INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE
Campus Campos-Centro
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Ministério da Educação

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DO USO DA UNIDADE DE APRENDIZAGEM "*INVESTIGANDO EM ₵*" NO ESTUDO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

DÉBORA MACIEL DA COSTA

CAMPOS DOS GOYTACAZES

2010

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE
Campus Campos-Centro
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Ministério da Educação

DÉBORA MACIEL DA COSTA

ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DO USO DA UNIDADE DE APRENDIZAGEM "*INVESTIGANDO EM ₵*" NO ESTUDO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos - Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Profª MSc. Gilmara Teixeira Barcelos

Co-orientadora: Profª MSc. Silvia Cristina F. Batista

CAMPOS DOS GOYTACAZES/RJ

2010

Dados de Catalogação na Publicação (CIP)

C837a Costa, Débora Maciel da.

Análise da influência do uso da unidade de aprendizagem"Investigando em C" no estudo dos números complexos / Débora Maciel da Costa – Campos dos Goytacazes, RJ : [s.n.], 2010.

188 f. ; il.

Orientadora: Gilmara Teixeira Barcelos

Co-orientadora: Silvia Cristina F. Batista

Monografia. (Licenciatura em Matemática). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense. Campos dos Goytacazes, RJ, 2010.

Bibliografia: f. 104 – 108..

1. Números complexos. 2. Matemática (Ensino médio) – Estudo e ensino. I. Barcelos, Gilmara Teixeira, orient. II. Batista, Silvia Cristina F., co-orient. III. Título.

CDD – 512.788

DÉBORA MACIEL DA COSTA

ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DO USO DA UNIDADE DE APRENDIZAGEM "*INVESTIGANDO EM ₵*" NO ESTUDO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos - Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovada em 22 de Dezembro de 2010.

Banca Avaliadora:

Profª Gilmara Teixeira Barcelos (orientadora)
Mestre em Ciências de Engenharia/UENF/RJ
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos - Centro

Profª Silvia Cristina F. Batista (co-orientadora)
Mestre em Ciências de Engenharia/UENF/RJ
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos – Centro

Profª Ana Paula Rangel de Andrade
Especialista em Educação Matemática/FAFIC
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos - Centro

Profª Carmem Lúcia Vieira Rodrigues Azevedo
Mestre em Economia Empresarial/ UCAM/RJ
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos – Centro

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus que me proporciona a realização de mais um sonho.

As minhas orientadoras Gilmara e Silvia, por acreditarem em mim e me ajudarem a subir mais um degrau da minha vida.

A todos os meus professores do curso de Licenciatura em Matemática que me ajudaram, direta e indiretamente, para realização deste trabalho.

Aos participantes do teste exploratório e aos alunos do Ensino Médio que aceitaram participar deste trabalho.

À banca examinadora composta pelos professores Ana Paula, Carmem, Gilmara e Silvia pelas contribuições feitas a este trabalho monográfico.

As minhas amigas Larissa, Mikelle e Paola que sempre me deram força e coragem.

Aos meus familiares, em especial, a minha mãe Cláudia, meu irmão Victor e minha irmã Fernanda, que sempre estiveram do meu lado.

“Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real”.

(Lobachevsky)

RESUMO

Na sociedade atual, na qual as transformações ocorrem rapidamente, contribuir para que o indivíduo construa seu conhecimento, aprenda a aprender e desenvolva sua autonomia, senso crítico e responsabilidade é fundamental. Na Matemática, os *applets*, em geral, permitem investigar, levantar e testar conjecturas e, assim, construir conhecimentos. Neste contexto, foi elaborada a unidade de aprendizagem "Investigando em ₵", esta contém *applets*, atividades investigativas, aspectos históricos, entre outros recursos. O objetivo deste trabalho é analisar o desempenho dos alunos no estudo de números complexos, ao utilizar a referida unidade. Para tanto, foi realizada uma pesquisa qualitativa, por meio de um estudo de caso. Nesse sentido, foi necessário desenvolver e experimentar *applets* para o estudo de números complexos no Ensino Médio, assim como atividades pedagógicas relacionadas aos mesmos. Os referidos *applets* foram desenvolvidos com o GeoGebra, um *software* livre para Matemática Dinâmica. Neste trabalho são descritas as etapas cumpridas para atingir os objetivos propostos: desenvolvimento dos *applets*; elaboração das atividades pedagógicas; elaboração dos questionários; teste exploratório; experimentação das atividades e dos *applets*; análise das respostas das atividades e dos questionários. Finalizando, são tecidas considerações sobre os resultados e são apresentadas formas de continuidade do estudo. Os resultados alcançados foram satisfatórios, mostrando que os recursos desenvolvidos são apropriados para o estudo de números complexos.

Palavras–chave: Números Complexos, Unidade de Aprendizagem, Matemática, *Applet*.

ABSTRACT

In the present society, in what changes happen rapidly, contributing that the individual form his knowledge, learn how to learn and develop his autonomy, critic sense and responsibility is essential. In Mathematics, the applets, in general, let people investigate, raise and test conjecturs and, so, form cognizances. Accordingly, the unit of learning "Investigating in C" was elaborated. This unit covers applets, investigate activities, historical features, among other things. The purpose of this work is analyze the student's performance in the study of complex number, using the reported unit. For this, a qualitative research was made through a case study. In this sense, it was necessary to develop and to test applets for the study of complex numbers in High School, like pedagic activities related to them. The reported applets were developed by GeoGebra, a free software to be used in dynamic mathematics. In this work, the achieved ateps to reach the proposed goals are described: development of the applets; elaboration of pedagogic activities and questionaries; explorating examination, experimentation of the activities and questionaries. Finaly, considerations about the results are made and ways to continue the study are presented. The accomplished results were satisfactory, indicating the developed assets are appropriated for the study of complex numbers.

Key words: Complex Numbers, Unit of learning, Mathematics, Applets.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Educar é colaborar para que professores e alunos, nas escolas e organizações, vivenciem processos permanentes de aprendizagem (MORAN, 2000). Na sociedade atual, na qual as transformações ocorrem rapidamente, contribuir para que o indivíduo construa seu conhecimento, aprenda a aprender e desenvolva sua autonomia, senso crítico e responsabilidade, é fundamental. Nesse sentido, a Matemática ensinada nas escolas tem recebido algumas críticas. Segundo D'Ambrósio (2001), esta é ultrapassada, antiga e descontextualizada, o que causa desinteresse dos alunos. Moysés (2007) afirma que os temas matemáticos são, muitas vezes, trabalhados, na escola, de forma isolada do mundo que os rodeia.

Considera-se, então, que buscar formas que favoreçam a compreensão dos conceitos matemáticos é de fundamental importância. Conhecer Matemática significa ser capaz de usá-la com propósitos definidos (NCTM, 1991). Para aprender Matemática, os alunos devem explorar, conjecturar e raciocinar, ultrapassando, em muito, a memorização de regras e procedimentos (NCTM, 1991). É fundamental que os alunos entendam e empreguem a Matemática como ferramenta para desenvolver o raciocínio e para resolver problemas (NCTM, 1991).

Nesse sentido, novas formas de abordar temas matemáticos têm sido buscadas. Destaca-se, entre estas formas, o uso das Tecnologias de Informação de Comunicação (TIC) como recurso para contribuir com a aprendizagem de Matemática.

As TIC, utilizadas em atividades de investigação, podem ser recursos favoráveis para aprendizagem de Matemática, uma vez que reforçam o papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, e relativizam a importância do cálculo e da manipulação simbólica (PONTE; OLIVEIRA; VARANDAS, 2003).

A Internet, em particular, pode ser vista como uma "metaferramenta[1]" na qual é possível encontrar recursos para a aprendizagem de Matemática, tais como: *softwares*, atividades, relatos de experiências, revistas, vídeos, notícias sobre eventos, entre outros (PONTE; OLIVEIRA; VARANDAS, 2003). Além disso, a Internet

---

[1] Metaferramentas: ferramentas que possibilitam a busca em várias ferramentas simultaneamente (SILVA; MENEZES, 2001).

permite a divulgação de produções próprias, sejam textos, imagens, vídeos, construções dinâmicas (*applets*[2]) ou documentos hipertexto. Possibilita, ainda, a comunicação síncrona e assíncrona, constituindo uma ferramenta de grande utilidade para o trabalho colaborativo (PONTE; OLIVEIRA; VARANDAS, 2003). Ao facilitar e estimular as integrações entre as pessoas, a Internet representa um suporte do desenvolvimento humano nas dimensões pessoal, social, cultural, lúdica, cívica e profissional. Além disso, a Internet constitui um instrumento de trabalho essencial do mundo de hoje, razão pela qual desempenha um papel cada vez mais importante na educação (PONTE; OLIVEIRA; VARANDAS, 2003).

É importante, portanto, que os professores de Matemática utilizem na sua prática docente as TIC, incluindo *software* educacional específico para a sua disciplina e de uso geral (NCTM, 1994) e Internet. Estas tecnologias podem contribuir para melhoria do processo de ensino e aprendizagem de Matemática, possibilitando inovações. Além disso, permitem que o professor dê maior atenção ao desenvolvimento de capacidades de ordem superior, valorizando as possibilidades de realização, na sala de aula, de atividades e projetos de exploração, investigação e modelagem (PONTE, 1995). Deste modo, as TIC podem favorecer o desenvolvimento de importantes competências nos alunos, bem como de atitudes mais positivas em relação à Matemática e estimular uma visão mais completa sobre a natureza desta ciência (PONTE; OLIVEIRA; VARANDAS, 2003).

Números complexos[3] é um tema presente em diversos contextos, tais como circuitos elétricos, corrente alternada, astronomia, motores de mecânica quântica, entre outros (CARNEIRO, 2004). Porém, este tema ainda é pouco abordado nas escolas de Ensino Médio, em particular, em Campos dos Goytacazes (BATISTA, 2004). Além disso, é pouco explorada sua interpretação geométrica (CARNEIRO, 2004).

Diante desse contexto foi desenvolvida a unidade de aprendizagem online "Investigando em ₵" (http://www.es.iff.edu.br/softmat/projetotic/complexos/index.html). A mesma é composta de páginas HTML e contém 15 *applets* para estudo do tema números complexos. Os *applets* da unidade permitem o estudo de números complexos

[22] *Applets* são programas desenvolvidos em linguagem de programação Java®, que podem ser incluídos em códigos HTML (DEITEL H.; DEITEL. P., 2003).
[3] No próximo capítulo este tema é aprofundado.

associado à Geometria Analítica, o que favorece uma análise mais geométrica do tema. A unidade contém, ainda, uma apostila de atividades investigativas associadas aos *applets*, aspectos históricos sobre números complexos e *links* para outros endereços sobre o tema. Ela pode, então, ser vista como um conjunto de objetos de aprendizagem, por conter diversos *applets*, ou ela própria, em sentido amplo, pode ser vista com um objeto de aprendizagem (OA)[4].

A proposta da unidade é fundamentada na teoria vygostskiana. A mediação, nesta teoria, inclui o uso de instrumentos e de signos no contexto social, e a combinação de uso destes recursos mediadores possibilita o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores (VYGOTSKY, 2007). Segundo o referido autor, o processo de ensino e aprendizagem deve se adiantar ao desenvolvimento, criando a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP[5]). Os recursos pedagógicos (*applets* e apostila de atividades) desenvolvidos e disponibilizados na unidade são instrumentos mediadores que, bem utilizados, podem contribuir para a criação de ZDP.

A referida unidade foi desenvolvida no âmbito do projeto de pesquisa, Tecnologias de Informação e Comunicação no Processo de Ensino e Aprendizagem de Matemática, vinculado ao IF Fluminense Campus Campos-Centro. Esta foi elaborada pela autora desse trabalho monográfico sob orientação das professoras Gilmara Teixeira Barcelos e Silvia Cristina Freitas Batista. Como parte das atividades do referido projeto, a mesma foi experimentada (teste exploratório 1) com um grupo de professores de Matemática em formação e em serviço, por meio de um minicurso realizado no IF Fluminense Campus Campos-Centro, com duração de quatro horas (dividido em dois encontros). No desenvolvimento deste trabalho monográfico, a referida unidade de aprendizagem foi complementada com *applets* para o estudo de potenciação e radiciação de números complexos e com uma seção contendo aplicações práticas do referido tema, em outras áreas de conhecimento.

A avaliação dos recursos é um aspecto muito importante não só em termos de usabilidade, mas também com relação à parte pedagógica (desempenho do

[4] Objeto de aprendizagem (OA), segundo Behar e Gaspar (2007, p.2) "são recursos digitais modulares, usados para apoiar a aprendizagem presencial e à distância". Pode ser considerado um OA, qualquer recurso digital que possa ser reutilizado e auxilie na aprendizagem.

[5] A ZDP é " [...] a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes "(VYGOTSKY, 2007, p. 97).

aluno). Para obter sucesso com o uso de OA é preciso que haja objetivos claros e precisos que auxiliem o educando na sua aprendizagem (RAMOS; DOMENICO; TORRES, 2006). Além da avaliação do OA com relação a sua adequação para prática pedagógica, destaca-se, também, a importância da familiarização do docente com a utilização de tecnologia em sala de aula, tornando-a um suporte ao processo de construção do conhecimento do aluno. Ressalta-se, ainda, que é fundamental que o OA colabore para que os alunos se sintam motivados com o processo de ensino e aprendizagem (RAMOS; DOMENICO; TORRES, 2006).

Assim, avaliação de um OA não é tarefa simples, uma vez que a multiplicidade de fatores tanto educacionais quanto técnicos deve ser considerada. A qualidade de um OA está associada à sua facilidade de utilização e à sua adequação à prática pedagógica. Essa adequação exige, desde a seleção de conteúdos, até a estratégia didática para sua utilização em sala de aula (PEREIRA MELO, 2009). Tudo isso destaca a importância do trabalho realizado nesta monografia, que se destinou a analisar o uso da unidade "Investigando em $\mathbb{C}$" em termos pedagógicos e em relação à facilidade de uso.

Diante desse contexto, estabeleceu-se a seguinte questão de pesquisa: Qual o desempenho dos alunos no estudo de números complexos, ao utilizar a unidade de aprendizagem "Investigando em $\mathbb{C}$"?

Logo, este trabalho tem por objetivo geral analisar o desempenho dos alunos no estudo de números complexos, ao utilizar a referida unidade. Tendo em vista este propósito, alguns objetivos específicos foram delineados:

- Identificar aplicações de números complexos em diferentes áreas de conhecimento;
- Verificar a experiência dos alunos quanto ao uso de TIC no contexto geral e, em particular, no processo de ensino e aprendizagem;
- Experimentar os *applets* e as atividades;
- Analisar os resultados diagnosticados na experimentação da unidade de aprendizagem "Investigando em $\mathbb{C}$";
- Avaliar a unidade de aprendizagem quanto à adequação pedagógica e quanto à facilidade de utilização.

Tendo os objetivos propostos, esta monografia encontra-se estruturada em três capítulos, além desta Introdução e das Considerações Finais.

No Capítulo 1 “Números Complexos” apresenta-se a fundamentação teórica deste trabalho monográfico, por meio de estudos sobre o tema matemático em questão e sobre o uso de TIC na educação, em literaturas especializadas no assunto. Esse capítulo é subdivido em quatro seções. Na primeira seção relatam-se aspectos históricos e o desenvolvimento dos números complexos; na segunda, apresentam-se algumas aplicações de números complexos em três áreas do conhecimento; na terceira seção apresentam-se vantagens atribuídas ao uso das tecnologias digitais para a aprendizagem de números complexos; e na quarta apresentam-se estudos relacionados ao tema deste trabalho monográfico.

No Capítulo 2, “Configuração da Pesquisa: aspectos metodológicos” descrevem-se a metodologia adotada e todas as ações realizadas para o desenvolvimento deste trabalho. Esse capítulo é subdividido em quatro seções. Na primeira seção, são descritos os objetivos de cada *applet* utilizado nas atividades elaboradas e aplicadas. Na segunda, são descritos os objetivos de cada atividade realizada neste trabalho. Na terceira, relata-se como a unidade de aprendizagem foi desenvolvida, descrevem-se as seções que a mesma contém e a reformulação das páginas, promovida durante o desenvolvimento deste trabalho monográfico. Na quarta seção, são apresentados os objetivos dos três questionários elaborados e aplicados.

No Capítulo 3, “Relato de Experiência”, descrevem-se e analisam-se os resultados do segundo teste exploratório e dos dois estudos de caso promovidos. Esse capítulo é subdividido em três seções. Na primeira seção, são relatados e analisados os dados obtidos no segundo teste exploratório das atividades, dos *applets* e da unidade, realizado com professores de Matemática em formação e em serviço. Na segunda e na terceira seções relata-se o processo de experimentação da unidade de aprendizagem “Investigando em $\mathbb{C}$”, realizado com alunos do Ensino Médio, e, para tanto, são analisadas resoluções de atividades, respostas do questionário, atitudes e questionamentos dos alunos durante o primeiro e o segundo estudo de caso, respectivamente.

Nas “Considerações Finais” destaca-se a importância deste estudo e promove-se uma breve retrospectiva da pesquisa, focalizando os principais resultados. Além disso, relatam-se as contribuições e as dificuldades encontradas e, finalizando, apontam-se algumas formas de continuidade do estudo realizado.

1 NÚMEROS COMPLEXOS

O papel central que os números complexos exercem e suas inúmeras utilidades são bastante claras, para todos que trabalham com Matemática (CARNEIRO, 2004). Além disso, encontram-se números complexos no estudo de circuitos elétricos, corrente alternada, astronomia, motores de mecânica quântica (CARNEIRO, 2004).

Apesar da importância do tema, uma pesquisa mostrou que das 47 escolas de Ensino Médio existentes em 2004, no município de Campos dos Goytacazes (estaduais, municipais, federais e particulares), apenas 53% trabalhavam o tema números complexos (BATISTA, 2004). Esse resultado indica que muitos alunos terminaram o Ensino Médio sem estudar esse tema matemático, na referida cidade.

Carneiro (2004) também descreve que os números complexos não têm a atenção que merecem, não só no Ensino Médio como também no Ensino superior:

> Os Números Complexos ocupam uma posição singular no ensino de Matemática. Não merecem grande atenção nos cursos de licenciatura e bacharelado em Matemática, por serem considerados "assunto elementar" de nível médio. Já no ensino médio, são evitados, sendo tachados de estranhos, de compreensão difícil e, sobretudo, inútil (CARNEIRO, 2004, p. 15).

Segundo Carneiro (2004), o ensino dos números complexos ainda encontra-se preso à sua origem histórica, pouco se beneficiando da abordagem geométrica iniciada há 200 anos por Wessel, Argand e Gauss. De acordo com o referido autor, a abordagem geométrica dos números complexos deveria estar incorporada ao ensino tradicional, pois nada mais é do que a "forma trigonométrica ou polar" dos complexos. A adoção de uma abordagem geométrica dos números complexos não exclui o uso algébrico dos mesmos (CARNEIRO, 2004). Quando se perde a chance de apresentar os complexos imediatamente como entes geométricos, em geral essa oportunidade não se recupera, podendo acarretar conseqüências, como destaca Carneiro (2004):

> O iniciante permanece com uma visão formal e algebrizante, não se beneficiando da riqueza da visualização e não emprestando um "significado" aos Números Complexos; dificilmente ocorrerá ao estudante aplicar Números Complexos a problemas de geometria (CARNEIRO, 2004, p 23).

Diante desse contexto, evidencia-se a importância da unidade de aprendizagem online "Investigando em ₵" e, consequentemente, deste trabalho monográfico, uma vez que o enfoque dado aos números complexos é fortemente geométrico.

Visando favorecer o entendimento do contexto no qual se inserem os números complexos, abordam-se, neste capítulo, alguns aspectos relacionados ao tema. Inicialmente, apresenta-se uma breve análise histórica, dando uma ideia da sua origem e desenvolvimento. A seguir, mostram-se aplicações dos números complexos em outras áreas do conhecimento. Finalizando, descreve-se a importância do uso de tecnologias para o estudo deste tema e apresentam-se estudos relacionados.

1.1 Notas Históricas

Contrariando o que é, muitas vezes, divulgado nos livros didáticos, a construção da teoria dos números complexos não teve origem na análise das equações do segundo grau, mas sim, na busca da solução da equação do terceiro grau (MILIES, 1993).

Na primeira metade do século XVI, o matemático italiano Gerônimo Cardano apresentou, em sua obra *Ars Magna*, uma forma de resolver equações cúbicas do tipo $x^3 + px = q$, com p e q reais (forma esta que havia sido descoberta por outro matemático italiano, Niccolo Tartaglia) (MELLO, 2005). Cardano, ao resolver a equação $x^3 = 15x + 4$, da qual ele conhecia a raiz 4, se deparou com raízes quadradas de números negativos, algo que era considerado inexistente na época (MELLO, 2005).

Raphael Bombelli (1526-1573), um admirador da *Ars Magna* de Cardano, publicou uma obra denominada *l'Álgebra*, em 1572, expondo os mesmos assuntos, mas de forma mais didática (MILIES, 1993). Nessa obra, ele estudou a resolução de equações de grau não superior a quatro e considerou, em particular, a equação $x^3 = 15x + 4$. Ao aplicar a fórmula de Cardano para o cálculo das raízes, ele decidiu prosseguir, considerando a possibilidade de existência de expressões envolvendo raízes quadradas de números negativos. Dessa forma, ele conseguiu obter raiz 4, previamente conhecida.

A partir de então, os matemáticos foram considerando cada vez mais a existência de raízes quadradas de números negativos, dando origem a um novo tipo de número (MELLO, 2005). Assim, no século XVI, estava ocorrendo, na Matemática, algo semelhante ao que ocorreu no tempo dos gregos antigos, quando se verificou a insuficiência dos números racionais, com a construção do número $\sqrt{2}$, que não é racional. Ou seja, verificava-se que o conceito de número precisava ser, novamente, estendido (CERRI; MONTEIRO, 2001).

Os itens abaixo descrevem, brevemente, a evolução da simbologia e das expressões relacionadas aos números complexos (MILIES, 1993):

- O símbolo $\sqrt{-1}$ foi introduzido, em 1629, por Albert Girard;
- Os termos **real** e **imaginário** foram empregados, em 1637, por René Descartes;
- O símbolo *i* foi usado, em 1777, por Leonhard Euler para representar $\sqrt{-1}$. Este símbolo apareceu impresso pela primeira vez, em 1794, e se tornou amplamente aceito após seu uso por Carl Friederich Gauss, em 1801;
- A expressão **número complexo** foi introduzida por Gauss, em 1832;
- A representação gráfica dos números complexos foi desenvolvida, de forma independente, por Caspar Wessel, em 1799; Jean-Robert Argand, em 1806 e Gauss, em 1831. Porém, quem, verdadeiramente, tornou a interpretação geométrica amplamente aceita foi Gauss;
- A formalização completa dos números complexos como pares ordenados de números reais foi desenvolvida por William Rowan Hamilton, em 1833.

O estudo de números complexos evoluiu e se faz presente em, praticamente, todos os grandes ramos da Matemática, tais como Álgebra, Topologia, Geometria (Analítica, Diferencial ou Algébrica), Análise, entre outros (LIMA, 1985). Além disso, os Complexos estão presentes em aplicações como dinâmica dos fluidos e eletromagnetismo (LIMA, 1985).

No entanto os livros didáticos não tratam os números complexos como realmente os grandes matemáticos o fizeram. Poucos são os que mencionam as equações do 3º grau, questão que motivou a descoberta e o uso dos números complexos (DANTAS; NASCIMENTO, 2010).

Segundo Carneiro (2004), alguns estudantes ficam extremamente surpresos ao saber que números complexos têm aplicações em problemas “reais”. Diante disso, apresentam-se, na próxima seção, algumas aplicações de números complexos em outras áreas de conhecimento.

1.2 Aplicações

Segundo Araújo (2006), a inclusão dos números complexos nos Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio e a aplicação deste tema em outros contextos como Física, Engenharia, Circuitos Elétricos, Topografia, Informática e Cosmologia sinalizam a importância deste conteúdo para a formação matemática do aluno. Neste trabalho monográfico, por meio de revisão bibliográfica, foram identificadas aplicações de números complexos em Engenharia Elétrica, no estudo de Fractais e na aerodinâmica. Estas aplicações são descritas nas subseções a seguir.

1.2.1 Engenharia elétrica

Em circuitos de corrente alternada como, por exemplo, nas instalações elétricas residenciais, as grandezas elétricas são analisadas com o auxílio dos números complexos, o que facilita muito os cálculos (DANTE, 2008). A relação[6] $U = Ri$ (U é tensão, R é resistência e i é corrente elétrica), estudada na Física do Ensino Médio e que utiliza números reais, torna-se $U = Zi$. Nesta relação, Z é impedância elétrica e as demais letras mantêm seus significados anteriores, sendo que essas grandezas passam a ser representadas por meio de números complexos (DANTE, 2008).

A impedância (Z) indica a oposição total que um circuito oferece ao fluxo de uma corrente elétrica variável no tempo. A mesma é expressa como um número

[6] Primeira Lei de Ohm.

complexo, possuindo uma parte real, equivalente à resistência (R), e uma parte imaginária, dada pela reatância (X). Reatância é a resistência oferecida à passagem de corrente alternada, por um indutor ou capacitor num circuito.

Para que não haja confusão entre i, símbolo da corrente elétrica, e i, unidade imaginária, os engenheiros elétricos usam j como unidade imaginária na representação algébrica $a+bj$. Além disso, usam a notação $|w|\angle\theta$ para forma trigonométrica $|w|(\cos\theta + isen\theta)$ do número complexo w (DANTE, 2008).

Exemplo:

Uma fonte de tensão, de valor eficaz $220\angle 0°$, alimenta uma carga de impedância $Z=(10+10j)$ ohm. Obtenha a corrente fornecida pela fonte.

Temos: $U = Zi \Rightarrow i = \dfrac{U}{Z}$

Para efetuar essa divisão, é preferível ter U *e* Z *na forma trigonométrica.*

Já temos $U = 220\angle 0° = 220(\cos 0° + jsen 0°)$, *e agora precisamos obter a forma trigonométrica de* Z *:*

$$Z = 10+10j \Rightarrow |Z| = \sqrt{10^2+10^2} = 10\sqrt{2}\ .$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{10}{10\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ sen\theta = \dfrac{10}{10\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = 45°$$

Então:

$$10+10j = 10\sqrt{2}(\cos 45° + jsen 45°) = 10\sqrt{2}\angle 45°$$

Assim:

$$i = \frac{U}{Z} = \frac{220}{10\sqrt{2}}[\cos(0°-45°) + jsen(0°-45°)] =$$

$$= 11\sqrt{2}[\cos(-45°) + jsen(-45°)] =$$

$$= 11\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j\right) = 11 - 11j$$

$$\left(ou\ 11\sqrt{2}\angle -45°\right)$$

1.2.2 Fractais

Os procedimentos (algoritmos) recursivos (iterativos ou recorrentes) no plano complexo criam, na maioria das vezes, figuras invariantes por escala (Figura 1.1) denominadas fractais (EZEQUIAS, 1998). Os fractais servem como ferramenta para descrever as formas irregulares da superfície da terra e modelar fenômenos, aparentemente imprevisíveis (Teoria do Caos) de natureza meteorológica, astronômica, econômica, biológica, etc. (EZEQUIAS, 1998). Segundo o referido autor, Von Koch[7] e Gaston Julia[8], foram os pioneiros no uso de procedimentos recursivos na criação de fractais

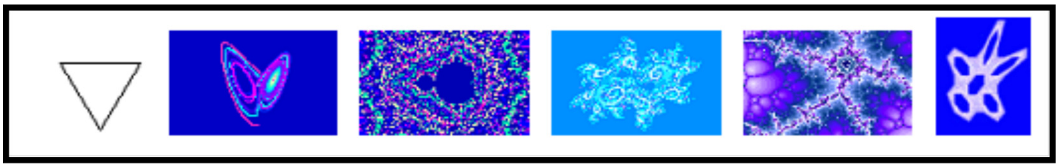


Figura 1.1: Fractais. Fonte: Ezequias (1998).

Segundo Ezequias (1998), Henon[9] estudou o sistema $X_{n+1} = 1 - Y_n - a(X_n)^2$ e $Y_{n+1} = bX_n$. Foi observado que, dados a, b, X_o, Y_o, variando n (n = 0,1,2,3, ...) e representando o par (X_n , Y_n) no plano complexo, independentemente dos valores iniciais X_o e Y_o, os caminhos numéricos descritos pelos pares ordenados (X_o , Y_o), (X_1 , Y_1) , (X_2 , Y_2) , ... , (X_n , Y_n) repetiam-se, formando hexágonos deformados. Ampliando seu conjunto de trajetórias (vários X_o e Y_o) e representando-as juntas no plano complexo, Henon produziu uma figura enigmática que chamou de "Gingerbreadman".

Mandelbrot[10], segundo Ezequias (1998), estudou a equação $X_{n+1} = (X_n)^2 + Z$, onde Z = a + bi, $i^2 = -1$ e n = 1 , 2 , 3 , ... Por meio de um programa recursivo de

---

[7] Niels Fabian Helge Von Koch (25/01/1870 - 11/03/1924) foi um matemático sueco, que deu seu nome ao famoso fractal conhecido como o floco de neve de Koch, uma das primeiras curvas fractais (UNIVERSITY OF ST ANDREWS, 2000).

[8] Gaston Julia, matemático francês, nascido em 1893 e falecido em 1978, definiu os conjuntos conhecidos como de Julia, redescobertos na década de 70 pelas experiências computacionais de Mandelbrot (UNIVERSITY OF ST ANDREWS, 2008).

[9] Michel Hénon, astrônomo do observatório de Nice, estudou fenômenos caóticos associados à trajetória de estrelas através de uma galáxia (MESQUITA; MOTA, s.d.).

[10] Benoît B. Mandelbrot (Varsóvia, 20/11/1924 — Cambridge, 14/10/2010) foi um matemático francês de origem judaico-polonesa. Seu principal trabalho foi a proposta de um novo conceito de geometria que ficou conhecida como geometria fractal (JUNGES, 2010).

computador (um programa em loop), variou Z e o computador imprimiu na tela os pontos X_{n+1}. Mandelbrot constatou que, para cada valor de Z, uma figura era imprimida na tela. Ampliando as figuras descobriu que continham cópias aproximadas de si mesmas (auto-semelhança) (Figura 1.2).

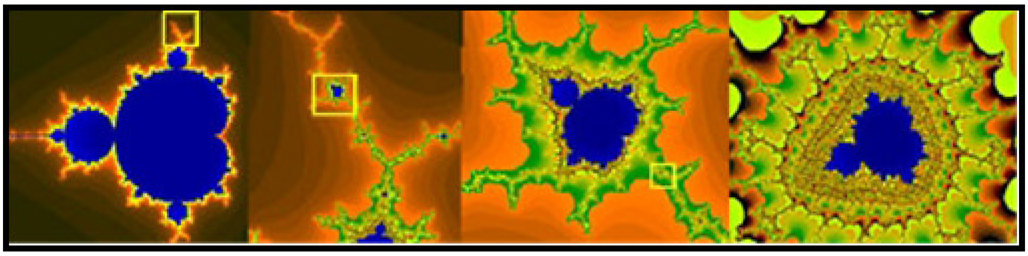


Figura 1.2: Réplicas do conjunto de Mandelbrot. Fonte:http://pt.wikipedia.org/wiki/Conjunto_de_Mandelbrot

Hubbard[11], de acordo com Ezequias (1998), resolveu a equação polinomial do quarto grau $x^4 - 1 = 0$ no computador, usando o método de Newton estendido para raízes complexas. Ao mapear a maneira pela qual o método leva, de diferentes valores iniciais x_o, a uma das quatro soluções, produziu também geometria fractal. Os fractais permitem desenhar (ou modelar) qualquer coisa (ou fenômeno) da natureza numa tela de computador (computação gráfica), tudo isto graças ao corpo dos números complexos (RICIERI, 1993; CLEICK, 1991; SEITER, 1995 *apud* EZEQUIAS, 1998).

1.2.3 Aerodinâmica

A transformação de Joukowski é muito usada no desenho de aerofólios, sob as formas mais variadas (PAZOS, 2005). Para tanto, utiliza-se a função de uma variável complexa $f(z) = z + \frac{1}{z}$ (soma da identidade com a inversa multiplicativa).

Se a função $f(z) = z + \frac{1}{z}$ for utilizada para transformar a circunferência unitária centrada na origem, obtém-se o conjunto de pontos $z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Desta forma, $f(e^{j\theta}) = e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos(\theta) = 2\,\mathrm{Re}(e^{j\theta})$, isto é a circunferência unitária transforma-se em um segmento no eixo real do plano complexo (PAZOS, 2005).

11 John Hamal Hubbard é um matemático americano, conhecido pelas contribuições no campo da dinâmica complexa (CORNEL UNIVERSITY, 2003).

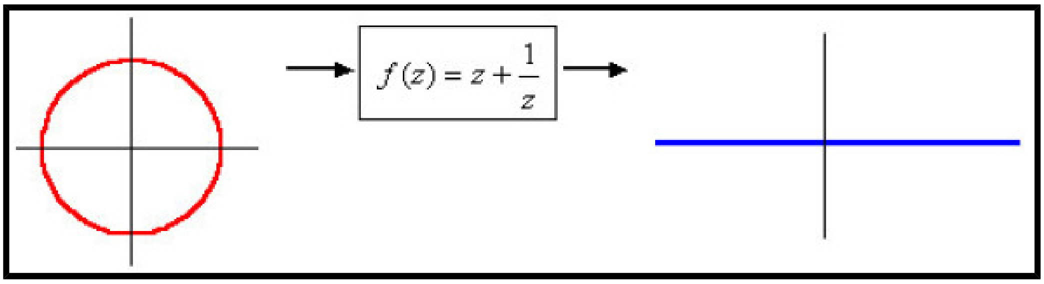


Figura 1.3: Transformação do círculo num segmento mediante a função $f(z) = z + \frac{1}{z}$. Fonte: Pazos (2005, p. 8).

Porém, se a circunferência sofrer, previamente, uma pequena dilatação e um deslocamento do centro ao longo do eixo real, a transformação obtida não mais será um segmento e sim um aerofólio (PAZOS, 2005).

Para tanto, define-se a função $p(\delta, t) = -\delta + (1+\delta)e^{jt}$. Com essa função, obtém-se uma circunferência no plano complexo cujo centro é deslocado δ unidades à esquerda sobre o eixo real e com raio 1 + δ (Figura 1.4 a esquerda). O conjunto resultante mediante esta função é o aerofólio mostrado na figura 1.4 (à direita).

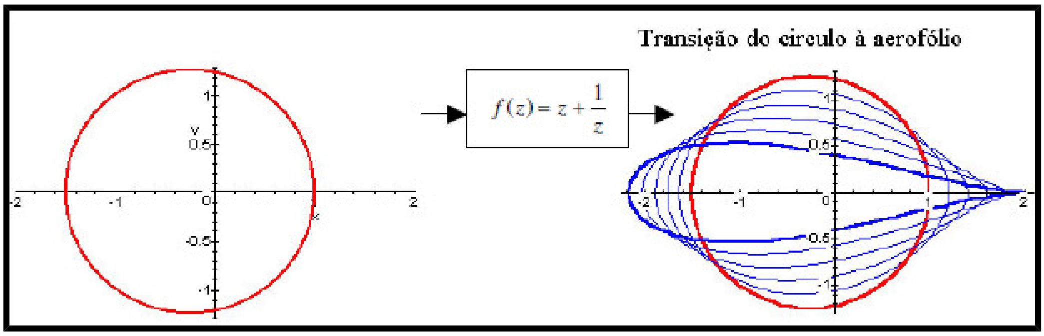


Figura 1.4: Transformação do círculo unitário deslocado e dilatado apropriadamente no aerofólio Fonte: Pazos (2005, p. 8).

Aplicando a transformação de Joukowski nos modelos matemáticos de aerofólios sobre um cilindro (ou círculo, no caso bidimensional), os engenheiros aeronáuticos estabelecem previsões das forças de sustentação e arrasto nas asas de um avião cujas seções transversais possuem certas formas de aerofólios (PAZOS, 2005).

Além das aplicações descritas nesta seção, os números complexos também são usados para o estudo de fluxo de fluidos (SILVA; SOUZA; MARQUES, 2009).

As aplicações apresentadas revelam a importância do estudo de números complexos em outras áreas do conhecimento. Sendo assim, pode-se afirmar que o estudo de números complexos é tão importante para a Matemática quanto para outras áreas, conforme relatado acima.

1.3 Números Complexos e Tecnologias de Informação e Comunicação

A Matemática, muitas vezes, assume uma função social de diferenciação e de exclusão (MATOS, 2005). Sendo pouco acessível, esta desempenha um papel decisivo na vida das pessoas, rotulando-as e posicionando-as como aptas ou inaptas à participação nos processos de decisão da sociedade (MATOS, 2005). Aliado a isso, o baixo desempenho dos alunos brasileiros na avaliação do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (Programme for International Student Assessment - PISA)[12] (INEP, 2007) sinaliza que buscar formas que favoreçam a compreensão dos conceitos matemáticos é de fundamental importância.

O processo de ensino e aprendizagem de Matemática não pode ir na contramão das necessidades atuais e permanecer estagnado, imutável, encerrado em si mesmo, como que alheio às mudanças. A Matemática estudada nas escolas deve ser mais acessível, de forma a se tornar menos excludente.

Segundo Carneiro (2004), a humanidade levou milhares de anos para descobrir os números complexos, mas somente 200 anos após a descoberta dos números complexos começou-se a perceber o verdadeiro significado e as potencialidades de aplicação destes números. Passados outros 200 anos, o ensino dos números complexos ainda contempla pouco a abordagem geométrica do tema, apesar das possibilidades abertas pelos programas de computador de geometria dinâmica (CARNEIRO, 2004).

Nesse sentido, diversas ações podem ser empreendidas. As Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC), utilizadas em atividades de investigação, podem ser recursos importantes para aprendizagem de Matemática. Segundo Baldin (2002), a utilização dos recursos tecnológicos na Matemática é motivada por algumas facilidades que estes podem trazer, tais como: capacidade computacional,

---

[12] O objetivo do PISA é fornecer indicadores para a discussão da qualidade da Educação Básica, que possam subsidiar políticas nacionais de melhoria da educação. No Brasil, em 2006, 9.295 estudantes na faixa de 15 anos (do 7º e do 8º anos do Ensino Fundamental e no 1º e no 2º anos do Ensino Médio) participaram da avaliação do PISA. Numa escala de 0 (zero) a 800, os estudantes brasileiros obtiveram uma média de 369,52 pontos na prova de Matemática. Com esse desempenho o Brasil ficou em 54º lugar em Matemática, numa prova da qual participaram 57 países (INEP, 2007).

visualização gráfica, descoberta e confirmação de propriedades, possibilidades de executar experimentos com coleta de dados e modelagem de problemas, especulações, entre outras. Segundo Bairral (2009) determinadas figuras geométricas e representações gráficas são difíceis de serem construídas com recursos tradicionais, como papel, lápis, quadro e giz, e são mais facilmente desenhadas com o uso de ferramentas computacionais.

Diante das vantagens que estas tecnologias oferecem, considera-se que a criação de recursos didáticos digitais[13] que permitam ao aluno a experimentação, a investigação e a manipulação, pode diminuir o elevado nível de abstração do estudo de números complexos.

Segundo Dantas e Nascimento (2010), é importante fazer com que o aluno alcance o objetivo do estudo dos complexos a partir de uma investigação que o permita promover reflexões. As orientações contidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais incentivam essa postura, mas não sugerem uma forma de inserir o conceito de números complexos. Na verdade, mostra esse conceito como um tema isolado da resolução de equações e que pode ser visto como parte flexível do currículo. Sendo assim, cabe ao professor buscar outros métodos para trabalhar o referido conceito, o que envolve grande esforço por parte do docente, já que na maioria dos casos sua alternativa está nos livros didáticos (DANTAS; NASCIMENTO, 2010).

Os programas de geometria dinâmica abriram novos caminhos para o ensino da geometria e, portanto, para o enfoque geométrico dos números complexos (CARNEIRO, 2004). Neste sentido, tem-se, por exemplo, os *applets*. Com relação aos *applets*, Bairral (2009) destaca algumas vantagens:

> Sua diferente apresentação e dinâmica motiva os usuários por apresentar uma forma diferente de visualização e interação dos recursos usuais (livros e cds). Seu uso é desafiador. O usuário pode aprender de forma diferente, até mesmo, interagindo com a figura. Estimula o trabalho individual e coletivo. Sua facilidade de acesso pela disponibilidade gratuita na rede. As fontes de informação estão muito mais diversificadas (BAIRRAL, 2009, p. 49).

[13] Tais como os *applets* da unidade Investigando em ₵.

O docente pode utilizar os *applets* tanto na elaboração das atividades para os seus alunos, quanto no estudo e na aprendizagem própria (BAIRRAL, 2009). O autor afirma ainda que a escola deve estimular novas formas de experimentação e criação por parte dos alunos, bem como seu uso crítico e não apenas cópia ou reprodução de algo construído.

A escassa presença de *applets* disponíveis em português é um alerta para a necessidade de construção (por estudantes e professores) e disponibilização em *sites* nacionais, de preferência oficiais (de Secretarias de Educação, do MEC, de Universidade, etc.) (BAIRRAL, 2009).

Diversas pesquisas têm sido realizadas sobre o uso de *applets* na aprendizagem matemática (UNDERWOOD et al., 2005; BRANDÃO, ISOTANI e MOURA, 2006; LEE, HOLLEBRANDS, 2006; SANTOS, 2008). O diferencial deste trabalho monográfico é a proposta pedagógica da unidade de aprendizagem. Esta possibilita o uso de *applets* associado a atividades investigativas, permitindo o estabelecimento de conjecturas sobre tópicos de números complexos.

1.4 Estudos Relacionados

Para elaboração desta seção, foram revisados alguns livros, dissertações e artigos especializados no assunto. Segundo Oliveira (2010), as apresentações das propriedades gráficas dos números complexos são tópicos ainda pouco abordados nas escolas e mesmo nas faculdades, haja vista as poucas dissertações (apenas seis, de 1970 até 2009), nenhuma tese e mesmo pouco enfoque deste conteúdo em livros didáticos.

No artigo de Carneiro (2004), denominado “A Geometria e o Ensino dos Números Complexos”, descreve-se a história dos números complexos e ressalta-se o significado geométrico dos mesmos. Além disso, é feita uma análise de como era o ensino deste tema no período da pesquisa e é defendida a importância do enfoque geométrico e do uso de programas de geometria dinâmica para o estudo de números complexos. Por meio dessa análise, Carneiro (2004) verificou que o ensino dos números complexos ainda era muito preso à sua origem histórica, pouco se beneficiando da abordagem geométrica iniciada há 200 anos por Wessel, Argand e Gauss. O autor afirma, ainda, que sem a referida abordagem, o aluno permanece com uma visão demasiada formal e algebrizante, não se beneficiando da riqueza da visualização e não atribuindo um “significado” aos números complexos.

Na dissertação de mestrado de Araújo (2006), “Números Complexos: uma proposta de mudança metodológica para uma aprendizagem significativa no Ensino Médio”, é apresentada uma proposta metodológica para o ensino e aprendizagem de números complexos, fundamentando-se nas dificuldades apresentadas pelos alunos do Ensino Médio. Para tanto, foram realizados dois levantamentos de dados: o primeiro relacionado à forma de apresentação dos conteúdos dos números complexos nos livros didáticos de Matemática; o segundo relacionado às entrevistas realizadas com professores do Ensino Médio que ensinam números complexos. Essa entrevista teve como objetivo verificar as dificuldades encontradas no estudo deste tema. A partir dos dados levantados foi elaborada a proposta metodológica que foi experimentada com alunos do segundo ano do Ensino Médio do Centro Federal de Educação Tecnológica do Rio Grande do Norte (CEFET/RN). Finalizando, os resultados obtidos são apresentados. O autor concluiu que a mudança metodológica no processo de ensino e aprendizagem dos números complexos por meio de atividades apresentou resultados positivos.

O artigo de Dantas e Nascimento (2010) “Números Complexos: uma análise de livros didáticos do Ensino Médio” tem como objetivo refletir sobre a importância dada aos números complexos no currículo nacional, bem como verificar como os livros didáticos exploram este tema, analisando erros conceituais e o processo histórico contido na abordagem do mesmo. Por meio de pesquisas, os autores verificaram que a principal falha cometida por parte dos livros didáticos foi desviar o percurso histórico, no qual utiliza-se a equação o 2º grau como conceito, quando deveriam utilizar como ferramenta.

A dissertação de mestrado em Educação Matemática de Oliveira (2010), “Números Complexos: um estudo dos registros de representação e de aspecto gráficos”, tem como objetivo investigar se uma sequência didática explorando os aspectos gráficos dos números complexos tornaria o aprendizado mais significativo. Este trabalho visa destacar as operações com números complexos, uma vez que as mesmas estão relacionadas a rotações, translações, simetrias, ampliações e reduções no plano de Argand-Gauss. Essa pesquisa apresentou resultados positivos e negativos. Positivos em relação à visualização e apreensão dos aspectos gráficos dos números complexos, que possibilitou o entendimento por parte dos alunos do significado geométrico das operações entre números complexos[14]. Um aspecto considerado negativo foi a pequena quantidade de problemas que enfocasse os aspectos geométricos dos números complexos.

O diferencial do presente trabalho monográfico está no uso de *applets* relacionando Álgebra e Geometria no estudo de números complexos. As movimentações realizadas nos *applets* associadas às atividades possibilitam aos alunos estabelecer conjecturas. Esse fato torna o estudo do tema mais agradável e menos abstrato.

Tendo em vista os objetivos deste trabalho monográfico, apresenta-se no próximo capítulo a configuração da pesquisa.

[14] Esta pesquisa não contemplou potenciação e radiciação de números complexos.

2 CONFIGURAÇÃO DA PESQUISA: ASPECTOS METODOLÓGICOS

Como já destacado na introdução, este trabalho visa analisar o desempenho do aluno ao utilizar a unidade de aprendizagem "Investigando em ₵". Para atingir os objetivos estabelecidos, foi realizada uma pesquisa qualitativa por meio de estudo de caso. Esse tipo de estudo permite que o pesquisador disponha de mais tempo para adaptar seus instrumentos, modificar sua abordagem para explorar elementos imprevistos, precisar alguns detalhes e construir uma compreensão do caso que leve em conta tudo isso (LAVILLE; DIONNE, 1999).

A vantagem da utilização do estudo de caso, segundo Laville e Dionne (1999), é a possibilidade de aprofundamento que este oferece, não sendo o estudo submetido às restrições relacionadas à comparação do caso em estudo com outros casos.

As técnicas de coleta de dados usadas neste trabalho foram observação e questionário. Na observação, o pesquisador tem uma postura reflexiva perante o observado, tomando notas, registrando e recolhendo dados por meio dos instrumentos que julgar convenientes no desenrolar da investigação. Não há imposição de limite à investigação, nem estrutura de análise definida a priori; dessa forma é possível ter uma visão mais ampla da situação e levar em consideração vários aspectos, sem isolá-los uns dos outros (LAVILLE; DIONNE, 1999). No entanto, ressalta-se que, durante uma observação nem sempre é possível fazer anotações durante o processo, o que exige disciplina e boa memória do observador (LAVILLE; DIONNE, 1999). Quando o registro não for feito durante a observação (visando evitar perturbar o grupo e os acontecimentos), este deve ser redigido logo ao final da observação para que os detalhes não sejam esquecidos. Esta técnica de coleta de dados tem algumas limitações, tais como: i) quantidade e variedade de dados que o pesquisador deve tratar; ii) o pesquisador pode ser visto como intruso; iii) podem ser observadas informações privadas que o pesquisador não pode revelar; iv) o pesquisador pode não ter boas aptidões de atenção e observação (CRESWELL, 2007). Embora essa técnica apresente alguns inconvenientes, como os listados, considera-se que a vantagem que esta oferece, em termos de compreensão do contexto, faz da mesma uma técnica adequada à pesquisa proposta.

Um questionário[15] tem por objetivo o "conhecimento de opiniões crenças, sentimentos, interesse, expectativas, situações vivenciadas etc" (GIL, 1999, p.128). Este instrumento de coleta de dados foi utilizado por permitir entre outras vantagens o anonimato nas respostas e não expor os pesquisados à influência das opiniões e do aspecto pessoal dos entrevistadores. No entanto, esta técnica também apresenta algumas limitações, dentre as quais respostas incompletas e dificuldade em relação à objetividade das questões, pois os itens podem ter significado diferente para cada sujeito (GIL, 1999).

A utilização de mais de uma técnica de coleta de dados permite uma melhor triangulação de fontes e de métodos (YIN, 2004). Tal orientação foi contemplada neste trabalho, uma vez que foram utilizados questionário e observação.

O trabalho foi dividido em 8 etapas: i) revisão bibliográfica sobre números complexos e sobre o uso de TIC na educação, em literaturas especializadas no assunto;

ii) elaboração de *applets*; iii) elaboração de atividades pedagógicas; iv) elaboração de questionários;

v) realização de um teste exploratório para análise das atividades e dos *applets* complementares;

vi) análise dos dados levantados no teste exploratório; vii)

realização de dois estudos de caso com alunos do Ensino Médio; viii) análise dos dados levantados nos estudos de caso.

Na primeira etapa, foi feito um aprofundamento de estudos sobre o uso das TIC na educação e sobre números complexos. Foi, também, realizada uma pesquisa sobre as aplicações dos números complexos em diferentes áreas do conhecimento. Para tanto, foram consultados livros e artigos em literatura especializada.

[15] Questionário: "técnica de investigação composta por um número mais ou menos elevado de questões apresentadas por escrito às pessoas" (GIL, 1999, p.104).

O *software* GeoGebra também foi estudado para a elaboração de dois *applets* (segunda etapa) que complementaram a unidade. Os referidos *applets* se destinam ao estudo de potenciação e radiciação de complexos.

Na terceira etapa, foram elaboradas atividades pedagógicas associadas aos *applets* de potenciação e radiciação. As demais atividades associadas aos outros *applets*, foram elaboradas durante o projeto de iniciação científica. Além disso, foram elaboradas atividades iniciais, destinadas aos alunos do Ensino Médio, visando identificar se os mesmos possuem, ou não, alguns prérrequisitos necessários ao estudo de números complexos.

A quarta etapa foi destinada à elaboração de três questionários. Um questionário inicial, contendo perguntas sobre os dois *applets* desenvolvidos e suas respectivas atividades, destinado aos participantes do teste exploratório destes recursos. O segundo, destinado aos alunos do Ensino Médio, para investigar a experiência dos mesmos quanto ao uso das TIC no contexto geral e, em particular, no processo de ensino e aprendizagem. O terceiro, também destinado aos alunos do Ensino Médio, contendo perguntas sobre os *applets* e sobre as atividades, assim como, sobre a unidade de aprendizagem propriamente dita.

Na etapa seguinte, foi realizado o teste exploratório apenas para os *applets* de radiciação e potenciação e atividades relacionadas aos mesmos, uma vez que o teste exploratório dos outros *applets* e das outras atividades já havia ocorrido no âmbito do projeto de iniciação científica. Esses testes foram realizados com professores de Matemática em formação inicial e em serviço.

Assim, o teste exploratório foi dividido em duas partes. A 1ª parte, denominada teste exploratório 1, ocorreu no âmbito do projeto de pesquisa, em maio de 2009, por meio de um minicurso realizado numa Instituição Federal de Ensino. Neste foram analisados 13 *applets* e as atividades relacionadas aos mesmos. O teste exploratório 1 teve duração de quatro horas (divididas em dois encontros). A segunda parte, denominada teste exploratório 2, ocorreu durante este trabalho monográfico, por meio de um minicurso realizado Instituição Federal de Ensino, em março de 2010. Neste foram analisados os dois últimos *applets* (potenciação e radiciação) e as atividades relacionadas aos mesmos. Este segundo teste teve duração de três horas.

Na sexta etapa foram analisados os dados levantados no teste exploratório por meio de observação das atitudes dos participantes e do questionário correspondente, para a verificação de possíveis falhas.

Na etapa seguinte foram realizados dois estudos de caso com alunos do Ensino Médio, tendo dois objetivos principais: i) experimentar os *applets*, as atividades investigativas e a unidade de aprendizagem propriamente dita; ii) analisar o desempenho dos alunos utilizando os recursos da unidade. O segundo estudo de caso foi decorrente da análise do primeiro. Esta sinalizou que a falta de alguns prérrequisitos influenciou o desempenho dos alunos no estudo de números complexos utilizando a unidade de aprendizagem. Sendo assim, buscou-se outro grupo de alunos que apresentasse características que minimizassem as dificuldades identificadas no primeiro estudo.

Inicialmente, os alunos responderam ao questionário que visa investigar a experiência dos mesmos quanto ao uso das TIC no contexto geral e, em particular, no processo de ensino e aprendizagem. Em seguida, resolveram a apostila de atividades, sob orientação da autora deste trabalho, e as respostas foram socializadas, visando compartilhar e discutir as soluções encontradas. Além disso, as apostilas resolvidas foram recolhidas para posterior análise das resoluções das atividades.

Os alunos foram observados ao longo de todas as atividades e, a partir disso, foram feitos registros, para análise. Finalizando, os alunos responderam ao questionário que contém perguntas sobre os *applets* e as atividades, assim como, sobre a unidade de aprendizagem propriamente dita. Por meio do questionário, foram complementados os dados levantados por observação, para promover, assim, uma análise mais completa da unidade de aprendizagem, tanto sobre sua adequação pedagógica, quanto à facilidade de uso da mesma.

Por fim, foram analisados os dados levantados nos estudos de caso, procurando verificar se os objetivos foram devidamente atingidos.

Nas próximas seções são descritas as etapas para realização deste trabalho monográfico. Na seção “Desenvolvimento dos *applets*” descreve-se como foi desenvolvido cada *applet* e seus objetivos. Em “Elaboração das atividades” relata-se a elaboração das atividades e apresenta-se o objetivo de cada uma delas. Em

"Unidade de Aprendizagem Investigando em ₵" apresentam-se o desenvolvimento da Unidade, as seções e as mudanças realizadas na interface das páginas da unidade. Finalizando, em "Elaboração dos Questionários" descreve-se a elaboração dos três questionários aplicados neste trabalho monográfico, assim como os objetivos de cada um deles.

2.1 Desenvolvimento dos *Applets*

A motivação para o desenvolvimento dos *applets* para o estudo de números complexos decorreu da importância desse tema e das possibilidades abertas pelas TIC, em termos de visualização e movimentação.

A unidade de aprendizagem contém 15 *applets*, sendo que 13 destes foram desenvolvidos pela autora dessa monografia, no âmbito do projeto de pesquisa Tecnologias de Informação e Comunicação no Processo de Ensino e Aprendizagem de Matemática[16]. De forma complementar, criou-se, no âmbito deste trabalho monográfico, outros dois *applets*, totalizando os 15.

Estes 15 *applets* se destinam ao estudo de: i) Representação dos números complexos no plano de Argand-Gauss; ii) Soma e subtração de dois números complexos; iii) Soma de um número complexo com um número real e de número complexo com um número imaginário puro; iv) Multiplicação de um número complexo por um escalar; v) Módulo e Conjugado; vi) Forma trigonométrica de número complexo; vii) Multiplicação e Divisão de complexos na forma trigonométrica; viii) Potências de i; ix) Multiplicação e Divisão por unidade imaginária; x) Potenciação; xi) Radiciação.

Estes *applets* são utilizados na resolução das atividades[17] sobre números complexos, todos são dinâmicos, possibilitando, por meio de movimentação de pontos, analisar várias construções. Em 13 destes aparecem caixas numeradas, que devem ser marcadas na sequência sugerida. Esta ação faz aparecer na tela textos explicativos e/ou figuras sobre o tema em questão. A orientação para utilização dos *applets* encontra-se nos enunciados das atividades da apostila. Os *applets* foram

[16] O referido projeto de pesquisa é desenvolvido no IF Fluminense Campus Campos-Centro e coordenado pelas professoras Gilmara Barcelos e Silvia Batista (orientadora e co-orientadora desta monografia, respectivamente).

[17] Estas atividades compõem uma apostila descrita na seção 2.3.

desenvolvidos como construções no GeoGebra e transformados em *applets* por meio de recursos deste próprio *software*. A facilidade de gerar os *applets* no GeoGebra foi um aspecto bastante favorável ao desenvolvimento destes recursos.

O GeoGebra é um *software* livre, que possibilita o trabalho com Matemática Dinâmica. A expressão "Matemática Dinâmica" é utilizada por Markus Hohenwarter, criador do GeoGebra, ao explicar as funções do mesmo. Seria uma extensão da definição de "Geometria Dinâmica[18]".

Nas subseções a seguir descrevem-se os quinze *applets* elaborados.

2.1.1 Plano Complexo

O objetivo desse *applet* é apresentar o plano complexo ou de Argand Gauss (Figura 2.1).

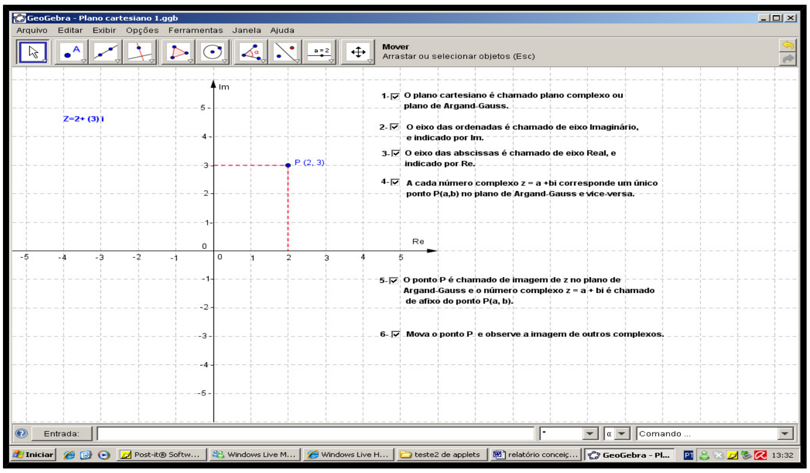


Figura 2.1: Plano Complexo

A figura 2.1 mostra o número complexo z = a + bi (parte superior esquerda), que corresponde ao ponto P(a, b), marcado no plano complexo. O ponto P pode ser movimentado e os valores de a e b, do número complexo z, mudam de acordo com a posição do ponto P no plano. Os eixos das ordenadas e das abscissas são indicados por Im e Re, respectivamente.

[18] Segundo Braviano e Rodrigues (2002), a Geometria Dinâmica permite a elaboração de construções eletrônicas, nas quais os elementos básicos podem ser movimentados na tela do computador sem alterar as posições relativas entre esses elementos e os objetos construídos a partir deles. Além dos objetos geométricos, o GeoGebra dá um caráter dinâmico a outros objetos matemáticos como funções, gráficos, números, fórmulas, entre outros, o que justifica a expressão "Matemática Dinâmica".

2.1.2 Adição de Números Complexos

O objetivo desse *applet* é possibilitar a visualização geométrica da soma de dois números complexos, considerando cada um deles como um vetor com origem no ponto (0,0) (Figura 2.2)

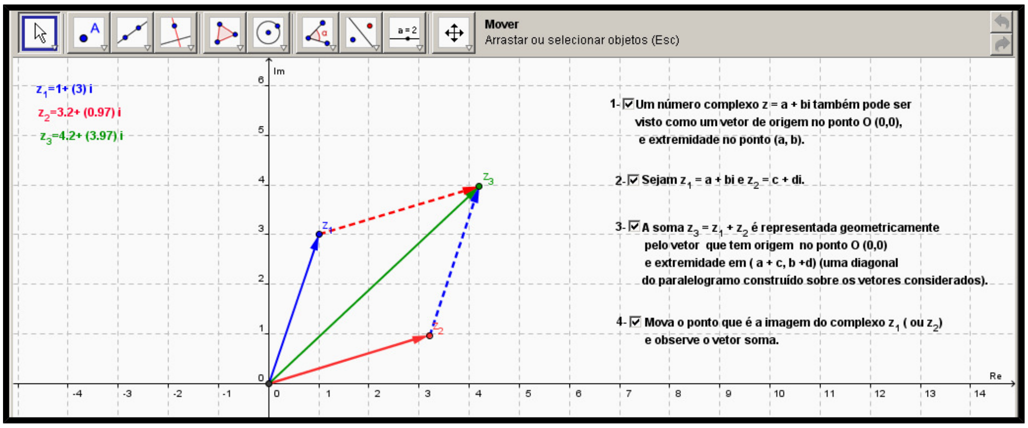


Figura 2.2: Adição de Números Complexos

Os números complexos, apresentados na parte superior esquerda do *applet*, estão representados, no plano complexo, por vetores com origem no ponto (0,0). Para facilitar o entendimento, foram utilizadas cores iguais para escrever o número complexo e traçar o vetor que o representa. Os vetores que representam os complexos são sempre traçados em linha contínua. Os vetores em linha tracejada são paralelos ao de mesma cor, em linha contínua.

A soma dos números complexos z_1 e z_2 é o complexo z_3. Geometricamente, a referida soma é representada por um vetor de origem em (0,0) e ponto final na imagem de z_3, formando uma das diagonais do paralelogramo definido pelos vetores que representam z_1 e z_2. (respectivamente, em azul e vermelho, no *applet*).

2.1.3 Subtração de Números Complexos

O objetivo desse *applet* é possibilitar a visualização geométrica da diferença de dois números complexos, considerando cada um deles como vetor com origem no ponto (0,0) (Figura 2.3).

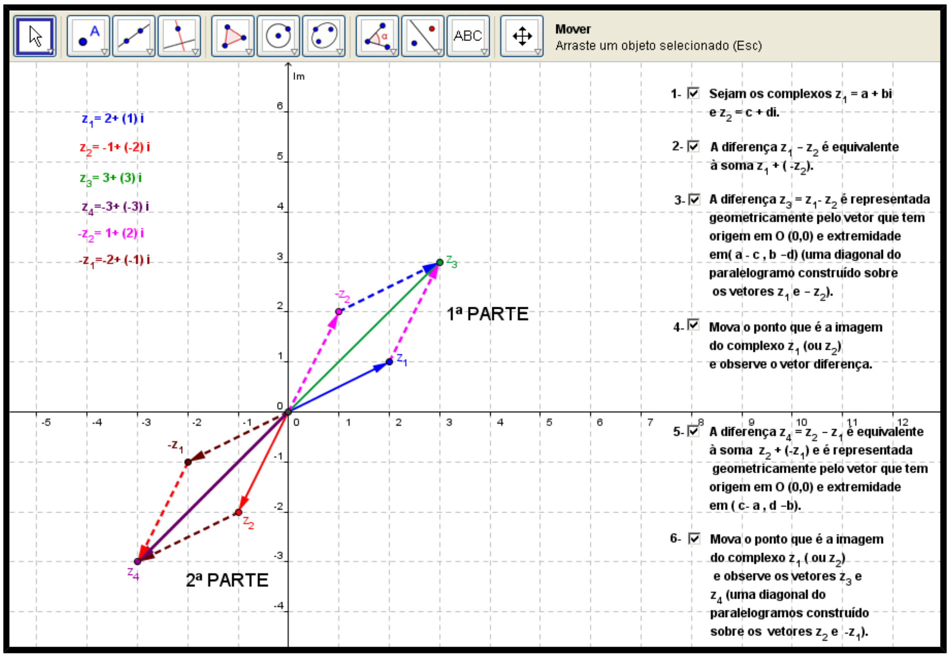


Figura 2.3: Subtração de Números Complexos

No *applet,* para facilitar o entendimento, foram utilizadas cores iguais para escrever o número complexo e traçar o vetor que o representa. Os vetores que representam os complexos são sempre traçados em linha contínua. Os vetores em linha tracejada são paralelos ao de mesma cor, em linha contínua, como já descrito no *applet* anterior.

Nesse *applet*, mostram-se, geometricamente, as diferenças $z_1 - z_2$ e $z_2 - z_1$, sendo z_1 e z_2 representados, respectivamente, por vetores em azul e vermelho. Para facilitar a descrição da figura 2.3, foram colocadas indicações de suas partes: “1ª PARTE” e “2ª PARTE” (o *applet* em si, não possui essa indicação).

A 1ª PARTE mostra a diferença $z_1 - z_2$, como sendo a soma $z_1 + (- z_2)$. O complexo $- z_2$ está representado por um vetor em rosa e a soma $z_1 + (- z_2)$ é representada por um vetor em verde. O vetor soma tem origem em (0, 0) e ponto final na imagem de z_3, formando uma das diagonais do paralelogramo definido pelos vetores que representam z_1 e $-z_2$.

A 2ª PARTE mostra a subtração $z_2 - z_1$, como sendo a soma $z_2 + (- z_1)$. O complexo $- z_1$ está representado por um vetor em cor marrom e a soma $z_2 + (- z_1)$ é representada por um vetor em roxo. O vetor soma tem origem em (0, 0) e ponto final na imagem de z_4, formando uma das diagonais do paralelogramo definido pelos vetores que representam z_2 e $- z_1$.

2.1.4 Adição de um Número Complexo com um Número Real

Esse *applet* visa mostrar, geometricamente, que a soma de um dado número complexo $z_1 = a + bi$ com número real é um complexo cuja imagem se encontra sempre na reta $y = b$ (Figura 2.4).

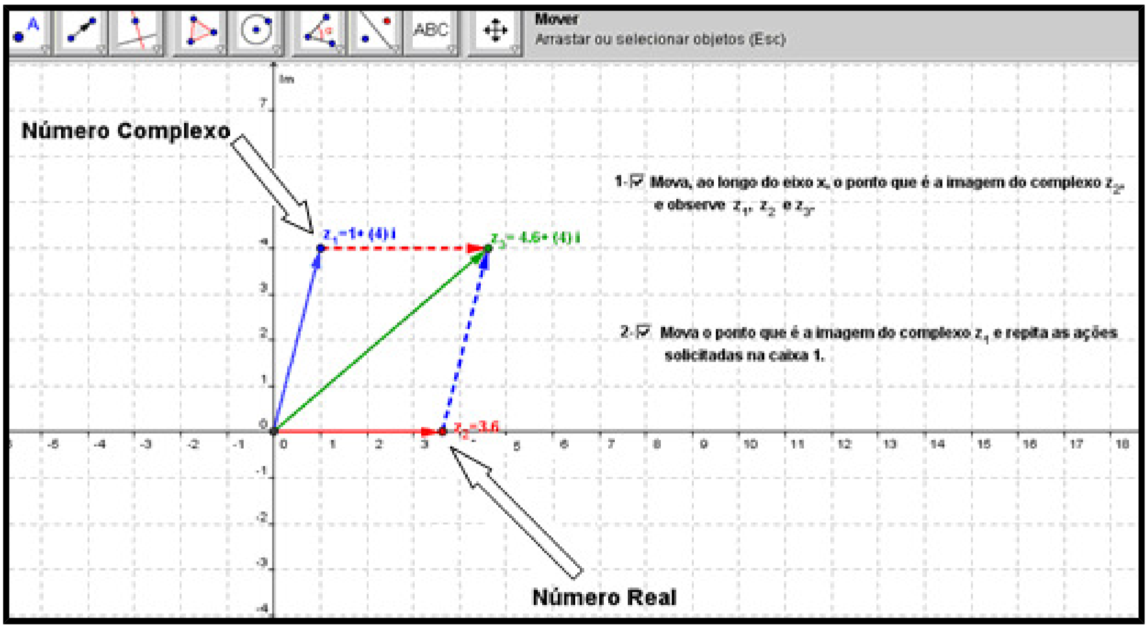


Figura 2.4: Adição de um Número Complexo com um Número Real

Na figura 2.4, para facilitar a compreensão, foram colocadas setas indicativas, destacando o número complexo e o real (o *applet* mesmo não possui tais setas). Ao movimentar, ao longo do eixo x, o ponto que é imagem de z_2 (número real), mantendo-se z_1, $z_1 = a + bi$, observa-se que a extremidade do vetor soma (em verde, no *applet*) percorre a reta $y = b$.

2.1.5 Adição de um Número Complexo com um Número Imaginário Puro

Esse *applet* visa mostrar, geometricamente, que a soma de um dado número complexo $z_1 = a + bi$ com número imaginário puro é um complexo cuja imagem se encontra sempre na reta $x = a$ (Figura 2.5).

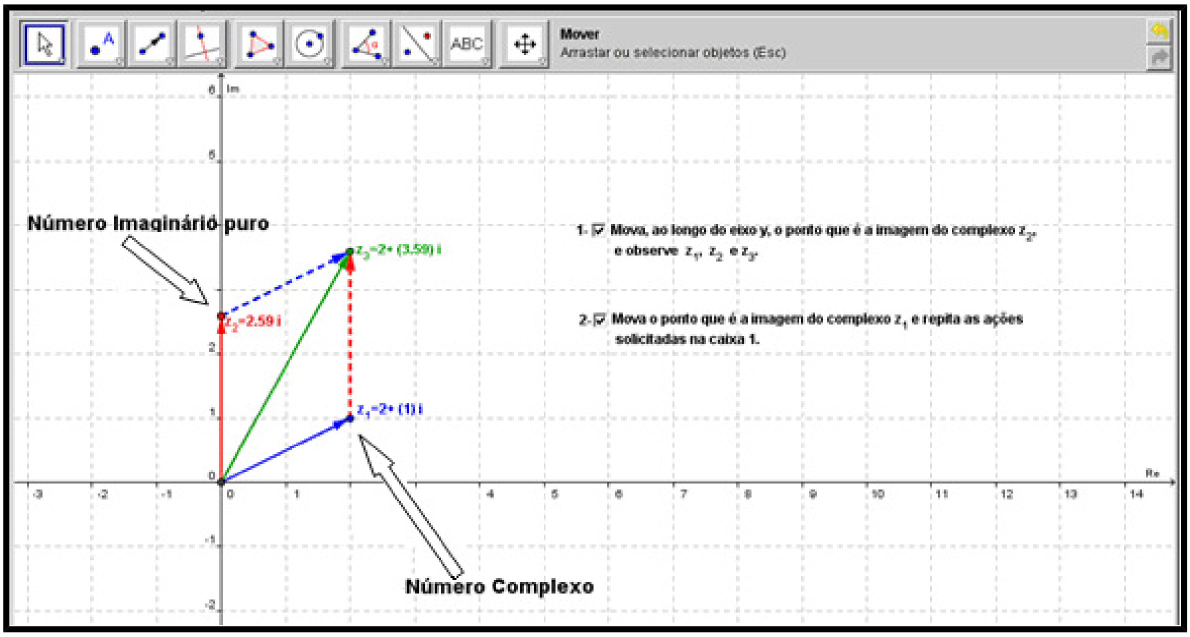


Figura 2.5: Adição de um Número Complexo com um Número Imaginário Puro

Na figura 2.5, as setas indicativas destacam o número imaginário puro e o número complexo (o *applet* mesmo não possui tais setas). Ao movimentar, ao longo do eixo y, o ponto que é imagem de z_2 (imaginário puro), mantendo-se z_1, $z_1 = a + bi$, observa-se que a extremidade do vetor soma (em verde, no *applet*) percorre a reta $x = a$.

2.1.6 Multiplicação de um Número Complexo por um Escalar

O objetivo desse *applet* é possibilitar a visualização geométrica do produto de um número complexo z_1 por um escalar real, considerando z_1 e o produto obtido como vetores com origem no ponto (0,0) (Figura 2.6).

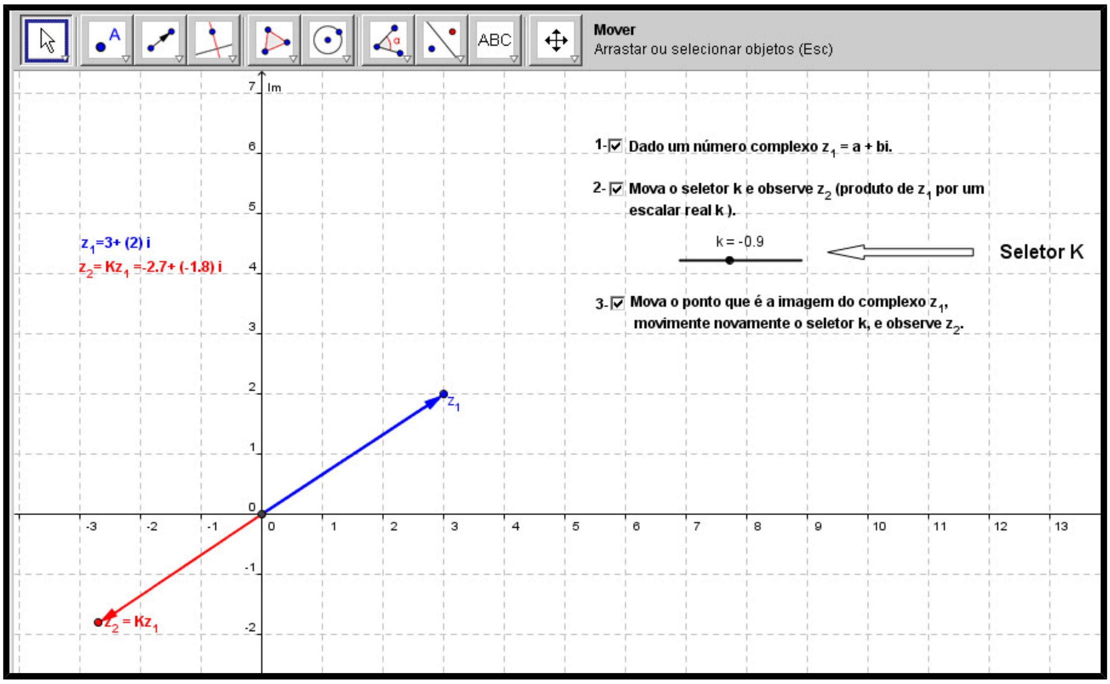


Figura 2.6: Multiplicação de um Número Complexo por um Escalar

O seletor k (indicado na figura 2.6) representa o número real que será multiplicado pelo número complexo z_1. O produto $z_2 = kz_1$ é representado pelo vetor em vermelho, no *applet*.

Quando $k > 1$, o vetor que representa z_2 tem módulo maior do que o vetor que representa z_1, com mesma direção e sentido deste. Quando $0 < k < 1$, o vetor que representa z_2, tem módulo menor do que o de z_1, com mesma direção e sentido deste. Quando $-1 < k < 0$, o vetor que representa z_2, tem módulo menor do que o de z_1, com mesma direção, porém com sentido oposto a este (situação mostrada na figura 2.6). Quando $k < -1$, o vetor que representa z_2, tem módulo maior do que o de z_1, com mesma direção, mas com sentido oposto a este.

2.1.7 Módulo e Conjugado

O objetivo desse *applet* é possibilitar a visualização geométrica do módulo de um número complexo, assim como de seu conjugado (Figura 2.7).

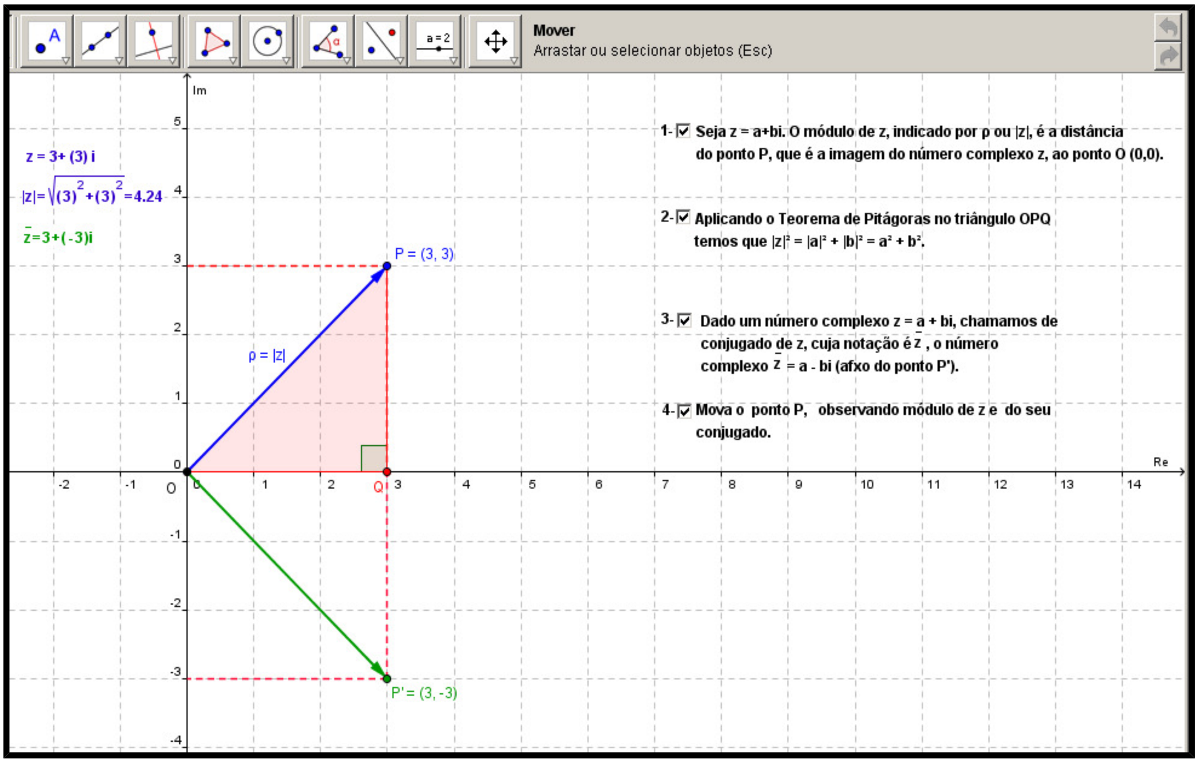


Figura 2.7: Módulo e Conjugado

O conjugado do complexo $z_1 = a + bi$ é o número complexo $\bar{z} = a - bi$. As imagens desses complexos são simétricas em relação ao eixo das abscissas. O módulo de z_1 ($|z_1|$ ou ρ) é o módulo do vetor $\overrightarrow{OP}$, sendo O a origem e P a imagem de z_1. Para calcular o módulo de um número complexo $z_1 = a + bi$, basta aplicar o Teorema de Pitágoras, obtendo $|z_1| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2.1.8 Forma Trigonométrica de um Número Complexo

Este *applet* visa definir argumento de um número complexo e, a seguir, demonstrar como a forma trigonométrica é obtida a partir da forma algébrica. (Figura 2.8).

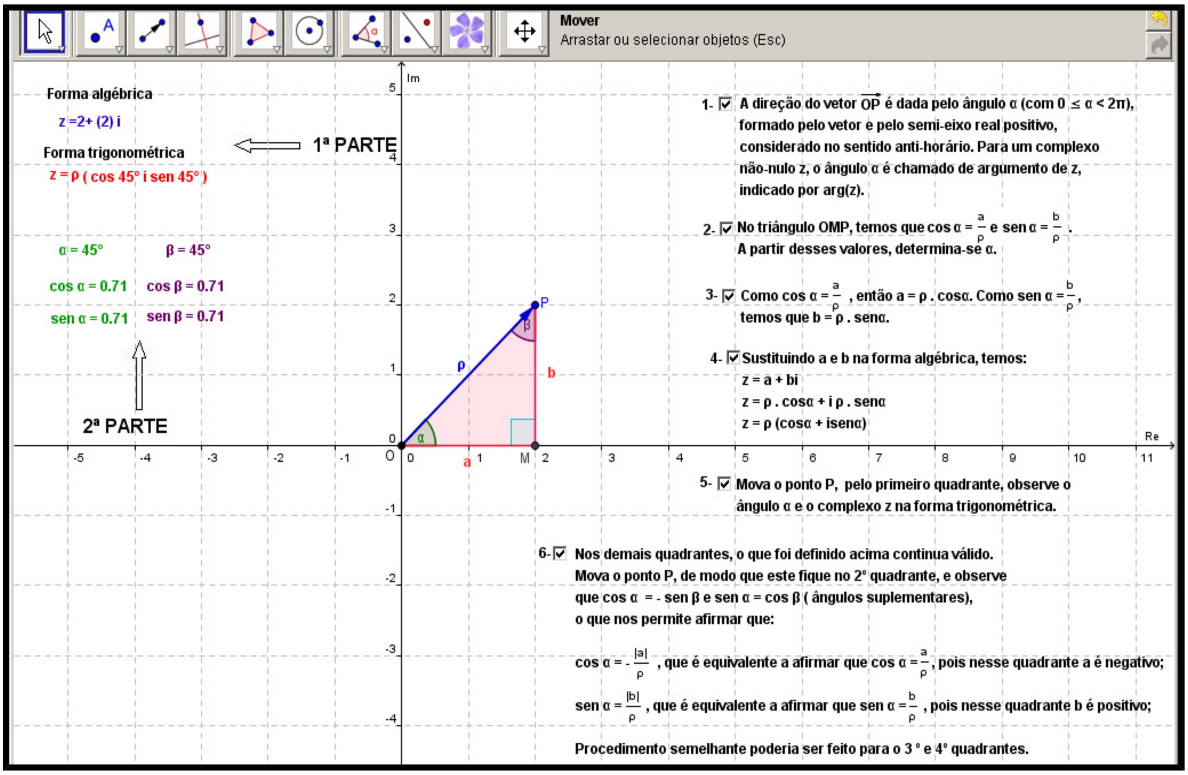


Figura 2.8: Forma Trigonométrica de um Número Complexo

Para facilitar a descrição da figura 2.8, foram colocadas indicações de suas partes: “1ª PARTE” e “2ª PARTE” (o *applet* em si, não possui essa indicação). A 1ª PARTE mostra a forma algébrica e a trigonométrica do número complexo. A definição de argumento de um complexo (ângulo formado pelo vetor que representa o complexo e pelo semi-eixo real positivo, considerado no sentido anti-horário) e a demonstração de como a forma trigonométrica é obtida são apresentadas na sequência de textos mostrados a partir da marcação das caixas (na parte direita do *applet*).

A 2ª PARTE mostra o seno e cosseno do argumento do número complexo e do seu complemento. Essas informações são necessárias para a compreensão do texto da última caixa. Este esclarece que o que foi definido para o 1º quadrante continua válido para os demais, sendo feita a análise do que o ocorre, por exemplo, no 2º quadrante. Para tanto, é importante perceber a relação que existe entre o seno do argumento e do seu complemento, assim como a relação existente entre os cossenos desses ângulos.

2.1.9 Multiplicação de Complexos na Forma Trigonométrica

O objetivo desse *applet* é demonstrar como é realizada a multiplicação de complexos na forma trigonométrica (Figura 2.9).

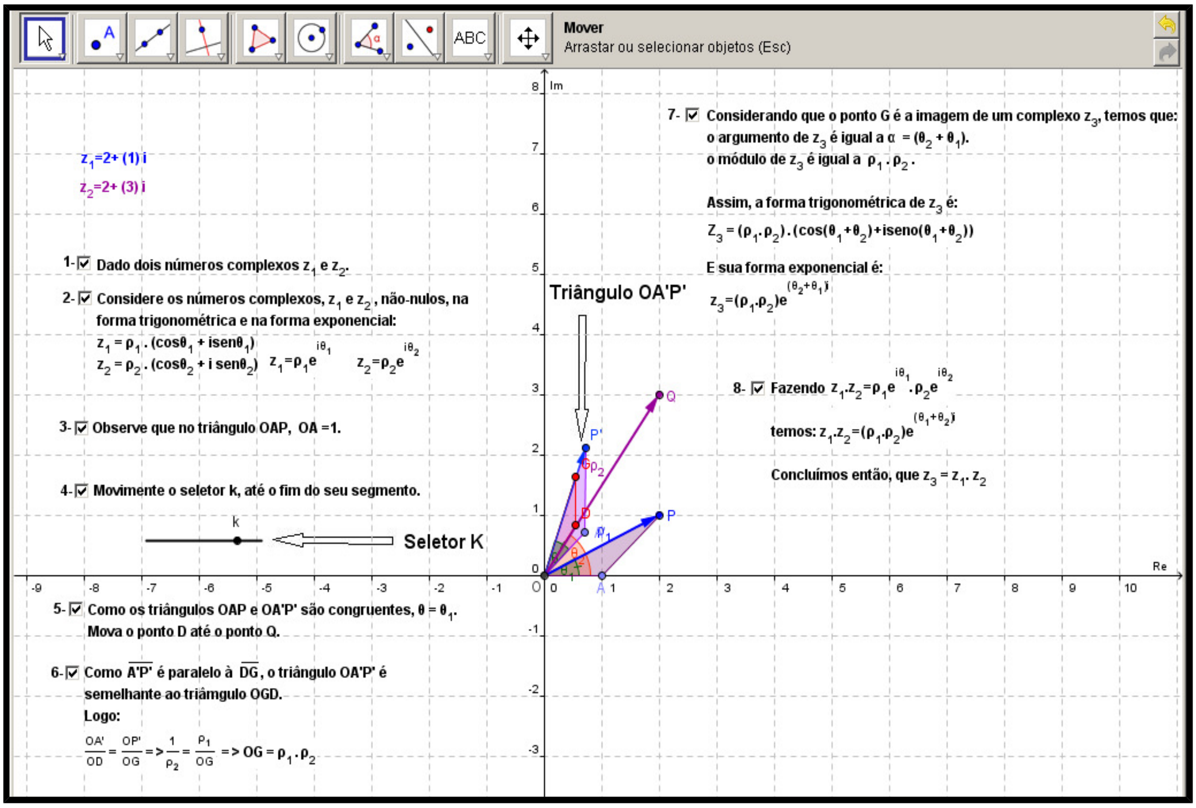


Figura 2.9: Multiplicação de Dois Números Complexos

A movimentação do seletor k implica a movimentação do triângulo OA’P’ (tanto o seletor, quanto o triângulo estão indicados na figura 2.9). A representação geométrica do produto dos dois números complexos é obtida por meio de semelhança de triângulos.

2.1.10 Divisão de Complexos na Forma Trigonométrica

Este *applet* visa demonstrar como é realizada a divisão de complexos na forma trigonométrica (Figura 2.10).

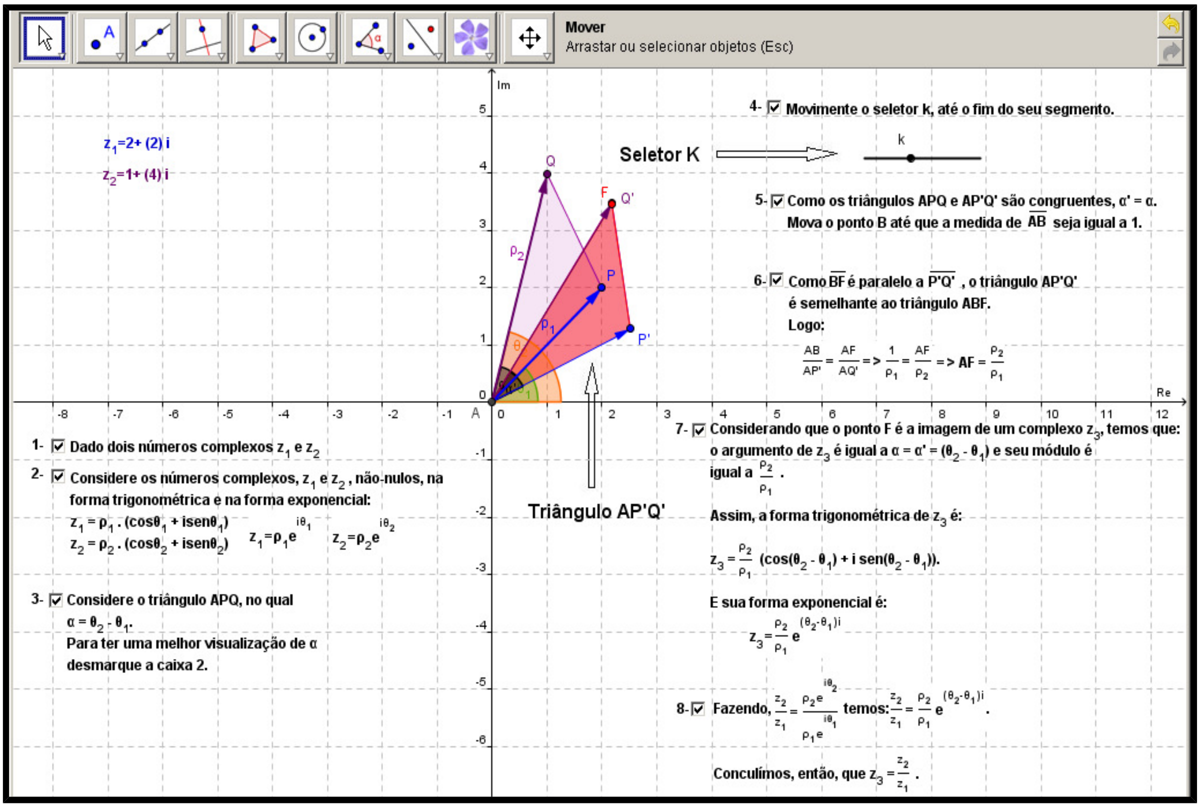


Figura 2.10: Divisão de Dois Números Complexos

A movimentação do seletor k implica a movimentação do triângulo AP'Q' (indicados na figura 2.10). A representação geométrica da divisão de z_2 por z_1, sendo z_1 e z_2 dois números complexos, é obtida por meio de semelhança de triângulos.

2.1.11 Potências de i

Esse *applet* visa mostrar, geometricamente, que os vetores que representam as potências i^n (n natural) são obtidos por rotações de 90º, em relação à origem (0,0), do vetor que representa a potencia i^0, no sentido anti-horário (Figura 2.11).

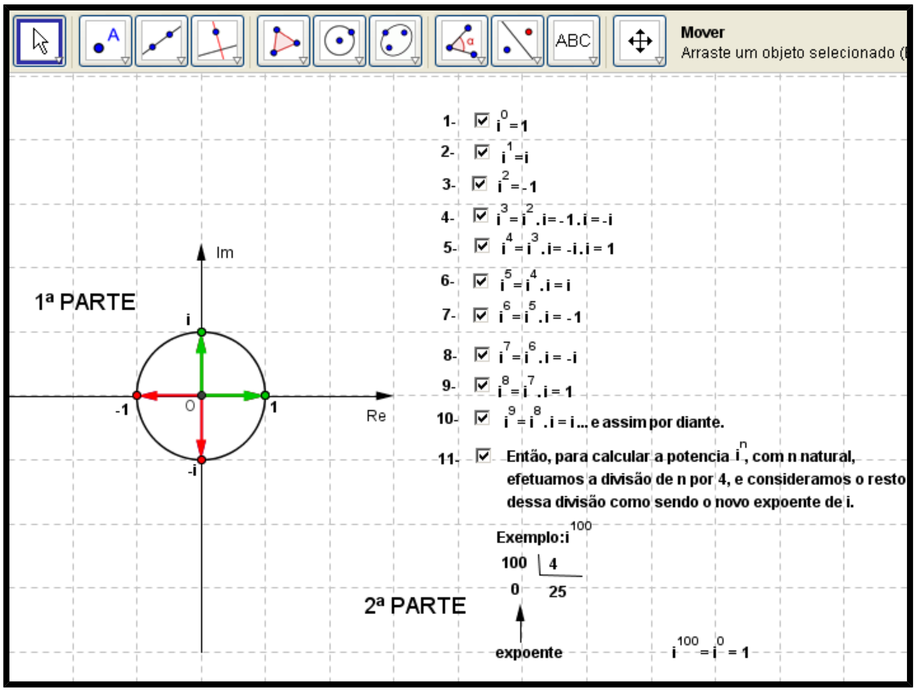


Figura 2.11: Potências de i

São representadas as potências de i, por meio da rotação dos vetores, a fim de que o usuário possa identificar a repetição a partir de i^4. A 1ª PARTE mostra a rotação dos vetores representados pelas potências de i. A 2ª PARTE mostra como calcular as potências de i^n, com n, natural.

2.1.12 Multiplicação por Unidade Imaginária

Este *applet* visa mostrar, geometricamente, que ao multiplicar um número complexo z_1 por i, o vetor que representa z_1 sofre uma rotação de 90º, em relação à origem (0,0), no sentido anti-horário (Figura 2.12).

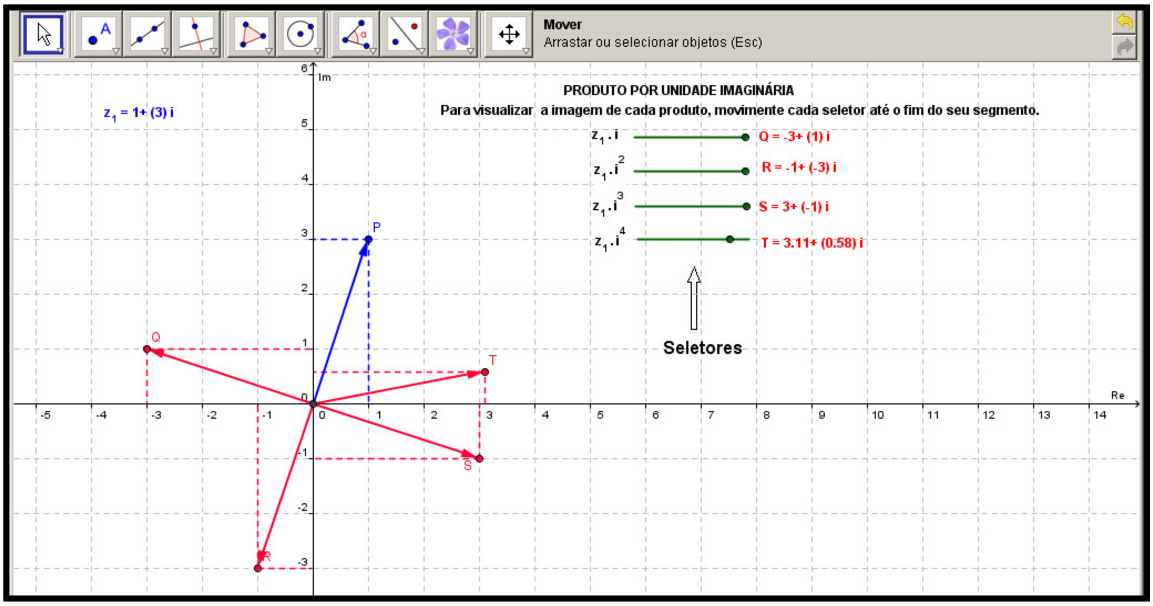


Figura 2.12: Multiplicação por Potências da Unidade Imaginária

A movimentação dos seletores promove uma rotação do vetor correspondente a z_1, no sentido anti-horário, de 90º, 180º, 270º e 360º, respectivamente, quando o número complexo z_1 é multiplicado por i, i^2, i^3, i^4.

2.1.13 Divisão por Unidade Imaginária

O objetivo deste *applet* é mostrar, geometricamente, que ao dividir um número complexo z_1 por i, o vetor que representa z_1 sofre uma rotação de 90º, em relação à origem (0,0), no sentido horário (Figura 2.13).

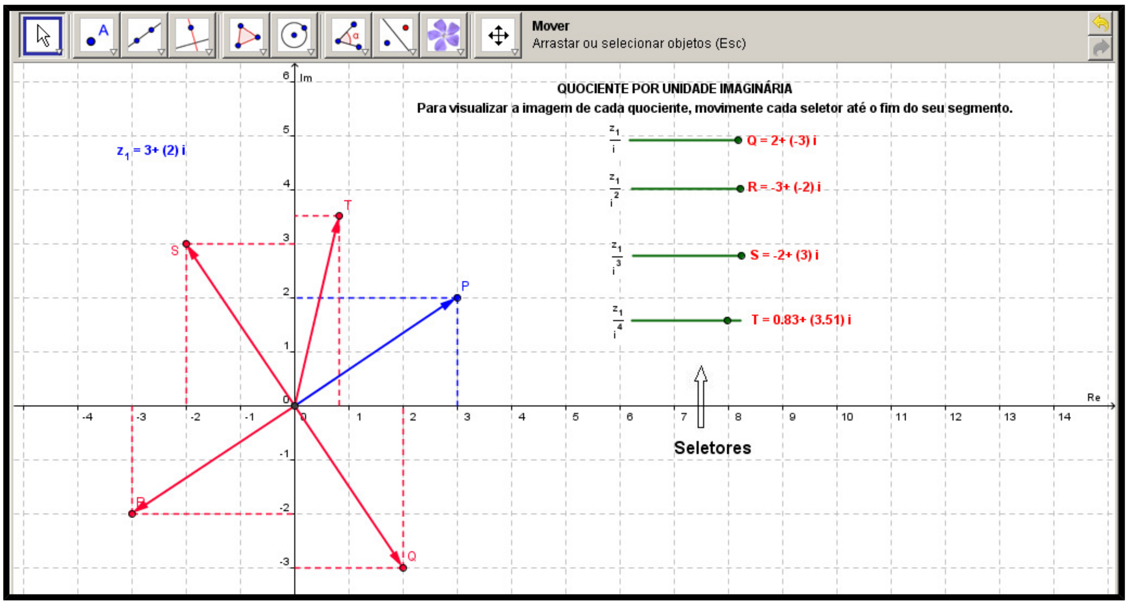


Figura 2.13: Divisão por Potências da Unidade Imaginária

A movimentação dos seletores promove uma rotação do vetor correspondente a z_1, no sentido horário, de 90º, 180º, 270º e 360º, respectivamente, quando o número complexo z_1 é dividido por i, i^2, i^3, i^4.

2.1.14 Potenciação de Números Complexos

Esse *applet* visa mostrar, geometricamente, como obter a fórmula de potenciação de números complexos (1ª Fórmula de De Moivre).

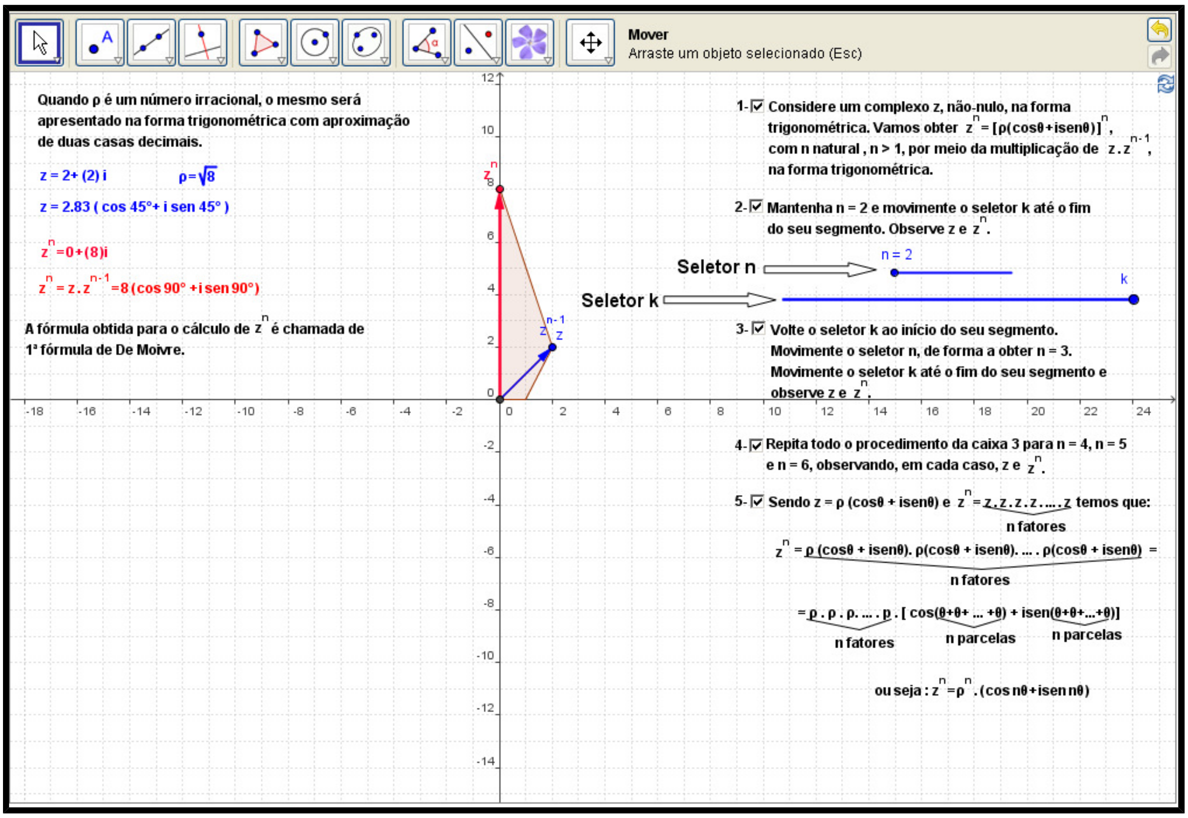


Figura 2.14: Potenciação de Números Complexos

O seletor n corresponde ao valor do expoente. A movimentação do seletor k implica a movimentação do vetor que representa o complexo z^n.

2.1.15 Radiciação de Números Complexos

Esse *applet* visa mostrar, geometricamente, como obter as raízes enésimas de números complexos (2ª Fórmula de De Moivre).

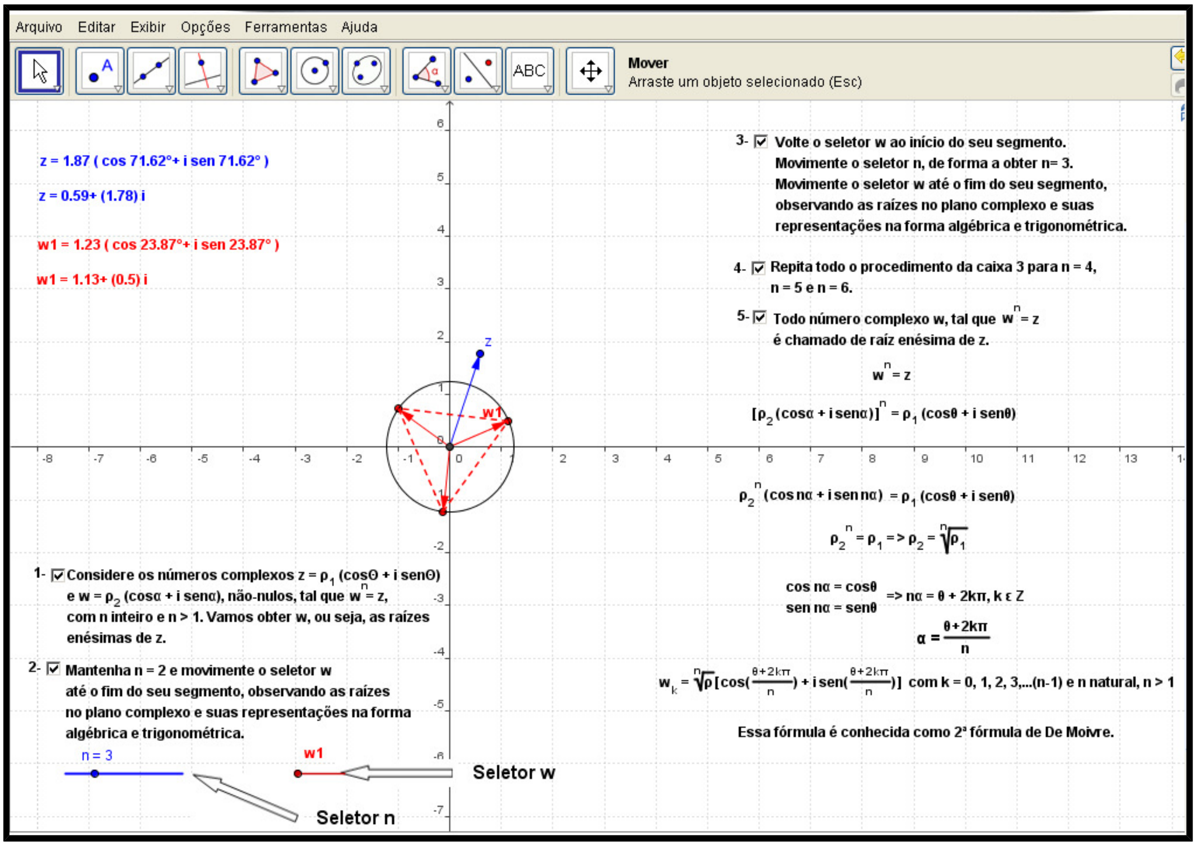


Figura 2.15: Radiciação de Números Complexos

O seletor n corresponde ao índice da raiz do complexo z. O seletor w corresponde às raízes enésimas de z, e aos vértices dos polígonos formados para n > 2. A movimentação do seletor n implica a apresentação das raízes.

Na seção seguinte descreve-se a elaboração das atividades que são associadas aos *applets* descritos nesta seção.

2.2 Elaboração das Atividades

O objetivo da elaboração das atividades foi fornecer sugestões de uso dos *applets*, além de favorecer a experimentação dos mesmos. O professor poderá usá-las tais como estão ou, então, tê-las como ponto de partida para a elaboração de suas próprias atividades, de acordo com suas realidades. As atividades relacionam os recursos dos *applets* com os objetivos pedagógicos pretendidos. Buscou-se trabalhar o enfoque geométrico do tema números complexos[19].

[19] A apostila usada no teste exploratório (Apêndice A) sofreu algumas alterações antes de ser usada no primeiro estudo de caso.

Nesse sentido, foi elaborada a apostila "Estudando Números Complexos com *applets*" (Apêndice B). Esta é dividida em duas partes. A primeira parte contém 15 atividades investigativas que incentivam a reflexão sobre os resultados obtidos com a manipulação dos *applets*. A segunda parte contém 20 exercícios de aplicação dos conceitos abordados. Destaca-se que, das 15 atividades investigativas, 13 foram elaboradas no âmbito do projeto de pesquisa e 2 foram elaboradas no âmbito deste trabalho monográfico. Em relação aos exercícios de aplicação, 15 foram elaborados no âmbito do projeto de pesquisa e 5 foram elaborados no âmbito deste trabalho monográfico. Esses exercícios contemplam os temas que foram investigados nas atividades realizadas com auxílio dos *applets*. As atividades foram experimentadas com alunos do Ensino Médio, no âmbito deste trabalho monográfico; por isso, a seguir, as mesmas são apresentadas, bem como o objetivo de cada uma delas.

2.2.1 Atividade 1

A atividade 1 (Quadro 2.1) está associada ao *applet* **Plano Complexo.** Essa atividade visa colaborar para o entendimento da associação existente entre os números complexos e os pontos do plano de Argand Gauss (ou plano complexo). Além disso, busca-se analisar as condições para que um número complexo seja real ou imaginário puro.

Quadro 2.1: Atividade 1

Atividade 1

No quadro da seção *Applets*, da Unidade de Aprendizagem sobre Números Complexos "Investigando em *C*", clique em "Plano Complexo" e determine o que se pede:

a) Marque as caixas que aparecem no *applet* e execute o que for solicitado.

b) Represente, no plano complexo do *applet*, a imagem dos números complexos $z_1 = 2 - 9i$, $z_2 = -1 + 4i$ e $z_3 = 2+6i$. Identifique e anote o quadrante a que cada um deles pertence.

Números complexos	**Quadrantes**
$z_1 = 2 - 9i$	
$z_2 = -1 + 4i$	
$z_3 = 2 + 6i$	

c) Apresente um complexo z_4, cuja imagem seja representada no 3° quadrante do plano complexo (represente, no *applet*, a imagem do complexo apresentado): _________.

d) Complete os espaços abaixo com sinal de > ou <:

Se um complexo $z = \mathbf{a} + \mathbf{b}i$ tem imagem representada no:

- 3° quadrante, então **a** ___0 e **b** ___0;
- 1° quadrante, então **a** ___0 e **b** ___0;
- 2° quadrante, então **a** ___0 e **b** ___0;
- 4° quadrante, então **a** ___0 e **b** ___0.

e) Um número complexo z é um imaginário puro se a parte real de z é nula. Um número complexo é um número real se a parte imaginária de z é nula. Em cada item abaixo, apresente um número complexo atendendo ao que se pede e represente a imagem deste, no plano complexo do *applet*.

- um número imaginário puro, que tenha parte imaginária positiva: _______________.

- um número imaginário puro, que tenha parte imaginária negativa: _______________.

- um número real positivo: _______________.

- um número real negativo: _______________.

f) É possível que algum número imaginário puro tenha imagem representada fora do eixo das ordenadas? É possível que algum número real tenha imagem representada fora do eixo das abscissas? Justifique suas respostas.

____

____

g) Salve o arquivo, em "Meus documentos" nomeando-o "Atividade1".

2.2.2 Atividade 2

As atividades 2 e 3 estão associadas ao *applet* **Adição de Complexo.** A atividade 2 (Quadro 2.2) visa destacar que o número complexo também pode ser representado por um vetor no plano de Argand-Gauss. Além disso, busca mostrar que a soma de dois números complexos pode ser realizada graficamente por meio da regra do paralelogramo, abordada no estudo de vetores.

Quadro 2.2: Atividade 2

Atividade 2

Abra o *applet* “Adição de Complexos” (Adição Núm. Complexos) e determine o que se pede:

a) Marque as caixas que aparecem no *applet* e execute o que for solicitado.

b) Considere um número complexo z_4, distinto de z_1, z_2 e z_3, e trace, no plano complexo do *applet*, o vetor que o representa. Para tanto, use o recurso “Vetor definido por dois pontos” ( ). Se desejar, indique junto ao vetor traçado, o seu rótulo z_4 e estabeleça uma cor para o mesmo, como explicado na seção II.

c) Represente o vetor correspondente à soma $z_1 + z_4$, traçando, inicialmente, o paralelogramo definido pelos vetores que representam z_1 e z_4. Para tanto, use o recurso “Vetor definido por um ponto” ( ). Se desejar, indique junto ao vetor soma, o rótulo $z_1 + z_4$ e estabeleça uma cor para o mesmo.

d) Salve o arquivo, em “Meus documentos” nomeando-o “Atividade2”.

2.2.3 Atividade 3

Na Atividade 3 (Quadro 2.3) o objetivo é fazer com que os alunos conjecturem as condições para que um número complexo, resultante da adição de dois números complexos, seja real ou imaginário puro. Possibilita, também, conjecturar que se z_1 e z_2 são opostos então $z_3 = z_2 + z_1$ é nulo.

Quadro 2.3: Atividade 3

Atividade 3

Abra, novamente, o *applet* "Adição de Complexos" (Adição Núm. Complexos) e determine o que se pede:

a) Marque as caixas que aparecem no *applet*.

b) Movimente o ponto que é a imagem de z_1, até que z_3 esteja sobre o eixo imaginário. O número complexo z_3 é imaginário puro ou um número real? Descreva o que você observou quanto à parte real de z_1 e z_2.

____

____

c) Movimente o ponto que é a imagem de z_2, até que z_3 esteja sobre o eixo real. O número complexo é imaginário puro ou um número real? Descreva o que você observou quanto à parte imaginária de z_1 e z_2.

____

d) Mova o ponto que é a imagem de z_1 até obter $z_1 = 3 + 2i$. Mova o ponto que é a imagem de z_2 até obter $z_2 = -3 -2i$. Descreva o que observou quanto a z_3.

____

____

e) Mova o ponto que é a imagem de z_2 até obter $z_2 = 0 + 0i$. Descreva o que você observou quanto a $z_1 + z_2$.

____

____

2.2.4 Atividade 4

As Atividades 4 e 5 são associadas ao *applet* **Subtração de Complexo**. O objetivo da atividade 4 (Quadro 2.4) é destacar que a subtração de dois números complexos, também, pode ser representada graficamente por meio da regra do paralelogramo.

Quadro 2.4: Atividade 4

Atividade 4

Abra o *applet* "Subtração de Complexos" (Subtração Núm. Complexos) e determine o que se pede:

a) Marque as caixas que aparecem no *applet* e execute o que for solicitado.

b) Desmarque as caixas 2, 3, 4, 5 e 6.

c) Considere um número complexo z_5, distinto dos complexos apresentados na tela, e trace no plano complexo, o vetor que o representa (para tanto, proceda como no item b da atividade 2). Trace, também, o vetor que representa $-z_5$.

d) Construa o paralelogramo definido pelos vetores que representam z_1 e $-z_5$ (para tanto, proceda como no item c da atividade 2). A seguir, trace o vetor que representa a soma $z_1 + (-z_5)$, que é correspondente à subtração $z_1 - z_5$.

e) Salve o arquivo, em "Meus documentos" nomeando-o "Atividade4".

2.2.5 Atividade 5

Nesta atividade (Quadro 2.5), o objetivo é levar os alunos a conjecturar as condições para que um número complexo resultante da subtração de dois números complexos seja real ou imaginário puro. Além disso, busca-se incentivar o aluno a refletir que se $z_3 = z_1 - z_2$ e z_2 é nulo, então $z_3 = z_1$.

Quadro 2.5: Atividade 5

Atividade 5

Abra, novamente, o *applet* "Subtração de Complexos" (Subtração Núm. Complexos) e determine o que se pede:

a) Marque as caixas 1, 2 e 3 que aparecem no *applet*.

b) Movimente o ponto que é a imagem de z_1 até que z_3 represente um número imaginário puro. Descreva o que você observou quanto à parte real de z_1 e z_2.

____

____

c) Mova o ponto que é a imagem de z_2 até obter $z_2 = 0 + 0i$. Descreva o que você observou com relação a $z_3 = z_1 - z_2$.

____

____

d) Desmarque as caixas 2 e 3 e marque a caixa 5.

e) Movimente o ponto que é a imagem de z_2 até que z_4 represente um número real. Descreva o que você observou quanto à parte imaginária de z_1 e z_2.

____

2.2.6 Atividade 6

A Atividade 6 (Quadro 2.6) está associada ao *applet* **Adição de um Número Complexo com um Número Real.** O objetivo desta atividade é possibilitar que os alunos conjecturem que a soma de um número complexo (z = a + bi, com a e b diferente de zero), com um número real, pode ser um número imaginário puro ou um complexo do mesmo tipo de z. Destaca-se que, por meio desta atividade, analisa-se, também, o aspecto geométrico do que foi conjecturado.

Quadro 2.6: Atividade 6

Atividade 6

Abra o *applet* "Adição de um número complexo com um real" (Adição Num. Real) e determine o que se pede:

a) Marque as caixas que aparecem no *applet* e execute o que for solicitado.

b) Descreva o que você observou com relação à parte imaginária de z_1 e z_3.

____

c) Ao mover o ponto que representa a imagem de z_1 até obter $z_1 = -z_2$, que vetor representa a soma z_3?

____

d) Sendo z_1 um número complexo em que a parte real e a parte imaginária são diferentes de zero e z_2 um número real, é possível que $z_3 = z_1 + z_2$ seja um número real? É possível que z_3 seja um imaginário puro? Justifique suas respostas.

____

____

____

2.2.7 Atividade 7

A atividade 7 está associada ao *applet* **Adição de um Número Complexo com Número Imaginário Puro.** O objetivo é levar o aluno a conjecturar que a soma de um número complexo (z = a + bi, com a e b diferente de zero), com um número imaginário puro, pode ser um número real ou um complexo do mesmo tipo de z. Além disso, por meio desta atividade, os alunos analisam o aspecto geométrico do que foi conjecturado.

Quadro 2.7: Atividade 7

Atividade 7

Abra o *applet* "Adição de um número complexo com um imaginário puro" (Adição Im. Puro) e determine o que se pede:

a) Marque as caixas que aparecem no *applet* e execute o que for solicitado.

b) Descreva o que você observou com relação à parte real de z_1 e z_3.

____

c) Ao mover o ponto que representa a imagem de z_1 até obter $z_1 = - z_2$, que vetor representa a soma z_3?

____

d) Sendo z_1 um número complexo em que a parte real e a parte imaginária são diferentes de zero e z_2 um número imaginário puro, é possível que $z_3 = z_1 + z_2$ seja um número real? É possível que z_3 seja um imaginário puro? Justifique suas respostas.

____

____

____

2.2.8 Atividade 8

Para realização desta atividade (Quadro 2.8) é usado o *applet* **Multiplicação de um Número Complexo por um Escalar.** O objetivo desta atividade é analisar o comprimento, a direção, e o sentido do vetor que representa o produto de um número complexo por um escalar real (k), considerando diversos valores de k.

Quadro 2.8: Atividade 8

Atividade 8

Abra o *applet* "Multiplicação de um número complexo por um escalar" (Multiplicação por escalar) e determine o que se pede:

a) Marque as caixas que aparecem no *applet* e execute o que for solicitado.

b) O que é possível afirmar sobre o comprimento, a direção e o sentido do vetor que representa z_2, em relação ao vetor que representa z_1, quando:

→ $0 < k < 1$

____

____

→ $k = 1$

____

____

→ $k > 1$

____

____

→ $k = -1$

____

____

→ $-1 < k < 0$

____

____

→ $k < -1$

____

____

2.2.9 Atividade 9

A atividade 9 (Quadro 2.9) está associada ao *applet* **Módulo e Conjugado.** Esta atividade tem dois objetivos. O primeiro é definir conjugado de um número complexo e o segundo é levar o aluno a conjecturar que o número complexo e o seu conjugado possuem o mesmo módulo.

Quadro 2.9: Atividade 9

Atividade 9

Abra o *applet* "Módulo e Conjugado" e determine o que se pede:

a) Marque as caixas que aparecem no *applet* e execute o que for solicitado.

b) Compare a parte real z com a de $\bar{z}$. Descreva o que você observou.

____

c) Compare a parte imaginária de z com a de $\bar{z}$ e descreva o que você observou.

____

d) Movimente o ponto P e observe z e o seu conjugado (canto superior esquerdo do *applet*). É possível que z seja igual ao seu conjugado? Em caso afirmativo, qual a condição para que isso ocorra?

____

____

e) Movimente o ponto P e observe o módulo de z e o do seu conjugado (canto superior esquerdo do *applet*). Descreva a relação entre o módulo de z e $\bar{z}$.

____

____

2.2.10 Atividade 10

A atividade 10 (Quadro 2.10) está associada ao *applet* **Forma Trigonométrica**. O objetivo desta atividade é mostrar que o número complexo pode ser expresso na forma trigonométrica.

Quadro 2.10: Atividade 10

Atividade 10

Abra o *applet* "Forma Trigonométrica" (Forma. Trig) e determine o que se pede:

a) Marque as caixas que aparecem no *applet* e execute o que for solicitado.

b) Desmarque as caixas 4, 5 e 6 que aparecem no *applet*.

c) Movimente o ponto P, observe os valores de ρ e α apresentados no canto inferior esquerdo da tela, e escreva o número complexo na forma trigonométrica ($z = \rho(\cos\alpha + i\,sen\,\alpha)$).

____

2.2.11 Atividade 11

Para realização desta atividade (Quadro 2.11), é usado o *applet* **Potências de i.** O objetivo é fazer com que os alunos observem um padrão nas potências, ou seja, que os alunos verifiquem que as potências se repetem a cada grupo de quatro ($i^0\ i^1\ i^2\ i^3$).

Quadro 2.11: Atividade 11

Atividade 11

Abra o *applet* "Potências de i" e determine o que se pede:

a) Marque somente até a caixa 10 e descreva o que você observou.

____

____

b) Marque a caixa 11 e verifique se o que você descreveu no item anterior está de acordo com a teoria apresentada nessa caixa.

c) Calcule i^{327}.

____

____

2.2.12 Atividade 12 e 13

As atividades 12 (Quadro 2.12) e 13 (Quadro 2.13) estão associadas, respectivamente, aos *applets* **Multiplicação por unidade imaginária** e **Divisão por unidade imaginária.**

O objetivo das referidas atividades é possibilitar que os alunos observem as transformações gráficas (rotações) que ocorrem com o vetor (representação do número complexo) quando o mesmo é multiplicado ou dividido pela unidade imaginária.

Quadro 2.12: Atividade 12

Atividade 12

Abra o *applet* "Multiplicação por unidade imaginária" (Mult. unidade Im.) e determine o que se pede:

a) Retorne todos os seletores ao ponto original. Movimente o ponto P para outro quadrante e execute, novamente, o que é solicitado no *applet*.

b) Descreva o que você observou com relação à multiplicação de um número complexo pela unidade imaginária (i).

____

____

Quadro 2.13: Atividade 13

Atividade 13

Abra o *applet* "Divisão por unidade imaginária" (Div. unidade Im.) e determine o que se pede:

a) Retorne todos os seletores ao ponto original. Movimente o ponto P para outro quadrante e execute, novamente, o que é solicitado no *applet*.

b) Descreva o que você observou com relação à divisão de um número complexo pela unidade imaginária (i).

____

____

2.2.13 Atividade 14

Para realização da atividade 14 (Quadro 2.14) é usado o *applet* **Potenciação.** O objetivo da atividade 14 é obter a fórmula da potenciação (1ª fórmula de De Moivre) de um número complexo, por meio da comparação dos valores dos módulos e dos argumentos de um número complexo dado e de potências deste número.

Quadro 2.14: Atividade 14

Atividade 14

Abra o *applet* "Potenciação" e determine o que se pede:

a) Marque as caixas 1 e 2 do *applet* e execute o que for solicitado.

b) Descreva a relação entre os módulos de z e z^2 , assim como, a relação entre seus argumentos.

c) Marque a caixa 3 e execute o que for solicitado.

d) Descreva a relação entre os módulos de z e z^3 , assim como, a relação entre seus argumentos.

e) Marque a caixa 4 e execute o que é solicitado para n = 4.

f) Descreva a relação entre os módulos de z e z^4 , assim como, a relação entre seus argumentos.

g) Volte o seletor k ao inicio do seu segmento, torne n = 2 e desmarque as caixas 2, 3 e 4. Altere o complexo z, movendo o ponto que é sua imagem, refaça os itens anteriores e registre suas respostas abaixo.

h) A partir do que foi observado e conjecturado nos itens anteriores escreva z^n em função de ρ e θ , considerando que $z = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$.

i) Marque a caixa 5 e verifique se o que foi conjecturado no item h está correto.

2.2.14 Atividade 15

A atividade 15 (Quadro 2.15) está associada ao *applet* **Radiação de um número complexo.** O objetivo desta é possibilitar ao aluno conjecturar que é possível obter as raízes de um número complexo a partir de uma delas, por meio da relação que pode ser estabelecida entre as raízes e os vértices de um polígono regular.

Quadro 2.15: Atividade 15

Atividade 15

Abra o *applet* "Radiciação" e determine o que se pede:

a) Marque as caixas 1 e 2 do *applet* e execute o que for solicitado.

b) Descreva a relação entre os módulos de w_1 e w_2 e, também, a relação entre seus argumentos.

____

____

c) Marque a caixa 3 e execute o que for solicitado.

d) Descreva a relação entre os módulos de w_1 e w_2, assim como, entre seus argumentos. Além disso, descreva a relação entre os módulos de w_2 e w_3, assim como, entre seus argumentos.

____

____

____

e) Marque a caixa 4 e execute o que for solicitado para $n = 4$.

f) Descreva a relação entre os módulos de w_1 e w_2, assim como, entre seus argumentos. Descreva as referidas relações também para w_2 e w_3; w_3 e w_4.

____

____

g) Volte o seletor w ao inicio do seu segmento, torne $n = 2$ e desmarque as caixas 3 e 4. Altere o complexo z, movendo o ponto que é sua imagem, refaça os itens anteriores e registre suas respostas abaixo.

____

____

____

____

____

____

h) Observe que o número indicado no seletor n corresponde ao índice da raiz do complexo z. Descreva a relação entre o valor de n e o número de raízes correspondentes.

____

____

i) Para $n > 2$, descreva a relação entre os pontos que são as imagens das raízes e os polígonos regulares formados.

____

____

j) Considerando $n = 2$, seria possível determinar a raiz w_2, a partir da raiz w_1? Justifique sua resposta.

____

____

k) Considerando $n = 3$, descreva como seria possível determinar as outras duas raízes, a partir da raiz w_1.

____

____

l) Marque a caixa 5 e observe a dedução da segunda fórmula de De Moivre.

____

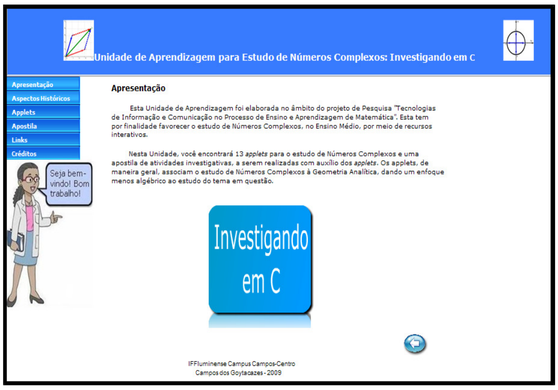
____

A seguir apresentam-se as seções da Unidade de Aprendizagem.

2.3 Unidade de Aprendizagem Investigando em ₵

Com a unidade “Investigando em ₵” espera-se, como já mencionado, colaborar para o processo de ensino e aprendizagem de números complexos, no Ensino Médio. A referida unidade foi desenvolvida sob um enfoque sócio-interacionista, assim os *applets* e as atividades propostas, que não são convencionais como geralmente apresentadas nos livros didáticos, são vistos como instrumentos mediadores. O uso destes instrumentos, segundo Vygotsky (2007), reorganiza, de forma radical, as funções psicológicas superiores, tais como memória e atenção.

Descrevem-se, a seguir, as seções da unidade “Investigando em ₵”. A Figura 2.16a mostra a tela de apresentação da unidade que foi elaborada no âmbito do projeto de pesquisa “Tecnologia de Informação e Comunicação no Processo de ensino e Aprendizagem de Matemática”. No desenvolvimento deste trabalho monográfico, as páginas da referida unidade foram reformuladas, tendo em vista um *design* mais moderno (Figura 2.16b).



2.16a: Versão antiga

2. 16b: Versão nova

Figura 2.16: Página de Apresentação

Apresenta-se, em algumas páginas da unidade, a imagem de uma professora, como mostra a figura 2.16. Nos balões há sempre frases que incentivam o usuário a usar a unidade e manipular os *applets*.

Além da seção **Apresentação**, a unidade possui outras seis seções: **Aspectos Históricos**; ***Applets***; **Apostila**; ***Links***; **Créditos** e **Aplicações**.

Na seção Aspectos Históricos descreve-se o surgimento dos números complexos. Para acessá-la basta clicar no menu principal em **Aspectos Históricos** (Figura 2.17).

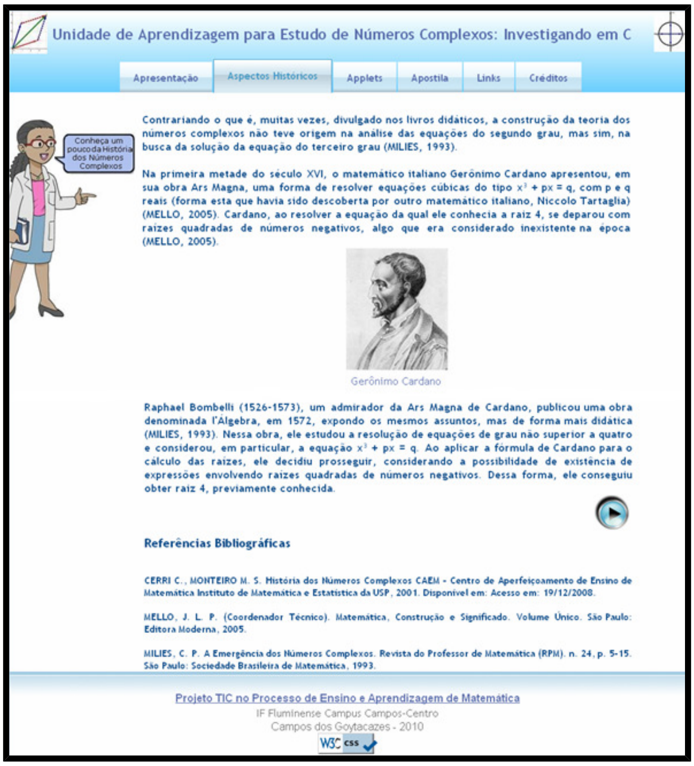


Figura 2.17: Aspectos Históricos

Para acessar os *applets* basta clicar, no menu principal, em ***Applets***. Esta ação mostrará a tela apresentada na Figura 2.18. Nessa seção há *link* para cada um dos 15 *applets* e para o Tutorial Geogebra, que explica como utilizar o referido programa.

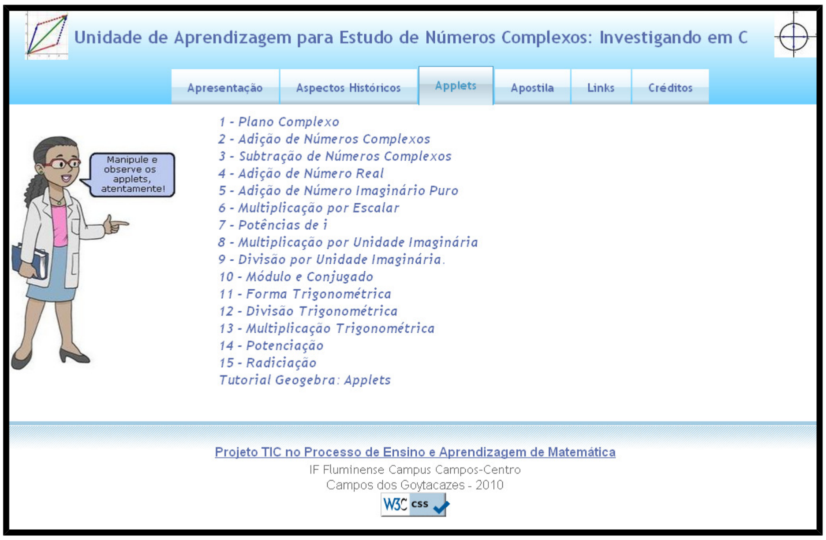


Figura 2.18: Página da seção *Applets*

Clicando, por exemplo, no primeiro *link* é aberto o *applet* “Plano Complexo”, conforme mostra a figura 2.19.

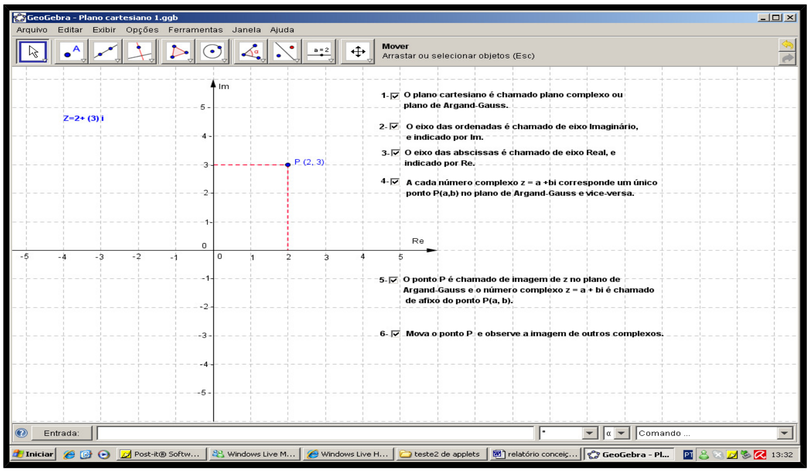


Figura 2.19: *Applet* do Plano Complexo

Os *applets* podem ser salvos a partir da unidade para que, assim, os usuários possam fazer modificações. Segundo Moreira, Barcelos e Batista[20] (2010) a possibilidade de modificar *applets* é muito importante, pois permite adequá-los ao contexto de cada sala de aula.

A unidade contém, ainda, uma seção que disponibiliza a apostila de atividades investigativas. Para visualizá-la, o usuário deve clicar, no menu principal, em **Apostila** (Figura 2.20). Na página que será aberta há um *link* para a apostila de atividade, no formato PDF.

Figura 2.20: Página da Apostila

Na seção ***Links*** (Figura 2.21), apresentam-se alguns endereços eletrônicos de páginas que abordam o tema números complexos. Visa-se, assim, fornecer outras fontes de consulta aos usuários da unidade.

[20] Neste artigo é explicado o procedimento para gerar *applets* por meio do GeoGebra.

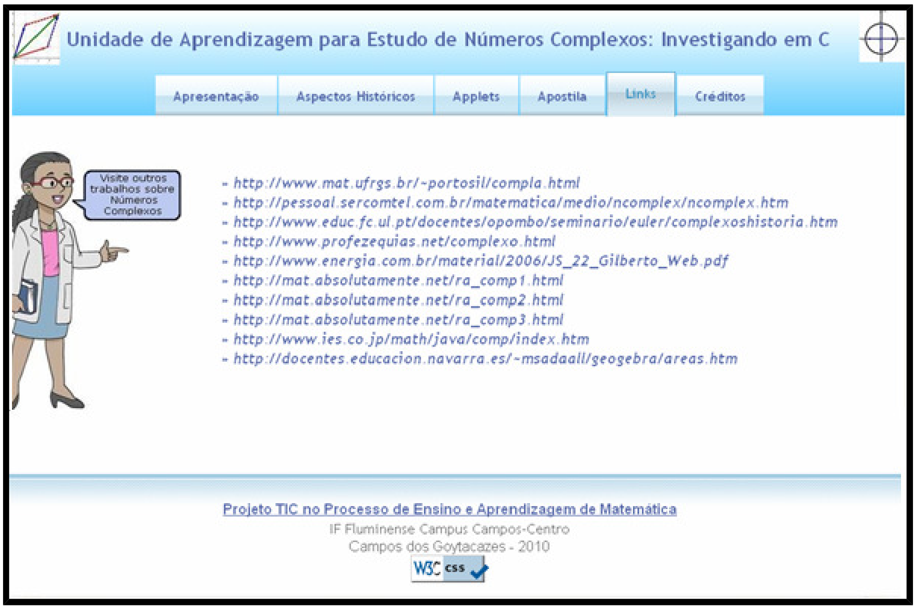


Figura 2.21: Página de Links

Na seção **aplicações** (Figura 2.22), apresenta-se a utilização dos números complexos em outras áreas de conhecimento. Nesta seção são descritos o uso de números complexos nas áreas de Engenharia Elétrica, Fractais e Aerodinâmica.

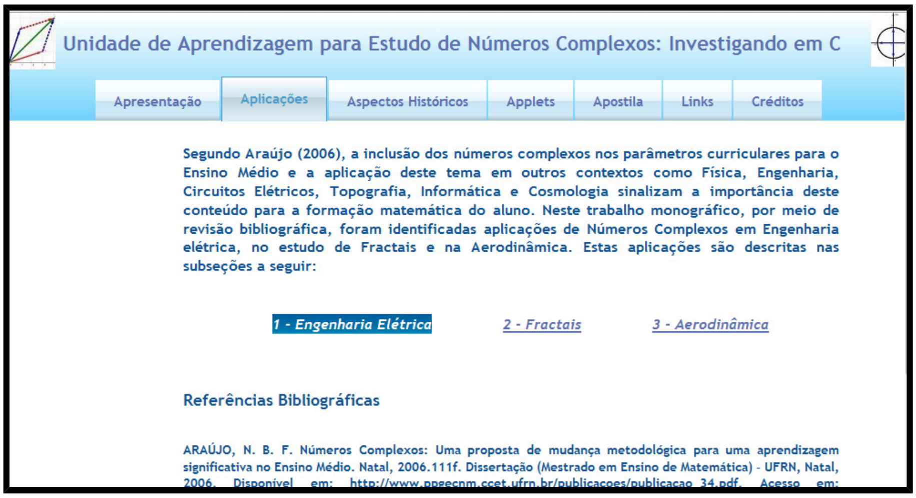


Figura 2.22: Página de Aplicações

Finalizando, na seção **Créditos** (Figura 2.23) apresentam-se os nomes dos autores da unidade e as ferramentas utilizadas no desenvolvimento da mesma.

Figura 2.23: Página de Créditos

Para a coleta de dados promovida no teste exploratório 2 e nos dois estudos de caso foram utilizados alguns questionários. A seção seguinte descreve a elaboração dos mesmos.

2.4 Elaboração dos Questionários

Além da elaboração dos *applets* e das atividades relacionadas aos mesmos, foram elaborados três questionários. O primeiro para ser respondido pelos participantes do teste exploratório 2. O segundo e o terceiro para serem respondidos pelos alunos do Ensino Médio participantes da experimentação.

O questionário destinado aos participantes do teste exploratório 2 (Apêndice C) contém oito perguntas sobre os dois *applets* desenvolvidos e suas respectivas atividades além de, duas perguntas sobre a unidade de aprendizagem. Vale ressaltar que no teste exploratório 1, os participantes também responderam um questionário com perguntas sobre os 13 *applets* e suas respectivas atividades. Esses questionários têm o objetivo de levantar dados sobre as atividades, os *applets* e a unidade, tais como clareza e sua adequação ao público alvo, bem como possíveis experiências anteriores com relação ao uso de tecnologias digitais. A penúltima questão, do questionário aplicado no teste exploratório 2, verifica a avaliação, dos participantes, quanto à unidade em relação ao conteúdo, à usabilidade e à didática. A última pergunta, que é aberta, solicita que os participantes apresentem sugestões ou críticas em relação à unidade de aprendizagem.

O segundo questionário é o de sondagem (Apêndice D), contendo oito perguntas. Estas visam investigar a experiência do aluno quanto ao uso das TIC, no contexto geral e, em particular, no processo de ensino e aprendizagem. Os alunos responderam esse questionário antes da experimentação.

O terceiro questionário (Apêndice E) contém dez perguntas sobre os *applets* e as atividades, assim como sobre a unidade propriamente dita. Estas visam investigar o desempenho dos alunos ao utilizarem a unidade de aprendizagem “Investigando em ₵”. Além disso, visa avaliar a unidade quanto à sua usabilidade.

3 RELATO DE EXPERIÊNCIA

Neste capítulo descrevem-se e analisam-se os resultados do teste exploratório 2 e dos dois estudos de caso promovidos.

3.1 Teste Exploratório 2

Como já descrito na Introdução, no âmbito do projeto de pesquisa, ocorreu o teste exploratório 1, para os 13 *applets* que foram desenvolvidos para este projeto. No âmbito deste trabalho monográfico foi promovido o teste exploratório 2, no qual foram analisados os dois *applets* novos, as atividades correspondentes aos mesmos e a unidade em si, em termos de seu novo *design*. Esclarece-se, então, que os 13 *applets* já analisados no projeto de pesquisa, não passaram por nova análise, uma vez que estes foram considerados adequados aos seus objetivos no teste exploratório 1. O principal objetivo dos testes exploratórios foi verificar a adequação dos recursos da unidade de aprendizagem aos seus objetivos pedagógicos e possíveis melhorias a serem promovidas em termos de facilidade de uso.

Os testes ocorreram por meio de minicurso; o primeiro foi realizado em maio de 2009 e o segundo teste ocorreu no dia nove de março de 2010. Ambos foram realizados em uma Instituição Federal de Ensino, tendo como participantes professores em formação e em serviço de Matemática.

No teste exploratório 2 observaram-se as ações dos cinco participantes e analisaram-se respostas das atividades resolvidas pelos mesmos. Verificou-se que os participantes resolveram as atividades e manipularam os *applets* sem dificuldades.

No entanto, foi sugerida uma mudança no *applet* de potenciação, no qual os números complexos são representados nas formas algébrica e trigonométrica. Na forma trigonométrica, o módulo (ρ), quando é um número irracional, é apresentado com aproximação de duas casas decimais, ou seja, aparece na tela, por exemplo, 1,41 ao invés[21] de $\sqrt{2}$. Por opção das elaboradoras dos *applets*, as potências

[21] O software não possibilita a escrita de na tela, embora seja possível escolher se os cálculos serão feitos com os valores exatos ou aproximados. Na versão do teste, os cálculos eram feitos utilizando os valores aproximados.

também eram valores aproximados, ou seja, se o módulo fosse $\sqrt{2}$, ao elevar ao quadrado, na tela não aparecia 2 e sim o valor aproximado da potência, com duas casas decimais. Os participantes consideraram que os alunos do Ensino Médio teriam dificuldades para identificar a relação entre o módulo de um número complexo[22] z e o módulo de z^n, devido às aproximações. Foi questionado então, se era possível aparecer 2 no lugar do valor aproximado do quadrado de $\sqrt{2}$, pois, segundo os participantes, o vetor que representa z, no exemplo dado (Figura 3.1) seria a diagonal de um quadrado de lado 1, fato conhecido pelos alunos.

A solicitação mencionada acima foi atendida, porém, pelas limitações do *software*, não foi possível escrever $\sqrt{2}$ na forma trigonométrica. No entanto, a partir dos questionamentos dos participantes do teste exploratório, foi acrescentada a seguinte observação, no *applet* (Figura 3.1): "Quando o módulo (ρ) é um número irracional, o mesmo é apresentado na forma trigonométrica com aproximação de duas casas decimais".

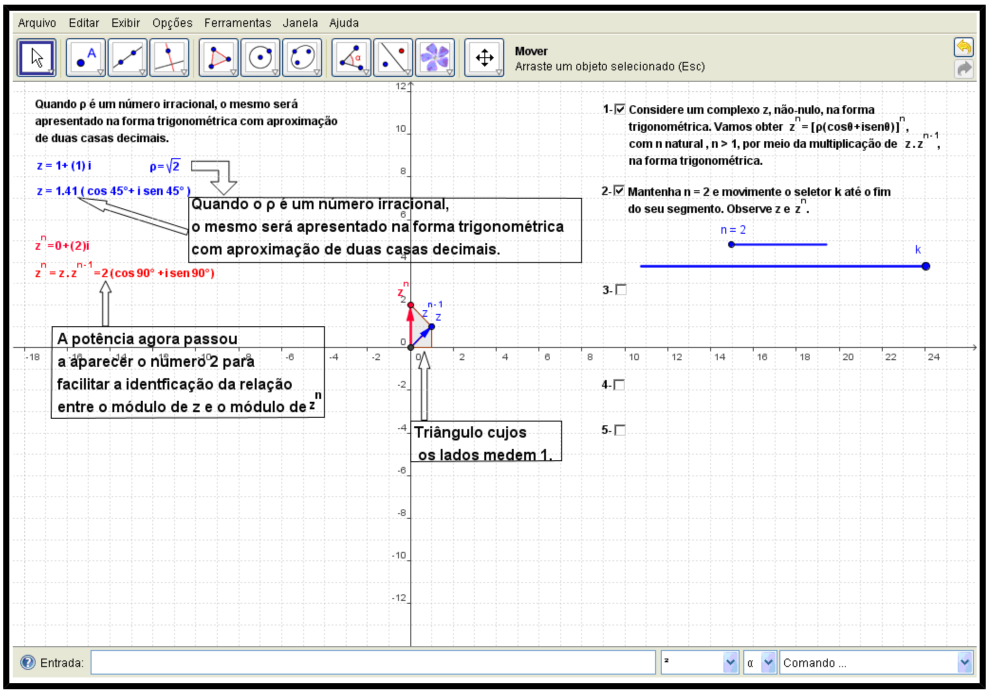


Figura 3.1: Novo *applet* de Potenciação

Após a resolução da apostila, os participantes responderam ao questionário. Este foi entregue juntamente com a apostila respondida para que suas respostas fossem analisadas. Na subseção a seguir, apresenta-se a análise das respostas dos questionários.

[22] Seja z um complexo não-nulo na forma trigonométrica $z = \rho(\cos\alpha + isen\alpha)$, temos que $z^n = \rho^n(\cos(n\alpha) + isen(n\alpha))$.

3.1.1 Análise dos questionários

No questionário utilizado no minicurso do teste exploratório 2, os cinco participantes tiveram a opção de colocar ou não o seu nome. Na pergunta 1, que questiona a clareza dos enunciados, todos os participantes afirmaram que os mesmos estavam claros. Dessa forma, nos enunciados não foi necessário fazer nenhuma correção. Atribui-se esse fato às inúmeras revisões feitas durante a elaboração das atividades.

Com a pergunta 2, buscou-se verificar se as atividades contribuíram para compreensão dos tópicos de números complexos em estudo. Todos os participantes responderam que as mesmas contribuíram para aprendizagem. Destacam-se os comentários de dois participantes:

> "Com os *applets*, os usuários vão construindo o conhecimento por meio geométrico e algébrico" (Participante 1).
>
> "Porque a representação geométrica permite uma melhor compreensão dos cálculos algébricos" (Participante 3).

Estes comentários sinalizam a importância dada à representação geométrica.

Na pergunta 3, questionou-se o nível das atividades. A maioria dos participantes considerou o nível *moderado* (Gráfico 3.1), uma vez que as atividades serão aplicadas a alunos que nunca estudaram o conteúdo. Um participante considerou o nível das atividades *fácil*, justificando esse fato pelos *applets* fornecerem informações suficientes e claras. Outro participante considerou o nível da atividade *difícil*, sem apresentar sua justificativa.

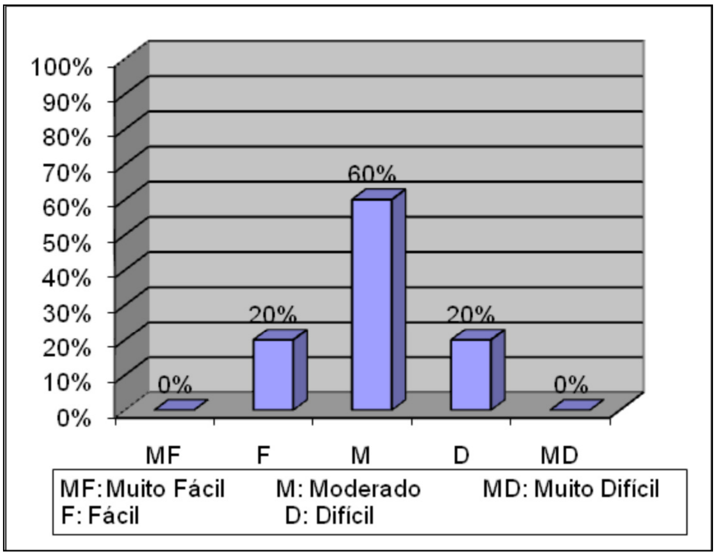


Gráfico 3.1: Nível das atividades no teste exploratório

Um dos participantes que marcou a opção *moderado* comentou que:

> "Acho que os alunos não seriam capazes de resolver sozinhos, pois precisam bastante de um professor auxiliando nas questões" (Participante 1).

A resolução de atividades investigativas, ainda, não é muito comum, o que justifica o fato de 60% dos participantes terem considerado o nível das atividades como "moderado".

A quarta pergunta buscou verificar se os participantes já haviam utilizado algum *applet* antes do teste exploratório. Verificou-se que apenas um participante não havia utilizado até o momento do minicurso.

A pergunta 5 questiona o nível de dificuldade na utilização dos *applets* de números complexos. As respostas foram bastante diversificadas: 2 participantes responderam *moderado*, 1 respondeu *muito fácil* e 2 responderam *fácil* (Gráfico 3.2).

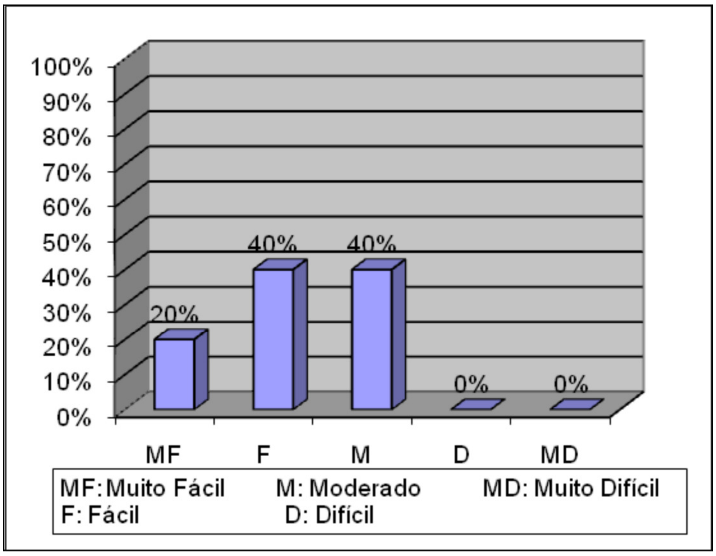


Gráfico 3.2: Nível dos *applets* no teste exploratório

Destacam-se, a seguir, três comentários de participantes, relacionados, respectivamente, à opção *moderado*, *fácil* e *muito fácil*.

> "Acho necessário ter bastante auxílio do professor e o aluno deve estar muito atento nas questões e tendo uma visão bem exploradora" (Participante 1).

> "O aspecto visual e a interatividade foram essenciais para facilitar a execução das atividades" (Participante 2).

> “Pois as opções para navegação nos *applets* estão fáceis, de modo que o usuário consiga avançar” (Participante 4).

O comentário do participante 2 destaca a importância da visualização. Esse fato é ressaltado por Oliveira (2010) quando afirma que a visualização em Matemática é necessária porque exibe organização de relações. Diferentemente das abordagens tradicionais do Ensino Médio, em que se prioriza o registro algébrico dos números complexos, a representação gráfica é necessária e constitui-se como um caminho para a compreensão do tema.

Nenhum participante considerou necessário realizar modificações nos *applets*, o que foi verificado por meio das respostas à pergunta 6.

Todos os participantes consideraram que o uso dos *applets* favorece a construção de conhecimentos matemáticos. Destacam-se os comentários de dois participantes:

> “A interação é um diferencial que não se vê nos livros, e o aluno constrói seus conhecimentos” (Participante 2).
>
> “Pois é realizado um processo construtivista em que o aluno formula suas conjecturas e pode verificá-las manipulando os *applets*” (Participante 4).

Todos os participantes observaram que os *applets* são recursos importantes para facilitar a aprendizagem. O posicionamento destes participantes está de acordo com o de Santos (1999), quando este afirma que é importante desenvolver *applets* destinados ao estudo de qualquer disciplina, assim como metodologias adequadas ao uso dos mesmos.

A fim de verificar a importância do papel do professor durante a utilização de *applets*, foi formulada a pergunta 8. Por meio desta verificou-se que dois participantes consideraram o papel do professor importante e dois consideraram muito importante (Gráfico 3.3). Apenas um participante considerou pouco importante e o mesmo justificou, afirmando que os alunos conseguem manipular os *applets* com as orientações das atividades e, assim, atingem os objetivos esperados, e que talvez o papel do professor seja verificar a aprendizagem.

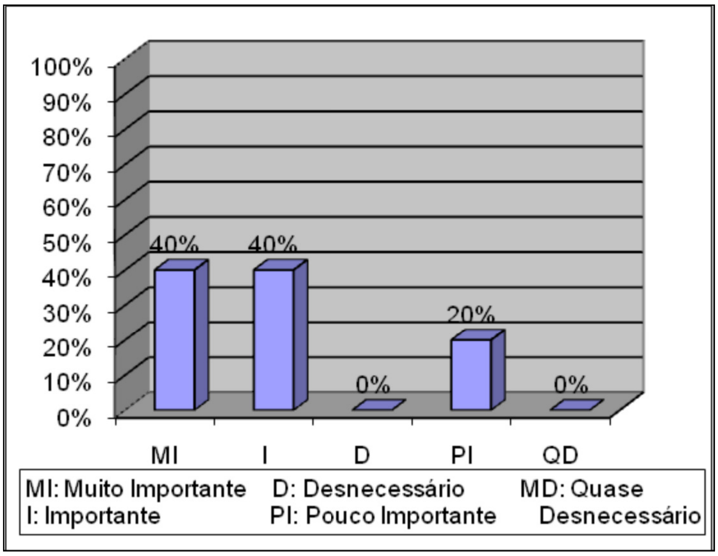


Gráfico 3.3: Importância do papel do professor

A pergunta 9 buscou avaliar a unidade de aprendizagem. Por meio das respostas verificou-se que critérios relacionados à usabilidade da unidade de aprendizagem foram muito bem avaliados (Gráfico 3.4).

Usabilidade

1- É fácil de usar.

2- Tem instruções claras.

3- É engajador / motivador.

4- Visualmente atraente.

5- É interativo.

6- Navegação fácil e consistente ao longo de toda unidade.

7- Compatível com diferentes navegadores.

8- Projeto gráfico (desenho de

página) de alta qualidade.

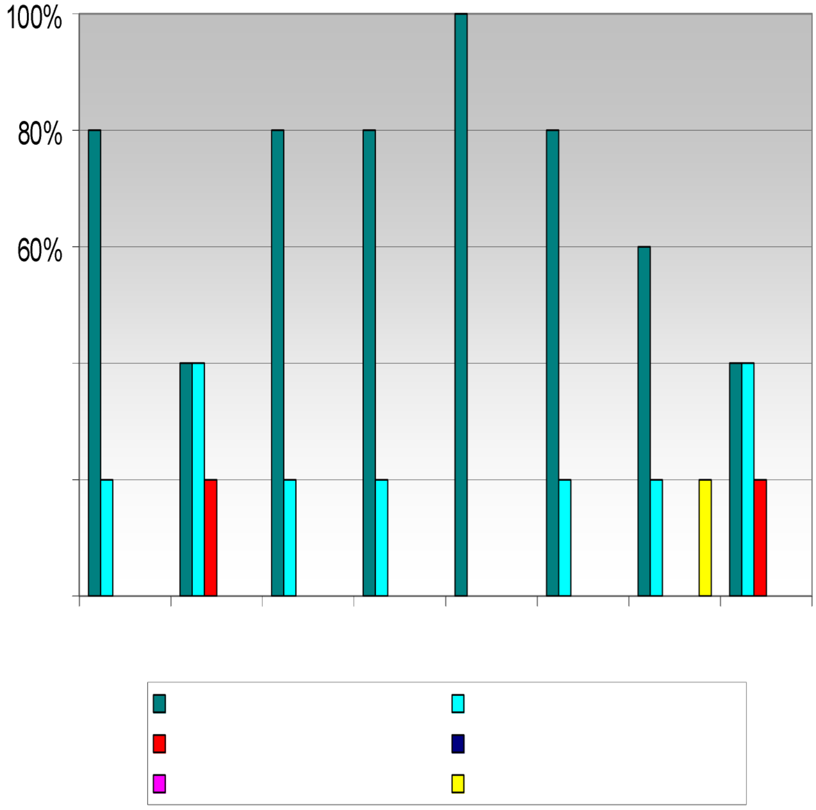


Gráfico 3.4: Avaliação da unidade quanto a critérios de usabilidade

A última pergunta solicitava sugestões e/ou críticas. Um participante do minicurso sugeriu fazer uso da unidade de aprendizagem (enfoque geométrico), paralelamente, à abordagem que os livros didáticos apresentam (abordagem algébrica). Outro sugeriu que a abordagem geométrica deveria ser feita após a abordagem algébrica. Vale ressaltar que ambos consideraram importante o uso da unidade, diferindo apenas na ordem do referido uso. Os demais participantes não deram sugestões.

O teste exploratório foi muito importante, uma vez que permitiu verificar que as atividades estão de acordo com o nível dos alunos e que estas, juntamente com os *applets*, possibilitam o alcance dos objetivos estabelecidos previamente para cada uma delas. Após realizada a alteração sugerida no *applet* de potenciação, ocorreu a experimentação da unidade de aprendizagem com alunos do Ensino Médio, como descrito na próxima seção.

3.2 Experimentação das atividades e *applets*: primeiro estudo de caso

A realização das atividades foi mediada pela autora deste trabalho, sob supervisão da orientadora e da co-orientadora. As atividades apresentadas na seção 2.2 foram experimentadas no âmbito deste trabalho monográfico[23].

A experimentação das atividades ocorreu em uma Instituição Federal de Ensino. O critério de escolha utilizado foi a Instituição oferecer Ensino Médio e dispor de laboratório de informática.

Tendo em vista que as turmas do terceiro ano do Ensino Médio da referida Instituição já haviam estudado números complexos e que o objetivo era validar as atividades com alunos que não tivessem conhecimentos sobre o tema, foi escolhida uma turma do segundo ano do Ensino Médio (turno da manhã).

Como a turma do segundo ano do Ensino Médio não havia estudado números complexos, antecedendo a resolução das atividades investigativas foi proposta a resolução de atividades de sondagem[24] (Apêndice F). Estas visam verificar se os alunos já estudaram alguns temas considerados prérrequisitos para o estudo de números complexos. Além disso, neste primeiro momento os alunos responderam ao questionário de sondagem. Como já apresentado na seção 2.4, este questionário contem cinco perguntas, com o objetivo de investigar a experiência dos alunos quanto ao uso das TIC, no contexto geral e, em particular, no processo de ensino e aprendizagem. Participaram desta etapa 23 alunos.

Por meio da análise das respostas das atividades de sondagem, verificou-se que os alunos tiveram dificuldades nas atividades de trigonometria e soma de vetores. Sendo assim, estes temas foram explicados antes da resolução das atividades investigativas de números complexos, por meio de um projetor multimídia (Apêndice G).

A partir da análise das respostas do questionário de sondagem, verificou-se que, dos 23 alunos que o preencheram, todos utilizam tecnologias digitais no dia a dia, sendo que 83% utilizam computadores na escola com a finalidade de fazer pesquisas. Apenas 17% dos alunos já utilizaram alguma tecnologia nas aulas de

[23] No âmbito do projeto de pesquisa ocorreu apenas o teste exploratório 1.

[24] Esta atividade foi resolvida pelos alunos individualmente no horário da aula de Matemática da turma.

Matemática, sendo a calculadora a única tecnologia utilizada por eles. Nenhum dos alunos utilizou *applet* nas aulas de Matemática, mas 74% consideraram que o uso de tecnologias pode contribuir para a aprendizagem da mesma, tendo como justificativa as facilidades que estas podem trazer para a aprendizagem, não só na Matemática, como em todas as disciplinas. Essas considerações são defendidas por Moran, Masetto e Behrens (2003) quando afirmam que a tecnologia apresenta-se como meio, como instrumento para colaborar no desenvolvimento do processo de aprendizagem. De maneira geral, pode-se afirmar que a maioria dos alunos participantes da experimentação usa tecnologias digitais no dia a dia, porém o uso das mesmas ainda é insipiente nas aulas de Matemática.

A experimentação das atividades não ocorreu durante o horário da aula de Matemática da turma, uma vez que o tema números complexos não faz parte do planejamento da série escolhida. Somente as atividades e o questionário de sondagem foram respondidos durante uma aula de Matemática da turma, com todos os alunos. Os encontros para experimentação ocorreram aos sábados, no turno da manhã, inicialmente com onze alunos da referida turma, que tiveram interesse e disponibilidade para participar. Foram necessários cinco encontros. O quadro 3.1 resume as atividades realizadas.

No primeiro encontro, foram aplicadas as atividades de sondagem, como já mencionado, com duração 50 minutos. O segundo, o terceiro e o quarto encontros foram realizados em um laboratório de informática da Instituição, no qual cada aluno usou um computador para resolver as atividades propostas. Durante esses encontros, também foi usado um projetor de multimídia, por meio do qual foram projetados os *applets* utilizados, facilitando a discussão e correção das atividades. Cada um desses encontros durou 3 horas. O quinto encontro ocorreu na própria sala de aula dos alunos fora do horário das aulas, com duração de 50 minutos. Neste foram resolvidos os exercícios da segunda parte da apostila (questões extraídas de vestibulares). A seguir descrevem-se algumas atividades desenvolvidas a partir do segundo encontro.

Quadro 3.1: Encontros realizados no primeiro estudo de caso

	Ações realizadas	**Data**	**Número de participantes**	**Local**
1º Encontro	Atividades e questionário de sondagem	19/03/10	23	Sala de aula
2º Encontro	Atividades de prérrequisito. Apresentação da parte histórica dos números complexos, da unidade, de algumas ferramentas do GeoGebra. Atividades de 1 a 5 da primeira parte da apostila	20/03/10	11	Laboratório de Informática
3º Encontro	Atividades 1, 2 e 3 da segunda parte da apostila e das atividades de 6 a 13 da primeira parte.	27/03/10	8	Laboratório de Informática
4º Encontro	Atividades 4 (segunda parte da apostila), 14 e 15 (primeira parte da apostila), 10 (letra a) e 11 (segunda parte da apostila). Manipulação dos *applets* divisão e multiplicação de números complexos.	17/04/10	9	Laboratório de Informática
5º Encontro	Questionário de experimentação. Atividades 5, 14 e 15 da segunda parte da apostila.	27/04/10	5	Sala de aula

No segundo encontro, após a análise das atividades de sondagem, foi apresentada a circunferência trigonométrica, revisando seno e cosseno de ângulos na primeira e na segunda volta (Figura 3.2) e soma de vetores. Na sequência, foi apresentada a parte histórica dos números complexos que está na apostila e na unidade de aprendizagem. A seguir, a unidade e algumas ferramentas do *software* GeoGebra foram mostradas. Dando continuidade, foi solicitada a resolução das atividades 1 a 5 da primeira parte da apostila. Nas atividades da primeira parte são utilizados os *applets* elaborados.

Figura 3.2 Apresentação da Circunferência Trigonométrica

No terceiro encontro, foram revisados os temas estudados no encontro anterior e logo após, os alunos resolveram as atividades 1, 2 e 3 da segunda parte da apostila (questões de vestibular) e as atividades 6 a 13 da primeira parte.

No quarto encontro, foram revisados os temas estudados no terceiro. Para este encontro foi planejada a resolução das atividades de 4 a 9 da segunda parte da apostila, no entanto os alunos estavam bastante dispersos e não conseguiram resolvê-las sozinhos. Sendo assim, o planejamento foi alterado e foi proposto aos alunos que resolvessem as atividades 14 e 15 da primeira parte da apostila, pois estas usavam *applets*. De acordo com Passerino et al. (2008), um professor mediador precisa levar em conta no seu planejamento, e posterior ação, aspectos organizacionais dos conteúdos, assim como metodologias e estratégias de ensino que permitam desenvolver um processo de mediação adaptado aos alunos e suas necessidades.

Ainda no quarto encontro, foram apresentados os *applets* de divisão e multiplicação de números complexos. Esses *applets* não apresentam atividades, são apenas explicativos. Em seguida, os alunos resolveram, junto com a mediadora, as atividades 10 (letra a) e 11 da segunda parte da apostila. Não houve tempo hábil para a resolução de 15 atividades da segunda parte. Sendo assim, foi necessário ocorrer o quinto encontro para resolver as referidas atividades. Nesse último encontro, os alunos conseguiram resolver apenas três atividades. Diante desta situação, a mediadora sugeriu que os alunos resolvessem as 12 atividades restantes em casa e entregassem na semana seguinte.

Analisando a participação dos alunos nos encontros descritos, considera-se que, apesar de não conhecerem o *software* GeoGebra antes das atividades propostas, conseguiram utilizar o mesmo com facilidade.

Nas subseções a seguir, analisam-se apenas alguns aspectos relacionados à resolução de algumas atividades. Nas atividades **5**, **7**, **9**, **10**, **12** e **13** os alunos não apresentaram dificuldades, sendo assim as resoluções das mesmas não são comentadas nas próximas subseções. Na referida análise, os alunos serão identificados por números: Aluno 1, Aluno 2 e, assim, por diante.

3.2.1 Análise da Resolução da Atividade 1

Durante a resolução do item **e**, os alunos tiveram dificuldades em exemplificar os números complexos de acordo com as condições estabelecidas no enunciado. Sendo assim, a mediadora promoveu questionamentos que levaram à reflexão, por parte dos alunos, sobre as referidas condições. Após estes questionamentos, os alunos conseguiram resolver corretamente. Segundo Moran, Masetto e Behrens (2003) o papel do professor é o de facilitador, incentivador e motivador da aprendizagem. Considera-se que a dificuldade foi decorrente da necessidade de interpretação do enunciado.

A partir dos questionamentos, durante a resolução do item **e,** e da resolução dos demais itens, os alunos analisaram, se seria possível obter um número imaginário puro cuja imagem fosse representada fora do eixo das ordenadas e um número real cuja imagem fosse representada fora do eixo das abscissas, justificando, corretamente, as respostas dadas. Considerou-se, assim, que os alunos atingiram plenamente, o objetivo desta atividade.

3.2.2 Análise da Resolução da Atividade 2 e 3

Apesar da atividade **2** conter as etapas que explicavam a construção dos vetores z_4 e $z_1 + z_4$, os alunos tiveram dificuldades no uso da ferramenta utilizada para construir o paralelogramo que representa $z_1 + z_4$. Foi necessário, então, que a mediadora desenvolvesse, junto com os alunos, a construção solicitada. Este fato foi considerado normal, pois, os alunos nunca haviam utilizado o GeoGebra. Isto influenciou no alcance do objetivo da atividade. De acordo com Passerino et al. (2008) o papel do mediador é importante não só para a apropriação do conhecimento, mas também para contribuir para o desenvolvimento da autonomia do aluno.

No item **b** da atividade **3** foi pedido aos alunos para descrever o que observaram quanto à parte real de z_1 e z_2, sabendo que z_3 é a soma de z_1 e z_2 e que z_3 deve estar sobre o eixo imaginário. Além disso, foi perguntado aos alunos se, nestas condições, o número complexo z_3 é um imaginário puro ou um número real. Dois alunos descreveram a observação desta forma:

> "z_3 é um número imaginário puro e z_1 que ficou com os números negativos e z_2 com números positivos" (Aluno 1).

> "z_3 é um número imaginário puro. Que em qualquer ponto que z_3 esteja no eixo imaginário, a parte real de z_1 e z_2 são opostas" (Aluno 3).

Nota-se que o Aluno 3 registrou, de forma mais clara, a relação entre a parte real de z_1 e z_2 do que o Aluno 1, embora seja possível perceber que este também compreendeu o que estava sendo analisado. Apesar de alguns alunos conseguirem registrar de forma mais clara do que outros, todos responderam corretamente. Segundo Moysés (2007), pode, em determinadas situações, acontecer de o aluno ser capaz de pensar sobre um determinado assunto, mas não conseguir expressá-lo corretamente por meio de palavras.

Já no item **c**, os alunos teriam que obter um complexo z_3 tal que sua imagem fosse representada no eixo real e responder se este é um número imaginário puro ou um número real. A seguir, teriam que descrever o que foi observado quanto parte imaginária de z_1 e z_2. Um aluno descreveu desta forma:

> "Número real. A parte imaginária de z_1 é o inverso da parte imaginária de z_2" (Aluno 6).

Pode-se observar que este aluno confundiu a palavra oposto com inverso, na hora de explicar; afinal, essas palavras têm significados diferentes. A resposta correta seria a do seguinte aluno:

> "Número real. Ficaram opostos" (Aluno 2).

Os demais alunos conseguiram conjecturar corretamente as condições para que um número complexo resultante da adição de dois números complexos fosse real.

Os comentários orais feitos pelos alunos, na socialização das respostas, em relação à soma de números complexos, a partir da soma geométrica de vetores no *applet*, sinalizaram que os recursos do mesmo contribuíram para o alcance do objetivo da atividade. Esse fato está coerente com as ideias de Moran, Masetto e Behrens (2003) quando afirmam que a tecnologia é considerada como instrumento de mediação pedagógica, podendo incentivar a participação e o envolvimento do aprendiz.

3.2.3 Análise da Resolução da Atividade 4

Nesta atividade foi necessária a mediação do professor apenas para a construção do vetor $-z_5$ (Figura 3.3). A construção do vetor que representa $z_1 - z_5$, foi realizada com facilidade. Considera-se que a explicação da construção da atividade **2** influenciou positivamente na realização dessa atividade. De acordo com Passerino et al. (2008), os professores que realizam mediações de qualidade contribuem para sucesso dos processos educativos.

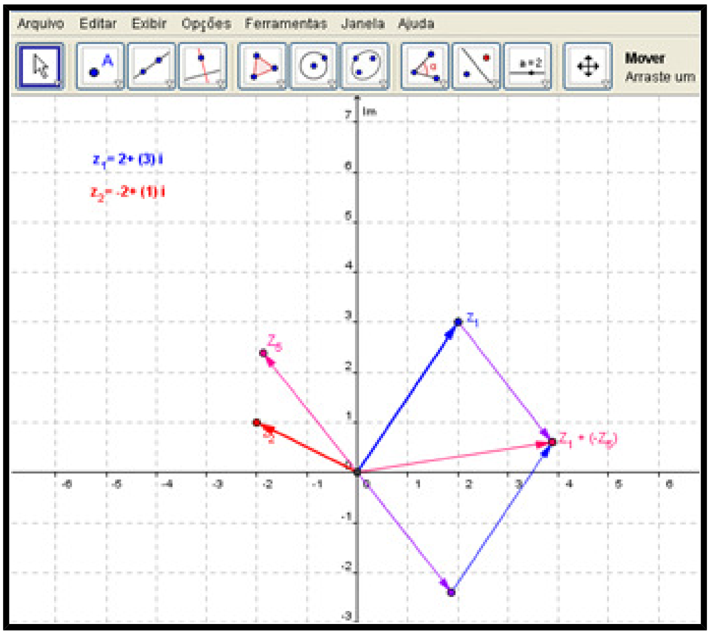


Figura 3.3: Atividade 4

3.2.4 Análise da Resolução da Atividade 6

Nesta atividade, observou-se que os alunos tiveram dificuldades em resolver o item **c**. Neste é solicitada a representação da imagem de z_1 tal que $z_1= -z_2$ e é questionado que vetor representa z_3, sendo $z_3 = z_1 + z_2$. Dos nove alunos, seis acharam necessário que a parte real de z_1 fosse oposta a de z_2 e a parte imaginária fosse diferente de zero (Figura 3.4), o que não é correto. Com a visualização gráfica no *applet*, os alunos perceberam que além de z_1 ter a parte real oposta a de z_2, z_1 também teria que ser um número real, ou seja, a parte imaginária teria que ser zero para que a igualdade ($z_1= -z_2$) fosse verdadeira. Logo, foi possível observar que o *applet* contribuiu para que os alunos chegassem à resposta correta. Este fato reforça a ideia de Oliveira (2010), quando afirma que se torna talvez um pouco trabalhoso para o professor que utiliza apenas giz e lousa representar os complexos no plano de Argand-Gauss e apelar para que o estudante “imagine” a rotação, a translação, etc., entre tais números. Portanto, o uso de s*oftwares* de geometria dinâmica, em particular o GeoGebra, é uma ótima ferramenta para representações gráficas de números complexos (OLIVEIRA, 2010).

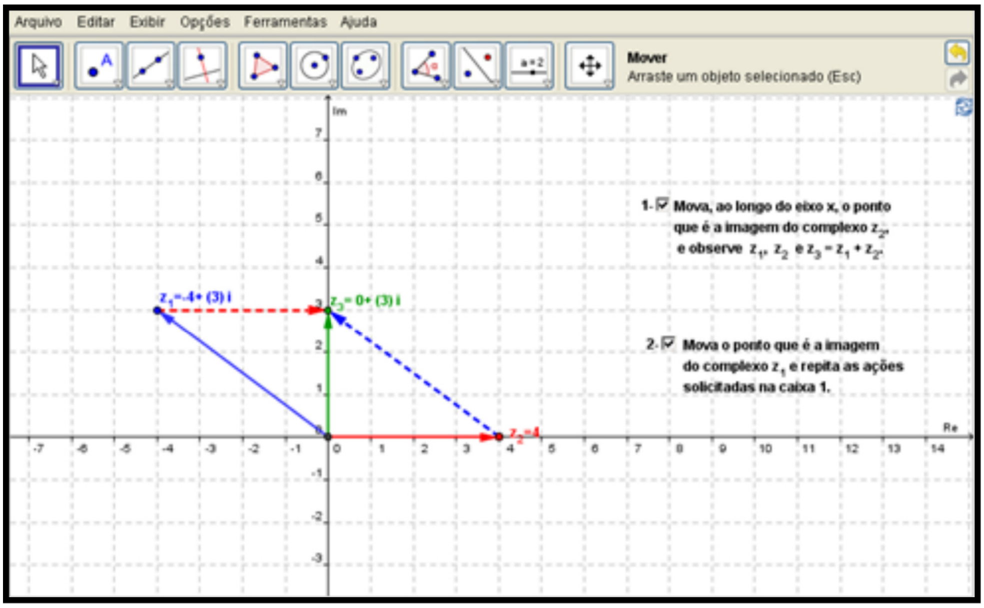


Figura 3.4: *Applet* Adição de Número Complexo com Número Real

Já no item **d,** como é semelhante ao **c**, a mediadora apenas orientou a resolução e os alunos resolveram sem dificuldades.

3.2.5 Análise da Resolução da Atividade 8

Na atividade **8** foi solicitado aos alunos que analisassem o comprimento, a direção, e o sentido do vetor que representa o produto de um número complexo por um escalar real (k), considerando diversos valores de k. A maioria dos alunos teve dúvidas sobre o que era direção e sentido. Foi necessário então que a mediadora definisse os termos. Após a definição, considera-se que a movimentação possibilitada pelo *applets* contribuiu para que o objetivo da atividade fosse alcançado. Este fato retrata que por meio dos recursos computacionais o aluno pode construir, mover, arrastar, aumentar, diminuir figuras geométricas, gráfico de funções, além de interagir e modificar suas características (BAIRRAL, 2009).

3.2.6 Análise da Resolução da Atividade 11

Nesta atividade foi solicitado aos alunos que verificassem que as potências se repetem a cada grupo de quatro ($i^0\ i^1\ i^2\ i^3$). Com o auxílio dos recursos do *applet* e orientação da professora, os alunos conseguiram observar o padrão das potências, alcançando assim o objetivo desta atividade. Segundo Moysés (2007), as várias formas de mediação permitem os alunos construírem conhecimentos.

3.2.7 Análise da Resolução da Atividade 14

Nesta atividade, os alunos apresentaram dificuldades em comparar os módulos (quando n = 2) e, consequentemente conjecturar uma relação entre os mesmo (item b atividade 14). Logo, foi necessário explicar o *applet* e fazer questionamentos para que os alunos pudessem deduzir a fórmula da potenciação de um número complexo. Para isso, foi solicitado aos alunos que comparassem os valores dos módulos e dos argumentos de um número complexo dado e das potências deste número. A partir daí, os alunos conseguiram entender o *applet* e, com isso, resolveram a atividade sem muitas dificuldades.

3.2.8 Análise da Resolução da Atividade 15

Nesta atividade os alunos apresentaram dificuldades ao observar a relação entre os argumentos das raízes apresentadas. Considera-se que isto aconteceu devido ao fato de os alunos terem dificuldades em trigonometria, como já mencionado anteriormente. Foi preciso, então, fazer questionamentos para que os alunos pudessem deduzir a relação entre os argumentos. Após os questionamentos, os alunos conseguiram realizar a atividade.

De maneira geral, considera-se que as dificuldades apresentadas na resolução da primeira parte da apostila estavam associadas ao pouco conhecimento que os alunos possuíam em trigonometria e vetores. A análise permitiu identificar as possíveis causas das dificuldades citadas; estas foram consideradas na organização do segundo estudo de caso.

Além disso, foi possível perceber que a extensão do conteúdo abordado requer mais tempo do que o que foi planejado, independente das dificuldades dos alunos. Sendo assim, no segundo estudo de caso, devido ao pouco tempo para conclusão deste trabalho, optou-se por não usar os *applets* de potenciação e radiciação.

Quanto ao uso da unidade, verificou-se que os alunos não apresentaram dificuldades na manipulação da mesma. Por meio de um comentário oral feito por uma aluna à mediadora, observou-se que os alunos gostaram da unidade. Destaca-se o comentário feito pela aluna:

> “Professora vou elogiar seu trabalho, pois, me pareceu muito difícil de fazer e está muito bem feito” (Aluna 3).

Na próxima subseção é apresentada a análise da segunda parte da apostila, ainda no âmbito do primeiro estudo de caso.

3.2.9 Análise das questões da segunda parte da apostila

Os alunos apresentaram muitas dificuldades na realização de algumas questões da segunda parte da apostila. Nos cinco encontros, foram realizadas apenas seis questões de vestibular, que serão analisadas a seguir:

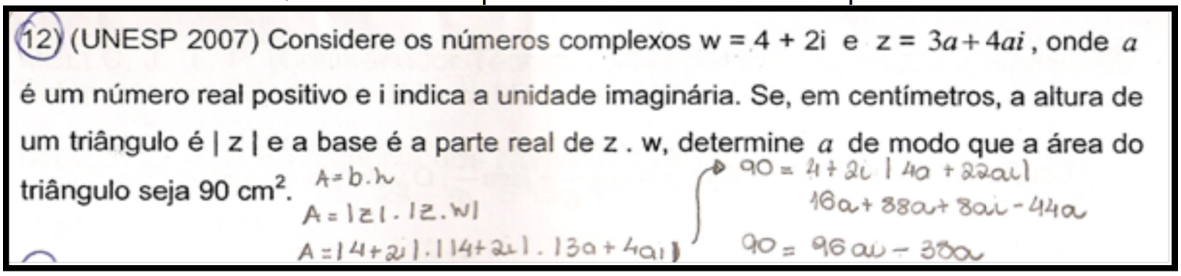
Nas atividades **1**, **2** e **3**, os alunos não apresentaram dificuldades para realizar. Considera-se que este fato é decorrente da correspondência destas com as atividades de 1 a 5 da primeira parte da apostila, que também foram resolvidas facilmente.

Na atividade **4**, foi solicitado o cálculo do argumento dos números complexos dados, mas os alunos não conseguiram resolver sozinhos pelo fato de não terem estudado com profundidade trigonometria, como já mencionado. Sendo assim, foi necessário que a mediadora fizesse junto com eles.

Nas atividades **10** (letra a) e **11,** foi solicitada a divisão e a multiplicação de dois números complexos, respectivamente, atividades que os alunos resolveram sob orientações da mediadora, pois apresentaram dificuldades. Considera-se que este fato pode ter sido decorrente da falta de atividades sobre esses temas na primeira parte da apostila (os *applets*, que correspondem a essas atividades, são só explicativos). Para o próximo estudo de caso, foi acrescentado um exercício de aplicação sobre divisão e multiplicação, visando assim, evitar as dificuldades apresentadas pelos alunos na resolução das atividades de vestibular citadas.

As demais atividades foram deixadas para os alunos resolverem em casa e entregar uma semana depois. Apenas uma aluna resolveu seis questões; no entanto somente três destas corretamente, as demais foram resolvidas com alguns erros, como o apresentado no quadro 3.2. A aluna, além de calcular o módulo de forma errada, usou a fórmula da área do triângulo também errada e substituiu os valores também de forma errada. Os sucessivos erros, alguns difíceis de entender, como, por exemplo, nem utilizar o dado do enunciado, parecem indicar pouca atenção da aluna na referida resolução, sinalizando uma preocupação apenas em não deixar a questão "em branco".

Quadro 3.2: Resposta da Atividade **12** da 2ª parte


12) (UNESP 2007) Considere os números complexos w = 4 + 2i e $z = 3a + 4ai$, onde a é um número real positivo e i indica a unidade imaginária. Se, em centímetros, a altura de um triângulo é | z | e a base é a parte real de z . w, determine a de modo que a área do triângulo seja 90 cm².

$A = b.h$

$A = |z| . |z.w|$

$A = |4+2i| . |4+2i| . |3a+4ai|$

$90 = 4+2i \mid 4a + 22ai \mid$

$16a + 88a + 8ai - 44a$

$90 = 96ai - 38a$

Após a realização das atividades, os alunos responderam um questionário com perguntas sobre os *applets* e as atividades, assim como sobre a unidade propriamente dita. A análise das respostas é apresentada na próxima subseção.

3.2.10 Análise dos questionários

Como foi mencionado na seção 2.4 este questionário visa investigar o desempenho dos alunos ao utilizarem a unidade de aprendizagem "Investigando em ₵". Além disso, visa também avaliar a unidade quanto sua usabilidade. Este foi respondido por nove alunos.

A primeira pergunta refere-se aos enunciados das atividades. Verificou-se que 89% dos alunos consideraram os enunciados *claros* e 11% consideraram *parcialmente claros*. Este resultado era esperado, já que os participantes do teste exploratório não verificaram falhas nos enunciados.

Por meio da análise das respostas da pergunta 2, verificou-se que todos os alunos consideraram que as atividades contribuíram para a compreensão dos tópicos de números complexos em estudo. Destacam-se algumas justificativas dos alunos:

> "Porque facilita o entendimento e o estudo" (Aluno 3).

> “Porque nos ajuda a pensar de uma forma diferente nas resoluções das questões” (Aluno 1).
>
> “Porque não estudamos desse jeito em sala de aula” (Aluno 8).

A justificativa do aluno 8 está coerente com o que afirma Bairral (2009) quando destaca a pouca utilização das TIC na sala de aula de Matemática.

A partir da análise das respostas apresentas à terceira pergunta, verificou-se que 67% dos alunos consideraram o nível das atividades *moderado*, justificando pelo fato de exigir um pouco mais de atenção na resolução das atividades. Os demais alunos consideraram *difícil* (Gráfico 3.5), sem justificativa. Isso se explica pelo fato de as atividades investigativas ainda não serem muito comuns. Pode-se observar que as respostas dos alunos estão coerentes com o que aconteceu na resolução das atividades investigativas, ou seja, os alunos apresentaram realmente muitas dificuldades.

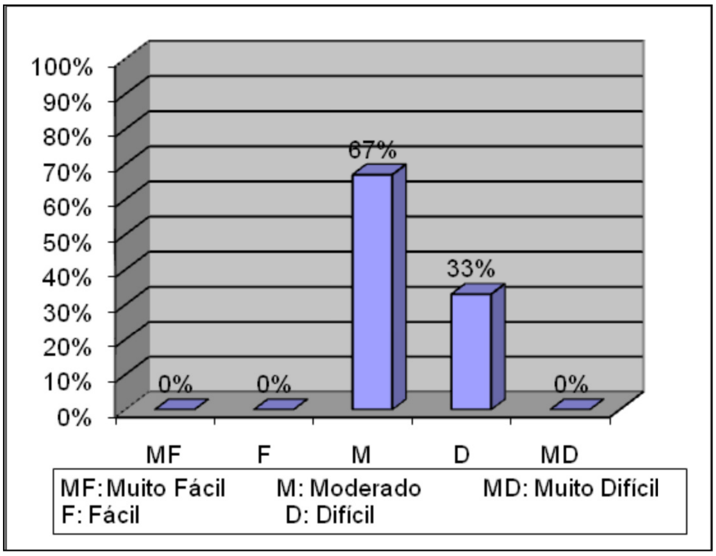


Gráfico 3.5: Nível das atividades na experimentação

Ao analisar as respostas da quarta pergunta, verificou-se que 67% dos alunos consideraram *fácil* a manipulação dos *applets*. Os demais (33%) consideraram *muito fácil*. Estes índices sinalizam a preocupação da autora com a qualidade dos *applets*, o que ressalta a importância do teste exploratório, pois este tem como objetivo verificar algum erro ou alguma dificuldade na manipulação dos *applets* e na resolução das atividades.

Destacam-se dois comentários que retratam isto, um de um aluno que avaliou como *fácil* e outro de um aluno que considerou *muito fácil*, respectivamente:

> “O *applet* explica detalhadamente” (Aluno 9).
>
> “Legal e prático mexer nos applets” (Aluno 7).

A partir da análise da resposta da pergunta 5, verificou-se que nenhum aluno considerou necessário realizar modificações nos *applets*.

É importante destacar que, mesmo com todas as dificuldades demonstradas na resolução das atividades, todos os alunos consideraram que o uso dos *applets* favorece a construção de conhecimentos matemáticos.

Na pergunta 7, questionou-se sobre a importância do papel do professor durante a utilização dos *applets*, verificou-se que 44% consideraram *importante* o papel do professor e 56% consideraram *muito importante*. Considera-se que estes índices estão relacionados à importância das intervenções realizadas pela mediadora no momento em que os alunos apresentavam dúvidas. Segundo Moran, Masetto e Behrens (2003) o papel principal do professor é ajudar os alunos a interpretar dados, a relacioná-los e a contextualizá-los. Seu papel fundamental é o de orientador/mediador (MORAN; MASETTO; BEHRENS, 2003).

A pergunta 8 visou avaliar a unidade de aprendizagem. Por meio das respostas, verificou-se que critérios relacionados à usabilidade da unidade de aprendizagem foram muito bem avaliados (Gráfico 3.6).

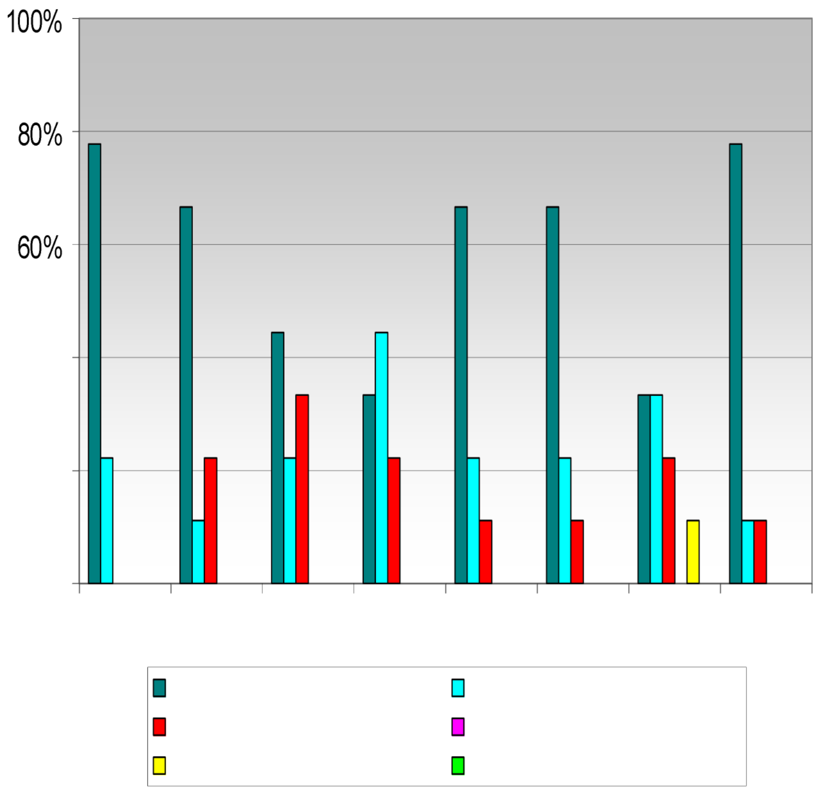
A última pergunta é direcionada às sugestões ou críticas quanto à unidade de aprendizagem. Apenas um aluno apresentou o seguinte comentário:

> “A aprendizagem é muito criativa e estimula a aprendizagem” (Aluno 9).

Os demais alunos não apresentaram sugestões ou críticas.

O primeiro estudo de caso foi muito importante para identificar que alguns ajustes deveriam ser feitos. Esse estudo permitiu identificar dificuldades do público a que se destina (alunos do Ensino Médio) ao usar os *applets* e resolver as atividades. A falta de conhecimentos de trigonometria e vetores foram fatores primordiais para as dificuldades diagnosticadas no estudo de números complexos. Esse fato foi considerado na preparação do segundo estudo de caso. Além disso, como já mencionado na seção 3.2.8, foi possível perceber que a extensão do conteúdo contemplado no material elaborado requer mais tempo do que foi planejado, independente das dificuldades dos alunos.

Usabilidade



1- É fácil de usar.

2- Tem instruções claras.

3- É engajador / motivador.

4- Visualmente atraente.

5- É interativo.

6- Navegação fácil e consistente ao longo de toda unidade.

7- Compatível com diferentes navegadores.

8- Projeto gráfico (desenho de página) de alta qualidade.

Gráfico 3.6: Avaliação da unidade quanto a critério de usabilidade

Na subseção a seguir são descritas as análises das atividades do segundo estudo de caso.

3.3 Experimentação das Atividades: segundo estudo de caso

Para realização do segundo estudo de caso, foram necessários quatro encontros. No primeiro foram aplicadas as atividades e o questionário de sondagem. O segundo, terceiro e quarto encontros foram realizados no mesmo laboratório de informática do primeiro estudo, aos sábados, no turno da manhã, com duração de 3 horas cada. Participaram deste estudo inicialmente 26 alunos que tiveram interesse e disponibilidade.

Quadro 3.3: Encontros realizados no segundo estudo de caso

	Ações realizadas	**Data**	**Número de participantes**	**Local**
1º Encontro	Atividades e questionário de sondagem.	23/08/10	21	Sala de aula
2º Encontro	Atividades de prérrequisito. Apresentação da parte histórica dos números complexos, da unidade, de algumas ferramentas do GeoGebra. Atividades 1, 2 e 3 da primeira parte da apostila.	28/08/10	26	Laboratório de Informática
3º Encontro	Atividades de 4 a 8 da primeira parte da apostila.	11/09/10	26	Laboratório de Informática
4º Encontro	Atividades de 9 a 15 da primeira parte da apostila.	18/09/10	24	Laboratório de Informática

Neste segundo estudo de caso, optou-se por alunos que já haviam concluído o estudo sobre trigonometria. Devido ao pouco tempo para conclusão deste trabalho monográfico, optou-se por não usar os *applets* de potenciação e radiciação. Assim, a apostila utilizada nesta fase da pesquisa apresenta algumas modificações em relação a anterior (Apêndice H). Na primeira parte da apostila, foram acrescentadas 15 atividades de aplicação, distribuídas ao final de cada atividade investigativa. O objetivo da inserção destas atividades foi possibilitar a aplicação do que foi conjecturado na manipulação dos *applets*. Além disso, foram retiradas as atividades associadas aos *applets* de radiciação e potenciação.

Os alunos que participaram deste segundo estudo de caso passaram pelas mesmas etapas[25] dos participantes que realizaram o primeiro estudo de caso. Assim, inicialmente, foi verificado se os alunos já haviam estudado temas considerados prérrequisitos para o estudo de números complexos (atividades de sondagem). Além disso, investigou-se a experiência dos alunos quanto ao uso de TIC, por meio de um questionário.

Por meio da análise das atividades de sondagem, verificou-se que os alunos deste estudo de caso, assim como os do primeiro, também apresentaram dificuldades na soma de vetores. Sendo assim, este tema foi explicado antes da resolução das atividades investigativas. Optou-se, também, por revisar a

[25] Atividades e questionário de sondagem; experimentação das atividades e questionário de experimentação.

circunferência trigonométrica, analisando seno e cosseno de ângulos na primeira e na segunda volta (Figura 3.5).

Figura 3.5: Apresentação da Circunferência Trigonométrica - Segundo Estudo de Caso

Todos os 19 alunos que preencheram o questionário, assim como os alunos do primeiro estudo de caso, utilizam tecnologia no dia a dia e também na escola (com a finalidade de fazer pesquisas). Apenas 16% dos alunos já utilizaram tecnologia nas aulas de Matemática. Assim como os alunos do primeiro caso, esses alunos nunca utilizaram *applet* em aulas de Matemática. A maioria dos alunos (89%) considerou que o uso de tecnologias digitais pode contribuir para a aprendizagem de Matemática, sob a justificativa de que as referidas tecnologias já fazem parte do dia a dia e, portanto, podem ser usadas para apoiar a aprendizagem. Esse posicionamento está de acordo com Oliveira (2010), quando este afirma que o uso de computadores merece ser destacado, pois abre portas para um mundo de informações e novos procedimentos com relação à escrita e à organização de dados.

Utilizando a apostila com as modificações descritas anteriormente, ocorreu a experimentação das atividades e dos *applets* com alunos do Ensino Médio, no âmbito do segundo estudo de caso, como descrito na próxima seção.

3.3.1 Análise das atividades

Por meio da análise da resolução das atividades e da observação das atitudes e dos comentários dos alunos, foi possível perceber a importância do conhecimento de trigonometria nas atividades propostas neste trabalho monográfico.

Nesse estudo de caso, de maneira geral, os alunos resolveram mais facilmente as atividades que os do primeiro estudo de caso.

Na atividade **1**, os alunos apresentaram dificuldades análogas aos alunos do primeiro estudo de caso, na exemplificação dos números complexos de acordo com as condições estabelecidas no enunciado da letra **e**. Após alguns questionamentos feitos pela professora, os alunos atingiram o objetivo da atividade. Nesta mesma atividade, na letra **f**, os alunos apresentaram dificuldades em justificar se seria possível algum número imaginário puro ou real ser representado fora dos eixos das ordenadas ou abscissas, respectivamente, pois acharam óbvio que isso não seria possível, o que implicaria não precisar justificar. Nesse momento, a mediadora pediu para que os alunos explicassem, oralmente, a justificativa, com isso, os mesmos conseguiram se expressar, mas não conseguiam explicar colocando no papel. A mediadora recomendou, então, que os alunos colocassem na resposta exatamente o que eles disseram. A partir daí, os alunos conseguiram arrumar a justificativa no papel.

Nas atividades **2** e **4**, os alunos apresentaram dificuldades no uso da ferramenta utilizada para construir o paralelogramo, que possibilita analisar geometricamente a soma e a subtração de dois números complexos, respectivamente. Considera-se que esta dificuldade pode estar relacionada a pouca compreensão do que seja um vetor, apesar de a mediadora ter explicado o assunto no início da aula. Oliveira (2010) aborda essa questão, afirmando que os alunos não conseguem resolver determinados problemas relacionados aos números complexos devido a deficiências de prérrequisitos da Matemática no Ensino Médio, como é o caso de vetores que não é abordado neste nível de escolaridade. Além disso, era a primeira vez que os alunos utilizavam a referida ferramenta do GeoGebra. Embora a mesma tivesse sido explicada no início da aula, entende-se que é no uso efetivo que surgem as dúvidas.

Na atividade **3**, apenas uma aluna não respondeu corretamente o item **d**, por problema na interpretação do enunciado. O item mencionado solicitava que os pontos que são imagens de z_1 e z_2 fossem movidos até obter $z_1 = 3 + 2i$ e $z_2 = -3 -2i$ e, então, o vetor $z_3 = z_1 + z_2$ fosse observado (Figura 3.6a). A referida aluna entendeu que era para mover o ponto que é a imagem de z_1 até obter $z_1 = 3 + 2i$ e observar z_3 (Figura 3.6b) e depois mover z_2 até obter $z_2 = -3 -2i$ e observar z_3. Tais ações geraram a figura que não foi a solicitada na questão. Sendo assim, ela declarou que $z_3 = 6 + 3i$, porém deveria ter afirmado que $z_3 = 0 + 0i$ (vetor nulo). Este fato ressalta a importância da socialização das respostas, pois foi por meio desta que se tornou possível analisar o porquê da resposta errada e assim, corrigi-la, no momento certo. Considera-se, assim como Perego e Buriasco (2005), que o erro é muitas vezes tão importante quanto o acerto na aprendizagem dos alunos. Este pode servir, ao professor, como fonte de informação sobre a construção do conhecimento dos seus alunos (PEREGO, BURIASCO, 2005). Por conseguinte, é importante conhecê-lo e entendê-lo, investigando sua natureza (PEREGO, BURIASCO, 2005).

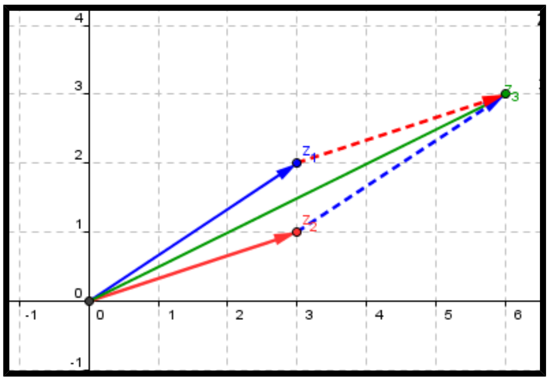


Figura 3.6a: Representação errada da aluna no enunciado da letra **d**

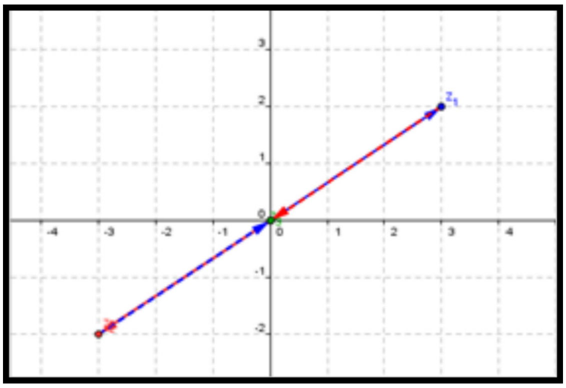


Figura 3.6b: Representação correta do enunciado da letra **d**

Figura 3.6: Resposta da Atividade **3**

Assim como na atividade **1**, na atividade **6**, item **d**, os alunos responderam corretamente, mas apresentaram dificuldades em expressar por escrito as justificativas (Quadro 3.4a). Após alguns questionamentos feitos pela mediadora, os alunos construíram suas justificativas oralmente; sendo assim conseguiram descrever as justificativas da mesma forma que responderam oralmente (Quadro 3.4b). Segundo Vygotsky (1987 *apud* MOYSÉS, 2007), o pensamento não tem um paralelo imediato em palavras. Isso constata o fato de expressar o seu próprio pensamento para outras pessoas ajuda o aluno a organizá-lo (FORMAN; GAZDEN, 1988 *apud* MOYSÉS, 2007).

Quadro 3.4: Resposta da Atividade **6**

d) Sendo z_1 um número complexo em que a parte real e a parte imaginária são diferentes de zero e z_2 um número real, é possível que $z_3 = z_1 + z_2$ seja um número real? É possível que z_3 seja um imaginário puro? Justifique suas respostas.

Não é possível. Sim é possível

Quadro 3.4a: Resposta do aluno que não conseguiu justificar

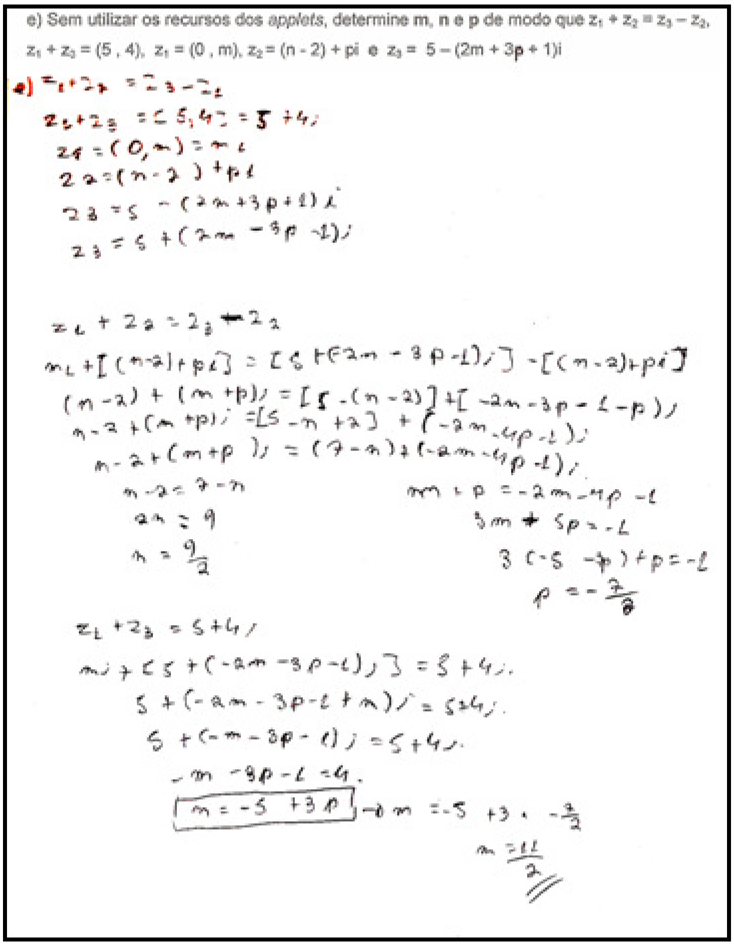
d) Sendo z_1 um número complexo em que a parte real e a parte imaginária são diferentes de zero e z_2 um número real, é possível que $z_3 = z_1 + z_2$ seja um número real? É possível que z_3 seja um imaginário puro? Justifique suas respostas.

Não, não é possível, pois a parte imaginária de z_1 é $\neq 0$. Sim se a parte de z_1 e z_2 serem opostos

Quadro 3.4b: Resposta do aluno que justificou

Na atividade **7**, os alunos apresentaram dificuldades no item **e** (este foi acrescentado na nova versão da apostila). Atribui-se este fato ao uso de duas notações dos números complexos (Quadro 3.5) na mesma atividade (ponto e forma algébrica) e ao uso de sistemas lineares para resolução da atividade. Segundo Perego e Buriasco (2005), os alunos quando se encontram diante de alguma situação na qual e para qual são desafiados a interpretar e pensar, sentem dificuldades. Após alguns questionamentos da mediadora, a atividade foi resolvida corretamente.

Quadro 3.5: Resposta da Atividade **7**


e) Sem utilizar os recursos dos *applets*, determine m, n e p de modo que $z_1 + z_2 = z_3 - z_2$, $z_1 + z_3 = (5, 4)$, $z_1 = (0, m)$, $z_2 = (n - 2) + pi$ e $z_3 = 5 - (2m + 3p + 1)i$

e) $z_1+z_2 = z_3-z_2$

$z_1+z_3 = (5,4) = 5+4i$

$z_1 = (0,m) = mi$

$z_2 = (n-2)+pi$

$z_3 = 5-(2m+3p+1)i$

$z_3 = 5+(-2m-3p-1)i$

$z_1+z_2 = z_3-z_2$

$mi+[(n-2)+pi] = [5+(-2m-3p-1)i]-[(n-2)+pi]$

$(n-2)+(m+p)i = [5-(n-2)]+[-2m-3p-1-p)i$

$n-2+(m+p)i = [5-n+2]+(-2m-4p-1)i$

$n-2+(m+p)i = (7-n)+(-2m-4p-1)i$

$n-2 = 7-n$ $\qquad m+p = -2m-4p-1$

$2n = 9$ $\qquad 3m+5p = -1$

$n = \frac{9}{2}$ $\qquad 3(-5-p)+p = -1$

$p = -\frac{7}{2}$

$z_1+z_3 = 5+4i$

$mi+[5+(-2m-3p-1)i] = 5+4i$

$5+(-2m-3p-1+m)i = 5+4i$

$5+(-m-3p-1)i = 5+4i$

$-m-3p-1 = 4$

$\boxed{m = -5+3p} \rightarrow m = -5+3 \cdot -\frac{7}{2}$

$m = \frac{11}{2}$

Na atividade **8**, assim como no primeiro estudo de caso, os alunos apresentaram dúvidas sobre direção e sentido. Há indícios de que este fato ocorreu pela falta de atenção dos alunos, pois esses conceitos foram revisados no início da aula. Três alunos fizeram a comparação solicitada na atividade apenas considerando o comprimento; isso, provavelmente, tenha ocorrido devido à falta de atenção ao lerem o enunciado (Quadro 3.6). Este fato foi diagnosticado no momento da aula e comentado pela mediadora com toda a turma; porém estes alunos não modificaram suas respostas, embora sinalizassem que entenderam o que foi explicado.

Quadro 3.6: Resposta da Atividade **8**

Atividade 8

Abra o *applet* "Multiplicação de um número complexo por um escalar" (Mult. por escalar) e determine o que se pede:

a) Marque as caixas que aparecem no *applet* e execute o que for solicitado.

b) O que é possível afirmar sobre o comprimento, a direção e o sentido do vetor que representa z_2, em relação ao vetor que representa z_1, quando:

→ $0 < k < 1$

z1 > z2

→ $k = 1$

z1 = z2

→ $k > 1$

z2 ≥ z1

→ $k = -1$

z2 é inverso de z1

→ $-1 < k < 0$

z2 > z2

→ $k < -1$

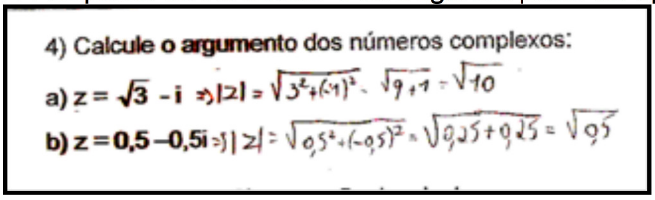
z2 > z1

Na atividade **9**, no item **g**, uma aluna apresentou a seguinte resposta: $|2+3i| = 2+3i$. Para que a aluna pudesse refletir sobre o erro, a professora pediu que voltasse ao *applet* "módulo e conjugado" e observasse o que foi conjecturado para o cálculo do módulo de um número complexo. A partir desta ação, a aluna conseguiu resolver corretamente o item **g**. A resposta apresentada sinaliza que ela calculou o módulo do número complexo como se ele fosse um número real.

As atividades que os alunos conseguiram resolver com facilidade, atingindo os objetivos das mesmas, não foram comentadas nesta seção.

Devido ao pouco tempo, não foi possível realizar em aula as atividades da segunda parte da apostila, então foi solicitado que os alunos levassem a apostila para casa para resolverem as atividades. Apenas três alunos resolveram. Algumas atividades foram resolvidas com alguns erros, como mostrado no quadro 3.7.

Quadro 3.7: Resposta da Atividade **4** da segunda parte da apostila.



4) **Calcule o argumento** dos números complexos:

a) $z = \sqrt{3} - i \Rightarrow |z| = \sqrt{3^2+(-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

b) $z = 0{,}5 - 0{,}5i \Rightarrow |z| = \sqrt{0{,}5^2+(-0{,}5)^2} = \sqrt{0{,}25+0{,}25} = \sqrt{0{,}5}$

Observa-se que, ao realizar a atividade 4, a aluna calculou o módulo dos números complexos ao invés de calcular o argumento. Imagina-se que os três alunos resolveram as atividades, juntos, pois os três calcularam desta forma, ou seja, trocaram argumento por módulo. As demais atividades da segunda parte da apostila foram realizadas corretamente.

Após a realização das atividades, como ocorreu no primeiro estudo de caso, os alunos do segundo estudo de caso responderam um questionário com perguntas sobre os *applets* e as atividades, assim como sobre a unidade propriamente dita. Na próxima subseção são apresentadas as análises das respostas.

3.3.2 Análise dos questionários

A primeira pergunta desse questionário refere-se à clareza dos enunciados. Feitas as análises, verificou-se que dos 19 alunos que participaram deste segundo estudo de caso e responderam ao questionário, apenas um considerou os enunciados *parcialmente claros* sem apresentar justificativas. Os demais alunos consideraram *claros*.

Ao analisar a segunda pergunta, verificou-se que 84% disseram que as atividades contribuíram, sim, para a compreensão dos tópicos de número complexos e 16% consideraram que as atividades contribuíram *parcialmente* para a compreensão dos tópicos de números complexos. Um dos participantes que considerou *parcialmente* afirmou que: “Às vezes complicava” (Aluno 18). Um dos participantes que concordou que as atividades contribuíram para a compreensão dos tópicos de números complexos justificou assim: “Sim, pois foi pela maneira dinâmica na qual foi apresentada” (Aluno 10). Essa justificativa sinaliza a importância de elaborar atividades mais dinâmicas, uma vez que, por meio destas, pode-se motivar os alunos (BAIRRAL, 2009), como apresentado no capítulo 1 deste trabalho.

A terceira pergunta tem o objetivo de avaliar o nível das atividades. Para 84% dos alunos o nível das atividades em *moderado*, 5% *fácil* e para 11% *difícil*. São destacados comentários dos participantes que classificaram como *fácil*, *moderado* e *difícil*, respectivamente.

> "Foram menos enjoativas" (Aluno 19).
>
> "Algumas contas foram mais complicadas para desenvolver, mas com a ajuda da professora foi possível resolvê-las" (Aluno 2).
>
> "Precisa ler mais vezes o que se pede" (Aluno 8).

O comentário deste último aluno releva uma grande dificuldade dos alunos que é a interpretação dos enunciados das atividades. Segundo Perego e Buriasco (2005), as dificuldades relativas a questões discursivas sobre Matemática, estão diretamente relacionadas à interpretação dos enunciados.

Ao analisar as respostas da quarta questão, verificou-se que 63% dos alunos consideraram *fácil* a manipulação dos *applets*, 11% consideraram *muito fácil* e 26% consideraram *moderado*. Estes índices sinalizam a qualidade dos *applets*, uma vez que a maioria considerou fácil e muito fácil. São destacadas as justificativas de participantes que classificaram como *fácil*, *muito fácil* e *moderado*, respectivamente.

> "Porque as explicações dadas no computador são bastante claras" (Aluno 1).
>
> "É tudo bem claro de entender" (Aluno 15).
>
> "Foi um pouco complicado porque era a primeira vez que mexia no *applet*" (Aluno 17).

Nenhuma modificação dos *applets* foi sugerida pelos participantes, isto foi observada pela análise da quinta questão.

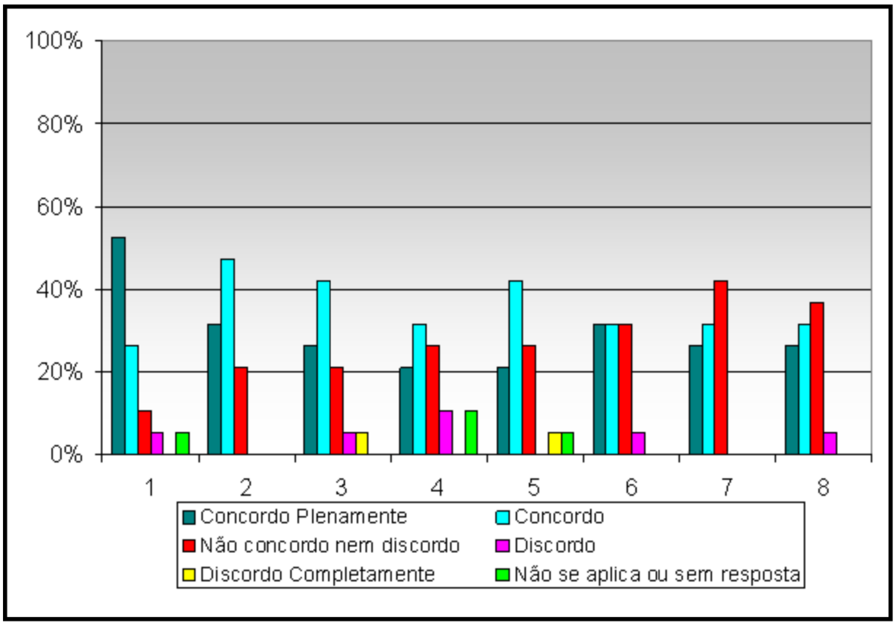
Analisando a sexta questão, verificou-se que todos os participantes consideraram que os *applets* favorecem a construção de conhecimentos matemáticos. Apresentam-se duas justificativas dos alunos:

> "Porque é uma maneira mais prática e menos estressante de estudar matemática" (Aluno 11).
>
> "Porque com a informática fica mais fácil" (Aluno 1).

Estes posicionamentos estão de acordo com Antunes (2002), quando este afirma que os computadores apresentam inúmeros recursos que, se bem utilizados, facilitam a exploração da linguagem matemática e do raciocínio lógico do aluno.

Ao analisar a sétima questão, verificou-se que 84% dos alunos considera*m muito importante* o papel do professor e os demais 16% consideraram *importantes*. Estes índices destacam a importância da mediação realizada pelo professor, resposta considerada coerente com as ações que ocorreram neste estudo de caso.

Quanto à avaliação da usabilidade da unidade proposta na oitava pergunta (Gráfico 3.7), verificou-se que embora muitos concordem com os critérios listados (fácil de usar, tem instruções claras, é engajador, ...), um número significativo de participantes não concorda nem discorda. Considera-se que tais resultados não sinalizam que a unidade está ruim, mas que alguns aspectos ainda precisam ser analisados.



Usabilidade

1- É fácil de usar.
2- Tem instruções claras.
3- É engajador / motivador.
4- Visualmente atraente.
5- É interativo.
6- Navegação fácil e consistente ao longo de toda unidade.
7- Compatível com diferentes navegadores.
8- Projeto gráfico (desenho de página) de alta qualidade.

Gráfico 3.7: Avaliação da unidade quanto ao critério de usabilidade – segundo estudo de caso

No próximo capítulo, descrevem-se as considerações finais deste trabalho monográfico.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo são apresentadas as considerações finais sobre a pesquisa promovida neste trabalho monográfico. Além disso, são expostas as contribuições, as dificuldades encontradas durante a realização desta monografia e formas de continuidade do trabalho desenvolvido.

Diversas etapas foram realizadas ao longo da pesquisa realizada. A realização do teste exploratório foi muito importante; por meio deste foi possível corrigir algumas falhas presentes nos *applets* e também aprimorar as atividades da apostila. Os participantes mostraram muito interesse durante o minicurso, o que pode ser atribuído à qualidade dos recursos e ao fato de o enfoque, dado ao tema ser diferente do que eles conheciam. As atitudes dos participantes, seus questionamentos e as respostas dos questionários indicaram que a unidade de aprendizagem está coerente com seus objetivos.

O primeiro estudo de caso possibilitou identificar as dificuldades apresentadas pelo público alvo (alunos do Ensino Médio) ao usarem a unidade de aprendizagem e resolverem as atividades. Grande parte dessas dificuldades foram decorrentes da falta de conhecimentos sobre trigonometria e vetores. Além disso, foi possível perceber que a extensão do conteúdo contemplado no material elaborado requer mais tempo do que foi planejado, independente das dificuldades dos alunos. No segundo estudo de caso optou-se por alunos que já haviam concluído o estudo de trigonometria; este fato influenciou, positivamente, na resolução das atividades.

Ao comparar os alunos que participaram do primeiro estudo de caso com os que participaram do segundo estudo de caso, considera-se que os últimos se mostraram mais interessados, motivados e apresentaram mais facilidade na resolução das atividades.

Tanto os alunos do primeiro estudo de caso quanto os do segundo apresentaram mais dificuldades nas atividades 2 e 4. Essa afirmação foi baseada na observação feita pela mediadora durante a aula. Atribui-se essas dificuldades a falta atenção de alguns alunos durante as explicações e ao fato de não possuírem conhecimentos sobre vetores.

Os participantes do teste exploratório mostraram maior interesse durante a resolução das atividades do que os alunos do Ensino Médio. Considera-se que o pouco interesse dos alunos do Ensino Médio deu-se pelo fato deste tema não ser contemplado no planejamento pedagógico das turmas dos alunos em questão, ou seja, não seria cobrado na avaliação, e pela falta de conhecimentos sobre vetores. Considera-se que o interesse dos participantes de teste exploratório, se deu pelo fato de a abordagem ser diferente das que são apresentadas nos livros sobre números complexos.

Neste trabalho estabeleceu a seguinte questão de pesquisa: Qual o desempenho dos alunos no estudo de números complexos, ao utilizarem a unidade de aprendizagem "Investigando em ₵"? Todas as ações desenvolvidas no âmbito deste trabalho monográfico permitiram afirmar que o desempenho dos alunos foi muito bom. Inicialmente, apresentavam dificuldades em compreender os enunciados das atividades, devido ao caráter investigativo das mesmas, mas no decorrer do trabalho as dificuldades foram superadas. O destaque geométrico ressaltado pelos *applets* e pelas atividades influenciou, positivamente, no desempenho dos alunos. Isso foi verificado a partir dos comentários feito pelos mesmos e pelas respostas das atividades.

Algumas dificuldades foram encontradas e superadas durante o desenvolvimento deste trabalho. Para a elaboração dos *applets* e das atividades, por exemplo, foi necessário muito estudo dos recursos do *software* GeoGebra e de como este poderia contribuir para a abordagem de números complexos. A falta de referencial teórico que trate da aprendizagem de números complexos com uso de recursos tecnológicos digitais, também foi uma dificuldade. Além disso, foi difícil encontrar alunos com as características necessárias para o desenvolvimento do trabalho no momento da pesquisa. Outra dificuldade foi compreender as aplicações de números complexos em outras áreas do conhecimento visto que estas envolviam muitos conteúdos difíceis e fora da área de domínio da autora deste trabalho. No entanto, o resultado final foi muito gratificante.

Destaca-se que o trabalho aqui desenvolvido contribuiu de forma significativa para a experiência docente da autora. Esta teve oportunidade de desenvolver e aplicar recursos pedagógicos, com os quais os alunos participaram ativamente do processo de aprendizagem. Este trabalho possibilitou, também, a melhoria da escrita e do processo de pesquisa, além de ampliar os conhecimentos do uso das TIC e sobre números complexos.

Para dar continuidade a este trabalho sugere-se:

- Experimentar a unidade de aprendizagem com alunos do Ensino Médio que já tenham estudado vetores e trigonometria, e ainda não tenham estudado números complexos.

- Experimentar a unidade de aprendizagem com alunos da licenciatura em Matemática, no primeiro contato dos mesmos com o tema em questão, no referido nível de ensino.

Além das ações citadas, analisando todo o trabalho desenvolvido surge uma questão que pode fundamentar outras pesquisas: O que pode ser feito para melhorar a interpretação dos enunciados por parte dos alunos do Ensino Médio, bem como o registro do que é conjecturado?

De modo geral, o uso da unidade de aprendizagem e consequentemente, dos recursos nela contido, foram satisfatórios. Estes permitiram explorar certas habilidades, como a visualização e simulação, o que possibilitou a construção de conhecimentos.

O desenvolvimento da Unidade de Aprendizagem e de todos os recursos que a mesma contém, iniciado no período da bolsa de iniciação científica, possibilitou a publicação de artigos científicos e a realização de minicursos:

- Artigo – Investigando Em ₵: Uma Unidade De Aprendizagem Online Para Estudo De Números Complexos na RENOTE. Revista Novas Tecnologias na Educação, v. 7, p. 1-10, 2009.

- Resumo expandido – Desenvolvimento de uma Unidade de Aprendizagem Online para o Estudo de Números Complexos. 6º Circuito de Iniciação Científica do IFF. 2009. Comunicação oral (publicada nos Anais do evento, por meio de um artigo completo).

– Números Complexos: Unidade de Aprendizagem Online Investigando em ₵. V EEMAT (Encontro Estadual de Educação Matemática do Rio de Janeiro), realizada no Colégio Pedro II no dia 05/02/2010.

- Minicurso – Números Complexos: Uma abordagem com auxílio de recursos digitais. III Semana de Matemática do IF Fluminense. Realizada em 2010.

Com a unidade “Investigando em ₵”, espera-se, colaborar para o processo de ensino e aprendizagem de números complexos, no Ensino Médio. Destaca-se que é importante que a unidade de aprendizagem esteja em constante processo de desenvolvimento, pois atualizações e ampliações vão enriquecendo-a. A interatividade, as investigações, o estabelecimento de conjecturas, entre outras ações possibilitadas pelos *applets*, permitem práticas docentes mais coerentes com o perfil dos alunos das atuais sociedades.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTUNES, C. *Novas maneiras de ensinar, novas formas de aprender*. Porto Alegre: Artmed, 2002.

ARAÚJO, N. B. F. *Números Complexos*: Uma proposta de mudança metodológica para uma aprendizagem significativa no Ensino Médio. Natal, 2006.111f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – UFRN, Natal, 2006. Disponível em: <http://www.ppgecnm.ccet.ufrn.br/publicacoes/publicacao_34.pdf> Acesso em: 06 out. 2010.

BAIRRAL, M. A. *Tecnologias da Informação e Comunicação na Formação e Educação Matemática*. v. 1. Rio de Janeiro: Ed. da UFRRJ, 2009.

BALDIN, Y. Y. Utilizações Diferenciadas de Recursos Computacionais no Ensino de Matemática. In: CARVALHO, L. M.; GUIMARÃES, L. C. (Org.). *História e Tecnologia no Ensino da Matemática*. Rio de Janeiro: IME: UERJ, p. 29-37, 2002.

BATISTA, S. C. F. *SoftMat: Um Repositório de Softwares para Matemática do Ensino Médio* - Um Instrumento em Prol de Posturas mais Conscientes na Seleção de Softwares Educacionais. Dissertação (Mestrado em Ciências de Engenharia). Campos dos Goytacazes, RJ, Universidade Estadual do Norte Fluminense – UENF, 2004.

BEHAR, P. A.; GASPAR M. I. *Uma perspectiva curricular com base em objetos de aprendizagem*, 2007. Disponível em: <http://ihm.ccadet.unam.mx/ virtualeduca2007/pdf/37-PB.pdf> Acesso em: 26 nov. 2009.

BRANDÃO L. O; ISOTANI, S; MOURA. J. G. Imergindo a geometria dinâmica em sistemas de educação a distância: iGeom e SAW. *Revista Brasileira de Informática na Educação (RBIE)*, Porto Alegre, v.14 n. 1, p.41-49, 2006.

BRAVIANO, R.; RODRIGUES, M. H. W. L. Geometria Dinâmica: Uma nova Geometria. *Revista do Professor de Matemática (RPM)*, São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 49, p. 22-26, 2002.

CARNEIRO, J. P. A Geometria e o Ensino dos Números Complexos. *Revista do Professor Matemática (RPM)*. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 55, p. 15-25, 2004.

CERRI C.; MONTEIRO M. S. *História dos Números Complexos*. CAEM - Centro de Aperfeiçoamento de Ensino de Matemática Instituto de Matemática e Estatística da USP, 2001. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/~martha/caem/complexos.pdf> Acesso em: 19 dez. 2010.

CLEICK, James. *Caos: A criação de uma nova Ciência*. Rio de Janeiro: Campus, 1991.

CORNELL UNIVERSITY, Departament of Mathematics. *Jonh H. Hubbard*, 2003. Disponível em:<http://www.math.cornell.edu/People/Faculty/hubbard.html> Acesso em: 02 dez. 2010.

CRESWELL, J. W. *Projeto de pesquisa*: métodos qualitativos, quantitativos e mistos. Tradução de Luciana de Oliveira da Rocha. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2007.

D'AMBRÓSIO, U. *Educação matemática:* da Teoria à Prática. 8. ed. Campinas, SP: Papirus, 2001.

DANTAS, E. M; NASCIMENTO, E. C. S do. *Números Complexos:* Uma Análise de Livros Didáticos do Ensino Médio. In: V Semana da Matemática da UFF, 2010, Rio de Janeiro RJ. *Anais*. Rio de Janeiro, RJ, 2010.

DANTE, L. R. *Matemática Contexto e Aplicações*. Volume único. São Paulo: Ática, 2008.

DEITEL, H. M; DEITEL, P. J. *Java, como programar*. Tradução de Carlos Arthur Lang Lisboa. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2003.

EZEQUIAS. *Para que servem os Números Complexos?* Rio de Janeiro, 1998. Monografia da Universidade Federal do Rio de Janeiro (IM/ UFRJ). Disponível em: <http://www.profezequias.net/complexo.html>. Acesso em: 11 out. 2010.

FORMAN, E.; GAZDEN, C. Exploring Vygotskian perspective in education: The cognitive value of peer interaction. In: WERTSCH, J. V. *Culture, commucation and cognition*: Vygostkian perspective. Cambridge Univesrsity Press, 1988, p. 323-347.

GIL, A. C. *Métodos e técnicas de pesquisa social*. 5. ed. São Paulo: Atlas, 1999.

INEP. O que é o PISA. *Inep: Sala de imprensa*. 2007. Disponível em: <http://www.inep.gov.br/imprensa/noticias/internacional/news07_05.htm> Acesso em: 05 jul. 2009.

JUNGES, M. *O Universo e seus fractais*: a contribuição de Mandelbrot. 2010. Disponível em: <http://www.ihuonline.unisinos.br/index.php?option=com_content&view=article&id=3628&secao=349> Acesso em: 11 nov. 2010.

LAVILLE, C.; DIONNE, J. A. *Construção do Saber*: Manual da metodologia da pesquisa em ciências humanas. Tradução de Heloísa Monteiro e Francisco Settineri. Porto Alegre: Artmed, 1999.

LEE, H. S; HOLLEBRANDS, K. F. *Students' use of technological features while solving a mathematics problem. Journal of Mathematical Behavior,* v.25, n. 3, p. 252–266, 2006.

LIMA, E. L. Sobre a Evolução de Algumas Idéias Matemáticas. *Revista do Professor de Matemática (RPM).* São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 06, p. 1-8., 1985.

MATOS, J. F. L. *Matemática, educação e desenvolvimento social* – Questionando Mitos que Sustentam Opções Atuais em Desenvolvimento Curricular em Matemática. In: ENCONTRO INTERNACIONAL EM HOMENAGEM A PAULO ABRANTES - EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: caminhos e encruzilhadas, 2005, Lisboa.

Comunicações. 2005. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jfmatos/comunicacoes.html>. Acesso em: 30 jun. 09.

MELLO, J. L. P. (Coordenador Técnico). *Matemática, Construção e Significado*. Volume Único. São Paulo: Editora Moderna, 2005.

MESQUITA, A.; MOTA, M. G. *Fractais- A Linguagem do Caos*. Anais do Clube Militar Naval. s.d. Disponível em: <http://www.teoriadacomplexidade.com.br/textos/fractais/FRACTAIS-A-LinguagemDoCaos.pdf> Acesso em: 02 nov. 2010.

MILIES, C. P. A Emergência dos Números Complexos. *Revista do Professor de Matemática (RPM)*. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 24, p. 5-15, 1993.

MORAN, J. M. Ensino e Aprendizagem Inovadores com Tecnologias. *Revista Informática na Educação*: Teoria & Prática, v. 3, n.1 Porto Alegre: UFRGS. Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, p. 137-144, 2000.

MORAN, J. M.; MASETTO M. T.; BEHRENS, M. A. *Novas tecnologias e mediação pedagógicas*. 7. ed. Campinas-SP: Papirus, 2003.

MOREIRA, L. S.; BARCELOS, G. T.; BATISTA, S. C. F. Gerando Applets no Software Geogebra. In: SEMANA DE MATEMÁTICA DO IF Fluminense, 3, 2010, Campos dos Goytacazes, RJ. *Anais*... Campos dos Goytacazes, RJ, 2010.

MOYSÉS, L. *Aplicações de Vygotsky à Educação Matemática*. 8.ed. Campinas-SP: Papirus, 2007.

NCTM, *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Sevilha: SAEM Thales, 1991. (versão original em inglês 1989).

NCTM. *Normas profissionais para o ensino da matemática*. Lisboa: IIE e APM, 1994.

OLIVEIRA,C.N.C. *Números complexos*: um estudo dos registros de representação e de aspectos gráficos. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- PUC/SP, São Paulo, 2010. Disponível em: <http://www4.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/carlos_nely_oliveira.pdf> Acesso em: 06 out. 2010.

PASSERINO, L. M.; KOCH, S. K. S.; MACIEL, M.; MARTINS, M. del C. Mediação por Meio de Evidências no Contexto Lingüístico em Ambientes Virtuais de Aprendizagem. In: XIX SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO. Fortaleza, CE. *Anais*. Fortaleza, CE: Universidade Federal do Ceará, 2008. v. 1. p. 430-440. 2008.

PAZOS, R. P. *Visualizando funções complexas*. In: III CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA, ULBRA, Canoas, RS, 20-22 Outubro de 2005. Disponível em: <http://rpanta.com/downloads/artigo/RPP_ComplexVisual.PDF> Acesso em: 12 nov. 2010.

PEREGO S. C, BURIASCO R. L. C. Registros Escritos em Matemática: que informações podem fornecer na avaliação? *Revista Educação Matemática em Revista.* Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, n.18/19, p. 46-56, 2005.

PEREIRA MELO, J.A. Avaliação de objetos de aprendizagem: cruzando caminhos e produzindo novos olhares. *Revista Latinoamericana de Tecnología Educativa - RELATEC*, v.8, n.2, p.59-75, 2009. Disponível em: <http://campusvirtual.unex.es/cala/editio/index.php?journal=relatec&page=article&op=viewFile&path[]=527&path[]=425>.Acesso em: 10 jan. 2010.

PONTE, J. P. Novas tecnologias na aula de matemática. *Revista Educação e Matemática* (APM), n. 34, p.2-7, 1995.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H.; VARANDAS, J. M. O Contributo das Tecnologias de Informação e Comunicação para o Desenvolvimento do Conhecimento e da Identidade Profissional. In: FIORENTINI, D. (Ed.). *Formação de professores de Matemática*: Explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas: Mercado de Letras, 2003 p. 159-192, 2003.

RAMOS, A. F.; DOMENICO, L. C. de, TORRES, P. L. Uma experiência com objetos de aprendizagem no ensino da Matemática. *UNIrevista*, São Leopoldo, RS, v. 1, n. 2, p. 1-11, 2006. Disponível em: <http://www.unirevista.unisinos.br/_pdf/UNIrev_Ramos_et_al.pdf>. Acesso em: 08 jan. 2010.

RICIERI, A. P. *Assim nasceu o imaginário*: Origem dos números complexos. São Paulo, Edições Prandiano, 1993.

SANTOS, E. T. Um applet para o ensino de geometria descritiva na internet. In: XXVII COBENGE, Natal, RN, 1999, *Anais*. Natal, RN, 1999. Disponível em: <http://docentes.pcc.usp.br/toledo/pdf/cobenge99_applet.pdf>. Acesso em: 11 maio 2010.

SANTOS, V. C. P. Mathlets: *Possibilidades e Potencialidades para uma Abordagem Dinâmica e Questionadora no Ensino de Matemática*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática), Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro-RJ, 2008.

SEITER, C. *Every Math for Dummies*. IDG Books Worldwide, inc, 1995.

SILVA, E. L. da; MENEZES, E. M. *Metodologia da Pesquisa e elaboração de dissertação*. 3. ed. Florianópolis: Laboratório de Ensino a Distância da UFSC, 2001. Disponível em: <http://projetos.inf.ufsc.br/arquivos/Metodologia%20da%20Pesquisa%203a%20edicao.pdf>. Acesso em: 20 dez. 2009.

SILVA, E. L. da; SOUZA, A. R. de; MARQUES, E. M. R. Alguns estudos de fluxo de fluidos utilizando software gráfico. *Revista Brasileira de Ensino de Física* v. 31, n. 3, 2009. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/rbef/v31n3/090306.pdf> Acesso em: 11 out. 2010.

UNDERWOOD, J.; HOADLEY, C; LEE, H. S; HOLLEBRANDS, K. F; DIGIANO C; RENNINGER K. A. IDEA: identifying design principles in educational applets. Educational Technology Research and Development, v. 52. n. 2, p.99-112, 2005.

UNIVERSITY OF ST ANDREWS. B*iografia de Niels Fabian Helge Von*. 2000 Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/biographies/koch.html> Acesso em: 12 nov. 2010.

UNIVERSITY OF ST ANDREWS. B*iografia de Gaston Julia Maurice*. 2008 Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/biographies/julia.html > Acesso em: 12 nov. 2010.

VYGOTSKY, L. S. *Pensamento e linguagem*. São Paulo: Martins Fontes, 1987.

VYGOTSKY, L. S. *A formação social da mente:* o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. 7. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

YIN, R. K. *Estudo de caso*: planejamento e métodos. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2004.

APÊNDICES

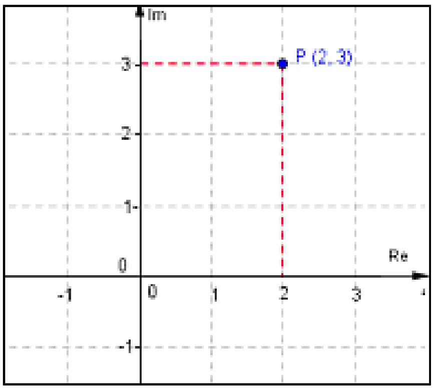
Apêndice A: Apostila do teste exploratório 2

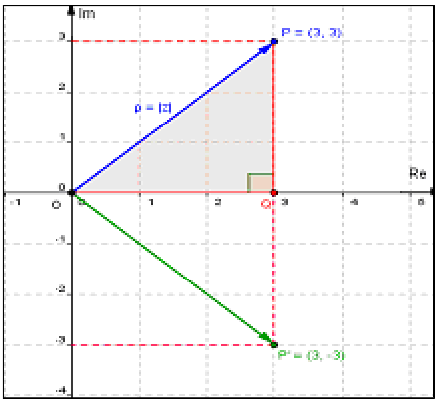
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE
Campus Campos-Centro

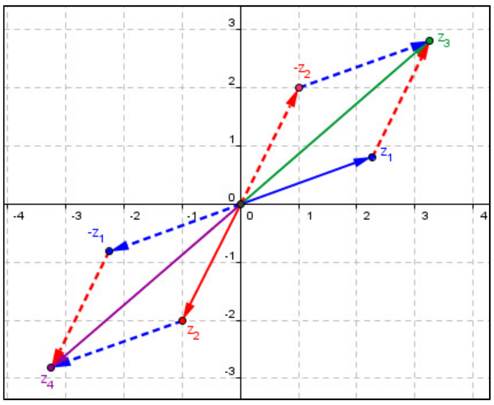
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica — Ministério da Educação

DIRETORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO/GERÊNCIA DE PESQUISA
PROJETO: TECNOLOGIAS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

Estudando Números Complexos com *Applets*







Débora Maciel da Costa.
Gilmara Teixeira Barcelos
Silvia Cristina Freitas Batista

Campos dos Goytacazes
2010

Atividade 1

Abra o *applet* “Potenciação” e determine o que se pede:

a) Marque as caixas 1 e 2 do *applet* e execute o que for solicitado.

b) Descreva a relação entre os módulos de z e z^2 , assim como, a relação entre seus argumentos.

____

____

c) Marque a caixa 3 e execute o que for solicitado.

d) Descreva a relação entre os módulos de z e z^3 , assim como, a relação entre seus argumentos.

____

____

e) Marque a caixa 4 e execute o que é solicitado para n = 4.

f) Descreva a relação entre os módulos de z e z^4 , assim como, a relação entre seus argumentos.

____

____

g) Volte o seletor k ao inicio do seu segmento, torne n = 2 e desmarque as caixas 2, 3 e 4. Altere o complexo z, movendo o ponto que é sua imagem, refaça os itens anteriores e registre suas respostas abaixo.

____

____

____

____

____

____

h) A partir do que foi observado e conjecturado nos itens anteriores escreva z^n em função de ρ e θ, considerando que $z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$.

____

____

i) Marque a caixa 5 e verifique se o que foi conjecturado no item h está correto.

____

____

Atividade 2

Abra o *applet* “Radiciação” e determine o que se pede:

a) Marque as caixas 1 e 2 do *applet* e execute o que for solicitado.

b) Descreva a relação entre os módulos de w_1 e w_2 e, também, a relação entre seus argumentos.

c) Marque a caixa 3 e execute o que for solicitado.

d) Descreva a relação entre os módulos de w_1 e w_2, assim como, entre seus argumentos. Além disso, descreva a relação entre os módulos de w_2 e w_3, assim como, entre seus argumentos.

e) Marque a caixa 4 e execute o que for solicitado para n = 4.

f) Descreva a relação entre os módulos de w_1 e w_2, assim como, entre seus argumentos. Descreva as referidas relações também para w_2 e w_3; w_3 e w_4.

g) Volte o seletor w ao início do seu segmento, torne n = 2 e desmarque as caixas 3 e 4. Altere o complexo z, movendo o ponto que é sua imagem, refaça os itens anteriores e registre suas respostas abaixo.

h) Observe que o número indicado no seletor n corresponde ao índice da raiz do complexo z. Descreva a relação entre o valor de n e o número de raízes correspondentes.

i) Para n > 2, descreva a relação entre os pontos que são as imagens das raízes e os polígonos regulares formados.

j) Considerando n = 2, seria possível determinar a raiz w_2, a partir da raiz w_1? Justifique sua resposta.

k) Considerando n = 3, descreva como seria possível determinar as outras duas raízes, a partir da raiz w_1.

____

____

l) Marque a caixa 5 e observe a dedução da segunda fórmula de De Moivre.

____

____

III. Atividades sem utilizar os *applets*

1) (UNICAMP - SP) Um triângulo equilátero, inscrito em uma circunferência de centro na origem, tem como um de seus vértices o ponto do plano associado ao número complexo $\sqrt{3}+1i$.

a) Que números complexos estão associados aos outros dois vértices do mesmo triângulo? Faça a figura desse triângulo.

b) Qual a medida do lado desse triângulo?

2) (FUVEST – SP - adaptado) Sendo o número complexo z = cos 48° + i sen 48° , determine o valor de $z^{10}+z^{5}+1$.

3) (U.F.SANTA MARIA - SP) A soma das raízes cúbicas do número complexo z = 8i é:

a) $-4i$ c) 0 e) $4i$

b) $-2\sqrt{3}\,i$ d) $2\sqrt{3}\,i$

4) Considere o número complexo $z=\cos\dfrac{\pi}{6}+isen\dfrac{\pi}{6}$. O valor de $z^{3}+z^{6}+z^{12}$ é:

a) $-i$ c) $i-2$ e) $2i$

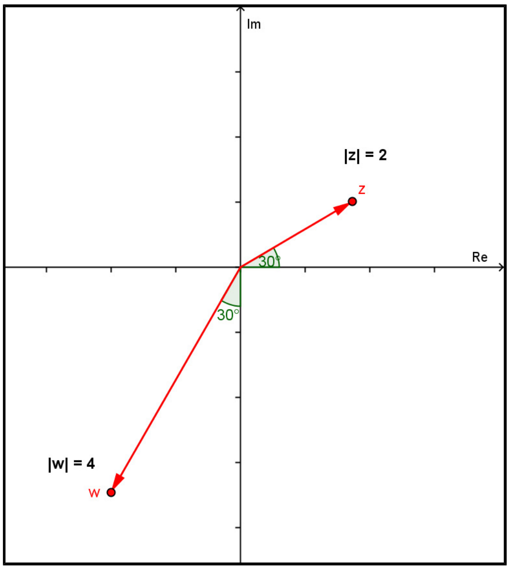
b) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ d) i

5) O valor do número complexo $\left[\dfrac{1+i^{9}}{1+i^{27}}\right]^{20}$ é:

a) 1 c) $-i$ e) 2^{20}

b) i d) -1

6) (UFRJ 2009) No jogo *Batalha Complexa* são dados números complexos z e w, chamados *mira* e *alvo* respectivamente. O tiro certeiro de z em w é o número complexo t tal que $tz=w$.



Considere a mira z e o alvo w indicados na figura acima. Determine o tiro certeiro de z em w.

Referências Bibliográficas

CERRI C.; MONTEIRO M. S. *História dos Números Complexos* CAEM - Centro de Aperfeiçoamento de Ensino de Matemática Instituto de Matemática e Estatística da USP, 2001. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/~martha/caem/complexos.pdf> Acesso em: 19/12/2008.

MELLO, J. L. P. (Coordenador Técnico). *Matemática, Construção e Significado*. Volume Único. São Paulo: Editora Moderna, 2005.

MILIES, C. P. A Emergência dos Números Complexos. *Revista do Professor de Matemática (RPM)*. n. 24, p. 5-15. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 1993.

LIMA, E. L. Sobre a Evolução de Algumas Idéias Matemáticas. *Revista do Professor de Matemática (RPM)*. n. 06, p. 1-8. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 1985.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, C. A. *A Matemática do Ensino Médio*. v. 3. 6. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. p. 161.

Apêndice B: Apostila experimentação - primeiro estudo de caso

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE
Campus Campos-Centro

Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

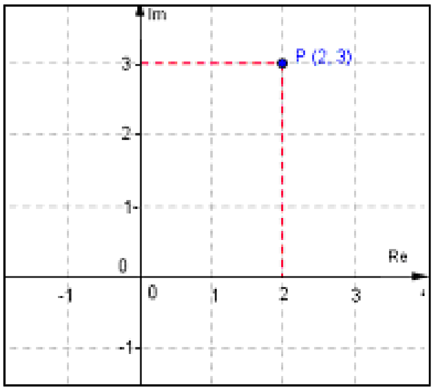
Ministério da Educação

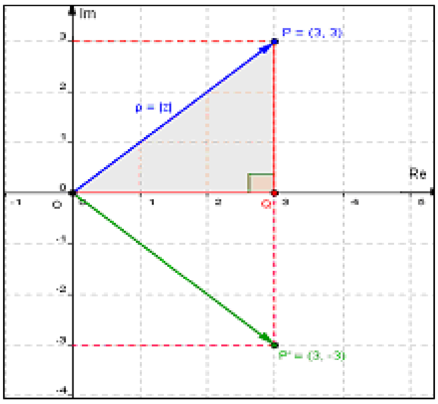
BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

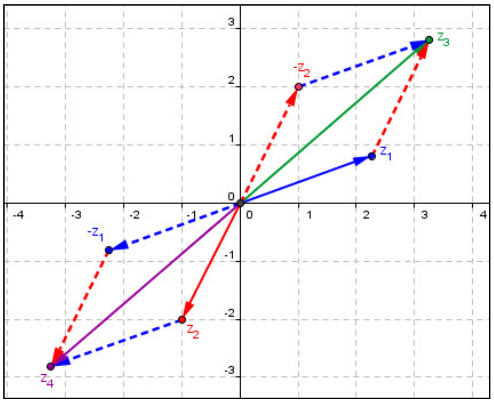
DIRETORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO/GERÊNCIA DE PESQUISA

PROJETO: TECNOLOGIAS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

Estudando Números Complexos com *Applets*







Débora Maciel da Costa.
Gilmara Teixeira Barcelos
Silvia Cristina Freitas Batista

Campos dos Goytacazes
2010

I. Introdução

Contrariando o que é, muitas vezes, divulgado nos livros didáticos, a construção da teoria dos números complexos não teve origem na análise das equações do segundo grau, mas sim, na busca da solução da equação do terceiro grau (MILIES, 1993).

Na primeira metade do século XVI, o matemático italiano Gerônimo Cardano apresentou, em sua obra *Ars Magna*, uma forma de resolver equações cúbicas do tipo $x^3 + px = q$, com p e q reais (forma esta que havia sido descoberta por outro matemático italiano, Niccolo Tartaglia) (MELLO, 2005). Cardano, ao resolver a equação $x^3 = 15x + 4$, da qual ele conhecia a raiz 4, se deparou com raízes quadradas de números negativos, algo que era considerado inexistente na época (MELLO, 2005).

Raphael Bombelli (1526-1573), um admirador da *Ars Magna* de Cardano, publicou uma obra denominada *l'Álgebra*, em 1572, expondo os mesmos assuntos, mas de forma mais didática (MILIES, 1993). Nessa obra, ele estudou a resolução de equações de grau não superior a quatro e considerou, em particular, a equação $x^3 = 15x + 4$. Ao aplicar a fórmula de Cardano para o cálculo das raízes, ele decidiu prosseguir, considerando a possibilidade de existência de expressões envolvendo raízes quadradas de números negativos. Dessa forma, ele conseguiu obter raiz 4, previamente conhecida.

A partir de então, os matemáticos foram considerando cada vez mais a existência de raízes quadradas de números negativos, dando origem a um novo tipo de número (MELLO, 2005). Assim, no século XVI, estava ocorrendo, na Matemática, algo semelhante ao que ocorreu no tempo dos gregos antigos, quando se verificou a insuficiência dos números racionais com a construção do número $\sqrt{2}$, que não é racional, ou seja, verificava-se que o conceito de número precisava ser, novamente, estendido (CERRI; MONTEIRO, 2001).

Os itens abaixo descrevem, brevemente, a evolução dos Números Complexos (MILIES, 1993):

- O símbolo $\sqrt{-1}$ foi introduzido, em 1629, por Albert Girard;
- Os termos **real** e **imaginário** foram empregados, em 1637, por René Descartes;
- O símbolo *i* foi usado, em 1777, por Leonhard Euler para representar $\sqrt{-1}$. Este símbolo apareceu impresso pela primeira vez, em 1794, e se tornou amplamente aceito após seu uso por Carl Friederich Gauss, em 1801;
- A expressão **número complexo** foi introduzida por Gauss, em 1832;

- A representação gráfica dos números complexos foi desenvolvida, de forma independente, por Caspar Wessel, em 1799; Jean-Robert Argand, em 1806 e Gauss, em 1831. Porém, quem, verdadeiramente, tornou a interpretação geométrica amplamente aceita foi Gauss;
- A formalização completa dos números complexos como pares ordenados de números reais foi desenvolvida por William Rowan Hamilton, em 1833.

O estudo de Números Complexos evoluiu e se faz presente em, praticamente, todos os grandes ramos da Matemática, tais como Álgebra, Topologia, Geometria (Analítica, Diferencial ou Algébrica), Análise, entre outros (LIMA, 1985). Além disso, os Complexos estão presentes em aplicações como dinâmica dos fluidos e eletromagnetismo (LIMA, 1985).

II. Conhecendo alguns Recursos do *Software* GeoGebra

Os *applets* utilizados nas atividades da seção III foram desenvolvidos com o *software* GeoGebra. Os recursos deste *software* são disponibilizados nos *applets*, de forma totalmente funcional.

O GeoGebra é um sistema de Geometria Dinâmica, livre, desenvolvido por Markus Hohenwarter, disponível, em português, no endereço eletrônico <http://www.geogebra.at/>. Este permite realizar construções tanto com pontos, vetores, segmentos, retas, seções cônicas, como com funções que podem se modificar, posteriormente, de forma dinâmica. O referido *software* possibilita o estudo de variáveis vinculadas a números, vetores e pontos.

Abaixo descrevemos alguns recursos necessários para a realização de atividades da seção III.

Em todos os botões da Barra de Botões (Figura 1) aparece uma seta no canto inferior direito. Esta, ao ser clicada, permite visualizar as opções existentes.

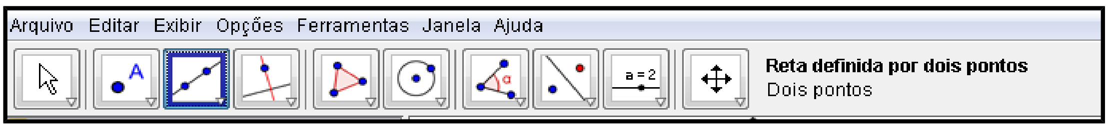
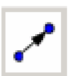


Figura 1: Barra de Botões

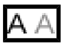
Ao clicar na setinha do 3º botão, da esquerda para direita, encontramos as duas ferramentas descritas abaixo.

 **Vetor definido por dois pontos** – marcando-se dois pontos, traça-se o vetor com origem no primeiro ponto determinado e ponto final no segundo.

 **Vetor a partir de um ponto** – essa ferramenta permite que, tendo um vetor v já construído, construa-se outro representante de v, a partir de um ponto considerado. Para tanto, marca-se um ponto (que será a origem do outro representante de v), seleciona-se esta ferramenta, clica-se, com o botão esquerdo do mouse, sobre o vetor v já construído e, depois, sobre o ponto considerado.

Além de conhecer essas duas ferramentas, também é importante conhecer certas funcionalidades, acessíveis ao clicar com o botão direito do mouse sobre um objeto. Consideremos, por exemplo, um ponto marcado na tela do Geogebra. Ao clicar com o botão direito sobre este ponto, será aberta a janela mostrada na figura 2.

Figura 2: Opções para o Ponto A

- Para exibir ou esconder o "nome" do objeto basta clicar em  (Exibir rótulo).
- Caso queira apagar algum objeto, basta clicar no  (Apagar).
- Para renomear o objeto é preciso clicar em  (Renomear). Na janela que se abrirá deve-se colocar o "nome" desejado e clicar em "Aplicar".
- Para trocar a cor do objeto é preciso clicar em  (Propriedades). Dessa forma, é aberta a janela mostrada na figura 3. Nesta janela é preciso selecionar a aba "Cor", clicar na cor desejada e, a seguir, clicar em "Fechar".

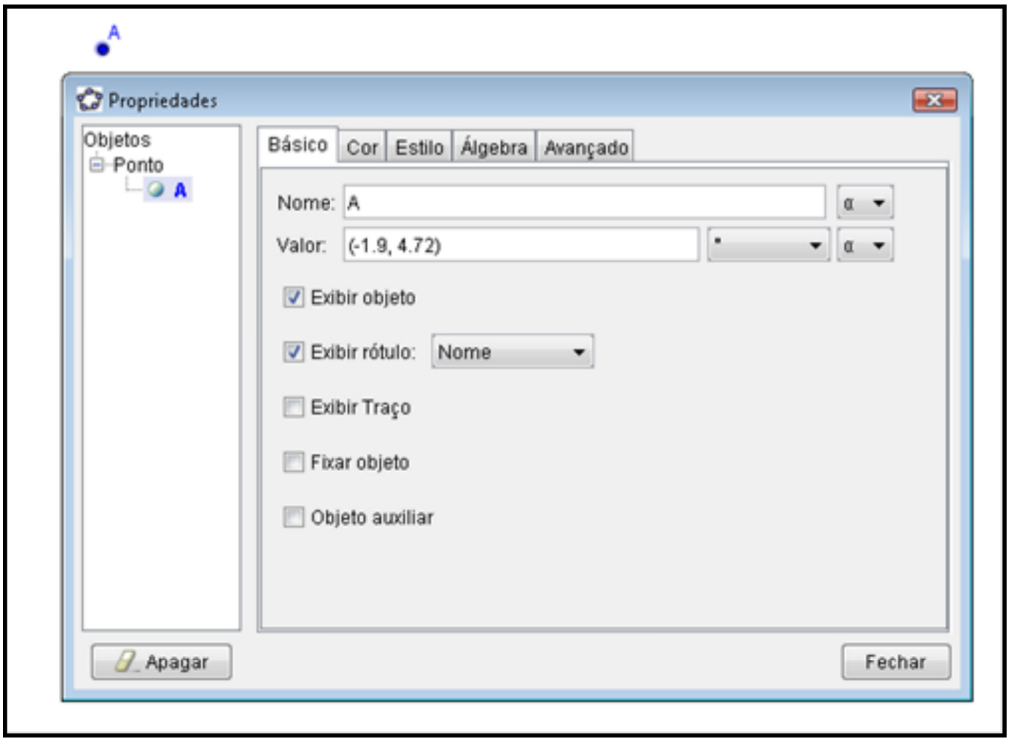


Figura 3: Propriedades

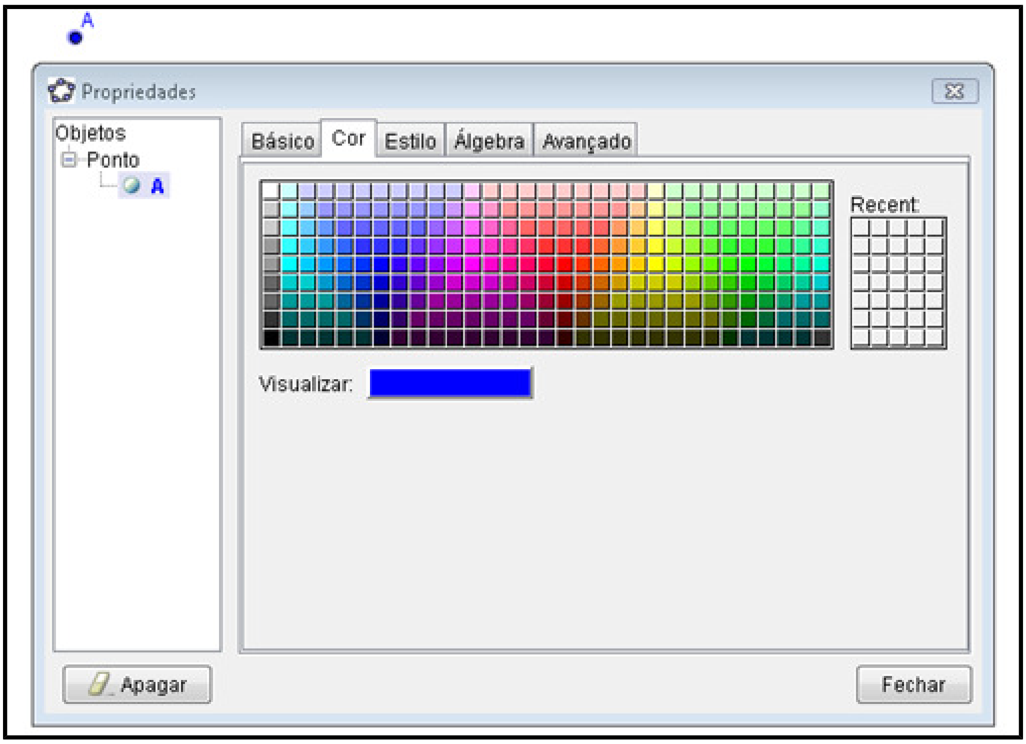


Figura 4: Aba Cor

II. Atividades utilizando os *applets* sobre Números Complexos

Esta seção contém atividades investigativas, elaboradas por Débora M. da Costa, Gilmara T. Barcelos e Silvia Cristina F. Batista, a serem realizadas com auxílio dos *applets*[26] sobre números complexos.

Atividade 1

No quadro da seção *Applets*, da Unidade de Aprendizagem sobre Números Complexos “Investigando em ₵”, clique em “Plano Complexo” e determine o que se pede:

a) Marque as caixas que aparecem no *applet* e execute o que for solicitado.

b) Represente, no plano complexo do *applet*, a imagem dos números complexos $z_1 = 2 - 9i$, $z_2 = -1 + 4i$ e $z_3 = 2 + 6i$. Identifique e anote o quadrante a que cada um deles pertence.

Números complexos	Quadrantes
$\mathbf{z_1 = 2 - 9i}$	
$\mathbf{z_2 = -1 + 4i}$	
$\mathbf{z_3 = 2 + 6i}$	

c) Apresente um complexo z_4, cuja imagem seja representada no 3º quadrante do plano complexo (represente, no *applet,* a imagem do complexo apresentado): __________.

d) Complete os espaços abaixo com sinal de > ou <:

Se um complexo z = **a** + **b**i tem imagem representada no:

- 3º quadrante, então **a** ___0 e **b** ___0;
- 1º quadrante, então **a** ___0 e **b** ___0;
- 2º quadrante, então **a** ___0 e **b** ___0;
- 4º quadrante, então **a** ___0 e **b** ___0.

e) Um número complexo z é um imaginário puro se a parte real de z é nula. Um número complexo é um número real se a parte imaginária de z é nula. Em cada item abaixo, apresente na forma algébrica um número complexo atendendo ao que se pede e represente a imagem deste, no plano complexo do *applet*:

- um número imaginário puro, que tenha parte imaginária positiva: _______________.

- um número imaginário puro, que tenha parte imaginária negativa: _______________.

- um número real positivo: _______________.

- um número real negativo: ______________.

[26] Os referidos *applets* foram desenvolvidos no âmbito do projeto de pesquisa Tecnologias de Informação e Comunicação no Processo de Ensino e Aprendizagem de Matemática, por Débora M. da Costa, bolsista de iniciação científica IFFluminense Campus Campos-Centro,
Gilmara T. Barcelos e Silvia Cristina F. Batista.

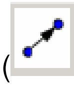
f) É possível que algum número imaginário puro tenha imagem representada fora do eixo das ordenadas? É possível que algum número real tenha imagem representada fora do eixo das abscissas? Justifique suas respostas.

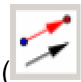
g) Salve o arquivo em ”Meus documentos” nomeando-o “Atividade1”.

Atividade 2

Abra o *applet* “Adição de Complexos” (Adição Núm. Complexos) e determine o que se pede:

a) Marque as caixas que aparecem no *applet* e execute o que for solicitado.

b) Considere um número complexo z_4, distinto de z_1, z_2 e z_3, e trace, no plano complexo do *applet*, o vetor que o representa. Para tanto, use o recurso “Vetor definido por dois pontos” (). Se desejar, indique junto ao vetor traçado, o seu rótulo z_4 e estabeleça uma cor para o mesmo, como explicado na seção II.

c) Represente o vetor correspondente à soma $z_1 + z_4$, traçando, inicialmente, o paralelogramo definido pelos vetores que representam z_1 e z_4. Para tanto, use o recurso “Vetor a partir de um ponto” (). Se desejar, indique junto ao vetor soma, o rótulo $z_1 + z_4$ e estabeleça uma cor para o mesmo.

d) Salve o arquivo, em “Meus documentos” nomeando-o “Atividade2”.

Atividade 3

Abra, novamente, o *applet* “Adição de Complexos” (Adição Núm. Complexos) e determine o que se pede:

a) Marque as caixas que aparecem no *applet*.

b) Movimente o ponto que é a imagem de z_1, até que z_3 esteja sobre o eixo imaginário. O número complexo z_3 é imaginário puro ou um número real? Descreva o que você observou quanto à parte real de z_1 e z_2.

c) Movimente o ponto que é a imagem de z_2, até que z_3 esteja sobre o eixo real. O número complexo é imaginário puro ou um número real? Descreva o que você observou quanto à parte imaginária de z_1 e z_2.

d) Mova o ponto que é a imagem de z_1 até obter $z_1 = 3 + 2i$. Mova o ponto que é a imagem de z_2 até obter $z_2 = -3 - 2i$. Descreva o que observou quanto a z_3.

____

____

e) Mova o ponto que é a imagem de z_2 até obter $z_2 = 0 + 0i$. Descreva o que você observou quanto a $z_1 + z_2$.

____

____

Atividade 4

Abra o *applet* “Subtração de Complexos” (Subtração Núm. Complexos) e determine o que se pede:

a) Marque as caixas que aparecem no *applet* e execute o que for solicitado.

b) Desmarque as caixas 2, 3, 4, 5 e 6.

c) Considere um número complexo z_5, distinto dos complexos apresentados na tela, e trace no plano complexo, o vetor que o representa (para tanto, proceda como no item b da atividade 2). Trace, também, o vetor que representa $-z_5$.

d) Construa o paralelogramo definido pelos vetores que representam z_1 e $-z_5$ (para tanto, proceda como no item c da atividade 2). A seguir, trace o vetor que representa a soma $z_1 + (-z_5)$, que é correspondente à subtração $z_1 - z_5$.

e) Salve o arquivo, em “Meus documentos” nomeando-o “Atividade4”.

Atividade 5

Abra, novamente, o *applet* “Subtração de Complexos” (Subtração Núm. Complexos) e determine o que se pede:

a) Marque as caixas 1, 2 e 3 que aparecem no *applet*.

b) Movimente o ponto que é a imagem de z_1 até que z_3 represente um número imaginário puro. Descreva o que você observou quanto à parte real de z_1 e z_2.

____

____

c) Mova o ponto que é a imagem de z_2 até obter $z_2 = 0 + 0i$. Descreva o que você observou com relação a $z_3 = z_1 - z_2$.

____

d) Desmarque as caixas 2 e 3 e marque a caixa 5.

e) Movimente o ponto que é a imagem de z_2 até que z_4 represente um número real. Descreva o que você observou quanto à parte imaginária de z_1 e z_2.

____

Atividade 6

Abra o *applet* "Adição de um número complexo com um real" (Adição Num. Real) e determine o que se pede:

a) Marque as caixas que aparecem no *applet* e execute o que for solicitado.

b) Descreva o que você observou com relação à parte imaginária de z_1 e z_3.

____

c) Ao mover o ponto que representa a imagem de z_1 até obter $z_1 = -z_2$, que vetor representa a soma z_3?

____

d) Sendo z_1 um número complexo em que a parte real e a parte imaginária são diferentes de zero e z_2 um número real, é possível que $z_3 = z_1 + z_2$ seja um número real? É possível que z_3 seja um imaginário puro? Justifique suas respostas.

____

____

____

Atividade 7

Abra o *applet* "Adição de um número complexo com um imaginário puro" (Adição Im. Puro) e determine o que se pede:

a) Marque as caixas que aparecem no *applet* e execute o que for solicitado.

b) Descreva o que você observou com relação à parte real de z_1 e z_3.

____

c) Ao mover o ponto que representa a imagem de z_1 até obter $z_1 = - z_2$, que vetor representa a soma z_3?

____

d) Sendo z_1 um número complexo em que a parte real e a parte imaginária são diferentes de zero e z_2 um número imaginário puro, é possível que $z_3 = z_1 + z_2$ seja um número real? É possível que z_3 seja um imaginário puro? Justifique suas respostas.

____

____

____

Atividade 8

Abra o *applet* “Multiplicação de um número complexo por um escalar” (Multiplicação por Escalar) e determine o que se pede:

a) Marque as caixas que aparecem no *applet* e execute o que for solicitado.

b) O que é possível afirmar sobre o comprimento, a direção e o sentido do vetor que representa z_2, em relação ao vetor que representa z_1, quando:

→ $0 < k < 1$

___

___

→ $k = 1$

___

___

→ $k > 1$

___

___

→ $k = -1$

___

___

→ $-1 < k < 0$

___

___

→ $k < -1$

___

___

Atividade 9

Abra o *applet* “Módulo e Conjugado” e determine o que se pede:

a) Marque as caixas que aparecem no *applet* e execute o que for solicitado.

b) Compare a parte real z com a de $\bar{z}$. Descreva o que você observou.

___

c) Compare a parte imaginária de z com a de $\bar{z}$ e descreva o que você observou.

___

d) Movimente o ponto P e observe z e o seu conjugado (canto superior esquerdo do *applet*). É possível que z seja igual ao seu conjugado? Em caso afirmativo, qual a condição para que isso ocorra?

___

___

e) Movimente o ponto P e observe o módulo de z e o do seu conjugado (canto superior esquerdo do *applet*). Descreva a relação entre o módulo de z e $\bar{z}$.

____

____

Atividade 10

Abra o *applet* “Forma Trigonométrica” (F. Trigonométrica) e determine o que se pede:

a) Marque as caixas que aparecem no *applet* e execute o que for solicitado.

b) Desmarque as caixas 4, 5 e 6 que aparecem no *applet.*

c) Movimente o ponto P, observe os valores de ρ e α apresentados no canto inferior esquerdo da tela, e escreva o número complexo na forma trigonométrica (z = $\rho(\cos\alpha + i sen\alpha)$).

____

Atividade 11

Abra o *applet* “Potências de i” e determine o que se pede:

a) Marque somente até a caixa 10 e descreva o que você observou.

____

____

b) Marque a caixa 11 e verifique se o que você descreveu no item anterior está de acordo com a teoria apresentada nessa caixa.

c) Calcule i^{327}.

____

____

Atividade 12

Abra o *applet* “Multiplicação por unidade imaginária” (Mult. unidade Im.) e determine o que se pede:

a) Movimente os seletores que aparecem no *applet* e execute o que for solicitado.

b) Retorne todos os seletores ao ponto original. Movimente o ponto P para outro quadrante e execute, novamente, o que é solicitado no *applet*.

c) Descreva o que você observou com relação à multiplicação de um número complexo pela unidade imaginária (i).

____

____

Atividade 13

Abra o *applet* “Divisão por unidade imaginária” (Div. unidade Im.) e determine o que se pede:

a) Movimente os seletores que aparecem no *applet* e execute o que for solicitado.

b) Retorne todos os seletores ao ponto original. Movimente o ponto P para outro quadrante e execute, novamente, o que é solicitado no *applet*.

c) Descreva o que você observou com relação à divisão de um número complexo pela unidade imaginária (i).

____

____

Atividade 14

Abra o *applet* “Potenciação” e determine o que se pede:

a) Marque as caixas 1 e 2 do *applet* e execute o que for solicitado.

b) Descreva a relação entre os módulos de z e z^2 , assim como, a relação entre seus argumentos.

____

____

c) Marque a caixa 3 e execute o que for solicitado.

d) Descreva a relação entre os módulos de z e z^3 , assim como, a relação entre seus argumentos.

____

____

e) Marque a caixa 4 e execute o que é solicitado para n = 4.

f) Descreva a relação entre os módulos de z e z^4 , assim como, a relação entre seus argumentos.

____

____

g) Volte o seletor k ao inicio do seu segmento, torne n = 2 e desmarque as caixas 2, 3 e 4. Altere o complexo z, movendo o ponto que é sua imagem, refaça os itens anteriores e registre suas respostas abaixo.

____

____

____

____

____

____

h) A partir do que foi observado e conjecturado nos itens anteriores escreva z^n em função de ρ e θ , considerando que z = $\rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$.

____

____

i) Marque a caixa 5 e verifique se o que foi conjecturado no item h está correto.

____

____

Atividade 15

Abra o *applet* “Radiciação” e determine o que se pede:

a) Marque as caixas 1 e 2 do *applet* e execute o que for solicitado.

b) Descreva a relação entre os módulos de w_1 e w_2 e, também, a relação entre seus argumentos.

c) Marque a caixa 3 e execute o que for solicitado.

d) Descreva a relação entre os módulos de w_1 e w_2, assim como, entre seus argumentos. Além disso, descreva a relação entre os módulos de w_2 e w_3, assim como, entre seus argumentos.

e) Marque a caixa 4 e execute o que for solicitado para n = 4.

f) Descreva a relação entre os módulos de w_1 e w_2, assim como, entre seus argumentos. Descreva as referidas relações também para w_2 e w_3; w_3 e w_4.

g) Volte o seletor w ao início do seu segmento, torne n = 2 e desmarque as caixas 3 e 4. Altere o complexo z, movendo o ponto que é sua imagem, refaça os itens anteriores e registre suas respostas abaixo.

h) Observe que o número indicado no seletor n corresponde ao índice da raiz do complexo z. Descreva a relação entre o valor de n e o número de raízes correspondentes.

i) Para n > 2, descreva a relação entre os pontos que são as imagens das raízes e os polígonos regulares formados.

j) Considerando n = 2, seria possível determinar a raiz w_2, a partir da raiz w_1? Justifique sua resposta.

k) Considerando n = 3, descreva como seria possível determinar as outras duas raízes, a partir da raiz w_1.

____

____

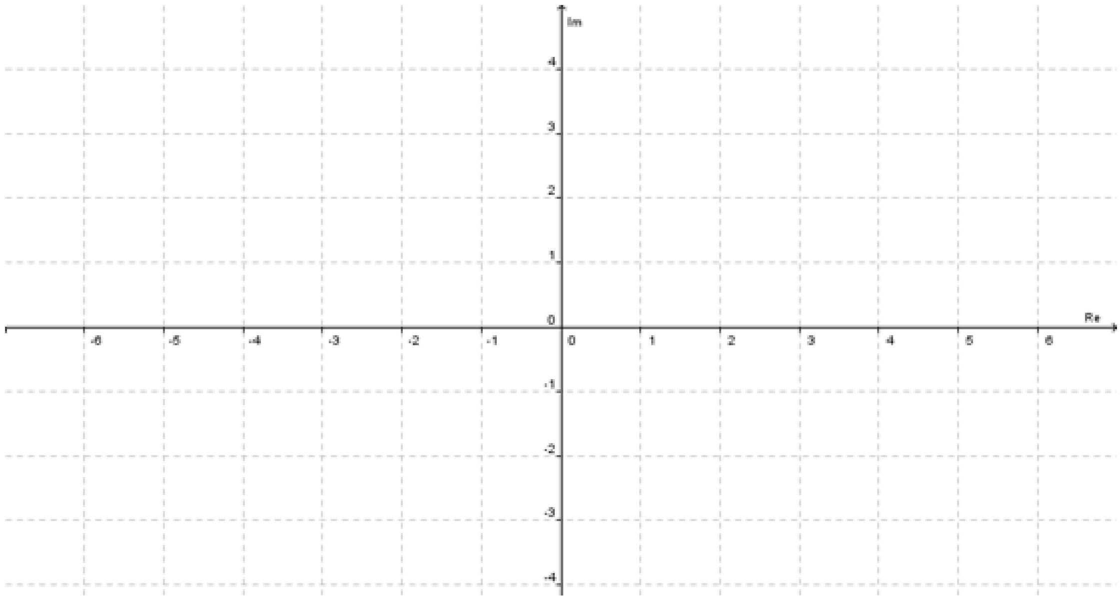
l) Marque a caixa 5 e observe a dedução da segunda fórmula de De Moivre.

____

____

III. Atividades sem utilizar os *applets*

1) Represente, no plano de Argand–Gauss, os números complexos $z_1 = 1 + i$; $z_2 = -\sqrt{3} + i$; $z_3 = 4i$.

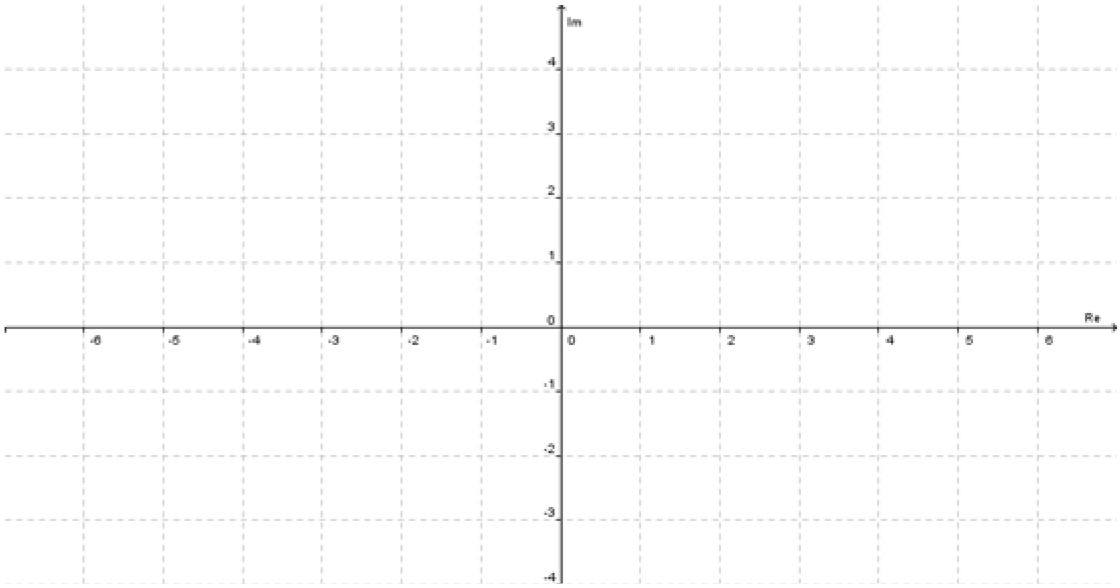


2) Determine os valores de *m*, $m \in$ IR, para os quais o número complexo :

a) $z_1 = 7 + (3m+12)i$ é real ;

b) $z_2 = (2m^2 - 18) + 5i$ é imaginário puro.

3) Sendo $z_1 = -4 + 2i$ e $z_2 = 2 - i$, represente, no mesmo plano complexo, z_1, z_2, $z_1 + z_2$ e $z_1 - z_2$.



4) Calcule o argumento dos números complexos:

a) z = $\sqrt{3}$ - i

b) z = 0,5 –0,5i

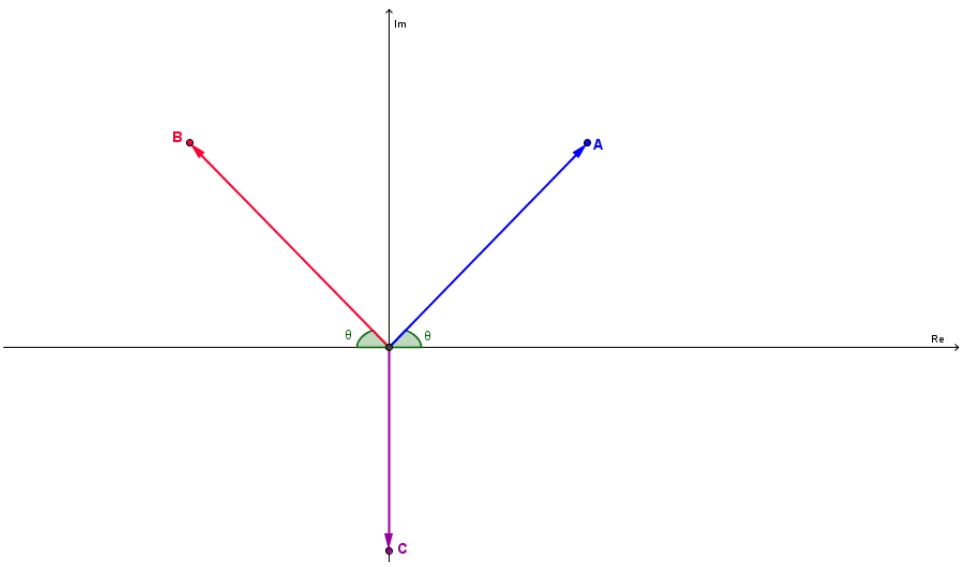
5) Sendo z = 3 – 2i e w = - 5 + i, calcule:

a) | z – w|

b) | z . w|

6) (FUVEST – SP) Determine os números complexos z tal que $z + \bar{z}$ = 4 e $z \cdot \bar{z}$ = 13, em que $\bar{z}$ é o conjugado de z.

7) (FATEC - SP) Na figura abaixo, os pontos A, B e C são imagens dos números complexos z_1, z_2 e z_3 , respectivamente, no plano de Argand-Gauss.



Se $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \sqrt{3}$ e $\theta = 60°$, então $z_1 + z_2 + z_3$ é igual a:

a) $(3-\sqrt{3})i$

b) $3-\sqrt{3}\,i$

c) $(3+\sqrt{3})i$

d) $3+\sqrt{3}\,i$

e) $3i-\sqrt{3}$

8) Determine as coordenadas do ponto A' obtida da rotação de 90°, no sentido anti-horário, do ponto A(3,4) em torno da origem.

9) Represente, no plano de Argand-Gauss, os números complexos da forma
$z = a + bi$ que satisfazem as condições:

a) $a > 2$ e $b = 3$

b) $a \geq 3$ e $b \leq 5$

10) Dados os complexos $z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{2}\right)$ e $z_2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$, calcule:

a) $\dfrac{z_1}{z_2}$

b) $z_1 \cdot \overline{z_1}$

11) Dados os números complexos $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$ e $w = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$, determine o produto $z \cdot w$.

12) (UNESP 2007) Considere os números complexos $w = 4 + 2i$ e $z = 3a + 4ai$, onde a é um número real positivo e i indica a unidade imaginária. Se, em centímetros, a altura de um triângulo é $|z|$ e a base é a parte real de $z \cdot w$, determine a de modo que a área do triângulo seja 90 cm^2.

13) (FGV 2008) Os quatro vértices de um quadrado no plano Argand-Gauss são números complexos, sendo três deles $1 + 2i$, $-2 + i$ e $-1 - 2i$. O quarto vértice do quadrado é o número complexo:

a) $2 + i$

b) $2 - i$

c) $1 - 2i$

d) $-1 + 2i$

e) $-2 - i$

14) (UFRS 2007) O argumento do número complexo z é $\frac{\pi}{6}$, e o seu módulo é 2.

Então, a forma algébrica de z é:

a) - i

b) i.

c) $\sqrt{3}i$

d) $\sqrt{3}$ - i

e) $\sqrt{3}+$ i

15) (UNICAMP - SP) Um triângulo equilátero, inscrito em uma circunferência de centro na origem, tem como um de seus vértices o ponto do plano associado ao número complexo $\sqrt{3}+1i$.

a) Que números complexos estão associados aos outros dois vértices do mesmo triângulo? Faça a figura dese triângulo.

b) Qual a medida do lado desse triângulo?

16) (FUVEST – SP - adaptado) Sendo o número complexo z = cos 48° + i sen 48° , determine o valor de $z^{10}+z^{5}+1$.

17) (U.F.SANTA MARIA - SP) A soma das raízes cúbicas do número complexo z = 8i é:

a) $-4i$

b) $-2\sqrt{3}\,i$

c) 0

d) $2\sqrt{3}\,i$

e) $4i$

18) Considere o número complexo $z=\cos\dfrac{\pi}{6}+isen\dfrac{\pi}{6}$. O valor de $z^{3}+z^{6}+z^{12}$ é:

a) $-i$

b) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

c) $i-2$

d) i

e) $2i$

19) O valor do número complexo $\left[\dfrac{1+i^{9}}{1+i^{27}}\right]^{20}$ é:

a) 1

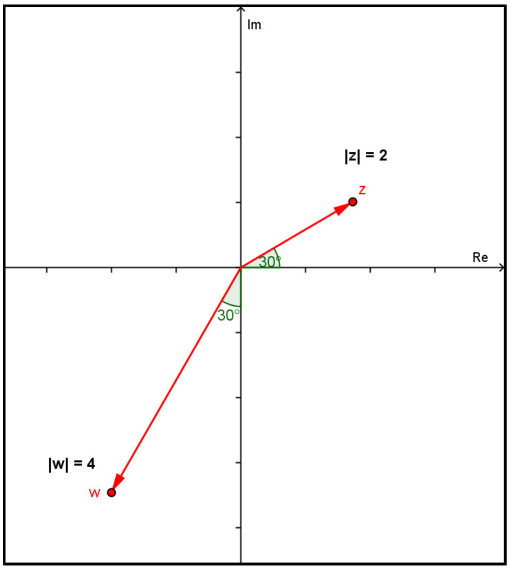
b) i

c) $-i$

d) -1

e) 2^{20}

20) (UFRJ 2009) No jogo *Batalha Complexa* são dados números complexos z e w, chamados *mira* e *alvo* respectivamente. O tiro certeiro de z em w é o número complexo t tal que $tz=w$.



Considere a mira z e o alvo w indicados na figura acima. Determine o tiro certeiro de z em w.

Referências Bibliográficas

CERRI C.; MONTEIRO M. S. *História dos Números Complexos* CAEM - Centro de Aperfeiçoamento de Ensino de Matemática Instituto de Matemática e Estatística da USP, 2001. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/~martha/caem/complexos.pdf> Acesso em: 19/12/2008.

MELLO, J. L. P. (Coordenador Técnico). *Matemática, Construção e Significado*. Volume Único. São Paulo: Editora Moderna, 2005.

MILIES, C. P. A Emergência dos Números Complexos. *Revista do Professor de Matemática (RPM)*. n. 24, p. 5-15. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 1993.

LIMA, E. L. Sobre a Evolução de Algumas Idéias Matemáticas. *Revista do Professor de Matemática (RPM)*. n. 06, p. 1-8. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 1985.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, C. A. *A Matemática do Ensino Médio*. v. 3. 6. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. p. 161.

Apêndice C: Questionário do teste exploratório

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE
Campus Campos-Centro
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Ministério da Educação
BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Questionário – Teste Exploratório
Estudando Números Complexos com *applets* desenvolvidos no *software* Geogebra

Nome: (opcional): ____

1.Você considera que os enunciados das atividades estão claros?
☐ Sim ☐ Não ☐ Parcialmente
Caso sua opção tenha sido "Parcialmente", liste a seção e o número das atividades cujos enunciados precisariam ser melhorados.
____
____

2. Você considera que as atividades contribuíram para a compreensão dos tópicos de Números Complexos em estudo?
☐ Sim ☐ Não ☐ Parcialmente
Por quê?____
____

3. Você classificaria o nível das atividades como:
☐ muito fácil ☐ fácil ☐ moderado ☐difícil ☐ muito difícil
Comente____
____

4. Você já havia utilizado algum *applet* antes desse teste exploratório, no contexto educacional?
☐ Sim ☐ Não

5. Na sua opinião, utilizar os *applets* de Números Complexos foi:
☐ muito fácil ☐ fácil ☐ moderado ☐ difícil ☐ muito difícil
Comente____
____

5.1 Caso você tenha achado o uso de algum *applet* "difícil" ou "muito difícil", ainda assim julga válida a sua utilização para fins pedagógicos?
☐ Sim ☐ Não
Comente____
____

6. Você considera necessário realizar alguma modificação nos *applets* de Números Complexos?
☐ Sim ☐ Não
6.1 Em caso afirmativo, informe os *applets* e as modificações a serem feitas.
____
____

7. De maneira geral, você considera que o uso de *applets* favorece a construção de conhecimentos matemáticos?
☐ Sim ☐ Não ☐ Depende de:_________________
Por quê ?____

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE
Campus Campos-Centro
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Ministério da Educação
BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

8. Você considera que o papel do professor durante a utilização de *applets*, é:

☐ muito importante; ☐ pouco importante;
☐ importante; ☐ quase desnecessário;
☐ desnecessário.

Comente:

____

____

9. Visando avaliar a unidade de aprendizagem: Investigando em X, considere a escala abaixo e, em cada linha, assinale com um x a coluna que julgar mais adequada.

Critério de Avaliação - Escala: 5 – Concordo plenamente; 4 – Concordo; 3 – Não concordo nem discordo; 2 – Discordo; 1 – Discordo completamente; N/A – Não se aplica ou sem resposta.

Conteúdo	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**N/A**
Claro e conciso.						
Altamente relevante.						
Apresenta informações precisas.						
Inclui quantidade apropriada de material.						
Apresenta alta qualidade (redação e edição).						
Avaliação Geral do Item						
Usabilidade	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**N/A**
É fácil de usar.						
Tem instruções claras.						
É engajador / motivador.						
Visualmente atraente.						
É interativo.						
Navegação fácil e consistente ao longo de toda unidade.						
Compatível com diferentes navegadores.						
Projeto gráfico (desenho de páginas) de alta qualidade.						
Avaliação Geral do Item						
Didática	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**N/A**
Define claramente os objetivos de aprendizagem.						
Demonstra relacionamento entre conceitos.						
Faz bom uso de animações e simulações.						
Didaticamente eficiente.						
Avaliação Geral do Item						

10. Você tem alguma sugestão ou crítica a fazer à Unidade de Aprendizagem Investigando em ₵?

Apêndice D: Questionário de sondagem

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE
Campus Campos-Centro

Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica — Ministério da Educação — BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Questionário – Sondagem
Estudando Números Complexos com *applets* desenvolvidos no *software* Geogebra

Nome: (opcional): ____

1. Você usa tecnologias digitais no seu dia a dia?

☐ Sim ☐ Não

1.1 Em caso afirmativo, assinale, na lista abaixo, a(s) tecnologia(s) que você usa, no computador:

☐ msn
☐ orkut
☐ facebook
☐ twiter
☐ Internet para pesquisa
☐ e-mail
☐ jogos
☐ *sites*/*softwares* relacionados à músicas
☐ *sites*/*softwares* relacionados à vídeo
☐ *softwares* de manipulação de imagens
☐ outros: ____
____

1.2 Em caso afirmativo, assinale, na lista abaixo, a(s) tecnologia(s) que você usa, no celular:

☐ msn
☐ orkut
☐ facebook
☐ twiter
☐ internet para pesquisa
☐ e-mail
☐ jogos
☐ recursos de música
☐ recursos de vídeo
☐ sms
☐ câmera digital
☐ Bluetooth
☐ outros: ____

2. Você já utilizou alguma tecnologia digital, na escola?

☐ Sim ☐ Não

Em caso afirmativo, qual a(s) tecnologia(s) e para que finalidade(s)?
____
____

3. Você já utilizou alguma tecnologia digital, nas aulas de Matemática?

☐ Sim ☐ Não

3.1 Em caso afirmativo, cite o nome da(s) tecnologia(s) utilizada.
____
____

4. Você já utilizou algum *applet,* nas aulas de Matemática?

☐ Sim ☐ Não

4.1 Em caso afirmativo, cite o(s) conteúdo(s) principal(is) abordado(s) por meio dos *applets*.
____
____

5. Você considera que, de maneira geral, o uso tecnologias digitais pode contribuir para a aprendizagem de Matemática?

☐ Sim ☐ Não

Comente.
____

Apêndice E: Questionário da experimentação

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE
Campus Campos-Centro

Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica Ministério da Educação

Questionário – Experimentação

Estudando Números Complexos com *applets* desenvolvidos no *software* Geogebra

Nome: (opcional): ____

1. Você considera que os enunciados das atividades estão claros?

☐ Sim ☐ Não ☐ Parcialmente

Caso sua opção tenha sido "Parcialmente", liste a seção e o número das atividades cujos enunciados precisariam ser melhorados.

____

____

2. Você considera que as atividades contribuíram para a compreensão dos tópicos de Números Complexos em estudo?

☐ Sim ☐ Não ☐ Parcialmente

Por quê?____

____

3. Você classificaria o nível das atividades como:

☐ muito fácil ☐ fácil ☐ moderado ☐difícil ☐ muito difícil

Comente____

____

4. Na sua opinião, manipular os *applets* de Números Complexos foi:

☐ muito fácil ☐ fácil ☐ moderado ☐difícil ☐ muito difícil

Comente____

____

4.1 Caso você tenha achado o uso de algum *applet* "difícil" ou "muito difícil", ainda assim julga válida a sua utilização para fins didáticos?

☐ Sim ☐ Não

Comente____

____

5. Você considera necessário realizar alguma modificação nos *applets* de Números Complexos?

☐ Sim ☐ Não

5.1 Em caso afirmativo, informe os *applets* e as modificações a serem feitas.

____

____

6. De maneira geral, você considera que o uso de *applets* favorece a construção de conhecimentos matemáticos?

☐ Sim ☐ Não ☐ Depende de:_________________

Por quê ?____

____

7. Você considera que o papel do professor durante a utilização de *applets*, é:

☐ muito importante; ☐ pouco importante;

☐ importante; ☐ quase desnecessário;

☐ desnecessário.

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
FLUMINENSE
Campus Campos-Centro

Secretaria de Educação
Profissional e Tecnológica

Ministério
da Educação

8. Visando avaliar a unidade de aprendizagem: Investigando em X, considere a escala abaixo e, em cada linha, assinale com um x a coluna que julgar mais adequada.

Critério de Avaliação - Escala: 5 – Concordo plenamente; 4 – Concordo; 3 – Não concordo nem discordo; 2 – Discordo; 1 – Discordo completamente; N/A – Não se aplica ou sem resposta.

Conteúdo	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**N/A**
Claro e conciso.						
Altamente relevante.						
Apresenta informações precisas.						
Inclui quantidade apropriada de material.						
Apresenta alta qualidade (redação e edição).						
Avaliação Geral do Item						
Usabilidade	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**N/A**
É fácil de usar.						
Tem instruções claras.						
É engajador / motivador.						
Visualmente atraente.						
É interativo.						
Navegação fácil e consistente ao longo de toda unidade.						
Compatível com diferentes navegadores.						
Projeto gráfico (desenho de páginas) de alta qualidade.						
Avaliação Geral do Item						
Didática	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**N/A**
Define claramente os objetivos de aprendizagem.						
Demonstra relacionamento entre conceitos.						
Faz bom uso de animações e simulações.						
Didaticamente eficiente.						
Avaliação Geral do Item						

9. Você tem alguma sugestão ou crítica a fazer à Unidade de Aprendizagem: Investigando em ₵?

____

____

Apêndice F: Atividades de sondagem

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE
Campus Campos-Centro

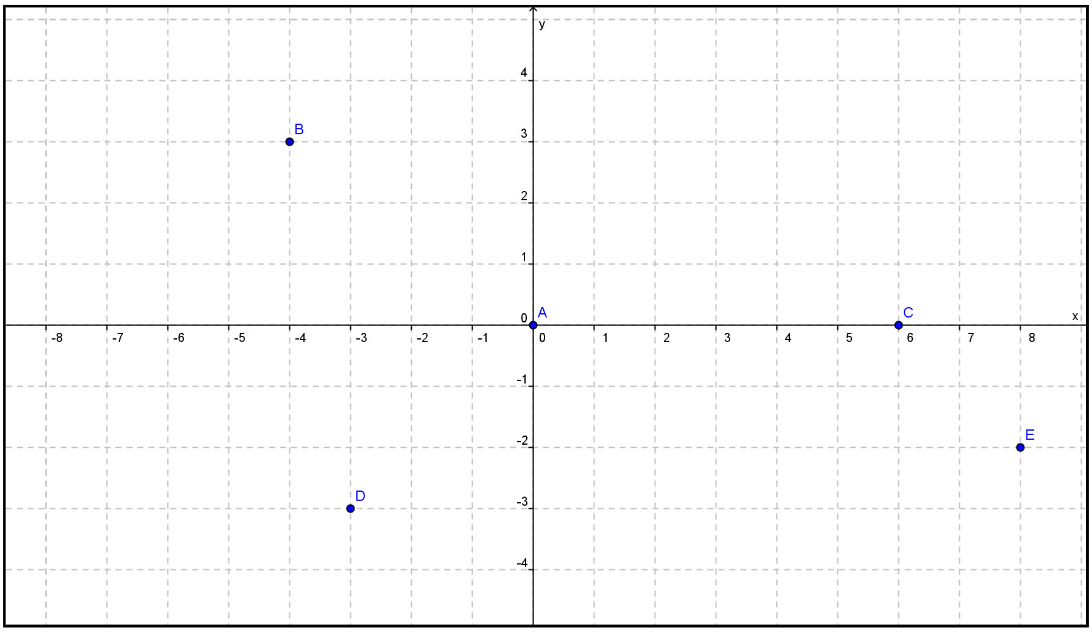
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica   Ministério da Educação

Nome:____

Turma: ___________   Data:__________

Atividades

1- Determine as coordenadas dos pontos marcados no plano cartesiano abaixo:



2- Efetue as operações indicadas:

a) $(2b+4c-a)+(a-3b-5c)$

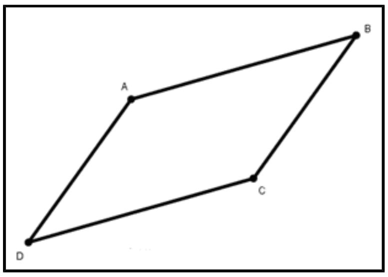
c) $6a-(8c)$

b) $(10x+10y)-(8x+15y)$

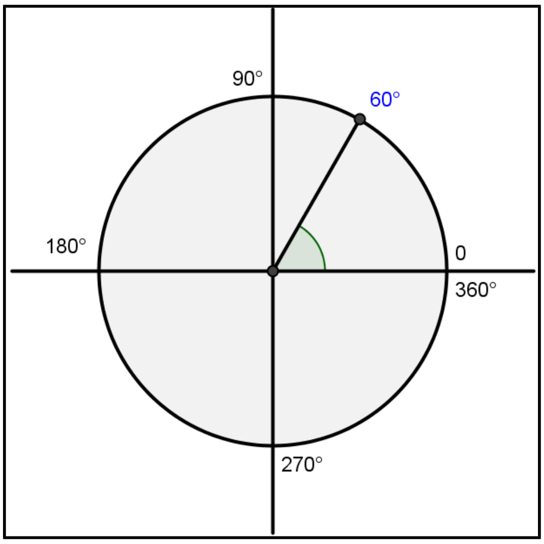
d) $(x+y^2)(2x+3)$

e) $(a+2b)^2$

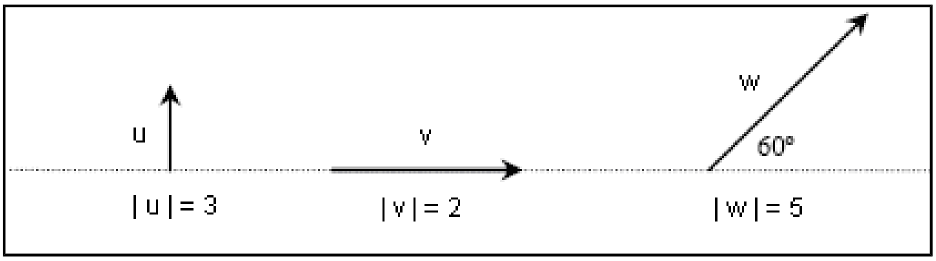
3- Observe o paralelogramo abaixo e identifique os pares de lados paralelos, registrando-os nas linhas abaixo.



4- Determine o seno e o cosseno de 0°, 60°, 90°, 120°, 180°, 240°, 270°, 300°, 360° e 420°



5- Observe os vetores dados:



Represente graficamente o vetor resultante *r* em cada situação proposta, utilizando a regra de adição de vetores.

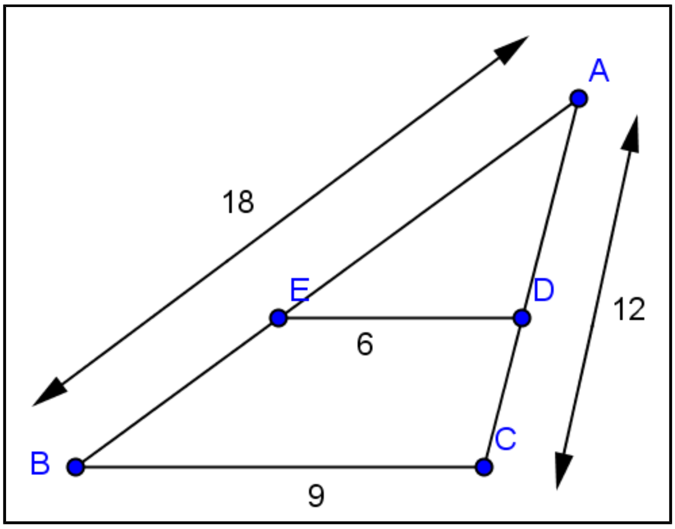
$r_1 = u + v$
Regra do paralelogramo

$r_2 = v - u$
Regra do paralelogramo

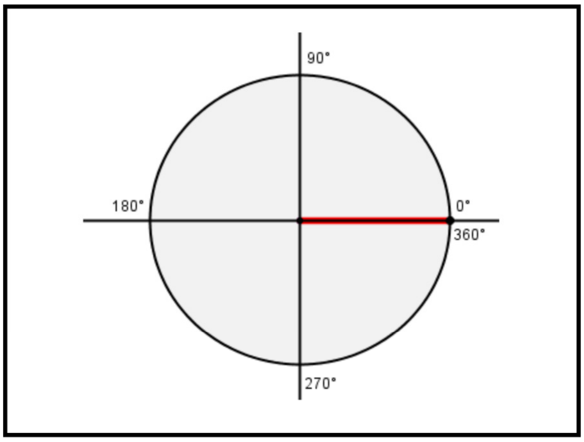
$r_3 = v + w$
Regra do paralelogramo

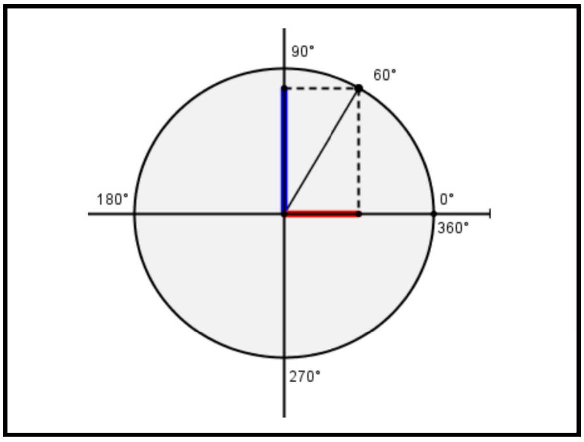
$r_4 = w - v$
Regra do paralelogramo

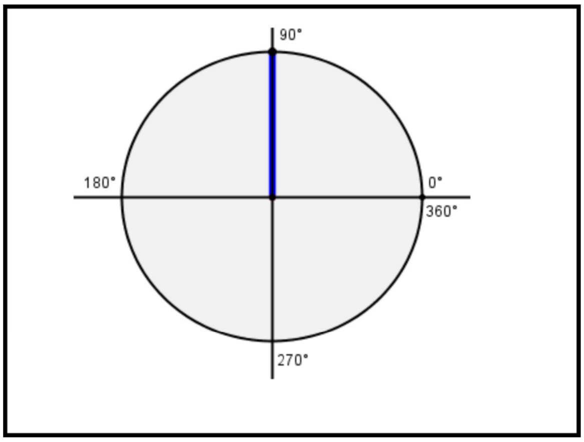
6- No triângulo ABC, abaixo, o segmento ED é paralelo ao segmento BC. Determine a medida dos segmentos AE e AD.

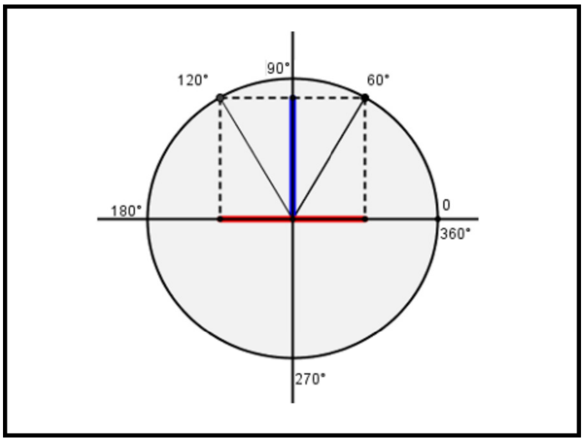

A
18
E
D
12
6
C
B
9

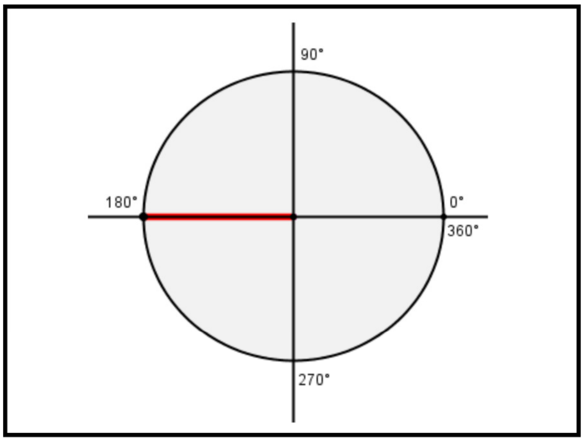
Apêndice G: Explicação dos Prérrequisitos

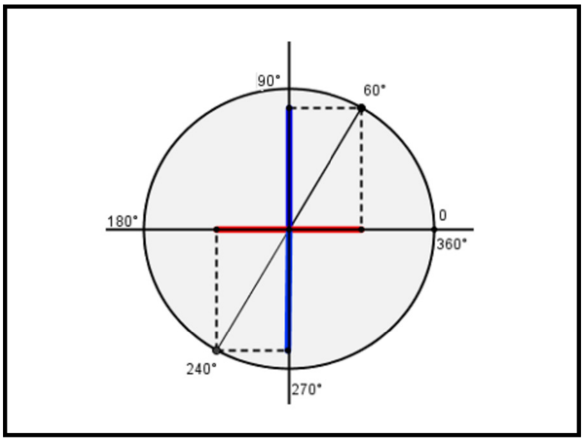

90°
180°
0°
360°
270°

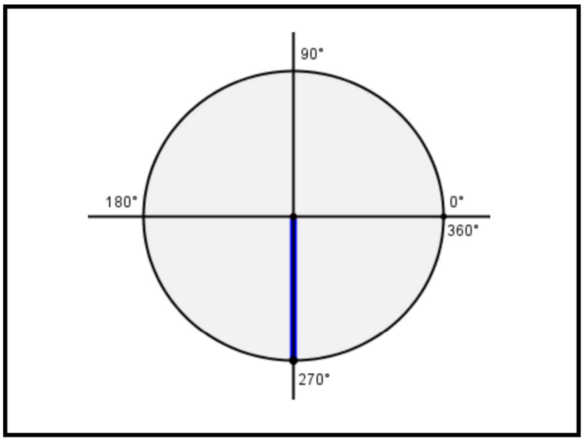

90°
60°
180°
0°
360°
270°

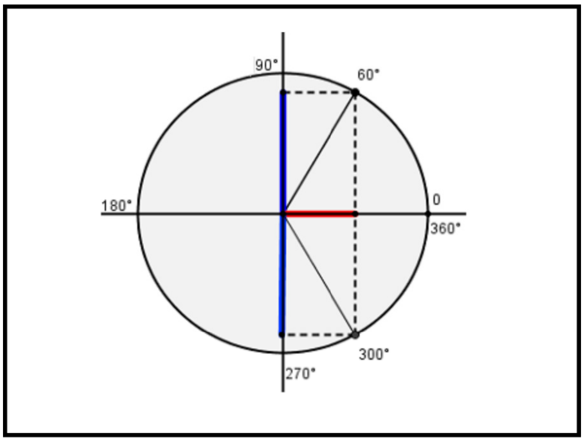

90°
180°
0°
360°
270°

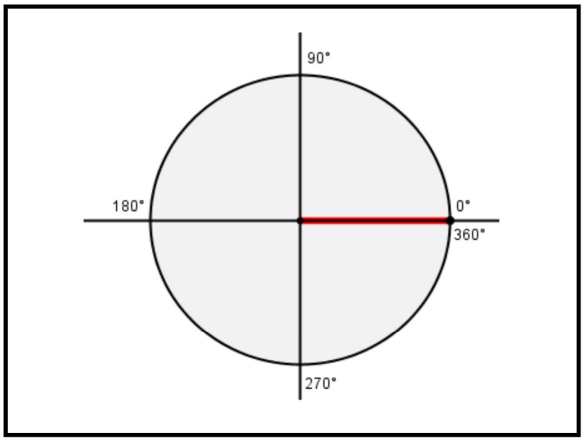

120°
90°
60°
180°
0
360°
270°

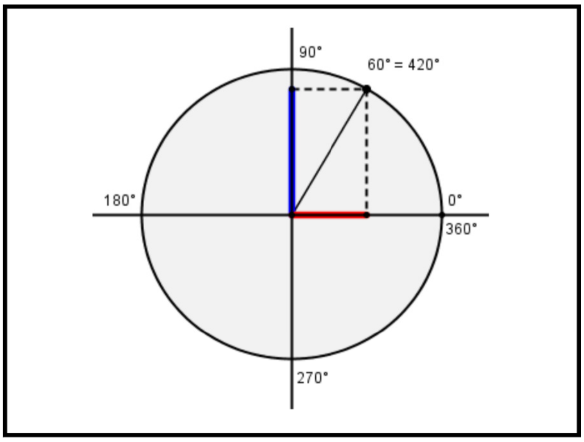

90°
180°
0°
360°
270°

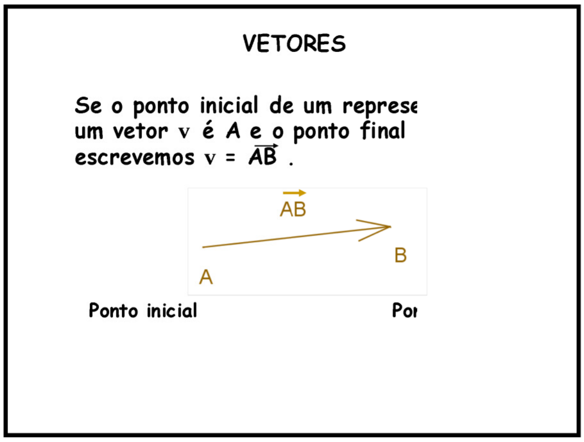

90°
60°
180°
0
360°
240°
270°

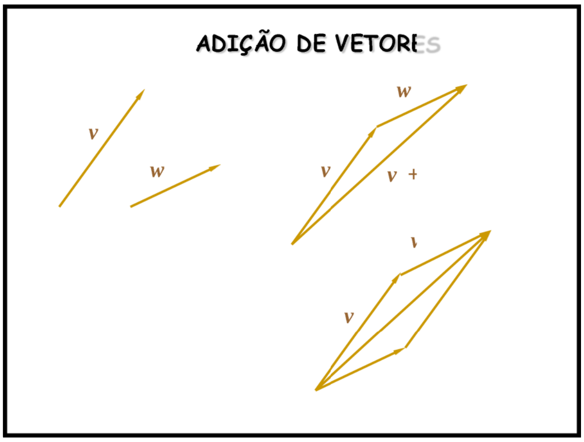

90°
180°
0°
360°
270°

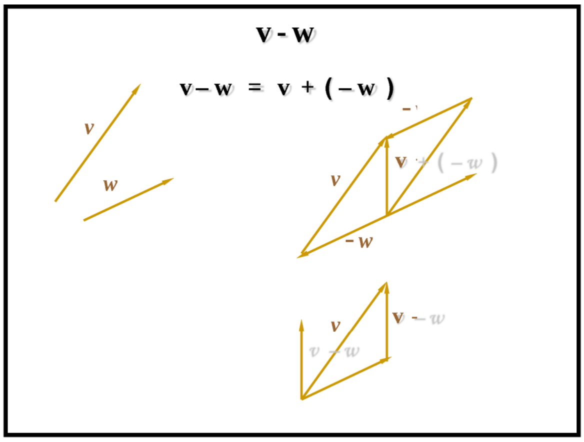

90°
60°
180°
0
360°
300°
270°

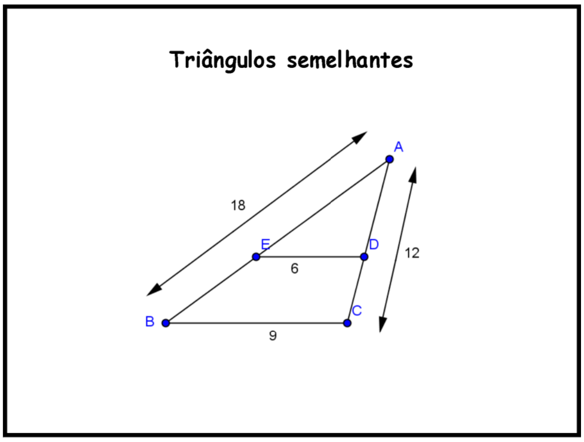

90°
180°
0°
360°
270°

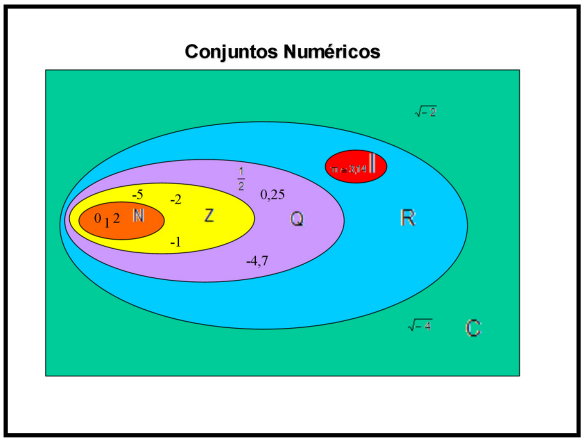

90°
60° = 420°
180°
0°
360°
270°


VETORES
Se o ponto inicial de um represe
um vetor v é A e o ponto final
escrevemos v = AB .
AB
A
B
Ponto inicial
Po


ADIÇÃO DE VETORES
v
w
w
v
v +
v


v - w
v – w = v + (– w)
v
w
v
v + (– w)
– w
v
v – w
v – w


Triângulos semelhantes
A
18
E
D
6
12
B
C
9


Conjuntos Numéricos
1/2
0,25
-5
-2
0 1 2
N
Z
Q
R
-1
-4,7
C

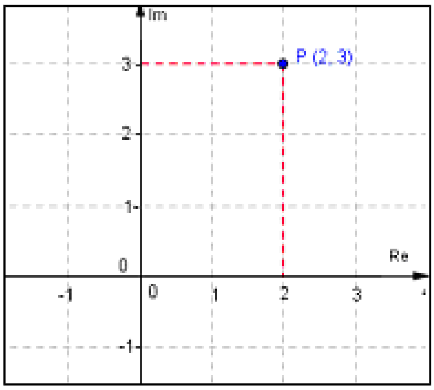
Apêndice H: Apostila experimentação- segundo estudo de caso

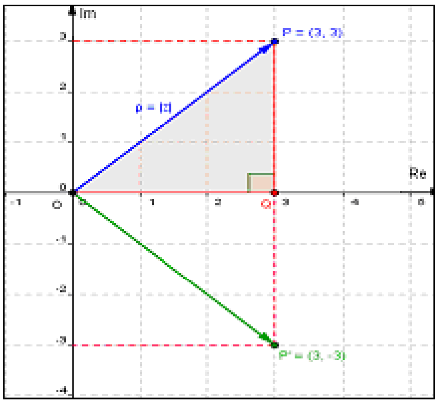
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
FLUMINENSE
Campus Campos-Centro

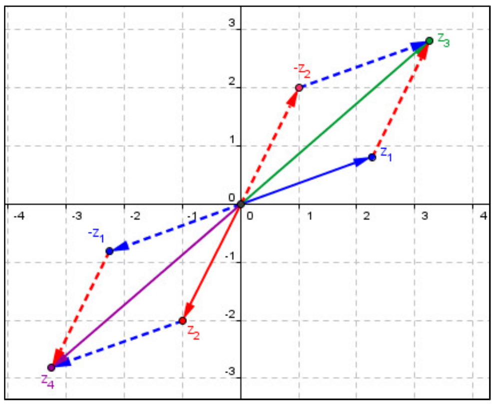
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Ministério da Educação
BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

DIRETORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO/GERÊNCIA DE PESQUISA
PROJETO: TECNOLOGIAS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

Estudando Números Complexos com *Applets*







Débora Maciel da Costa.
Gilmara Teixeira Barcelos
Silvia Cristina Freitas Batista

Campos dos Goytacazes
2010

I. Introdução

Contrariando o que é, muitas vezes, divulgado nos livros didáticos, a construção da teoria dos números complexos não teve origem na análise das equações do segundo grau, mas sim, na busca da solução da equação do terceiro grau (MILIES, 1993).

Na primeira metade do século XVI, o matemático italiano Gerônimo Cardano apresentou, em sua obra *Ars Magna*, uma forma de resolver equações cúbicas do tipo $x^3 + px = q$, com p e q reais (forma esta que havia sido descoberta por outro matemático italiano, Niccolo Tartaglia) (MELLO, 2005). Cardano, ao resolver a equação $x^3 = 15x + 4$, da qual ele conhecia a raiz 4, se deparou com raízes quadradas de números negativos, algo que era considerado inexistente na época (MELLO, 2005).

Raphael Bombelli (1526-1573), um admirador da *Ars Magna* de Cardano, publicou uma obra denominada *l'Álgebra*, em 1572, expondo os mesmos assuntos, mas de forma mais didática (MILIES, 1993). Nessa obra, ele estudou a resolução de equações de grau não superior a quatro e considerou, em particular, a equação $x^3 = 15x + 4$. Ao aplicar a fórmula de Cardano para o cálculo das raízes, ele decidiu prosseguir, considerando a possibilidade de existência de expressões envolvendo raízes quadradas de números negativos. Dessa forma, ele conseguiu obter raiz 4, previamente conhecida.

A partir de então, os matemáticos foram considerando cada vez mais a existência de raízes quadradas de números negativos, dando origem a um novo tipo de número (MELLO, 2005). Assim, no século XVI, estava ocorrendo, na Matemática, algo semelhante ao que ocorreu no tempo dos gregos antigos, quando se verificou a insuficiência dos números racionais com a construção do número $\sqrt{2}$, que não é racional, ou seja, verificava-se que o conceito de número precisava ser, novamente, estendido (CERRI; MONTEIRO, 2001).

Os itens abaixo descrevem, brevemente, a evolução dos Números Complexos (MILIES, 1993):

- O símbolo $\sqrt{-1}$ foi introduzido, em 1629, por Albert Girard;
- Os termos **real** e **imaginário** foram empregados, em 1637, por René Descartes;
- O símbolo *i* foi usado, em 1777, por Leonhard Euler para representar $\sqrt{-1}$. Este símbolo apareceu impresso pela primeira vez, em 1794, e se tornou amplamente aceito após seu uso por Carl Friederich Gauss, em 1801;
- A expressão **número complexo** foi introduzida por Gauss, em 1832;
- A representação gráfica dos números complexos foi desenvolvida, de forma independente, por Caspar Wessel, em 1799; Jean-Robert Argand, em 1806 e Gauss, em 1831. Porém, quem, verdadeiramente, tornou a interpretação geométrica amplamente aceita foi Gauss;

- A formalização completa dos números complexos como pares ordenados de números reais foi desenvolvida por William Rowan Hamilton**,** em 1833.

O estudo de Números Complexos evoluiu e se faz presente em, praticamente, todos os grandes ramos da Matemática, tais como Álgebra, Topologia, Geometria (Analítica, Diferencial ou Algébrica), Análise, entre outros (LIMA, 1985). Além disso, os Complexos estão presentes em aplicações como dinâmica dos fluidos e eletromagnetismo (LIMA, 1985).

II. Conhecendo alguns Recursos do *Software* GeoGebra

Os *applets* utilizados nas atividades da seção III foram desenvolvidos com o *software* GeoGebra. Os recursos deste *software* são disponibilizados nos *applets*, de forma totalmente funcional.

O GeoGebra é um sistema de Geometria Dinâmica, livre, desenvolvido por Markus Hohenwarter, disponível, em português, no endereço eletrônico <http://www.geogebra.at/>. Este permite realizar construções tanto com pontos, vetores, segmentos, retas, seções cônicas, como com funções que podem se modificar, posteriormente, de forma dinâmica. O referido *software* possibilita o estudo de variáveis vinculadas a números, vetores e pontos.

Abaixo descrevemos alguns recursos necessários para a realização de atividades da seção III.

Em todos os botões da Barra de Botões (Figura 1) aparece uma seta no canto inferior direito. Esta, ao ser clicada, permite visualizar as opções existentes.

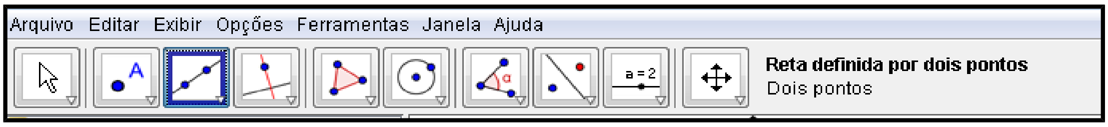
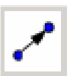


Figura 1: Barra de Botões

Ao clicar na setinha do 3º. botão, da esquerda para direita, encontramos as duas ferramentas descritas abaixo.

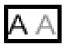
 **Vetor definido por dois pontos** – marcando-se dois pontos, traça-se o vetor com origem no primeiro ponto determinado e ponto final no segundo.

 **Vetor a partir de um ponto** – essa ferramenta permite que, tendo um vetor v já construído, construa-se outro representante de v, a partir de um ponto considerado. Para tanto, marca-se um ponto (que será a origem do outro representante de v), seleciona-se esta ferramenta, clica-se, com o botão esquerdo do mouse, sobre o vetor v já construído e, depois, sobre o ponto considerado.

Além de conhecer essas duas ferramentas, também é importante conhecer certas funcionalidades, acessíveis ao clicar com o botão direito do mouse sobre um objeto.

Consideremos, por exemplo, um ponto marcado na tela do Geogebra. Ao clicar com o botão direito sobre este ponto, será aberta a janela mostrada na figura 2.

Figura 2: Opções para o Ponto A

- Para exibir ou esconder o “nome” do objeto basta clicar em  (Exibir rótulo).
- Caso queira apagar algum objeto, basta clicar no  (Apagar).
- Para renomear o objeto é preciso clicar em  (Renomear). Na janela que se abrirá deve-se colocar o “nome” desejado e clicar em “Aplicar”.
- Para trocar a cor do objeto é preciso clicar em  (Propriedades). Dessa forma, é aberta a janela mostrada na figura 3. Nesta janela é preciso selecionar a aba “Cor”, clicar na cor desejada e, a seguir, clicar em “Fechar”.

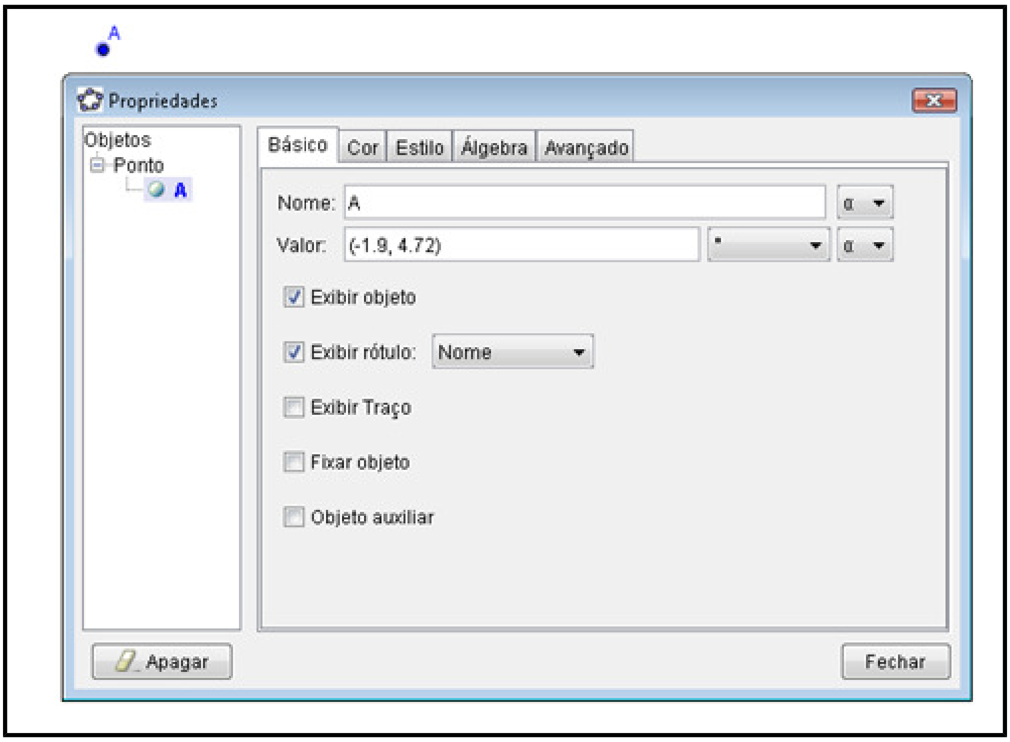


Figura 3: Propriedades

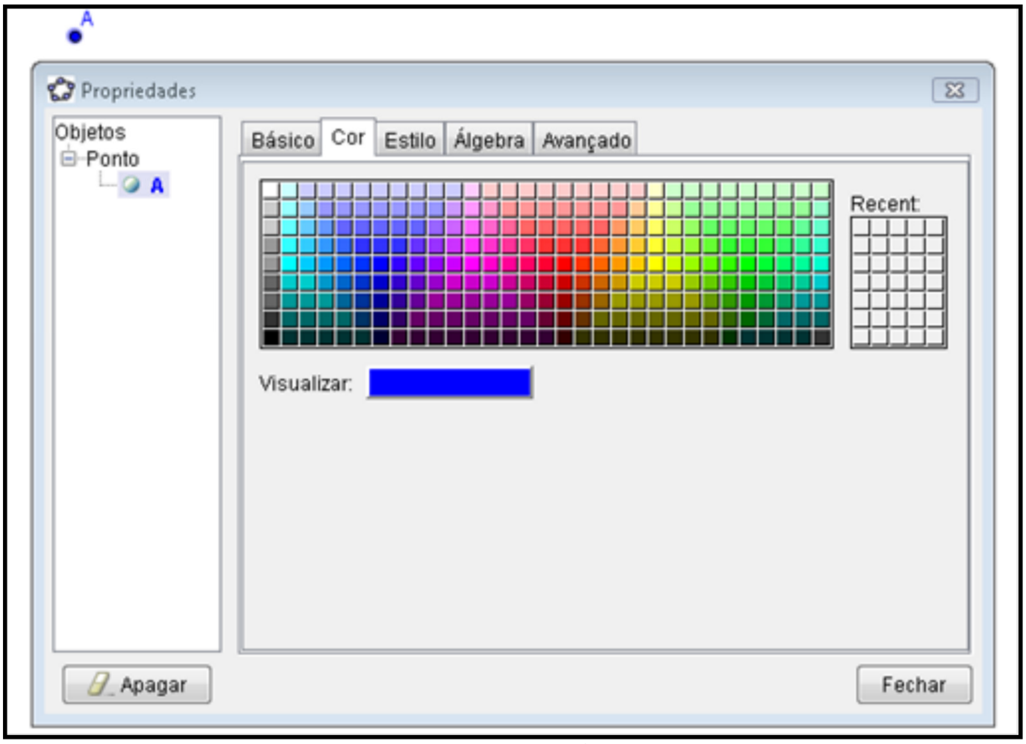


Figura 4: Aba Cor

II. Atividades utilizando os *applets* sobre Números Complexos

Esta seção contém atividades investigativas, elaboradas por Débora M. da Costa, Gilmara T. Barcelos e Silvia Cristina F. Batista, a serem realizadas com auxílio dos *applets*[27] sobre números complexos.

Atividade 1

No quadro da seção *Applets*, da Unidade de Aprendizagem sobre Números Complexos "Investigando em ₵", clique em "Plano Complexo" e determine o que se pede:

a) Marque as caixas que aparecem no *applet* e execute o que for solicitado.

b) Represente, no plano complexo do *applet*, a imagem dos números complexos $z_1 = 2 - 9i$, $z_2 = -1 + 4i$ e $z_3 = 2 + 6i$. Identifique e anote o quadrante a que cada um deles pertence.

Números complexos	**Quadrantes**
$\mathbf{z_1 = 2 - 9i}$	
$\mathbf{z_2 = -1 + 4i}$	
$\mathbf{z_3 = 2 + 6i}$	

c) Apresente um complexo z_4, cuja imagem seja representada no 3º quadrante do plano complexo (represente, no *applet,* a imagem do complexo apresentado): __________.

d) Complete os espaços abaixo com sinal de > ou <:

Se um complexo z = **a** + **b**i tem imagem representada no:

- 3º quadrante, então **a** ___0 e **b** ___0;
- 1º quadrante, então **a** ___0 e **b** ___0;
- 2º quadrante, então **a** ___0 e **b** ___0;
- 4º quadrante, então **a** ___0 e **b** ___0.

e) Um número complexo[28] z é um imaginário puro se a parte real de z é nula. Um número complexo é um número real se a parte imaginária de z é nula. Em cada item abaixo, apresente na forma algébrica um número complexo atendendo ao que se pede e represente a imagem deste, no plano complexo do *applet*: (Salve o arquivo contendo todos os pontos em "Meus documentos" nomeando-o "Atividade1")

---

[27] Os referidos *applets* foram desenvolvidos no âmbito do projeto de pesquisa Tecnologias de Informação e Comunicação no Processo de Ensino e Aprendizagem de Matemática, por Débora M. da Costa, bolsista de iniciação científica IFFluminense Campus Campos-Centro,
Gilmara T. Barcelos e Silvia Cristina F. Batista.

[28] Os números representados no eixo x são da forma (x, 0) = x + 0i= x, isto é, são números reais. Por esse motivo, o eixo x é chamado eixo real.
Os complexos representados no eixo y são da forma (0, y) = 0+ yi = yi. Esses complexos são chamados de números imaginários puros.
As coordenadas x e y, do complexo z = x + yi são chamadas respectivamente de parte real e parte imaginária de z. Escreve-se Re(z) = x e Im(z) = y. (LIMA et al, 2006, p. 161).

- um número imaginário puro, que tenha parte imaginária positiva: _______________.

- um número imaginário puro, que tenha parte imaginária negativa: _______________.

- um número real positivo: _______________.

- um número real negativo: ______________.

f) É possível que algum número imaginário puro tenha imagem representada fora do eixo das ordenadas? É possível que algum número real tenha imagem representada fora do eixo das abscissas? Justifique suas respostas.

____

____

g) Sem utilizar os recursos dos *applets*, nos itens i, ii e iii, determine m, sendo $m \in$ IR, a fim de que:

i) $z = 2 + (m - 4)i$ seja real

ii) $z = (2m - 6) + 4i$ seja imaginário puro

iii) $z = (2 + m) + (4 - m^2)i$ seja imaginário puro

h) Sem utilizar os recursos dos *applets*, considere $z = (4 - x, 2x - 3)$ e:

i) escreva z na forma algébrica

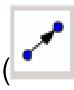
ii) determine $x \in$ IR para que se tenha $Re(z) > 0$

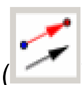
iii) determine x para que z seja um número real.

Atividade 2

Abra o *applet* "Adição de Complexos" (Adição de Comp.) e determine o que se pede:

a) Marque as caixas que aparecem no *applet* e execute o que for solicitado.

b) Considere um número complexo z_4, distinto de z_1, z_2 e z_3, e trace, no plano complexo do *applet*, o vetor que o representa. Para tanto, use o recurso "Vetor definido por dois pontos" (). Se desejar, indique junto ao vetor traçado, o seu rótulo z_4 e estabeleça uma cor para o mesmo, como explicado na seção II.

c) Represente o vetor correspondente à soma $z_1 + z_4$, traçando, inicialmente, o paralelogramo definido pelos vetores que representam z_1 e z_4. Para tanto, use o recurso "Vetor a partir de um ponto" (). Se desejar, indique junto ao vetor soma, o rótulo

$z_1 + z_4$ e estabeleça uma cor para o mesmo.

d) Salve o arquivo, em "Meus documentos" nomeando-o "Atividade2".

Atividade 3

Abra, novamente, o *applet* “Adição de Complexos” (Adição de Comp.) e determine o que se pede:

a) Marque as caixas que aparecem no *applet*.

b) Movimente o ponto que é a imagem de z_1, até que z_3 esteja sobre o eixo imaginário. O número complexo z_3 é imaginário puro ou um número real? Descreva o que você observou quanto à parte real de z_1 e z_2.

____

____

c) Movimente o ponto que é a imagem de z_2, até que z_3 esteja sobre o eixo real. O número complexo é imaginário puro ou um número real? Descreva o que você observou quanto à parte imaginária de z_1 e z_2.

____

d) Mova o ponto que é a imagem de z_1 até obter $z_1 = 3 + 2i$. Mova o ponto que é a imagem de z_2 até obter $z_2 = -3 – 2i$. Descreva o que observou quanto a z_3.

____

____

e) Mova o ponto que é a imagem de z_2 até obter $z_2 = 0 + 0i$. Descreva o que você observou quanto a $z_1 + z_2$.

____

____

Atividade 4

Abra o *applet* “Subtração de Complexos” (Sub. de Comp.) e determine o que se pede:

a) Marque as caixas que aparecem no *applet* e execute o que for solicitado.

b) Desmarque as caixas 2, 3, 4, 5 e 6.

c) Considere um número complexo z_5, distinto dos complexos apresentados na tela, e trace no plano complexo, o vetor que o representa (para tanto, proceda como no item b da atividade 2). Trace, também, o vetor que representa $– z_5$.

d) Construa o paralelogramo definido pelos vetores que representam z_1 e $– z_5$ (para tanto, proceda como no item c da atividade 2). A seguir, trace o vetor que representa a soma $z_1 + (-z_5)$, que é correspondente à subtração $z_1 – z_5$.

e) Salve o arquivo, em “Meus documentos” nomeando-o “Atividade4”.

Atividade 5

Abra, novamente, o *applet* “Subtração de Complexos” (Sub. de Comp.) e determine o que se pede:

a) Marque as caixas 1, 2 e 3 que aparecem no *applet*.

b) Movimente o ponto que é a imagem de z_1 até que z_3 represente um número imaginário puro. Descreva o que você observou quanto à parte real de z_1 e z_2.

____

____

c) Mova o ponto que é a imagem de z_2 até obter $z_2 = 0 + 0i$. Descreva o que você observou com relação a $z_3 = z_1 - z_2$.

____

____

d) Desmarque as caixas 2 e 3 e marque a caixa 5.

e) Movimente o ponto que é a imagem de z_2 até que z_4 represente um número real. Descreva o que você observou quanto à parte imaginária de z_1 e z_2.

____

f) Sem utilizar os recursos dos *applets* e considerando que $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -1 + 3i$ e $z_3 = 2 - 2i$, calcule $z_1 + z_2 - z_3$.

Atividade 6

Abra o *applet* “Adição de um número complexo com um real” (Adição com real) e determine o que se pede:

a) Marque as caixas que aparecem no *applet* e execute o que for solicitado.

b) Descreva o que você observou com relação à parte imaginária de z_1 e z_3.

____

c) Ao mover o ponto que representa a imagem de z_1 até obter $z_1 = -z_2$, que vetor representa a soma z_3?

____

d) Sendo z_1 um número complexo em que a parte real e a parte imaginária são diferentes de zero e z_2 um número real, é possível que $z_3 = z_1 + z_2$ seja um número real? É possível que z_3 seja um imaginário puro? Justifique suas respostas.

____

____

____

Atividade 7

Abra o *applet* "Adição de um número complexo com um imaginário puro" (Adição Im. Puro) e determine o que se pede:

a) Marque as caixas que aparecem no *applet* e execute o que for solicitado.
b) Descreva o que você observou com relação à parte real de z_1 e z_3.

____

c) Ao mover o ponto que representa a imagem de z_1 até obter $z_1 = - z_2$, que vetor representa a soma z_3?

____

d) Sendo z_1 um número complexo em que a parte real e a parte imaginária são diferentes de zero e z_2 um número imaginário puro, é possível que $z_3 = z_1 + z_2$ seja um número real? É possível que z_3 seja um imaginário puro? Justifique suas respostas.

____

____

____

e) Sem utilizar os recursos dos *applets*, determine **m**, **n** e **p** de modo que $z_1 + z_2 = z_3 - z_2$, $z_1 + z_3 = (5 , 4)$, $z_1 = (0 , m)$, $z_2 = (n - 2) + pi$ e $z_3 = 5 - (2m + 3n + 1)i$

Atividade 8

Abra o *applet* "Multiplicação de um número complexo por um escalar" (Mult. por escalar) e determine o que se pede:

a) Marque as caixas que aparecem no *applet* e execute o que for solicitado.
b) O que é possível afirmar sobre o comprimento, a direção e o sentido do vetor que representa z_2, em relação ao vetor que representa z_1, quando:

→ $0 < k < 1$

____

____

→ $k = 1$

____

____

→ $k > 1$

____

____

→ $k = -1$

____

____

→ $-1 < k < 0$

____

____

→ $k < -1$

____

____

c) Sem utilizar os *applets* e considerando que $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -1 + 3i$ e $z_3 = 2 - 2i$, calcule $3z_1 + \frac{1}{2} z_2 - 2z_3$.

Atividade 9

Abra o *applet* "Módulo e Conjugado" e determine o que se pede:

a) Marque as caixas que aparecem no *applet* e execute o que for solicitado.

b) Compare a parte real z com a de $\bar{z}$. Descreva o que você observou.

____

c) Compare a parte imaginária de z com a de $\bar{z}$ e descreva o que você observou.

____

d) Movimente o ponto P e observe z e o seu conjugado (canto superior esquerdo do *applet*). É possível que z seja igual ao seu conjugado? Em caso afirmativo, qual a condição para que isso ocorra?

____

____

f) Movimente o ponto P e observe o módulo de z e o do seu conjugado (canto superior esquerdo do *applet*). Descreva a relação entre o módulo de z e $\bar{z}$.

____

____

f) Sem utilizar os recursos dos *applets* e considerando que $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 3 + 5i$, calcule:

i) $z_1 + \overline{z_2}$

ii) $\overline{z_1 + z_2}$

g) Sem utilizar os recursos dos *applets*, determine o módulo dos seguintes números complexos:

i) $z = 2 + 3i$

ii) $z = \frac{2}{5}i$

iii) $z = -1 - 2i$

Atividade 10

Abra o *applet* “Forma Trigonométrica” (F. Trigonométrica) e determine o que se pede:

a) Marque as caixas que aparecem no *applet* e execute o que for solicitado.

b) Desmarque as caixas 4, 5 e 6 que aparecem no *applet.*

c) Movimente o ponto P, observe os valores de ρ e α apresentados no canto inferior esquerdo da tela, e escreva o número complexo na forma trigonométrica (z = $\rho(\cos\alpha + isen\alpha)$).

___

d) Sem utilizar os recursos dos *applets,* escreva na forma trigonométrica o número complexo z = 1 + $\sqrt{3}$.

e) Sem utilizar os recursos dos *applets,* escreva na forma algébrica o número complexo z = 2 $\left(\cos\frac{\pi}{4} + isen\frac{\pi}{4}\right)$.

Atividade 11

Abra o *applet* “Potências de i” e determine o que se pede:

a) Marque somente até a caixa 10 e descreva o que você observou.

___

___

b) Marque a caixa 11 e verifique se o que você descreveu no item anterior está de acordo com a teoria apresentada nessa caixa.

c) Sem usar os recursos dos *applets*, calcule i^{327} - i^{100}.

___

___

Atividade 12

Abra o *applet* “Multiplicação por unidade imaginária” (Mult. unidade Im.) e determine o que se pede:

a) Movimente os seletores que aparecem no *applet* e execute o que for solicitado.

b) Retorne todos os seletores ao ponto original. Movimente o ponto P para outro quadrante e execute, novamente, o que é solicitado no *applet*.

c) Descreva o que você observou com relação à multiplicação de um número complexo pela unidade imaginária (i).

___

___

d) Sem usar os recursos dos *applets,* determine i(-2 + 3i).

Atividade 13

Abra o *applet* “Divisão por unidade imaginária” (Div. unidade Im.) e determine o que se pede:

a) Movimente os seletores que aparecem no *applet* e execute o que for solicitado.

b) Retorne todos os seletores ao ponto original. Movimente o ponto P para outro quadrante e execute, novamente, o que é solicitado no *applet*.

c) Descreva o que você observou com relação à divisão de um número complexo pela unidade imaginária (i).

____

____

d) Sem usar os recursos dos *applets*, determine $\frac{-4+i}{i}$.

Atividade 14

a) Abra o *applet* “ Multiplicação na forma trigonométrica ” (Multiplicação trigonométrica). Marque as caixas que aparecem no mesmo e execute o que for solicitado. Por meio desse *applet*, é possível observar como se calcula a multiplicação de dois números complexos na forma trigonométrica.

b) Sem usar os recursos dos *applets* e considerando que $z_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i sen\frac{2\pi}{3}\right)$, $z_2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i sen\frac{\pi}{6}\right)$ e $z_3 = \cos\frac{\pi}{2} + i sen\frac{\pi}{2}$, determine $z_1 \,.\, z_2$ e $z_2 \,.\, z_3$.

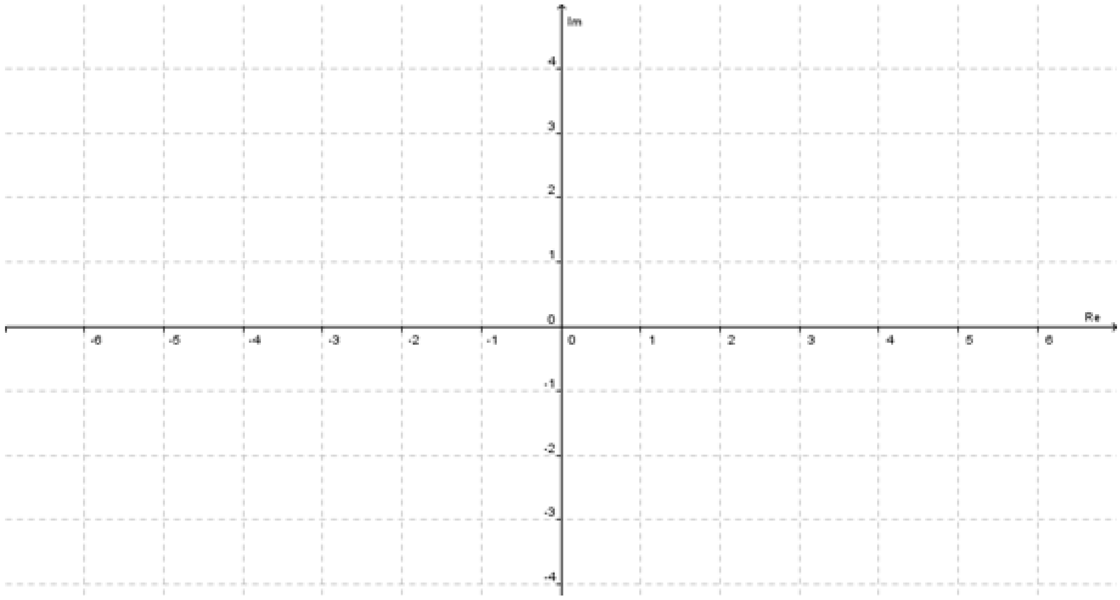
Atividade 15

a) Abra o *applet* “ Divisão na forma trigonométrica ” (Divisão trigonométrica). Marque as caixas que aparecem no mesmo e execute o que for solicitado. Por meio desse *applet*, é possível observar como se calcula a divisão de dois números complexos na forma trigonométrica.

b) Sem usar os recursos dos *applets* e considerando os complexos z_1, z_2 e z_3 da atividade 14, determine $\frac{z_1}{z_2}$ e $\frac{z_2}{z_3}$.

III. Atividades sem utilizar os *applets*

1) Represente, no plano de Argand–Gauss, os números complexos $z_1 = 1 + i$; $z_2 = -\sqrt{3} + i$; $z_3 = 4i$.

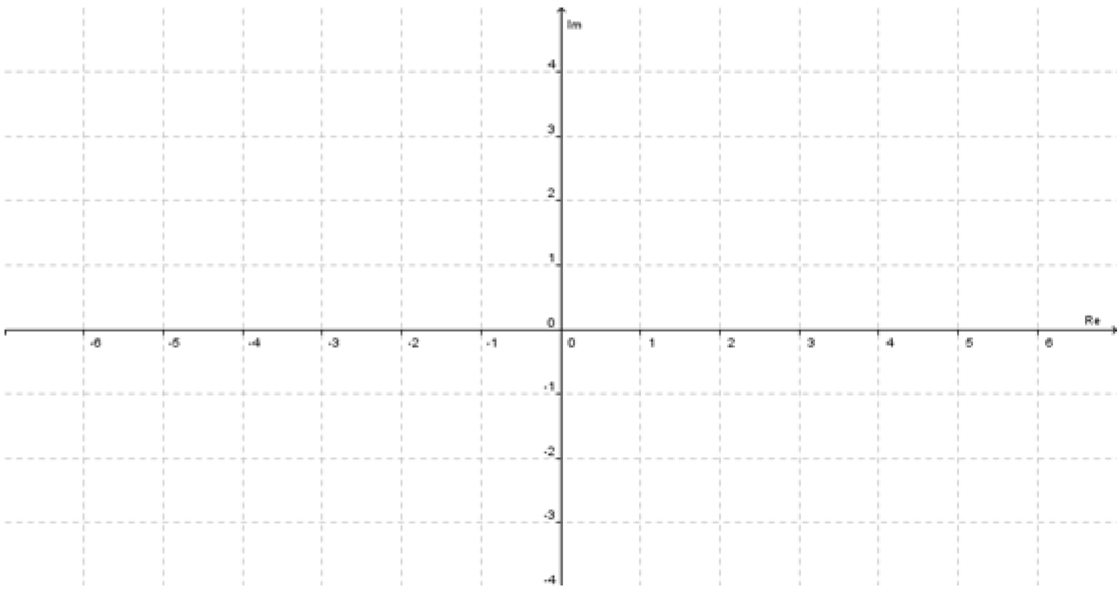


2) Determine os valores de *m*, $m \in$ IR, para os quais o número complexo :

a) $z_1 = 7 + (3m+12)i$ é real ;

b) $z_2 = (2m^2 - 18) + 5i$ é imaginário puro.

3) Sendo $z_1 = -4 + 2i$ e $z_2 = 2 - i$, represente, no mesmo plano complexo, z_1, z_2, $z_1 + z_2$ e $z_1 - z_2$.



4) Calcule o argumento dos números complexos:

a) $z = \sqrt{3} - i$

b) $z = 0,5 - 0,5i$

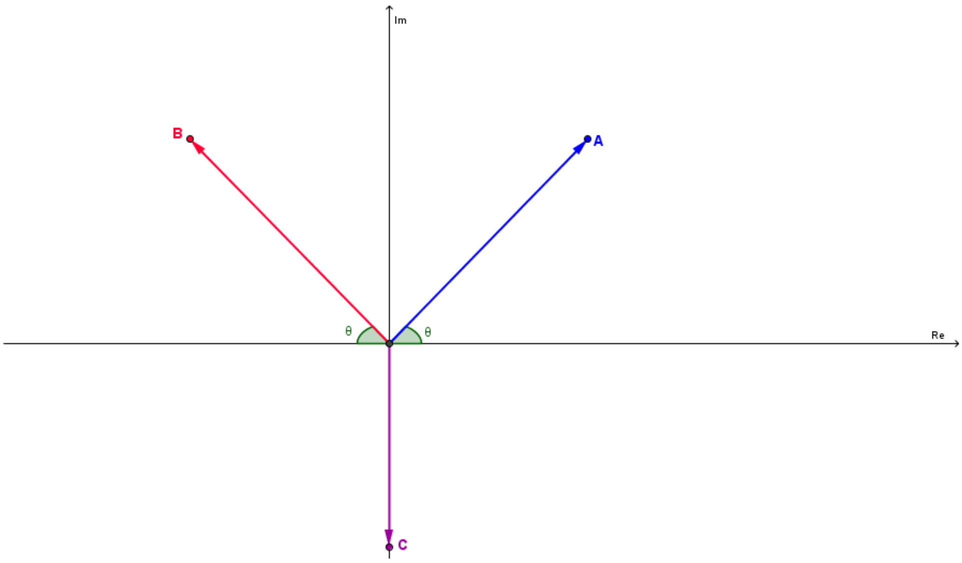
5) Sendo $z = 3 - 2i$ e $w = -5 + i$, calcule:

a) $| z - w|$

b) $| z . w|$

6) (FUVEST – SP) Determine os números complexos z tal que $z + \bar{z} = 4$ e $z \cdot \bar{z} = 13$, em que $\bar{z}$ é o conjugado de z.

7) (FATEC - SP) Na figura abaixo, os pontos A, B e C são imagens dos números complexos z_1, z_2 e z_3 , respectivamente, no plano de Argand-Gauss.



Se $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \sqrt{3}$ e $\theta = 60°$, então $z_1 + z_2 + z_3$ é igual a:

a) $(3 - \sqrt{3})i$

b) $3 - \sqrt{3}\,i$

c) $(3 + \sqrt{3})i$

d) $3 + \sqrt{3}\,i$

e) $3i - \sqrt{3}$

8) Determine as coordenadas do ponto A' obtida da rotação de 90°, no sentido anti-horário, do ponto A(3,4) em torno da origem.

9) Represente, no plano de Argand-Gauss, os números complexos da forma
$z = a + bi$ que satisfazem as condições:

a) $a > 2$ e $b = 3$

b) $a \geq 3$ e $b \leq 5$

10) Dados os complexos $z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$ e $z_2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$, calcule:

a) $\frac{z_1}{z_2}$

b) $z_1 \, . \, \overline{z_1}$

11) Dados os números complexos z = $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$ e w = $4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$, determine o produto z . w.

12) (UNESP 2007) Considere os números complexos w = 4 + 2i e z = $3a + 4ai$, onde a é um número real positivo e i indica a unidade imaginária. Se, em centímetros, a altura de um triângulo é | z | e a base é a parte real de z . w, determine a de modo que a área do triângulo seja 90 cm^2.

13) (FGV 2008) Os quatro vértices de um quadrado no plano Argand-Gauss são números complexos, sendo três deles 1 + 2i, - 2 + i e -1 - 2i. O quarto vértice do quadrado é o número complexo:

a) 2 + i
b) 2 – i
c) 1 - 2i
d) -1 + 2i
e) - 2 - i

14) (UFRS 2007) O argumento do número complexo z é $\frac{\pi}{6}$, e o seu módulo é 2.

Então, a forma algébrica de z é:

a) - i
b) i.
c) $\sqrt{3i}$
d) $\sqrt{3}$ - i
e) $\sqrt{3} + i$

15) (UNICAMP - SP) Um triângulo equilátero, inscrito em uma circunferência de centro na origem, tem como um de seus vértices o ponto do plano associado ao número complexo $\sqrt{3} + 1i$.

a) Que números complexos estão associados aos outros dois vértices do mesmo triângulo? Faça a figura desse triângulo.

b) Qual a medida do lado desse triângulo?

16) (FUVEST – SP - adaptado) Sendo o número complexo z = cos 48° + i sen 48° , determine o valor de $z^{10} + z^5 + 1$.

17) (U.F.SANTA MARIA - SP) A soma das raízes cúbicas do número complexo z = 8i é:

a) $-4i$
b) $-2\sqrt{3}\,i$
c) 0
d) $2\sqrt{3}\,i$
e) $4i$

18) Considere o número complexo $z = \cos\frac{\pi}{6} + i sen\frac{\pi}{6}$. O valor de $z^3 + z^6 + z^{12}$ é:

a) $-i$

b) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

c) $i - 2$

d) i

e) $2i$

19) O valor do número complexo $\left[\frac{1+i^9}{1+i^{27}}\right]^{20}$ é:

a) 1

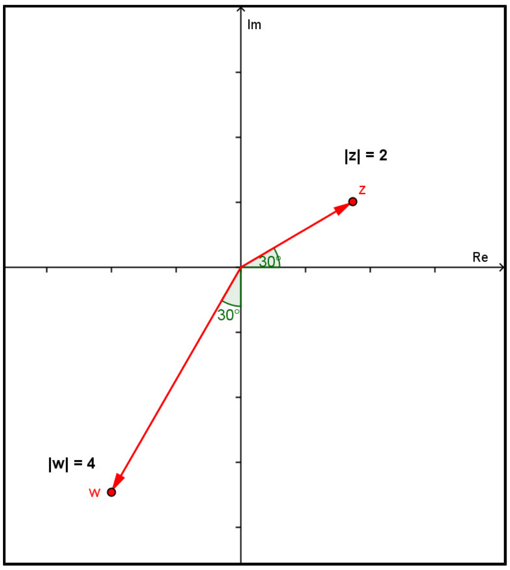
b) i

c) $-i$

d) -1

e) 2^{20}

20) (UFRJ 2009) No jogo *Batalha Complexa* são dados números complexos z e w, chamados *mira* e *alvo* respectivamente. O tiro certeiro de z em w é o número complexo t tal que $tz = w$.



Considere a mira z e o alvo w indicados na figura acima. Determine o tiro certeiro de z em w.

Referências Bibliográficas

CERRI C.; MONTEIRO M. S. *História dos Números Complexos* CAEM - Centro de Aperfeiçoamento de Ensino de Matemática Instituto de Matemática e Estatística da USP, 2001. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/~martha/caem/complexos.pdf> Acesso em: 19/12/2008.

MELLO, J. L. P. (Coordenador Técnico). *Matemática, Construção e Significado*. Volume Único. São Paulo: Editora Moderna, 2005.

MILIES, C. P. A Emergência dos Números Complexos. *Revista do Professor de Matemática (RPM)*. n. 24, p. 5-15. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 1993.

LIMA, E. L. Sobre a Evolução de Algumas Idéias Matemáticas. *Revista do Professor de Matemática (RPM)*. n. 06, p. 1-8. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 1985.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, C. A. *A Matemática do Ensino Médio*. v. 3. 6. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. p. 161.

Apêndice I: Apostila resolvida por um aluno