionar o número de ouro com padrões de beleza.

Roteiro da Aula:

Nessa proposta de aula, recomenda-se entregar aos alunos a atividade com as questões relacionando o Número de Ouro com padrões de beleza. Em cada questão deve-se proceder da seguinte forma: fazer uma leitura de cada enunciado, em seguida dar-se um tempo para os alunos tentarem resolver individualmente e após fazer uma discussão dos resultados obtidos. Finalizar esta atividade com o filme *Donald no país da Matemágica,* encontrado no endereço http://youtube.com/watch?v=fUcWN1BJDP8, que além de abordar o conceito estudado de uma forma bem interessante, mostra ainda outros conceitos matemáticos que podem ser ou que já tenham sido trabalhados no contexto da Razão Áurea.

Padrão de Respostas:

1. a. $\dfrac{\text{Altura do corpo}}{\text{distância do umbigo até o pé}} = \dfrac{AA'}{BB'} = \dfrac{16}{9{,}8} = 1{,}6$

b. $\frac{\text{Comprimento do ombro até a ponta dos dedos das mãos}}{\text{distância do cotovelo até a ponta dos dedos das mãos}} = \frac{CC'}{DD'} = \frac{6{,}7}{4{,}1} = 1{,}6$

c. $\frac{\text{Comprimento da perna}}{\text{distância do do joelho até o pé}} = \frac{EE'}{FF'} = \frac{7{,}5}{4{,}6} = 1{,}6$

d. $\frac{\text{Comprimento da testa até o queixo}}{\text{distância dos olhos até o queixo}} = \frac{GG'}{HH'} = \frac{1{,}8}{1{,}1} = 1{,}6$

2. a. Que em todas as razões obtemos como resposta aproximadamente 1,6.

b.

$\frac{\text{Comprimento da testa até o umbigo}}{\text{distância do pescoço até o umbigo}} = \frac{II'}{JJ'} = \frac{6{,}1}{3{,}8} = 1{,}6$

$\frac{\text{Comprimento do ombro até o umbigo}}{\text{distância do tórax até o umbigo}} = \frac{KK'}{LL'} = \frac{3{,}7}{2{,}3} = 1{,}6$

$\frac{\text{Comprimento do umbigo até o joelho}}{\text{distância do umbigo até a coxa}} = \frac{MM'}{NN'} = \frac{6}{3{,}8} = 1{,}6$

APÊNDICE 6: PROCEDIMENTOS PEDAGÓGICOS DA ATIVIDADE SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Ministério da Educação

PROCEDIMENTOS PEDAGÓGICOS DA ATIVIDADE SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Conteúdo matemático: Números Irracionais

Público alvo: 4º Ciclo do Ensino Fundamental – 8º e 9º anos

Recursos: Planilha Eletrônica Excel ou similares

Tempo previsto: 1h 40min.

Competência:

Ampliar e consolidar os significados dos números racionais a partir dos diferentes usos em contextos sociais e matemáticos e reconhecer que existem números que não são racionais. (BRASIL,1998, p.81)

Habilidades:

- Construir o conceito de números irracionais.
- Identificar a Sequência de Fibonacci.
- Reconhecer o Número de Ouro.
- Utilizar uma planilha eletrônica.

Roteiro da Aula:

Essa aula tem como proposta uma atividade relacionando Sequências, em especial a Sequência de Fibonacci, com o Número de Ouro. Nessa atividade recomenda-se proceder da seguinte forma: entregar a atividade, fazer uma leitura de cada enunciado, em seguida dar-se um tempo para os alunos tentarem resolver individualmente e após fazer uma discussão dos resultados obtidos. Em seguida mostrar abrangência da Sequência de Fibonacci com o auxílio do capítulo intitulado *Número de Ouro* do DVD escola número 019 uma produção da TV ESCOLA disponível no endereço eletrônico: http://www.dominiopublico.gov.br/download/video/me001034.wmv que mostra a relação que está sendo estudada, de maneira impressionante e dinâmica.

Padrão de Respostas:

2. É possível observar com relação aos resultados obtidos na terceira coluna que após a célula C8 os números estão em torno de 1,6.

3. f. É possível observar no gráfico formado que a divisão entre um número e o seu antecessor na sequência formada gera um gráfico em que os pontos oscilam inicialmente, mas que pouco adiante formam um gráfico próximo a uma reta.

APÊNDICE 7: PROCEDIMENTOS PEDAGÓGICOS DA ATIVIDADE: SEGMENTO ÁUREO - POLÍGONOS DE OURO - RAZÃO ÁUREA COM ENFOQUE EM QUESTÕES DE VESTIBULARES

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Ministério da Educação
BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

PROCEDIMENTOS PEDAGÓGICOS DA ATIVIDADE:

SEGMENTO ÁUREO

POLÍGONOS DE OURO

RAZÃO ÁUREA COM ENFOQUE EM QUESTÕES DE VESTIBULARES

Conteúdo matemático:

- Construção do Segmento Áureo no ambiente de geometria dinâmica e demonstração de que a razão entre um segmento e seu Segmento Áureo é $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
- Construção de Polígonos Áureos e da Espiral Logarítmica no ambiente de geometria dinâmica.
- Relação entre lados de polígonos e suas áreas.
- Equação do segundo grau.

Público alvo: Alunos do Ensino Médio.

Recursos: *Software* GeoGebra.

Tempo previsto: 3h 20min.

Competências (BRASIL, 2002, p.259):

- Utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação.
- Formular hipóteses e prever resultados.
- Selecionar estratégias de resolução de problemas.
- Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
- Utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades.
- Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

- Desenvolver a capacidade de utilizar a matemática na interpretação e intervenção do real.
- Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas de conhecimento.
- Relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade.

Habilidades:

- Reconhecer a Razão Áurea.
- Construir um Segmento Áureo.
- Demonstrar que a razão entre um segmento e seu Segmento Áureo é $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, usando o Número de Ouro.
- Utilizar o *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra.
- Construir Polígonos Áureos.
- Construir a Espiral Logarítmica.
- Conscientizar os alunos da abrangência da Razão Áurea nos exames de vestibulares.

Roteiro da Aula:

Recomenda-se iniciar a aula realizando uma tarefa de reconhecimento do *software* GeoGebra que é um *software* livre de Geometria Dinâmica disponível em www.geogebra.at, seguida dos itens **I** e **II** das atividades propostas. O item **I.** consiste na construção do Segmento Áureo explorando a investigação de tal forma que o aluno, após analisar que a razão encontrada entre dois segmentos que ele construiu no ambiente de geometria dinâmica é a Razão Áurea, será indagado: Porque o resultado é sempre este? Existe alguma forma de provar isto?, sendo levado então a provar o que ele considera ser verdadeiro. Ainda neste item será demonstrar que a razão entre um segmento e seu Segmento Áureo é $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$**,** com o auxílio do *software* GeoGebra*.*O item **II** consiste na construção de Polígonos Áureos e da Espiral Logarítmica, com o auxílio do *software* GeoGebra.

Recomenda-se que, ao chegar à sala, os alunos encontrem o *software* aberto nas seguintes condições: sem eixo, para melhor visualização das construções; com janela algébrica aberta, para que cada construção apareça devidamente nomeada; e com cinco casas decimais ativadas, para proporcionar maior visualização da Razão Áurea.

Para dar continuidade, apresentar a Razão Áurea por meio de *slides*, descrevendo sua amplitude e aplicação. Em seguida mostraremos a abrangência da Razão Áurea com o auxílio do capítulo intitulado *Número de Ouro* do DVD escola número 019, uma produção da TV ESCOLA disponível no endereço eletrônico: http://www.dominiopublico.gov.br/download/video/me001034.wmv, e das cenas compreendidas entre 5min 25s e 11min do capítulo intitulado *A espiral e as proporções áureas* do DVD escola número 021, uma produção da TV ESCOLA disponível no endereço eletrônico: http://www.dominiopublico.gov.br/download/video/me001051.wmve que mostram a relação que está sendo estudada, de maneira impressionante e dinâmica.

Para finalizar, realizaremos o item **III** das atividades propostas, que consistem em mostrar e solucionar questões de vestibulares que envolvem a Razão Áurea.

Padrão de Respostas:

Item I.I.

letra I.

O resultado é sempre este porque o segmento construído $\overline{AC}$ tem como Segmento Áureo $\overline{BC}$.

Podemos provar isto mostrando que $\frac{AC}{AB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618...$.

Inicialmente, podemos calcular o raio $\overline{MO}$.

$$MO^2 = OB^2 + MB^2$$

$$MO^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$MO^2 = \frac{5a^2}{2}$$

$$MO = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Além disso, podemos afirmar que:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{\frac{a}{2} + MC}{a}$$

Como $\overline{MO} = \overline{MC}$, podemos substituir a medida do raio $\overline{MO}$ em $\overline{MC}$:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{\frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{2}}{a}$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{\frac{a}{2}.\left(1+\sqrt{5}\right)}{a}$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{a}{2}.\left(1+\sqrt{5}\right).\frac{1}{a}$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Item II.I.

Comentário 1: No pentágono regular, ao dividirmos uma diagonal por um dos lados do pentágono obtemos PHI, por isso os pentágonos regulares são Polígonos de Ouro.

Comentário 2: O triângulo ABD é um Triângulo de Ouro, pois, ao dividirmos um de seus lados congruentes (as diagonais do pentágono) pelo seu lado menor (que também é lado do pentágono regular) obtemos PHI.

Comentário 3: Ao construir as demais diagonais do pentágono regular formamos um pentagrama ou pentágono regular estrelado, figura geométrica que foi usada como distintivo pelos pitagóricos.

Comentário 4: Todo pentagrama é um Polígono de Ouro, pois, ao dividirmos a medida do maior segmento determinado numa diagonal pelo medida do menor segmento determinado nesta mesma diagonal obtemos PHI.

Letra m: O processo de construção no interior de pentágonos/pentagramas é infinito, pois sempre no interior de um pentagrama é possível construir um pentágono e no interior de um pentágono é possível construir um pentagrama.

Item II.II.

Comentário 1: Neste retângulo ao dividirmos o maior pelo menor lado obtemos PHI, por isso este retângulo é um Polígonos de Ouro.

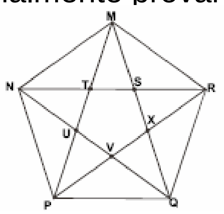
Comentário 2: A espiral formada é a Espiral Logarítmica. O nome Espiral Logarítmica foi criado pelo matemático francês Pierre de Varignon em decorrência da proporcionalidade existente entre ângulos formados por elementos dessa Espiral e seus logaritmos.

Item III.I.

A questão pede $\frac{S_1}{S_2}$, que é a razão entre as áreas dos pentágonos regulares MNPQR e STUVX, sabe-se que a razão entre as áreas de dois polígonos regulares é igual a razão entre os lados desses polígonos elevados ao quadrado.

Portanto $\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{MN}{UT}\right)^2$.

Inicialmente provaremos que MU=MN, utilizando a figura abaixo:



Sabe-se que os ângulos internos de um pentágono regular medem 108^{o,} portanto seus suplementares medem 72^o.

Como $T\hat{U}N$ é suplementar a $T\hat{U}V$, então $T\hat{U}N$=72^o.

Analisando o triângulo XQV, temos que $V\hat{X}Q$= $X\hat{V}Q$=72^o, pois são suplementares a $S\hat{X}V$ e $U\hat{V}X$, respectivamente.

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180^o, $M\hat{Q}N$ é 36^o.

O triângulo MQN é isósceles, com base MN, pois os lados MQ e QN são diagonais de um polígono regular, portanto tem a mesma medida.

Como $M\hat{Q}N$=36^o, $Q\hat{N}M$=72^o. Temos então que MNU é um triângulo isósceles de base NU. Portanto MN=MU.

Como MU=MN, $\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{MN}{UT}\right)^2 \therefore \frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{MU}{UT}\right)^2$.

Sabe-se que MT = MU - UT, portanto, substituindo MT por MU – UT em $\frac{MU}{MT}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, temos que:

$$\frac{MU}{MU-UT}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$2MU=\left(1+\sqrt{5}\right).\left(MU-UT\right)$$
$$2MU=\left(1+\sqrt{5}\right).MU-\left(1+\sqrt{5}\right)UT$$
$$2-\left(1+\sqrt{5}\right)MU=-\left(1+\sqrt{5}\right)UT$$
$$\left(1-\sqrt{5}\right)MU=-\left(1+\sqrt{5}\right)UT\ .(-1)$$
$$\left(\sqrt{5}-1\right)MU=\left(\sqrt{5}+1\right)UT$$
$$\frac{MU}{UT}=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$$
$$\frac{S_1}{S_2}=\left(\frac{MU}{UT}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\right)^2$$

Item III.II.

A questão pede a razão entre a área do quadrado KLMP (chamaremos S_1) e a área do quadrado ABCH (chamaremos S_2).

Sabe-se que $\frac{S_1}{S_2}$, que é a razão entre as áreas é igual a razão entre os lados desses quadrados elevados ao quadrado.

Portanto $\frac{S_1}{S_2}=\frac{LM^2}{AB^2}=\left(\frac{LM}{HC}\right)^2$

Analisando o retângulo Áureo KLNO, temos:

$$\frac{OK}{LM}=\varphi \therefore OK=\varphi.LM \text{ (I)}$$

Analisando o retângulo Áureo LNIJ, temos:

$$\frac{NI}{OK}=\varphi \therefore NI=\varphi.OK \text{ (II)}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$$NI=\varphi.(\varphi.LM)\therefore NI=\varphi^2.LM \text{ (III)}$$

Analisando o retângulo Áureo GHJL, temos:

$\frac{HJ}{NI} = \varphi \therefore HJ = \varphi.NI$ (IV)

Substituindo (III) em (IV), temos:

$HJ = \varphi.(\varphi^2.LM) \therefore HJ = \varphi^3.LM$ (V)

Analisando o retângulo Áureo EFHJ, temos:

$\frac{EJ}{HJ} = \varphi \therefore EJ = \varphi.HJ$ (VI)

Substituindo (V) em (VI), temos:

$EJ = \varphi.(\varphi^3.LM) \therefore EJ = \varphi^4.LM$ (VII)

Analisando o retângulo Áureo CDFH, temos:

$\frac{HC}{EJ} = \varphi \therefore HC = \varphi.EJ$ (VIII)

Substituindo (VII) em (VIII), temos:

$HC = \varphi.(\varphi^4.LM) \therefore HC = \varphi^5.LM$

Como HC= $\varphi^5.LM$, temos:

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{LM}{HC}\right)^2 = \left(\frac{LM}{\varphi^5.LM}\right)^2 = \left(\frac{1}{\varphi^5}\right)^2 = \frac{1}{\varphi^{10}}$$

Item III.III.

$$x^2 = x + 1$$
$$x^2 - x - 1 = 0$$
$$\Delta = 1 - 4.1.(-1)$$
$$\Delta = 5$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

As raízes da equação são $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, como φ é a razão entre as medidas do maior e do menor lado de um retângulo áureo, entende-se que φ é positivo e igual a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

APÊNDICE 8: CARTA AOS PROFESSORES

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica Ministério da Educação

Caro(a) Professor(a),

Solicitamos a gentileza de avaliar o material em Apêndice, visando verificar (avaliar) se os procedimentos pedagógicos referentes a cada atividade cumprem a sua função de orientar o professor na aplicação da atividade de modo a desenvolver as habilidades planejadas. A fim de nortear a sua avaliação, sugerimos que considere os seguintes aspectos:

- Pertinência dos conteúdos relacionados às atividades;
- Viabilidade dos recursos descritos nos Procedimentos Pedagógicos;
- Coerência das atividades para o desenvolvimento das competências e das habilidades propostas;
- Clareza e Objetividade dos roteiros das aulas descritos nos Procedimentos Pedagógicos;
- Completude e exatidão do padrão de respostas das atividades.

Cabe esclarecer que o conteúdo do Apêndice é parte integrante da monografia em desenvolvimento intitulada “Razão Áurea: Um elemento motivador para o estudo de razões e sequências na Educação Básica” de nossa autoria, orientada pelas professoras Mônica Souto da Silva Dias e Ana Mary Fonseca Barreto de Almeida.

Desde já agradecemos a sua contribuição.

Danielly Silva de Oliveira Ribeiro e Rejane Waiandt Schuwartz Faria

APÊNDICE 9: ATIVIDADE RAZÃO ÁUREA NO CORPO HUMANO

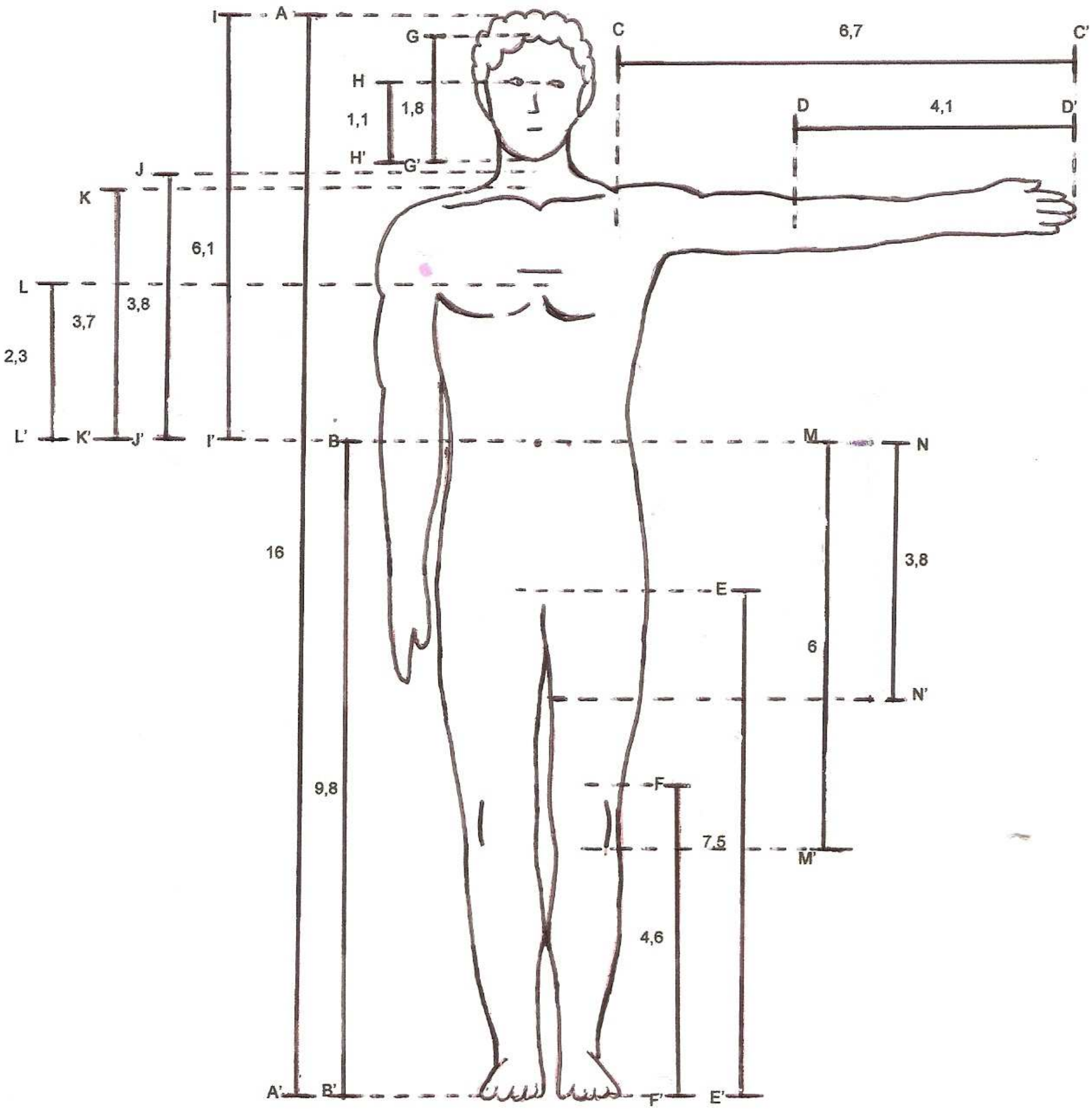
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE — Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica — Ministério da Educação

7º Período do Curso Superior de Licenciatura em Matemática - Atividades de Aplicação de Monografia

Aluno(a) :____ 3º ciclo do Ensino Fundamental Data: / / .

Professoras em formação: Danielly Silva de Oliveira e Rejane Waiandt Schuwartz Faria

1. Utilizando a figura do corpo humano abaixo e a calculadora, calcule as divisões, sabendo que a unidade de medida dos segmentos indicados é centímetro (considere uma casa decimal):



a. $\dfrac{\text{Altura do corpo}}{\text{distância do umbigo até o pé}} = \dfrac{AA'}{BB'} = \dfrac{\qquad}{\qquad} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

b. $\dfrac{\text{Comprimento do ombro até a ponta dos dedos das mãos}}{\text{distância do cotovelo até a ponta dos dedos das mãos}} = \dfrac{CC'}{DD'} = \dfrac{\qquad}{\qquad} = \ldots\ldots\ldots$

c. $\dfrac{\text{Comprimento da perna}}{\text{distância do do joelho até o pé}} = \dfrac{EE'}{FF'} = \dfrac{\qquad}{\qquad} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

d. $\dfrac{\text{Comprimento da testa até o queixo}}{\text{distância dos olhos até o queixo}} = \dfrac{GG'}{HH'} = \dfrac{\qquad}{\qquad} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Os resultados das divisões que você encontrou na questão 1, são chamados de razões. Portanto o resultado encontrado no item a. *representa a razão entre a altura do corpo e a distância do umbigo até o pé.*

2. Agora vamos observar:

a. O que podemos concluir, observando o resultado das razões encontradas na questão anterior?

____

____

____

b. Com o auxílio da figura do corpo humano, determine outros quocientes cujos resultados sejam aproximadamente iguais às razões encontradas anteriormente:

$\dfrac{\qquad\qquad\qquad\qquad}{\qquad\qquad\qquad\qquad} = \dfrac{\qquad}{\qquad} = \dfrac{\qquad}{\qquad} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\dfrac{\qquad\qquad\qquad\qquad}{\qquad\qquad\qquad\qquad} = \dfrac{\qquad}{\qquad} = \dfrac{\qquad}{\qquad} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\dfrac{\qquad\qquad\qquad\qquad}{\qquad\qquad\qquad\qquad} = \dfrac{\qquad}{\qquad} = \dfrac{\qquad}{\qquad} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

APÊNDICE 10: ATIVIDADE SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica Ministério da Educação

7º Período do Curso Superior de Licenciatura em Matemática - Atividades de Aplicação de Monografia

Aluno(a) :____ 4º ciclo do Ensino Fundamental Data: / / .

Professoras em formação: Danielly Silva de Oliveira e Rejane Waiandt Schuwartz Faria

Sequências Numéricas

Vamos pensar nos anos bissextos que virão a partir do ano 2012. Eles formam uma sequência ou sucessão:

2012,2016,2020,2024,...

No exemplo, 2012 é o primeiro termo da sequência, 2016 é o segundo termo, e assim por diante. Há situações em que a sequência é finita enquanto em outras ela é infinita.

Atividades

1. Com o auxílio da tabela 1 da planilha eletrônica Excel, forme uma sequência seguindo os itens abaixo:

a. Escolha um número natural qualquer diferente de zero (de preferência um número de valor absoluto baixo), e digite-o na terceira linha da segunda coluna (Célula B3). Este será o primeiro termo de sua sequência;

b. Repita o mesmo número no segundo termo(célula B4);

c. Some o primeiro e o segundo termos para obter o terceiro termo da sua sequência, para isto clique na célula B5 e digite na barra de fórmulas a função **=B4+B3** (pressione *enter* para obter o resultado);

d. Complete a segunda coluna, sabendo que os próximos termos da sequência, são obtidos somando os dois termos anteriores a ele, para tal ação não é necessário efetuar a soma em cada linha da coluna. A planilha Excel nos auxilia nesta operação, basta selecionar a célula B5 que no canto aparecerá um quadrado. Clique nele e arraste até a última linha da coluna;

e. Vamos completar a terceira coluna dessa tabela dividindo os números consecutivos, ou seja, divida cada número da segunda coluna pelo seu antecessor, a partir do segundo termo. Para isto clique na célula C4 e digite na barra de fórmulas a função **=B4/B3** (pressione *enter* para obter o resultado). Para completar a coluna selecione a célula C4 e clique no quadrado que aparecerá no canto da célula e arraste até a última linha da coluna.

2. O que é possível observar com relação aos resultados obtidos na terceira coluna?____

____

____

3. Ainda com o auxílio da planilha eletrônica Excel, vamos traçar o gráfico de linhas dessa tabela. Para isso:

g. Selecione a coluna C da célula C4 à célula C27;

h. Clique em inserir na barra de ferramentas;

i. Clique em gráfico;

j. Selecione em tipo de gráfico a opção linha;

k. Selecione em subtipo de gráfico a opção linha e clique em *Avançar* até concluir;

l. O que é possível observar no gráfico formado?____________________________

____

APÊNDICE 11: ATIVIDADE: SEGMENTO ÁUREO - POLÍGONOS DE OURO - RAZÃO ÁUREA COM ENFOQUE EM QUESTÕES DE VESTIBULARES

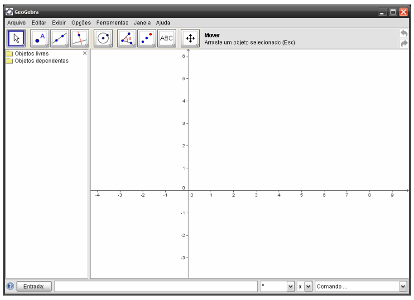
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Ministério da Educação

7º Período do Curso Superior de Licenciatura em Matemática - Atividades de Aplicação de Monografia
Aluno(a) :____ Ensino Médio Data: / /
Professoras em formação: Danielly Silva de Oliveira e Rejane Waiandt Schuwartz Faria

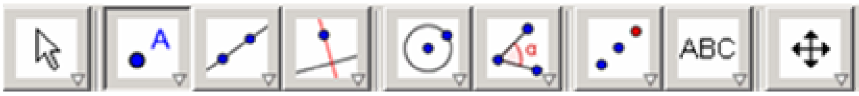
Reconhecimento do *Software* GeoGebra

O *software* GeoGebra é um software livre de geometria dinâmica, que pode ser encontrado no endereço eletrônico www.geogebra.at .

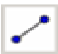
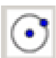
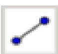
No lado direito da tela são feitas as construções geométricas e do lado esquerdo, a parte algébrica.



Cada ícone tem uma pequena seta no canto, ao clicar nessa seta aparecerão outras opções de ferramentas.



- Faremos algumas construções:

- Construir um segmento de reta ($\overline{AB}$).
- Marcar o ponto médio deste segmento.
- Mover o segmento construído e observar a janela algébrica.
- Construir uma circunferência com centro no ponto médio e raio do ponto médio ao extremo do segmento.
- Marcar um ponto D na circunferência (com D $\neq$ de A e B).
- Traçar o segmento $\overline{DB}$.

- Operações

Podemos também fazer adições(+), subtrações(-), multiplicações(*) e divisões(/) com as medidas dos segmentos utilizando a caixa de entrada do *software*.

- Divida a medida do segmento $\overline{AB}$ pela medida do segmento $\overline{DB}$, para isto clique em entrada () e digite a/b (a medida do segmento $\overline{AB}$ dividido pela medida do segmento $\overline{DB}$) e pressione *enter* para obter o resultado.

I. Construção do Segmento Áureo

I.I. Utilizando o *software* GeoGebra, construa o segmento áureo, seguindo os passos abaixo:

a. Construa um segmento $\overline{AB}$ qualquer;

b. Marque o ponto médio de $\overline{AB}$ e nomeie-o de M;

c. Trace uma perpendicular a $\overline{AB}$ passando pelo ponto B;

d. Trace uma circunferência com raio $\overline{BA}$ e centro em B;

e. Marque o ponto de interseção superior da circunferência com a perpendicular e nomeie-o de O;

f. Trace uma circunferência com centro em M e raio $\overline{MO}$;

g. Construa a semirreta $\overrightarrow{AB}$;

h. Marque e nomeie o ponto de interseção de $\overrightarrow{AB}$ com a circunferência de centro em M de C;

i. Construa o segmento $\overline{AC}$;

j. Construa o segmento $\overline{BC}$;

k. Construa o segmento $\overline{MO}$;

l. Efetue a divisão da medida do segmento $\overline{AC}$ pela medida do segmento $\overline{AB}$;

m. Efetue a divisão da medida do segmento $\overline{AB}$ pela medida do segmento $\overline{BC}$;

n. Observe os resultados obtidos nos itens l. e m. na janela algébrica;

o. Mova um dos extremos do segmento $\overline{AB}$ e observe novamente os resultados obtidos nos itens l. e m. na janela algébrica;

p. Porque o resultado é sempre este? Existe alguma forma de provar isto?

II. Construção de Polígonos de Ouro e da Espiral Logarítmica

II.I. Utilizando o *software* GeoGebra, vamos construir alguns Polígonos de Ouro, seguindo o roteiro abaixo:

a. Construa um pentágono regular;

b. Trace a diagonal $\overline{AD}$;

c. Efetue a divisão da medida da diagonal $\overline{AD}$ pela medida do segmento $\overline{AB}$;

d. Mova o pentágono construído (no ponto A ou no ponto B) e observe o resultado obtido no item c. na janela algébrica.

*Comentário 1:*____

e. Nessa mesma figura marque a diagonal $\overline{BD}$;

f. Efetue a divisão da medida da diagonal $\overline{BD}$ pela medida do segmento $\overline{AB}$;

g. Mova o triângulo construído (no ponto A ou no ponto B) e observe o resultado obtido no item f. na janela algébrica.

*Comentário 2:*____

h. Nessa mesma figura, construa as demais diagonais do pentágono regular.

*Comentário 3:*____

i. Marque todos os pontos de interseção das diagonais;

j. Cada um dos pontos de interseção divide cada diagonal em dois segmentos. Observe o ponto de interseção da diagonal $\overline{BD}$ com a diagonal $\overline{CE}$ e, em seguida marque o maior e o menor segmento determinados por este ponto de interseção na diagonal $\overline{BD}$.

k. Efetue a divisão da medida do maior segmento, pela medida do menor segmento que você acabou de marcar.

l. Mova o pentagrama (no ponto A ou no ponto B) e observe o resultado obtido no item k. na janela algébrica.

Comentário 4: ____

____

____

____

m. E se repetíssemos esta construção no interior do pentágono menor? O que aconteceria?____

____

____

____

II.II. Utilizando o *software* GeoGebra, vamos construir o Retângulo de Ouro e a Espiral Logarítmica, seguindo os passos abaixo:

a. Construa um quadrado;

b. Marque o ponto médio do segmento $\overline{AB}$;

c. Construa uma circunferência com centro no ponto médio E e raio $\overline{EC}$.

d. Marque a semirreta $\overline{AB}$;

e. Marque o ponto de interseção da circunferência com a semirreta;

f. Construa uma paralela ao segmento $\overline{BC}$ passando por essa interseção;

g. Construa uma paralela ao segmento $\overline{AB}$ passando por C;

h. Marque a interseção das duas paralelas construídas;

i. Observe que foi construído o retângulo AFGD. Para melhor visualização una seus vértices através da ferramenta polígono .

j. Efetue a divisão da medida do maior lado do retângulo pela medida de seu menor lado (se o nome do segmento for **a_1** por exemplo, digite no campo de entrada **a_1**);

k. Mova o retângulo construído (no ponto A ou no ponto B) e observe a janela algébrica.

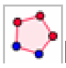
*Comentário 1:*____

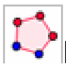
____

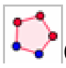
____

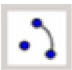
____

l. Nessa mesma figura construa um quadrado de lado DG nessa ordem (isso quer dizer que você deve clicar primeiro em D depois em G, caso contrário o quadrado não ficará na posição adequada).

m. Repita o processo do item anterior, mas agora construindo o quadrado de lado HF, nessa ordem.

n. Mais uma vez repita o processo do item l. construindo o quadrado de lado JA, nessa ordem.

o. Construa um último quadrado de lado LI, nessa ordem.

p. Finalizando trace os seguintes arcos circulares dados o centro e dois pontos:

p_1 : Centro: C; pontos: D e B nessa ordem;

p_2 : Centro: G; pontos: H e D nessa ordem;

p_3 : Centro: F; pontos: J e H nessa ordem;

p_4 : Centro: A; pontos: L e J nessa ordem;

p_5 : Centro: I; pontos: N e L nessa ordem.

*Comentário 2:*____

____

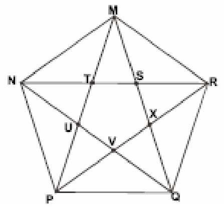
____

____

III. Razão Áurea com enfoque em questões de vestibulares

III.I. (UFF - 2006)

A escola Pitagórica desenvolvia estudos em Matemática, Filosofia e Astronomia. O símbolo dessa Escola era a estrela de cinco pontas, que pode ser construída ligando-se os vértices de um pentágono regular, conforme a figura.



Sejam S_1 e S_2 as áreas dos pentágonos regulares MNPQR e STUVX, respectivamente. Sabendo que $\frac{MU}{MT} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, assinale a opção que contém a razão $\frac{S_1}{S_2}$.

a. $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\right)^2$ b. $\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}{4}$ c. $\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{\sqrt{5}-1}$ d. $\frac{(1-\sqrt{5})^2}{1+\sqrt{5}}$ e. $\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^4}{4}$

III.II. (UFF - 2007)

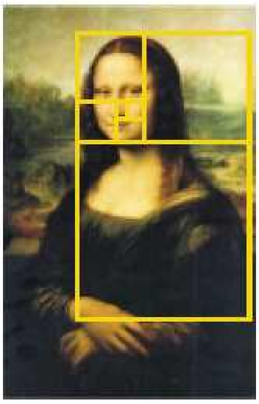


Fig. 1: Mona Lisa e proporções áureas

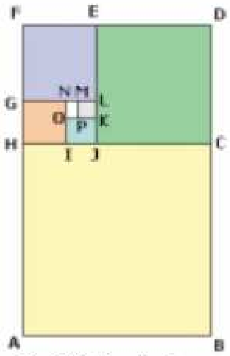


Fig. 2: Retângulos áureos

A "Divina Proporção" também conhecida como proporção áurea foi usada por Leonardo da Vinci para pintar a Mona Lisa , uma de suas mais notáveis obras. Em vários pontos do quadro aparece o retângulo áureo, como ilustrado na figura 1.

Na fig. 2 os quadriláteros ABDF, CDFH, EFHJ, GHJL, IJLN e KLNO são retângulos áureos semelhantes e os quadriláteros ABCH, CDEJ, EFGL, GHIN, IJKO e KLMP são quadrados.

Sabendo-se que a razão entre o maior e o menor lado do retângulo áureo é igual ao número de ouro φ, pode-se afirmar que a razão entre a área do quadrado KLMP e a área do quadrado ABCH é igual a:

a. $\frac{1}{\varphi^6}$ b. $\frac{1}{\varphi^{10}}$ c. $\frac{1}{\varphi^8}$ d. $\frac{1}{\varphi^5}$ e. $\frac{1}{\varphi^{12}}$

III.III. (UERJ/UENF – 2005(adaptada)) O retângulo de ouro é utilizado em Arquitetura desde a Grécia Antiga.

A razão entre as medidas do maior e do menor lado desse retângulo é o número de ouro, representado por φ.

- Sabendo que φ é uma das raízes da equação $x^2 = x + 1$, calcule o valor de φ.