INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE
Campus Campos-Centro

Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

Ministério da Educação

GOVERNO FEDERAL BRASIL
PAÍS RICO É PAÍS SEM POBREZA

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

RAFAELA DOS SANTOS SOUZA MUNIZ

COORDENADAS POLARES NO ENSINO MÉDIO: CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA E NÚMEROS COMPLEXOS

CAMPOS DOS GOYTACAZES – RJ
2011

RAFAELA DOS SANTOS SOUZA MUNIZ

COORDENADAS POLARES NO ENSINO MÉDIO: CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA E NÚMEROS COMPLEXOS

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, como requisito parcial à conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Profª. Ms. Carla Antunes Fontes

CAMPOS DOS GOYTACAZES – RJ

2011

Dados de Catalogação na Publicação (CIP)

M966c Muniz, Rafaela dos Santos Souza.
Coordenadas polares no ensino médio: contribuições para o ensino e a aprendizagem de trigonometria e números complexos / Rafaela dos Santos Souza Muniz.- Campos dos Goytacazes, RJ : [s.n.], 2011.
114 f.; il.
Orientadora: Carla Antunes Fontes.
Monografia (Licenciatura em Matemática). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense. Câmpus Campos-Centro. Campos dos Goytacazes, RJ, 2011.
Bibliografia: f. 68 - 71.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Trigonometria. 3. Números complexos. I. Fontes, Carla Antunes, orient. II.Título.

CDD – 510.7

RAFAELA DOS SANTOS SOUZA MUNIZ

COORDENADAS POLARES NO ENSINO MÉDIO:
CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA
E NÚMEROS COMPLEXOS

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, como requisito parcial à conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovada em 22 de dezembro de 2011.

Banca Avaliadora:

____

Profª Carla Antunes Fontes (orientadora)

Mestre em Matemática / UFRJ

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos – Centro

____

Profª Ana Paula Rangel de Andrade

Especialista em Matemática / FAFIC

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos – Centro

____

Profª Carmem Lúcia Vieira Rodrigues Azevedo

Mestre em Economia Empresarial / UCAM

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos – Centro

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por ter conseguido chegar até aqui e vencer mais uma etapa em meu percurso, e também por dar condições a meus pais para que me educassem.

A meus pais, pela atenção, carinho e apoio em todas as fases da minha vida, possibilitando que eu conseguisse chegar ate aqui.

Ao meu namorado, que me incentivou em cada momento que pensei em desistir.

À minha orientadora Carla Antunes Fontes, que acreditou no meu potencial e estava comigo pelas manhãs bem cedinho, conversando, rindo, me orientando na monografia e para a vida.

À banca desta monografia, Ana Paula Rangel de Andrade e Carmem Lúcia Vieira Rodrigues Azevedo, que aceitaram participar deste trabalho de uma forma especial, dedicando-se à sua leitura e análise.

Aos meus professores, especiais e essenciais em minha formação.

Aos amigos, que sempre estiveram comigo em todos os momentos de “desespero”, e que nesta ocasião de mais uma etapa vencida, comemoram também esta alegria.

Aos colegas de trabalho, que me apoiaram durante todo o processo de realização desta monografia.

Aos participantes do teste exploratório, à turma em que apliquei a validação e sua professora regente, que disponibilizaram seu tempo.

Agradeço, enfim, a todos que contribuíram direta ou indiretamente para o sucesso obtido em mais esta etapa de minha vida.

RESUMO

Neste trabalho, o principal objetivo é contribuir para o ensino e a aprendizagem de Números Complexos. Vários autores pesquisados afirmam que as maiores dificuldades no estudo deste assunto surgem quando são necessários conceitos prévios de Trigonometria. Nos livros didáticos, tanto a Trigonometria quanto os Números Complexos são tratados de modo insatisfatório, sendo seu estudo predominantemente algébrico. Assim, buscou-se um elemento integrador, que permitisse abordar ambos os conteúdos. As Coordenadas Polares constituíram-se o aliado perfeito, pois poderiam ser utilizadas não só para revisitar a circunferência trigonométrica como para representar geometricamente um número complexo, destacando seu módulo e seu argumento principal. A introdução das Coordenadas Polares deu-se de forma bastante natural, e os alunos não demonstraram dificuldades em sua utilização. A representação geométrica do número complexo, que em geral é abordada de forma sucinta nos livros didáticos, facilitou sua compreensão, pois permitiu o trabalho tanto com transformações de tratamento como de conversão de um mesmo objeto matemático – o Número Complexo. Os pressupostos teóricos desta monografia apoiam-se em um tripé, composto pelas teorias da representação semiótica de Raymond Duval, da criação didática e da transposição didática, de Yves Chevallard. A análise de resultados é primordialmente atitudinal e qualitativa, como deve ocorrer em estudos de caso.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática. Trigonometria. Números Complexos. Coordenadas Polares.

ABSTRACT

POLAR COORDINATES IN HIGH SCHOOL: CONTRIBUTIONS TO TEACHING AND LEARNING OF TRIGONOMETRY AND COMPLEX NUMBERS

In this work, the main goal is to make teaching and learning of Complex Numbers easier. Thus, there were proposed activities to aid the comprehension of certain concepts of Trigonometry, particularly those which are crucial to the understanding of the trigonometric form of Complex Numbers. In text books, both Trigonometry and Complex Numbers are poorly treated, their study being mainly algebraic. In this sense, there was a search for an element of integration, which would allow the approach to both subjects. Polar coordinates constituted the perfect ally, because they could be used not only to revisit the trigonometric circle, but also to geometrically represent a Complex Number, focusing its absolute value and its main argument. The introduction of the polar coordinates system happened in a very natural way, and the students didn't show difficulties using it. The geometric representation of complex numbers, poorly treated in textbooks, made their comprehension easier, as long as it allowed the work with both treatment and conversion transformations of the same object – the Complex Number. This monograph's theoretical basis is supported by a tripod, composed by the theories of semiotic representations, by Raymond Duval, of didactical creation and of didactical transposition, by Yves Chevallard. The analysis is mainly attitudinal and qualitative, as it should be in case studies.

KEYWORDS: Mathematics Education. Trigonometry. Complex Numbers. Polar Coordinates.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Com base nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2000), pode-se afirmar que o ensino da Trigonometria é extremamente necessário, inclusive como desenvolvedor de habilidades e competências na aprendizagem de Matemática.

> Outro tema que exemplifica a relação da aprendizagem de Matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências é a Trigonometria, desde que seu estudo esteja ligado às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações para enfatizar os aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. (BRASIL, 2000, p. 44)

Mesmo com tal importância, os alunos ainda encontram obstáculos no estudo de Trigonometria. Diversos autores pesquisados são claros ao mencionar este fato. Francisco de Oliveira (2006, p.11), em sua dissertação de mestrado, relata que

> Em aproximadamente 18 anos de trabalho com turmas de oitava série e do Ensino Médio, observamos a dificuldade apresentada pelos alunos durante aulas de trigonometria, ou quando são abordados problemas a ela relacionados, ou mesmo problemas da física que usam algum conceito trigonométrico básico.

Klein (2008, p.1), escolheu a Trigonometria como tema de pesquisa

> [...] principalmente pela importância e relevância do conhecimento que encerra para a vida diária do estudante, mas também pelas dificuldades manifestadas pelos estudantes para compreendê-lo significativamente e, finalmente, pelo desafio de reverter os resultados negativos de aprendizagem nessa área de conhecimento.

Os problemas na aprendizagem de Trigonometria refletem-se no estudo de Números Complexos, a partir do momento em que se inicia sua escrita na forma trigonométrica ou polar. Araújo (2006, p.15) ressalta este fato ao comentar as dificuldades demonstradas pelos alunos, desde as perguntas feitas em sala de aula até o baixo rendimento em atividades avaliativas.

> [...] observamos que nossos alunos do segundo ano apresentam notáveis dificuldades durante as aulas referentes ao conteúdo de Números Complexos. Estas dificuldades se acentuam mais quando aparecem números representados na forma trigonométrica e em questões que envolvem a primeira e a segunda fórmula de De Moivre. (ARAÚJO, 2006, p. 15)

De acordo com Carneiro (2004, p.5), "Hoje em dia, é bastante claro, para todos os que trabalham com Matemática, o papel central que exercem os Números Complexos, e suas inúmeras utilidades." Apesar de sua relevância, o estudo dos Números Complexos é feito de forma rápida e sem sentido, pois “[...] baseia-se em uma abordagem puramente algébrica, onde estão ausentes o significado e as aplicações destes números.” (CARNEIRO, 2004, p. 1).

Lima (2001), ao analisar o “livro genérico”, demonstra sua insatisfação em relação à forma como ambos os temas (Trigonometria e Números Complexos) são tratados. Ele enfatiza o “tratamento demasiadamente longo” da Trigonometria e a “imperdoável ausência” de aplicações geométricas das operações entre Números Complexos. (LIMA, 2001, p. 464-467)

Segundo o mesmo autor, em grande parte do Brasil a única referência do professor para estudo ou preparação de aulas é o livro didático. (LIMA, 2001, p. 462) Uma das possíveis razões para o aparente 'descaso' em relação aos Números Complexos seja talvez a abordagem incipiente do “livro genérico”. Sentindo-se inseguro a respeito do tema, o professor o estuda superficialmente com os alunos.

Ao mesmo tempo, segundo Carneiro (2004, p. 1), "[...] há uma outra abordagem possível, a geométrica, onde desde o primeiro momento os complexos apresentam-se como pontos ou vetores do plano [...]".

Em tal "abordagem geométrica", porém, os alunos sentem dificuldade, pois há lacunas em Trigonometria que prejudicam sua compreensão. De acordo com Araújo (2006, p.70), quando se trata de Números Complexos, “A dificuldade do aluno na maioria das vezes refere-se à falta de conhecimento do conteúdo anterior, no caso, a Trigonometria.”.

Para o aluno, não ficam claros os vários registros do objeto Número Complexo, nem as transformações entre eles. A representação gráfica (à qual alguns autores se referem como *representação geométrica*) tem um papel muito importante neste contexto, pois a compreensão do objeto como um todo depende da coordenação de vários registros. (DUVAL, 2009, p. 38)

Ao mesmo tempo, o estudo de diferentes sistemas de coordenadas pode auxiliar a visualização das várias maneiras de representar o mesmo objeto, conforme as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006, p. 93).

No caso dos Números Complexos, as Coordenadas Polares podem ser utilizadas como auxílio à visualização, uma vez que sua escrita na forma trigonométrica é uma aplicação do sistema de Coordenadas Polares.

Da mesma forma, a circunferência trigonométrica pode ser abordada tanto sob o ponto de vista do sistema de coordenadas retangulares como polares.

A proposta deste trabalho é, portanto, a introdução do sistema de Coordenadas Polares como elemento facilitador do ensino e da aprendizagem de Números Complexos e Trigonometria.

A questão de pesquisa pode ser escrita:

"Como a introdução de Coordenadas Polares no Ensino Médio pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de Números Complexos e Trigonometria?"

O público alvo são alunos do 3º ano do Ensino Médio, que já estudaram Trigonometria e a forma algébrica dos Números Complexos.

A metodologia utilizada é o estudo de caso único explanatório, segundo Yin (2010).

1 BREVE HISTÓRICO

Neste capítulo, um pouco será dito sobre a história da Trigonometria e dos Números Complexos. Acredita-se que é importante, para quem estuda Matemática, saber como surgiu e evoluiu determinado conceito. O estudo histórico também é necessário para conhecer os obstáculos epistemológicos do processo de construção do saber matemático, que, segundo Pommer (2010), surgem da resistência a um novo conhecimento, fazem parte da construção do saber matemático e aparecem ao longo da história do desenvolvimento dos conceitos. A análise dos obstáculos enfrentados pelos matemáticos no passado auxilia na compreensão das dificuldades atuais dos alunos. (COSTA, 2003)

Cabe ressaltar que várias divergências foram encontradas, principalmente no que diz respeito à história da Trigonometria, entre os autores pesquisados. Optou-se por apresentar apenas os pontos comuns, sem discutir as demais questões, a fim de se ater ao objetivo do capítulo.

Foram utilizados como principais referências os textos de Boyer (1996), Eves (2008) e Garbi (2010), além dos citados em cada seção.

1.1 Trigonometria

A palavra *trigonometria* significa *medida de triângulos*, e é formada pelos vocábulos gregos *tri* (três), *gono* (ângulo) e *metrûm* (medida). Segundo consta, o criador do termo teria sido o matemático polonês Bartholomeo Pitiscus (1561-1613), que o utilizou pela primeira vez em 1595. (CARMO; MORGADO; WAGNER, 1992)

Antes de falar sobre seu surgimento, é preciso esclarecer o que será designado aqui por *Trigonometria.* Segundo Costa (2003), caso seja a ciência analítica estudada atualmente, esta surgiu no século XVII, depois do desenvolvimento do simbolismo algébrico. Porém, referindo-se à geometria aplicada à Astronomia, os trabalhos de Hiparco no século II a.C. marcaram seu aparecimento — embora existam sinais anteriores de seu uso pelos egípcios, babilônios e chineses. Adotando o significado literal, *medidas do triângulo*, seu início remonta ao segundo ou terceiro milênio antes de Cristo. Será suficiente comentar algumas etapas de seu desenvolvimento, desde a época de Hiparco até sua afirmação como ciência independente da Astronomia.

De acordo com Moreira (2005), a Trigonometria não surgiu a partir de problemas exclusivamente matemáticos, como se poderia supor. Sua origem é incerta, mas os estudos do astrônomo grego Hiparco de Niceia (em torno de 120 a.C.) são um marco em seu desenvolvimento.

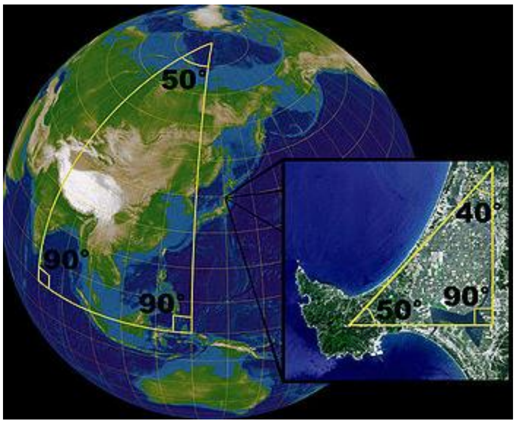
Influenciado pela Matemática dos babilônios, Hiparco acreditava que a melhor base de contagem era a 60. Não se sabe ao certo quando se difundiu a divisão da circunferência em 360 partes iguais, mas parece que a ideia partiu dele, assim como a denominação *arco de 1 grau* para cada parte em que a circunferência ficou dividida. Deve-se a Hiparco, ainda, a divisão do arco de 1º em 60 partes iguais, obtendo o arco de 1 minuto, e a associação de cada arco de uma circunferência de raio arbitrário à corda delimitada por ele.

Hiparco construiu o que foi provavelmente a primeira tabela trigonométrica, com os valores das cordas associadas a uma sequência de arcos de 0º a 180º. Ele observou que a razão entre as medidas do arco e da corda diminui quando o valor do arco decresce de 180º para 0º. Passou então a associar cada corda de um arco ao ângulo central correspondente, o que representou um grande avanço na Astronomia. Isto lhe valeu o título de *Pai da Trigonometria*.

Com o passar do tempo, outros estudiosos, como Ptolomeu (120-150 d.C.), deram prosseguimento a seu trabalho. Este astrônomo grego escreveu o *Almagesto* – "A maior" (*Al magest*), considerado pelos tradutores árabes a mais importante obra da Trigonometria da Antiguidade, com treze volumes. O modelo de Astronomia nele contido prevaleceu até o século XVI.

No século III, os indianos e os árabes introduziram a Trigonometria esférica, cujo objetivo principal era o estudo das relações entre lados e ângulos de um triângulo desenhado sobre uma superfície esférica. A **Ilustração 1**, a seguir, mostra um triângulo esférico desenhado sobre a superfície da Terra, e outro, sobre uma região terrestre 'pequena' o suficiente para ser considerada plana.

Ilustração 1 – Figura: Triângulo esférico e triângulo plano



Fonte: Santos, 2009, p. 29.

As *fórmulas fundamentais* da Trigonometria plana conhecidas hoje são devidas aos matemáticos hindus dos séculos V a XII. Entre eles, destaca-se um astrônomo indiano do século VI, Aryabhata, que associou o valor de um ângulo central à medida da corda determinada por ele na circunferência, elaborando uma tabela de valores do dobro do seno (esta nomenclatura ainda não existia). O estudo das razões trigonométricas em triângulos retângulos foi desenvolvido depois que os matemáticos árabes traduziram as obras deixadas pelos hindus e estabeleceram, para qualquer triângulo, a lei dos senos.

No século XIII, o astrônomo persa Nasir Eddin Al-Tusi (1201-1274) reuniu todos os resultados conhecidos na *Trigonometria* da época, tanto de origem grega quanto de origem indiana e árabe, em seu *Tratado sobre o Quadrilátero*. Pela primeira vez, a Trigonometria foi tratada como ciência dissociada da Astronomia.

Sua introdução na Europa Ocidental deveu-se aos árabes, tendo se iniciado com a tradução dos manuscritos clássicos.

No século XV, a publicação de uma introdução completa, escrita por Johaness Müller, um astrônomo prussiano mais conhecido por Regiomontano (1436-1476), estabeleceu a Trigonometria como um ramo da Matemática. Nesta obra, *Tratado sobre triângulos*, havia, por exemplo, a *Lei dos senos* aplicada a triângulos esféricos.

Já no século XVI, François Viète (1540-1603) estabeleceu várias relações trigonométricas associando-as às soluções complexas de equações do 3º grau, o que criou um elo entre Trigonometria e Álgebra. Introduziu também novos teoremas que permitiram relacionar lados e ângulos de triângulos não retângulos.

No século XIX, a Trigonometria atingiu seu ponto máximo, ligando-se à Análise através das séries. Hoje, é usada em muitas outras ciências, como na Física, para decomposição de forças, que são grandezas vetoriais; no cálculo de ângulos de refração e de reflexão, etc. É indispensável também em topografia, cartografia e, claro, na astronomia.

1.2 Números Complexos

Segundo Cerri (2001, p.1), os Números Complexos surgiram no século XVI, da necessidade de resolver equações algébricas de 3º e 4º graus, quando Cardano e Tartaglia disputavam o crédito por sua resolução. (Girolamo Cardano, 1501-1576 e Niccolo Tartaglia, pseudônimo de Niccolo Fontana, 1499-1557, matemáticos italianos. Tartaglia significa *gago*, e Fontana adotou tal pseudônimo por ter um defeito na fala, o que lhe rendeu o apelido.)

Tudo começou quando, por volta de 1510, Scipione del Ferro, matemático italiano (1465-1525, aproximadamente), começou a estudar as equações de 3º grau, encontrando a fórmula para a solução de

$$\boldsymbol{x}^3 + \boldsymbol{px} + \boldsymbol{q} = 0.$$

O fato é que Del Ferro faleceu antes de publicá-la, e após sua morte, seu aluno Antonio Maria Fior, sobre o qual não se tem muitas informações, 'apoderou-se' de tal descoberta e propôs a Niccolo Fontana, também conhecido como Tartaglia, um desafio: resolver tal tipo de equação. Tartaglia não só a resolveu, como descobriu também uma solução geral para equações do tipo

$$\boldsymbol{x}^3 + \boldsymbol{px}^2 + \boldsymbol{q} = 0.$$

Girolamo Cardano, que pouco tinha em comum com Tartaglia além da nacionalidade, nessa época estava escrevendo a *Pratica Arithmeticae Generalis,* que versava sobre Álgebra, Aritmética e Geometria. Quando soube que Tartaglia havia descoberto a solução geral da equação de 3º grau, tentou convencê-lo a compartilhar com ele a descoberta, para publicá-la em seu próximo livro, assegurando-lhe o devido crédito.

De início, Tartaglia resistiu às investidas de Cardano, pois pretendia ele mesmo publicar a solução das cúbicas, a fim de alcançar certa reputação como matemático. Mas, quando este acenou com a possibilidade de conseguir-lhe um patrono, e tendo ele poucos recursos, Tartaglia acabou revelando-a para Cardano, mediante a promessa de jamais publicá-la.

Confirmando os temores de Tartaglia, Cardano quebrou seu juramento e publicou em 1545, na *Ars Magna*, a fórmula de Tartaglia, que até hoje é conhecida como 'Fórmula de Cardano', ou 'Fórmula de Cardano-Tartaglia'. A dedução da fórmula usando os símbolos atuais da álgebra encontra-se em Vassallo Neto (2010, p.31-33), e faz parte do **Anexo**. Não serão feitas demonstrações aqui, pois o objetivo é examinar um pouco da história dos Números Complexos, expondo os inúmeros obstáculos vivenciados até sua aceitação pela comunidade matemática.

Voltando então ao tema, no processo de busca da solução para as cúbicas, os matemáticos italianos 'esbarraram' em raízes quadradas de números negativos. Isto aconteceu porque, para testar suas resoluções, eles usavam equações das quais conheciam pelo menos uma raiz. Por exemplo,

$$\boldsymbol{x}^3 + 4 = 6\boldsymbol{x}$$

tem $\boldsymbol{x} = 2$ como raiz. A partir daí, a substituição

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \frac{2}{\boldsymbol{u}}$$

que acredita-se ter sido idealizada por Scipione Del Ferro, transforma a equação em

$$\boldsymbol{u}^6 + 4\boldsymbol{u}^3 + 8 = 0.$$

Encontrando uma solução desta biquadrada, o valor correspondente de $\boldsymbol{x}$ seria solução da equação original. Ao resolvê-la, porém, havia uma 'surpresa':

$$\boldsymbol{u}^6 + 4\boldsymbol{u}^3 + 8 = 0$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^3$$

$$\boldsymbol{v}^2 + 4\boldsymbol{v} + 8 = 0$$

O discriminante da equação de 2º grau encontrada era negativo, o que levaria, pela aplicação da fórmula tradicional, a $\boldsymbol{v} = -2 + 2\sqrt{-1}$ ou $\boldsymbol{v} = -2 - 2\sqrt{-1}$.

> Um impasse. O "pulo do gato" consistiu em ir em frente assim mesmo, apesar de $\sqrt{-1}$ "não fazer sentido". E se supuséssemos que esta "coisa imaginária" satisfizesse às leis usuais da Álgebra? Constataríamos então que $\boldsymbol{u} = 1 + \sqrt{-1}$ seria uma solução, pois as leis usuais da Álgebra acarretam que $\boldsymbol{u}^3 = \left(1+\sqrt{-1}\right)^3 = -2 + 2\sqrt{-1}$. Por outro lado, estas mesmas leis garantem também que a substituição $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + 2/\boldsymbol{u} = 2$ reproduz a raiz que já se conhecia, provando que o esquema funcionava, embora ninguém conseguisse explicar por que. Como dizia o próprio Cardano na *Ars Magna*:

> "esqueça a tortura mental que isto significa e vá operando...". (CARNEIRO, 2004, p. 3-4 – grifo do autor)

Segundo Cerri (2001, p. 4), Rafael Bombelli (1526-1572), também italiano, chegou aos "novos números" em 1572, no livro *L'Algebra parte maggiore dell'Arithmetica,* propondo que

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} \text{ e } \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}\text{, raízes da equação}$$

$$\boldsymbol{x}^3 - 15\boldsymbol{x} - 4 = 0$$

(que possuía uma raiz conhecida, $\boldsymbol{x} = 4$), fossem reescritos como

$$\boldsymbol{a} + \sqrt{-\boldsymbol{b}} \text{ e } \boldsymbol{a} - \sqrt{-\boldsymbol{b}}\text{, respectivamente, onde } \boldsymbol{b} > 0.$$

O desenvolvimento de Bombelli, que pode ser encontrado em Vassallo Neto (2010, p. 34-35), também faz parte do **Anexo**, pelas mesmas razões mencionadas anteriormente neste trabalho.

Após Bombelli, outros matemáticos, como o francês Abraham de Moivre (1667-1754) e os irmãos Jacques e Jean Bernoulli (1654-1705 e 1667-1748, respectivamente), contribuíram para o avanço da teoria dos Números Complexos.

Segundo Vassallo Neto (2010), François Viète (1540-1603), ainda na segunda metade do século XVI, encontrou na Trigonometria a solução do problema da equação $\boldsymbol{x}^3 - 15\boldsymbol{x} - 4 = 0$, com raiz real $\boldsymbol{x} = 4$, mas que quando resolvida pela fórmula de Cardano, levava a raízes quadradas de números negativos. Substituindo $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{cos}(\theta)$, chegou à solução da equação sem utilizar raízes quadradas de números negativos. Viète se destacou ao integrar estes números aos conceitos trigonométricos.

Na primeira metade do século XVII, Pierre de Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650), simultânea e independentemente, criaram a Geometria Analítica. Fermat não publicou suas ideias. Descartes, ao contrário, em seu livro *Discurso Sobre o Método de Bem Utilizar a Razão e de Encontrar a Verdade nas Ciências*, publicado em 1637, escreveu *La Geometrie*, considerado pedra fundamental da Geometria Analítica.

Com o domínio da Geometria Analítica, Descartes retomou o estudo das equações algébricas, sobre as quais escreveu: "Nem sempre as raízes verdadeiras (positivas) ou falsas (negativas) de uma equação são reais. Às vezes elas são imaginárias." Por isso, $\sqrt{-1}$ foi chamado de *número imaginário*, nomenclatura que permanece até hoje. (CERRI, 2001, p.5-6)

Foi Leonhard Euler (1707-1783), porém, que fez o trabalho mais importante e decisivo sobre o assunto. Dentre inúmeras contribuições, Euler se esforçou para melhorar a simbologia. Muitas das notações utilizadas atualmente foram introduzidas por ele, como a substituição de $\sqrt{-1}$ por $\boldsymbol{i}$ e a escrita dos Números Complexos na forma $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}$.

> Assim a fórmula de Tartaglia nos fornece todas as soluções de equações do tipo $\boldsymbol{x}^3 + \boldsymbol{px} + \boldsymbol{q} = 0$, ou seja, Tartaglia embora não soubesse, estava resolvendo de forma total as equações de grau 3. Bombelli deu o primeiro passo para a compreensão das questões que surgiram em seguida, mas foi Euler que desvendou completamente o mistério. Por tudo isto e muito mais é que Euler é conhecido como o matemático que dominou os Números Complexos. (CERRI, 2001, p. 11)

No final do século XVIII e no início do século XIX, segundo Carneiro (2004), um norueguês e um suíço, Caspar Wessel, em 1798 e Jean Robert Argand, em 1806, respectivamente, foram os primeiros a perceber que os Números Complexos poderiam ser representados como pontos ou vetores do plano. Porém, a ideia só foi aceita quando endossada por Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Assim, apesar dos Números Complexos terem surgido no século XVI, podemos dizer que estes “novos números” só foram aceitos centenas de anos depois, quando Gauss associou o conjunto dos Números Complexos ao plano, e principalmente usou

> [...] os complexos para obter diversos resultados sobre Geometria plana e sobre os números reais, e até sobre os números inteiros. [...] Foi utilizando o plano complexo que Gauss deu sua demonstração geométrica de que todo polinômio de coeficientes reais pode ser decomposto em fatores de grau máximo dois, o que equivale ao Teorema Fundamental da Álgebra. (CARNEIRO, 2004, p. 5)

Desde seu surgimento, os Números Complexos haviam sido usados de forma envergonhada e acompanhados de nomes que traduziam a desconfiança que girava em torno do assunto – *imaginários* e *complexos* – mas ainda assim eram cada vez mais utilizados.

A ideia de considerar as partes real e imaginária de $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}$ como as coordenadas retangulares de um ponto do plano deixou os matemáticos mais à vontade com esses números. A representação gráfica superou o desconforto inicial causado por $\sqrt{-1}$. “Ver é crer, e ideias anteriores sobre a não existência e o caráter fictício dos números imaginários foram geralmente abandonadas.” (EVES, 2008, p.524). Os Números Complexos poderiam, enfim, ser manipulados efetivamente.

"Assim, a representação dos Números Complexos como pontos de um plano supera os obstáculos da existência destes números e abre caminho para novas discussões e representações." (VASSALLO NETO, 2010, p. 41)

Por tudo o que foi exposto, neste trabalho considera-se de fundamental importância para a compreensão do objeto matemático Número Complexo, o estudo de sua representação no plano.

2 LIVROS DIDÁTICOS E DIFICULDADES DE ENSINO E APRENDIZAGEM

Inicialmente, havia-se subdividido este capítulo em três seções: *Livros didáticos*, *Dificuldades de ensino* e *Dificuldades de aprendizagem*. Porém, no decorrer da pesquisa, percebeu-se que a abordagem do livro didático influencia tanto as dificuldades de ensino quanto de aprendizagem em sala de aula, e que ambas estão interligadas. Há, por outro lado, dificuldades inerentes ao assunto, ou seja, *dificuldades específicas*, que precisam ser destacadas. Estas serão tratadas na primeira seção, enquanto a segunda se ocupará dos obstáculos da sala de aula, gerados ou não pelo livro didático.

2.1 Dificuldades Específicas

Existe uma dificuldade intrínseca ao conteúdo de Números Complexos, que é o fato de não representarem quantidades. Isto, por si só, já suscita inquietação e desconfiança em professores e alunos. (ROSA, 1998, p. 25) Em 2009, Walter Spinelli fez a mesma observação.

> A grande indignação dos alunos de Ensino Médio, e também de muitos professores, quando do estudo dos Números Complexos (não Reais) refere-se ao fato de que esse tipo de número não se adequa a nenhuma das necessidades pertinentes a seu cotidiano. Afinal, Números Complexos não exprimem resultados de contagens e nem representam quantidades; além disso, não faz muito sentido ordená-los, e usá-los como elemento básico de codificação é, no mínimo, estranho. Assim, de acordo apenas com os usos que os alunos conhecem até então, um complexo não mereceria receber o título de "número". (SPINELLI, 2009, p. 4)

Isto é compreensível, remetendo-se ao breve histórico feito no capítulo anterior. Vários obstáculos epistemológicos, baseados em paradigmas preexistentes, tiveram que ser superados até que os Números Complexos fossem aceitos pela comunidade científica como objetos matemáticos legítimos.

Segundo Pommer (2010, p. 1),

> Os obstáculos de origem epistemológica se devem às resistências advindas do próprio conhecimento e que fazem parte da construção do saber matemático, sendo encontrados na história do desenvolvimento e evolução dos conceitos. [...] estes obstáculos não podem ser evitados, já que se constituem como porta de acesso aos respectivos conhecimentos.

Ao terminar o Ensino Fundamental, o aluno tem a nítida impressão de que não existem raízes quadradas de números negativos, mesmo que o professor tenha o cuidado de dizer que uma equação de 2º grau de discriminante negativo não possui raízes *reais*. Isso porque a palavra *real*, para ele, significa *algo que existe*, e não um elemento do conjunto dos números reais. Ao se defrontar com os Números Complexos, o aluno sente-se *enganado*. Como é que, de repente, aquilo que não existia simplesmente passou a existir? O conhecimento dos números reais, ao mesmo tempo em que é necessário para a compreensão dos Números Complexos, pode também se constituir um obstáculo para sua aprendizagem. Este é um *obstáculo didático*. (ROSA, 1998, p.35; LOPES, 2011, p. 3)

> [...] os obstáculos didáticos nascem da escolha das estratégias do ensino, deixando-se formar, no momento da aprendizagem, conhecimentos errôneos ou incompletos que se revelarão mais tarde como obstáculos ao desenvolvimento da conceituação. Reconhecer um obstáculo permite ao professor rever sua primeira apresentação do conceito em questão, para explicitar melhor a dificuldade vivida pelo aluno. (ROSA, 1998, p.35)

A dificuldade de abstração que envolve o conceito de *unidade imaginária* também é observável historicamente. Na verdade, somente quando associada ao ponto (0; 1) do plano de Argand-Gauss, passou a ser aceita como objeto matemático legítimo. Houve a necessidade de visualização, por meio da representação gráfica. No ensino de Números Complexos, se esta representação gráfica for omitida, ou apresentada tardiamente, é provável que a mesma dificuldade de abstração que atravessou séculos seja enfrentada pelos alunos. (LOPES, 2011, p. 3)

2.2 A sala de aula e os livros didáticos

Ao mencionar análise de livros didáticos, de imediato vem à mente o clássico *Exame de textos*, de Elon Lages Lima (LIMA, 2001). No *Posfácio*, o autor comenta o que ele chama de *livro genérico*, reunindo características comuns às doze coleções analisadas na obra. Externa ali sua insatisfação com a forma pela qual os temas Trigonometria e Números Complexos são tratados.

> **Trigonometria**. Tratamento demasiadamente longo, com ênfase em trivialidades, omissões importantes, conceitos mal definidos e ausência de problemas contextuais atraentes. O radiano é mal definido, as calculadoras não são enfatizadas e nunca é claramente

> exposta a diferença entre o seno (por exemplo) de um ângulo e seno de um número. (LIMA, 2001, p. 464)
> [...]
> **Números Complexos**. A aritmética dos Números Complexos não apresenta dificuldades. A conexão com a Geometria, porém é deficiente, o que é estranho pois a Geometria Analítica acabou de ser estudada. É mais um exemplo de falta de conexão entre os capítulos. As aplicações geométricas das operações entre complexos (principalmente a multiplicação), tão belas como variadas, não são exploradas. Isso é imperdoável pois todo matemático ou usuário da Matemática, ao pensar em número complexo, sempre o imagina como um ponto no plano coordenado e as operações são interpretadas como transformações geométricas. (LIMA, 2001, p. 467)

Pesquisas posteriores mostram que, infelizmente, muitos dos aspectos negativos destacados por Lima persistem até hoje.

Nanci Araújo (2006), em sua dissertação de mestrado, analisou a abordagem de Números Complexos em dez livros didáticos frequentemente adotados ou indicados para estudo por professores do Ensino Médio. Em geral, tais livros apresentam o conteúdo tentando resolver uma equação do 2º grau de discriminante negativo. Em seguida, declaram que o conjunto dos números reais foi ampliado para resolver estes tipos de problema, substituem $\sqrt{-1}$ por $\boldsymbol{i}$ e definem o conjunto dos Números Complexos. Não há menção ao contexto histórico nem à resolução de cúbicas. Alguns sequer apresentam o número complexo na forma de par ordenado.

Segundo ela, de acordo com a amostra escolhida, o livro "não oferece condições para o professor elaborar e organizar suas aulas, nem [...] motivações para o aluno desenvolver seus conhecimentos prévios." (p. 74)

> Tudo isso nos leva a refletir que falta clareza no conteúdo apresentado para que o aluno possa melhor compreender o assunto e seu significado nos textos didáticos, uma vez que, os Números Complexos foram criados para atender a determinados propósitos. Eles têm seus significados, os quais são muitos bem definidos.
> Tomando como fundamento o levantamento feito pela análise apresentada, entendemos que os livros didáticos não têm motivado a aprendizagem do nosso aluno, em relação aos Números Complexos. (ARAÚJO, 2006, p. 74)

Em entrevista realizada pela mesma autora com vinte professores de Matemática do Ensino Médio, os entrevistados apontaram suas duas maiores dificuldades ao ensinar Números Complexos: o livro didático, pois as pesquisas realizadas para a preparação das aulas estão nele baseadas, e a falta de conhecimento dos alunos em Trigonometria.

Tudo o que foi exposto até agora está em consonância com o que afirma Lima (2001), sobre a importância do livro didático não só para o aluno, como para o professor:

> [...] o livro didático é, na maioria dos casos, a única fonte de referência com que conta o professor para organizar suas aulas, e até mesmo para firmar seus conhecimentos e dosar a apresentação que fará em classe. Assim, é necessário que esse livro seja não apenas acessível e atraente para o aluno, como também que ele constitua uma base amiga e confiável para o professor, induzindo-o a praticar os bons hábitos de clareza, objetividade e precisão, além de ilustrar, sempre que possível, as relações entre a Matemática e a sociedade atual. (LIMA, 2001, p.1)

Desta forma, quando o livro didático dificulta o trabalho com determinado assunto, o professor tende a deixá-lo de lado ou tratá-lo superficialmente, já que não se sente à vontade para explorá-lo. Por outro lado, tampouco o aluno tem motivação para estudá-lo.

Spinelli (2009, p.4) faz uma ponderação muito pertinente acerca do que é usualmente estudado sobre Números Complexos em sala de aula.

> Boa parte do tradicional estudo dos Complexos no Ensino Médio fica restrita ao tratamento das operações entre eles, de modo semelhante ao qual é submetida a criança quando, na educação infantil, começa a tomar contato com as operações entre números naturais. Se o estudo das operações pelas crianças, nesse caso, ocorre sobre o contexto de suas práticas cotidianas – contagem de pontos nos jogos, cálculo do troco na cantina etc – vale refletir sobre qual contexto se desenvolve o estudo das operações entre complexos no nível médio.

Reis Neto (2009), ao analisar a abordagem de Números Complexos em três livros didáticos de autores renomados, lançados a partir de 2005, concluiu que

> Nos três livros escolhidos para análise foi observado que a geometria dos complexos é pouco explorada tanto sob o ponto de vista teórico como nas aplicações.
> Os exercícios são resolvidos através da verificação de fórmulas e voltados para o treinamento de cálculos que deixam o aluno apenas com uma visão formal e algébrica.
> Não há questões que estimulem a visão geométrica ou a criatividade e não há preocupação em fazer a conexão entre o conteúdo já conhecido e o conteúdo dos Números Complexos e assim buscar uma apresentação significativa para motivar o aluno. (REIS NETO, 2009, p. 43)

Isto acontece tanto em Números Complexos quanto em Trigonometria. Pereira (2010) ressalta que o ensino de Trigonometria

> [...] sempre apresentou deficiências, entre as quais destacamos a extensão do programa; o pouco ou quase nenhum domínio dos alunos de conhecimentos prévios importantes como o estudo da circunferência e seus elementos, de semelhança de triângulos e de simetria; a pouca afinidade dos professores com o conteúdo, sua história e sua aplicação em diversas áreas do conhecimento humano. (PEREIRA, 2010, p.4)

Vários autores pesquisados falam sobre a dificuldade dos alunos em Trigonometria, que termina por refletir-se no estudo dos Números Complexos. Oliveira (2006) e Klein (2008) são dois deles, e relatam as dificuldades apresentadas pelos alunos em sala de aula, observadas ao longo de muitos anos de magistério.

Conforme Pereira (2010), um agravante é o fato do programa de Trigonometria ser bastante extenso e cumulativo, começando em geral no 9º ano, pela Trigonometria no triângulo retângulo, onde se estudam seno, cosseno e tangente de um ângulo menor do que 90º. Nesta introdução, normalmente não há grandes problemas de aprendizagem.

Quando tais conceitos são retomados no Ensino Médio, e estendidos para ângulos maiores ou iguais a 90º, utilizando a circunferência unitária, surgem dificuldades de várias ordens. A definição de *radiano* não é bem compreendida, no sentido de que o aluno não sabe por que ele é necessário.

Segundo Quintaneiro, Giraldo e Pinto (2010, p. 1-2), os livros didáticos introduzem as noções de seno e função seno de diferentes maneiras, e nem sempre conceitos tratados em um mesmo volume são "consistentes entre si, do ponto de vista matemático ou do ponto de vista pedagógico". É comum passar de senos e cossenos de grandezas angulares às funções seno e cosseno de números reais sem maiores explicações.

> Alguns autores mencionam as palavras arco e ângulo sem qualquer distinção, sem deixar claro que a unidade radiano pode expressar uma medida linear (comprimento do arco subentendido pelo ângulo).
> Nesse tipo de abordagem, são omitidas algumas questões importantes, tais como: *Por que o uso da unidade radiano é necessário? Como é possível que um mesmo conceito matemático possa ser definido de formas diferentes?* (QUINTANEIRO; GIRALDO; PINTO, 2010, p. 2, grifo do autor)

Além disso, o comportamento de seno e cosseno em cada quadrante, os arcos côngruos e a simetria existente em relação aos eixos coordenados ou à origem do sistema cartesiano na redução ao 1º quadrante não ficam claros para o aluno, e ele passa a memorizar ao invés de compreender. O livro didático, por sua vez, traz exercícios mecânicos, que não estimulam o raciocínio.

Logo em seguida é feito o estudo das funções, equações e inequações trigonométricas, bem como das identidades de seno, cosseno e tangente da soma ou subtração de arcos. As demonstrações das identidades são geralmente omitidas, e o aluno se vale de recursos mnemônicos para decorá-las.

Quintaneiro (2010, p. 2), ao analisar um questionário aplicado a um grupo de professores, observou que, "[…] em geral, não há articulação entre suas ideias sobre trigonometria no triângulo retângulo, trigonometria no círculo, gráfico de funções trigonométricas e definição formal das noções fundamentais da trigonometria."

> Estes fatores levam a que se desenvolva o ensino de trigonometria baseado no estudo de fórmulas e regras, descontextualizado e sem significado para a maioria dos alunos, recorrendo à memorização de exercícios padrões, muitos dos quais sem aplicações no dia a dia, ocasionando uma aprendizagem deficitária por parte do aluno. (PEREIRA, 2010 p. 4)

Na *aprendizagem deficitária* citada, os alunos deixam conceitos e significados de lado, fazem exercícios-padrão e não veem aplicações da Trigonometria em outras áreas do conhecimento. Segundo pontuado por Quintaneiro (2010, p. 2), uma das razões para que isto aconteça, além do tratamento pouco atraente por parte do livro didático, é a dificuldade que o próprio professor sente no estudo da Trigonometria.

3 PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

No presente capítulo, há uma breve explanação sobre os conceitos de transposição e criação didática, de acordo com Yves Chevallard. Também são abordados os registros de representações semióticas, segundo Raymond Duval.

Ao pesquisar sobre *transposição didática* e *criação didática*, foram encontradas diferentes interpretações destes conceitos, de acordo com o autor. Optou-se então por pautar-se em trabalhos de Pais (2008a, 2008b), Damm (2008), e na dissertação de Neves (2009). Os dois primeiros, por serem reconhecidamente autoridades no assunto, e a terceira por utilizar como base teórica a obra mais significativa de Yves Chevallard, além de comentar as interpretações de outros pesquisadores sobre tais conceitos.

Já no estudo da teoria de Raymond Duval, constituíram-se referência básica o livro do próprio autor, recentemente traduzido para o português, Duval (2009), bem como seu artigo publicado em Machado (2010), não dando margem a dubiedades.

3.1 Transposição Didática

O conceito de transposição didática, introduzido pelo sociólogo Michel Verret em 1975, foi revisitado pelo educador e pesquisador francês Yves Chevallard, na década de oitenta.

> Um conteúdo do saber que tenha sido designado como saber a ensinar, sofre a partir de então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os *objetos de ensino*. Este “trabalho” que transforma um objeto de saber a ensinar em um objeto de ensino é denominado de *transposição didática*. (CHEVALLARD, 2005, p. 45 apud NEVES, 2009, p. 55 - grifos do autor)

Segundo Neves (2009, p. 25), o objetivo da transposição didática é, na verdade, promover o contínuo processo de atualização dos saberes ou conteúdos escolares, de forma a acompanhar a evolução dos saberes científicos (produto das comunidades científicas).

Quando os conteúdos escolares tornam-se ultrapassados em relação ao modelo social ao qual pertencem, é preciso apresentá-los de forma diferente. Esta nova apresentação é baseada em elementos estreitamente ligados aos saberes científicos. Portanto, absorve as alterações destes saberes, quando passam por uma crise paradigmática.

Ressalte-se aqui que as transposições em Matemática não distorcem definições, teoremas ou saberes, só porque foram contextualizados para a educação básica. Apenas reformulam o texto do saber escolar com elementos da prática da transposição.

> O saber produzido pela transposição didática será, portanto, um saber exilado de suas origens e separado de sua produção histórica na esfera do saber científico, legitimando-se, no entanto, em saber ensinado, como algo que não é de nenhum tempo nem de nenhum lugar, e não se legitima mediante o recurso da autoridade de um produtor, qualquer que seja ele. [...] (CHEVALLARD, 2005, p.18, apud NEVES, 2009, p. 26)

Das palavras de Chevallard (2005), depreende-se que o saber escolar desvincula-se do saber científico, como consequência do processo de transposição didática realizado. Destituído de história e autoria, o saber escolar pode dar ao aluno a (falsa) impressão de que foi *inventado* ou *descoberto* por algum gênio, de um momento para outro. Podem ficar para trás também os motivos que levaram ao surgimento do conceito, bem como sua evolução até tornar-se o que é, no momento em que o aluno o estuda: é o saber *pronto e acabado*, que não suscita no aluno interesse, nem o estimula a raciocinar.

Alguns autores dividem o processo de transposição didática em dois momentos: a transposição didática externa e a transposição didática interna, talvez pelo fato de Chevallard definir transposição didática *stricto sensu* e *lato sensu*.

> Quando a evolução das ideias é analisada em relação a um determinado conceito, [...] trata-se de uma *transposição didática stricto sensu*. Por outro lado, se a análise é desenvolvida no contexto mais amplo, não se atendo a uma noção particular, trata-se de uma *transposição didática lato sensu*. (PAIS, 2008a, p. 20)

Segundo os autores supracitados, a transposição didática externa se dá quando, a partir do conjunto de saberes científicos disponíveis, elegem-se aqueles que serão ensinados na escola.

Escolhidos os saberes a ensinar, cabe ao professor cumprir a tarefa de ensiná-los. Ao fazê-lo, o professor pode, ao invés de simplesmente ater-se ao livro texto e repetir, 'ipsis litteris', o que nele está escrito, explicar de forma diferente, utilizar outra linguagem, outros métodos, materiais, enfim, recursos que, ele acredita, irão contribuir positivamente para o processo de ensino e aprendizagem. Esta é a segunda etapa da transposição didática: a transposição didática interna.

Por outro lado, há pesquisadores que questionam a existência de duas etapas, enxergando a transposição didática como um processo único. Alguns argumentam que, quando o professor faz algo diferente do que preconiza o livro didático, pode prejudicar a aprendizagem ao invés de auxiliá-la, comprometendo o saber escolar. Há também quem diga que não se pode garantir a ocorrência da transposição interna, enquanto a externa sempre acontece. Logo, não faria sentido dividir a transposição didática em dois momentos. (NEVES, 2009, p. 67-71)

As criações didáticas, por sua vez, são elementos de uma transposição didática que transformam-se em ferramentas, auxiliando o processo de ensino de algum conteúdo escolar.

> Podemos considerar a existência de uma transposição didática, como processo de um conjunto, como situações de *criações didáticas de objetos* (de conhecer e ensinar ao mesmo tempo) que se fazem “necessárias” pelas *exigências* do funcionamento didático. (CHEVALLARD, 2005, p.47, apud NEVES, 2009, p. 42 – grifos do autor)

Tais criações surgem de necessidades inerentes ao objeto de saber estudado, e contribuem para sua compreensão. Sua finalidade não é tornar-se conteúdo de ensino. Porém, isto aconteceu em alguns casos, como, por exemplo, nos produtos notáveis.

> São exemplos de criações didáticas: os produtos notáveis que surgiram para auxiliar a fatoração de equações algébricas, a descrição dos Números Complexos em matrizes quadradas para simplificar cálculos e melhorar a relação entre Números Complexos e a forma polar de escrevê-los, os diagramas de Venn que serviram como recurso para representação gráfica, os fatoriais que “nasceram” para simplificar notações dos cálculos de probabilidades e da análise combinatória, etc.. Dessa forma, podemos esperar pela identificação de outras criações didáticas existentes no quadro educacional ou científico. (NEVES, 2009, p. 42 – grifo da autora)

Segundo Pais (2008b, p.17), as criações “motivadas por supostas necessidades do ensino para servirem como recursos para outras aprendizagens” não provêm, necessariamente, de trabalho científico. Logo, qualquer pessoa que se preocupe com a melhoria do processo de ensino e aprendizagem pode, com a intenção de auxiliá-lo, propor uma criação didática. (NEVES, 2009, p. 42)

Polêmicas à parte, a existência e a necessidade tanto da transposição quanto da criação didática são inquestionáveis em todos os trabalhos analisados.

A partir da análise das pesquisas, entende-se que uma criação didática pode acontecer quando um conteúdo não previsto pelo programa ou currículo escolar para determinada série é introduzido pelo professor, no intuito de ajudar a aprendizagem de outro assunto. Compreende-se, ainda, que o processo de utilização de um conteúdo como ferramenta para o ensino de outro, chamado de criação didática, é parte do processo de transposição didática, pois "[...] é o conjunto das criações didáticas que evidencia a diferença entre o saber científico e o saber ensinado." (PAIS, 2008a, p. 20)

Neste trabalho, especificamente, a apresentação do sistema de Coordenadas Polares não é um conteúdo previsto para o Ensino Médio. No entanto, acredita-se que a introdução deste assunto contribuirá positivamente para o trabalho com Trigonometria e Números Complexos.

O objeto de saber, que são as Coordenadas Polares, torna-se um objeto de ensino, pois utilizando este sistema de coordenadas a circunferência trigonométrica será revisitada e abordar-se-á a forma trigonométrica de Números Complexos. Isto caracteriza uma criação didática.

Ao mesmo tempo, no processo de transposição didática dos Números Complexos, o elemento que lhes garantiu a aceitação como saber científico legítimo – a representação gráfica – não mereceu destaque no saber escolar. A introdução das Coordenadas Polares visa também resgatar a importância da representação gráfica para a compreensão dos Números Complexos. Assim como ocorreu na história da evolução do conceito, a representação gráfica pode ajudar o aluno a visualizar e compreendes os Números Complexos como objetos matemáticos.

3.2 Representações Semióticas

A semiótica pode ser considerada, de forma bastante simplista, como tudo o que se relaciona com a linguagem e os signos, ou como a teoria geral das representações.

Signo é qualquer *coisa* que, em certa medida, representa ou substitui algo para alguém. Figuras, símbolos, palavras, são signos, pois ao vê-los faz-se a associação com aquilo que representam. Por exemplo, ao ver o logotipo do IFF, imediatamente pensa-se na instituição, mais precisamente no campus em que se estuda. Alunos de outros campi provavelmente associarão o mesmo logotipo ao campus onde estudam. Um signo pode gerar vários interpretantes, dependendo do sujeito:

> […] o signo é aquilo que, sob determinado aspecto, representa alguma coisa para alguém, criando em sua mente um signo equivalente. Nessa operação é gerado o interpretante. Aquilo que o signo representa é denominado seu objeto.
> Representação caracteriza-se pela relação entre o signo e o objeto. Representar é estar no lugar de outro, de tal forma que, para uma mente interpretante, o signo é tratado como sendo o próprio objeto, em determinados aspectos.
> […] o termo representação envolve necessariamente uma relação triádica, que é um esquema do processo contínuo de geração dos signos. O processo representativo se define pelas relações imbricadas que se estabelecem entre signo-objeto-interpretante, nas quais os termos atuam determinando ou sendo determinados pelos outros elementos da tríade.
> A semiótica peirceana é extensa e tem como principal objeto de estudo não exatamente o signo, mas a semiose (processo de ação do signo). […] afinal, os pensamentos se processam por meio de signos, continuamente. (GAMBARATO, 2005, p. 211)

A Matemática trabalha, por excelência, com objetos abstratos. Portanto, para mobilizar um saber matemático, é preciso usar representações que sejam *conscientes* e *externas*.

> [...] a passagem do não-consciente ao consciente corresponde a um processo de objetivação para o sujeito que toma consciência. A objetivação corresponde à descoberta pelo próprio sujeito do que até então ele mesmo não supunha, mesmo se outros lhe houvessem explicado. As representações conscientes são aquelas que apresentam este caráter intencional [...]. (DUVAL, 2009, p. 40-41)

Ainda segundo o autor, as representações podem ser externas ou internas. Externo é tudo aquilo diretamente visível e observável sobre um indivíduo, um organismo ou um sistema, e interno, tudo que não o é. Para Duval (2009, p. 42), as representações externas são, por natureza, representações semióticas, acessíveis a todos que aprenderam o sistema semiótico utilizado. Já as representações internas são aquelas que pertencem a um sujeito e não são reveladas a outro pela produção de uma representação externa.

Segundo Duval (2009, p. 15-17), *semiósis* é a "apreensão ou a produção de uma representação semiótica", e *noésis* são "atos cognitivos como a apreensão conceitual de um objeto, a discriminação de uma diferença ou a compreensão de uma inferência". Segundo ele, não há *noésis* sem *semiósis*.

Em Matemática,

> [...] as representações através de símbolos, signos, códigos, tabelas, gráficos, algoritmos, desenhos são bastante significativas, pois permitem a comunicação entre os sujeitos e as atividades cognitivas do pensamento, permitindo registros de representação diferentes de um mesmo objeto matemático. (DAMM, 2008, p. 170).

Este trecho de Regina Damm ajuda a entender a noção de registro, mas não o define. A definição propriamente dita pode ser encontrada em Duval (2009, p. 37):

> Tais registros constituem os graus de liberdade de que um sujeito pode dispor para objetivar a si próprio uma ideia ainda confusa, um sentimento latente, para explorar informações ou simplesmente para poder comunicá-las a um interlocutor. A questão da relação entre *semiósis* e *noésis* concerne somente aos sistemas que permitem essas três atividades de representação e não a todos os sistemas semióticos. (DUVAL, 2009, p. 37 – grifos do autor)

Duval (2009, p. 37-38) aponta três fenômenos relativos à *semiósis* que devem ser considerados no estudo das aprendizagens intelectuais fundamentais: a diversificação dos registros de representação semiótica, a diferenciação entre representante e representado (ou entre forma e conteúdo) e a coordenação entre os diferentes registros de representação semiótica disponíveis.

Ele destaca ainda que é essencial distinguir "as atividades, tão diferentes, de tratamento e de conversão das representações". Um tratamento é uma transformação efetuada no interior de um registro. A conversão é uma transformação que faz passar de um registro a outro. Ela requer a coordenação dos registros pelo sujeito que a efetua. (DUVAL, 2009, p. 39)

Isto significa que o tratamento é a transformação da representação em outra equivalente, no mesmo registro, enquanto a conversão é a transformação da representação em outra equivalente, mas em outro registro.

O quadro a seguir (**Ilustração 2**), extraído de Duval (2010, p.14), sintetiza os registros de representação e comenta o tratamento em cada tipo de registro.

Ilustração 2 – Quadro: Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no pensamento matemático

	Representação Discursiva	**Representação Não Discursiva**
Registros Multifuncionais Os tratamentos não são algoritmizáveis.	**Língua natural** Associações verbais (conceituais). Formas de raciocinar: ▪ argumentação a partir de observações, de crenças...; ▪ dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	**Figuras geométricas planas ou em perspectivas** (configurações em dimensão 0, 1 , 2 ou 3). ▪ apreensão operatória e não somente perceptiva; ▪ construção com instrumentos.
Registros Monofuncionais Os tratamentos são principalmente algoritmos.	**Sistemas de escritas** ▪ numéricas (binária, decimal, fracionária ...); ▪ algébricas; ▪ simbólicas (línguas formais). Cálculo	**Gráficos cartesianos** ▪ mudanças de sistemas de coordenadas; ▪ interpolação, extrapolação.

Fonte: Duval, 2010, p. 14.

Por exemplo, quando são escritas as representações equivalentes

$$2(x + 1) = 4 \quad \text{e} \quad 2x + 2 = 4,$$

transforma-se '$2(x + 1) = 4$' em '$2x + 2 = 4$'. Muda-se a representação, mas não o registro, que continua a ser algébrico. Este é um exemplo de tratamento.

Por outro lado, quando tem-se uma representação em linguagem natural: 'a soma de duas unidades ao dobro de um número resulta em quatro unidades' e escreve-se outra algebricamente equivalente, por exemplo, '$2x + 2 = 4$', faz-se uma conversão, pois houve mudança de registro (linguagem natural para escrita algébrica).

Almouloud (2007, p. 74) ressalta que “existem tratamentos que podem se tornar algoritmos (um conjunto de regras operatórias), como aqueles que o ensino da Matemática tende a privilegiar [...] eles (os algoritmos) são comuns tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio.”

> No ensino de Matemática, o problema se estabelece justamente porque só se levam em consideração as atividades cognitivas de formação de representações e os tratamentos necessários em cada representação. No entanto, o que garante a apreensão do objeto matemático, a conceitualização, não é a determinação de representações ou as várias representações possíveis, mas sim a *coordenação entre estes vários registros de representação*. (DAMM, 2008, p.182).

Da leitura da citação, deduz-se que a conversão, onde se dá a coordenação entre vários registros de representação, é mais importante para a aprendizagem Matemática do que o tratamento. A autora reclama, no entanto, do fato da Matemática escolar só exigir do aluno a formação e o tratamento de representações, que podem se resumir a algoritmos memorizados, sem a compreensão dos conceitos a eles subjacentes.

A importância da diversidade de registros de representação para o funcionamento do pensamento humano é apontada por Duval:

> [...] o que faz toda a flexibilidade e a potência de uma diversidade de registros: não somente a possibilidade de efetuar tratamentos equivalentes a custos menores, se efetuamos uma mudança de registro apropriada, mas também a complementaridade dos tratamentos para ultrapassar os limites inerentes a cada registro no cumprimento de uma atividade complexa. (DUVAL, 2009, p. 44)

Damm reitera a importância da coordenação de vários registros para a apreensão de um objeto matemático:

> A apreensão conceitual dos objetos matemáticos somente será possível com a coordenação, pelo sujeito que apreende, de vários registros de representação. Ou seja, quanto maior for a mobilidade com registros de representação diferentes do mesmo objeto matemático, maior será a possibilidade de apreensão deste objeto. (DAMM, 2008, p. 177)

Existem diversas representações do objeto matemático Número Complexo: forma algébrica, par ordenado em coordenadas cartesianas, forma polar, par ordenado em Coordenadas Polares, representação gráfica em coordenadas cartesianas, representação gráfica em Coordenadas Polares, forma exponencial, etc.

Ao longo desta pesquisa, conforme explicitado em capítulos anteriores, constatou-se que a representação gráfica de um número complexo é relegada ao segundo plano, e aspectos algébricos são enfatizados. Com a introdução das Coordenadas Polares, pretende-se realizar o tratamento de representações –

transformações entre coordenadas cartesianas e polares – e conversões de representações – passagem do registro algébrico para o registro gráfico, e vice-versa. De acordo com Duval, isto contribuirá para que o aluno compreenda melhor o objeto matemático Número Complexo.

Será mostrado ao aluno, ainda, que um ponto sobre a circunferência trigonométrica pode ser escrito tanto em Coordenadas Polares – onde a primeira coordenada é 1 e a segunda coordenada é o ângulo central da circunferência – quanto em coordenadas cartesianas – quando a abscissa será o cosseno do ângulo e a ordenada, o seno. Espera-se que esta transformação de tratamento auxilie na compreensão da circunferência trigonométrica e das reduções ao primeiro quadrante na obtenção de valores do seno e do cosseno de um ângulo maior do que 90º.

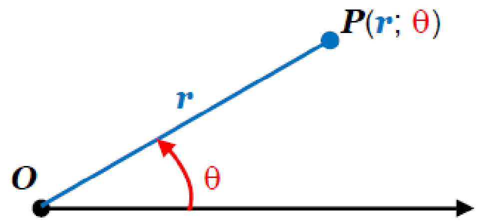
4 COORDENADAS POLARES COMO CRIAÇÃO DIDÁTICA

4.1 Sistema de Coordenadas Polares

Segundo Boyer (1996, p. 282) foi no *Método de fluxos*, escrito por volta de 1671, que Isaac Newton (1643-1727) sugeriu oito novos tipos de sistemas de coordenadas. Um deles, chamado de *Sétima maneira, Para espirais* é o que se chama hoje de *sistema de Coordenadas Polares*. Newton escreveu, inclusive, as fórmulas de conversão de coordenadas cartesianas para polares.

O *Sistema de Coordenadas Polares* consiste de um ponto fixo ***O*** chamado **polo** (ou origem) e de um eixo de referência, começando em ***O***, chamado **eixo polar**. Neste sistema, a cada ponto ***P*** (do plano), é associado um par de coordenadas ($\boldsymbol{r}$; θ), onde $\boldsymbol{r}$ é a distância de ***P*** ao polo e θ é o ângulo medido a partir do eixo polar até o segmento ***OP****.* Convenciona-se que um ângulo é positivo se for medido no sentido anti-horário e negativo se medido no sentido horário.

Ilustração 3 – Figura: Parâmetros das Coordenadas Polares.



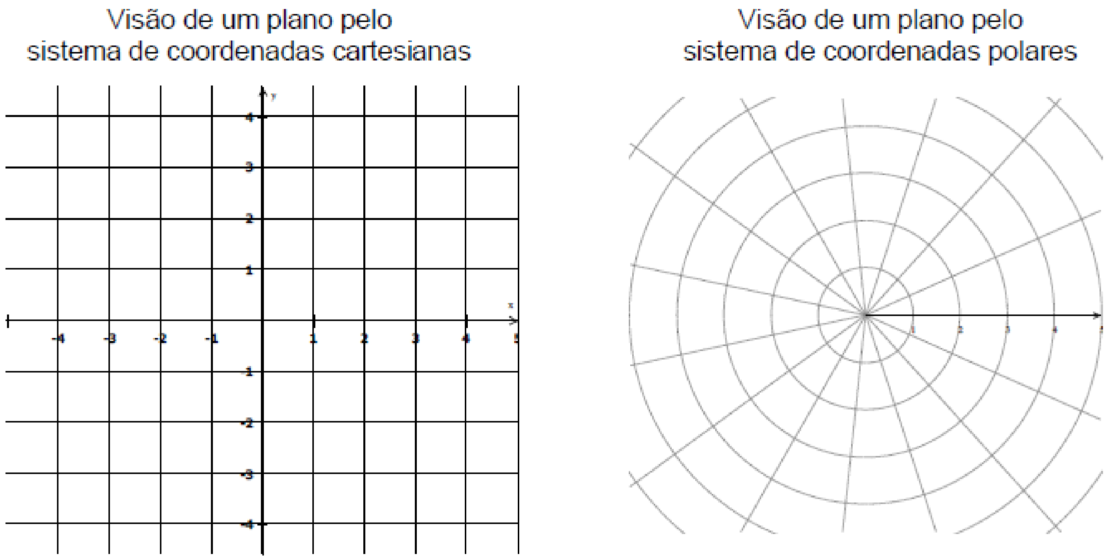
Fonte: Autora.

$\boldsymbol{r}$ e θ são as Coordenadas Polares de $\boldsymbol{P}$, representadas por convenção na ordem ($\boldsymbol{r}$; θ). $\boldsymbol{r}$ é a **coordenada radial**, ou simplesmente **raio**, e θ a **coordenada angular**. Em geral θ varia entre -2π e 2π. Já o raio $\boldsymbol{r}$ é maior ou igual a zero, por ser uma distância.

Este sistema de coordenadas é utilizado em navegação e radares, onde se deseja expressar distâncias e orientações a partir de um ponto central, possivelmente onde se localiza o observador. O ponto central pode inclusive estar se movendo, como no caso de embarcações ou aeronaves.

No sistema de coordenadas cartesianas, $\boldsymbol{x}$ = constante ou $\boldsymbol{y}$ = constante representam retas no plano. Já em Coordenadas Polares, a equação $\boldsymbol{r}$ = constante dá origem a circunferências, e θ = constante, a semirretas (**Ilustração 4**).

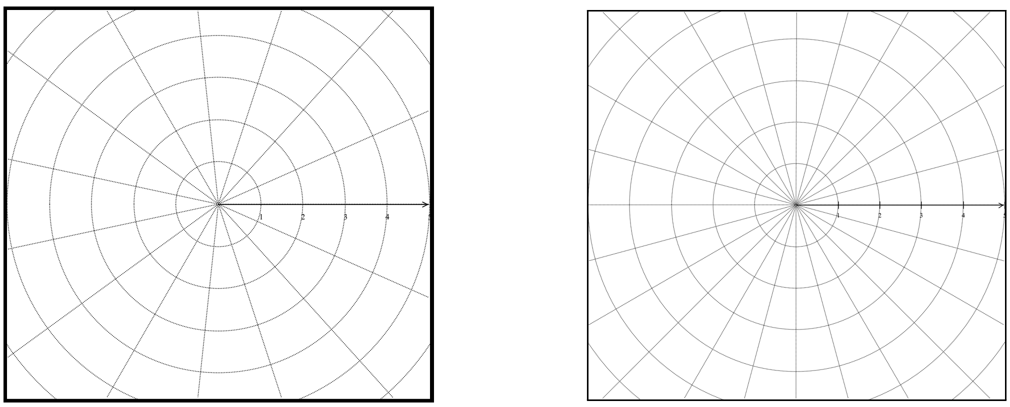
Ilustração 4 – Figura: Plano em coordenadas cartesianas e polares.



Fonte: Autora.

O plano polar pode ser divido em um número variável de setores, desde que todos tenham a mesma medida, por exemplo, 10, 12, 24, etc., de acordo com a necessidade (na **Ilustração 5**, há 15 setores iguais). Em radares, é comum utilizar 360 setores de um grau ou até mais, dependendo da precisão exigida na localização do objeto. Hoje, este número pode ser bem maior, devido ao uso de computadores.

Ilustração 5 – Figura: Plano polar dividido em setores iguais.

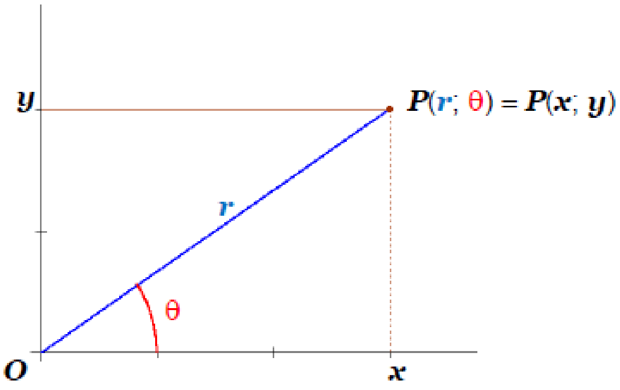


Plano dividido em 15 setores iguais | Plano dividido em 24 setores iguais

Fonte: Autora.

Para descobrir a relação entre as coordenadas cartesianas e polares de um mesmo ponto, é preciso representá-lo simultaneamente nos dois sistemas. Desenha-se então ambos, de forma que o polo do sistema de Coordenadas Polares coincida com a origem do sistema de coordenadas cartesianas, e o eixo polar com a parte positiva do eixo $\boldsymbol{x}$.

Ilustração 6 – Figura: Relação entre coordenadas cartesianas e polares.



Fonte: Autora.

Os dois triângulos que aparecem na figura são retângulos, de modo que podemos utilizar qualquer um deles para escrever as relações entre ($\boldsymbol{x}$; $\boldsymbol{y}$) e ($\boldsymbol{r}$; θ).

$$\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 = \boldsymbol{r}^2 \text{ ; } \boldsymbol{sen}(\theta) = \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{r}} \text{ ; } \boldsymbol{cos}(\theta) = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{r}} \text{ ou } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}\ \boldsymbol{cos}(\theta) \text{ ; } \boldsymbol{y} = \boldsymbol{r}\ \boldsymbol{sen}(\theta);$$

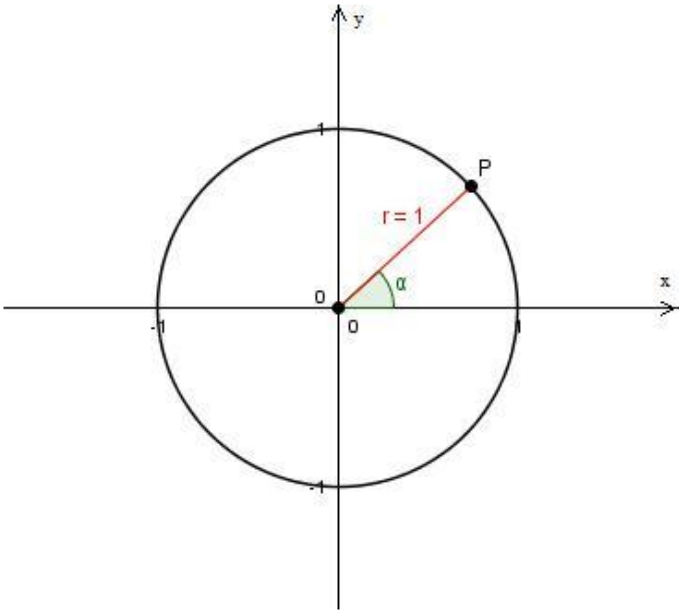
$$\boldsymbol{r} = \sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2} \text{ ; } \theta = \boldsymbol{arccos}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{r}}\right) \text{ e } \theta = \boldsymbol{arcsen}\left(\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{r}}\right).$$

Coordenadas Polares serão utilizadas para auxiliar no ensino de Trigonometria e Números Complexos, logo o que se propõe é uma criação didática. Ao mesmo tempo, no processo de transposição didática dos Números Complexos, o elemento que lhe rendeu a aceitação como saber científico legítimo – a representação gráfica – assumiu uma posição obscura no saber escolar. A introdução das Coordenadas Polares visa, também, resgatar a importância da representação gráfica para a compreensão dos Números Complexos.

4.2 Coordenadas Polares e a Circunferência Trigonométrica

A circunferência trigonométrica tem, por definição, raio unitário ($\boldsymbol{r}$ = 1) e centro na origem do plano cartesiano (**Ilustração 7**, a seguir).

Ilustração 7 – Figura: Circunferência trigonométrica.

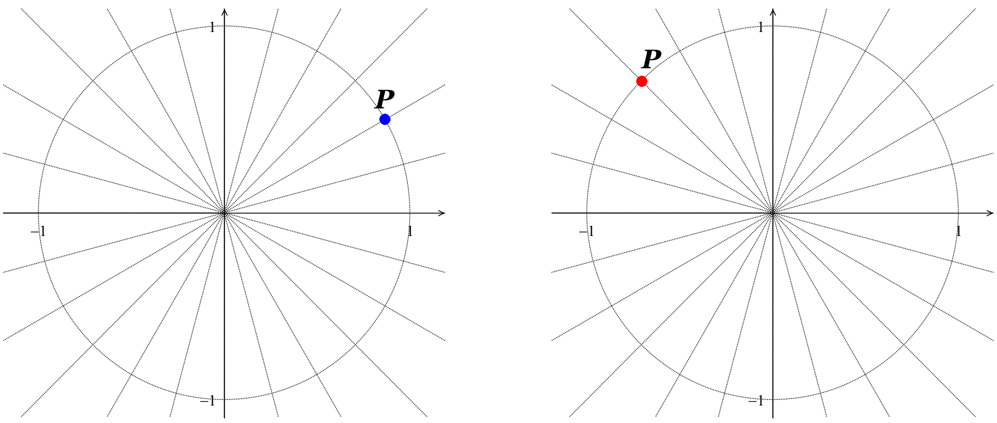


Fonte: Autora.

Levando em consideração que um ponto em Coordenadas Polares é representado por ($\boldsymbol{r}$; θ), qualquer ponto da circunferência trigonométrica será da forma (1; α), pois a coordenada radial é igual a 1. Este ponto pode ser então naturalmente associado ao ângulo central α, já que sua coordenada radial é fixa.

Quando, dada a representação gráfica do ponto, escreve-se suas coordenadas, realiza-se uma conversão, pois o objeto é o mesmo, mas o registro mudou – gráfico para escrito.

Ilustração 8 – Figura: Pontos da circunferência trigonométrica em Coordenadas Polares.



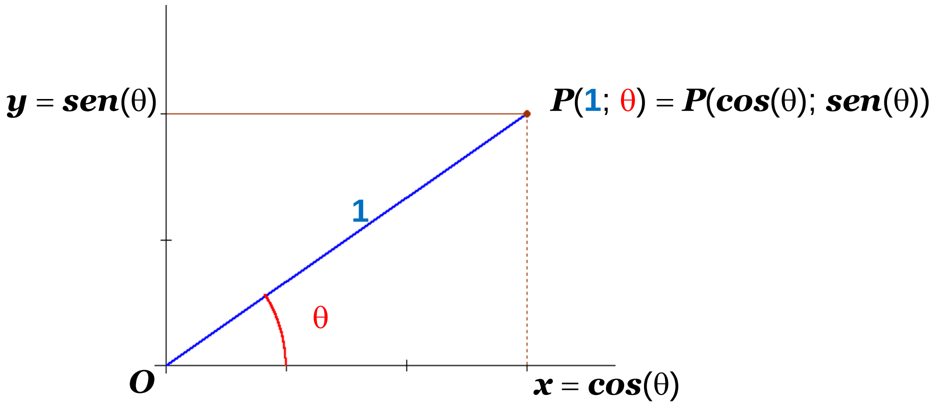
$\boldsymbol{P}\left(1; \frac{\pi}{6}\right)$ $\boldsymbol{P}\left(1; \frac{3\pi}{4}\right)$

Fonte: Autora.

Por outro lado, cada ponto (1 ; α) também tem sua representação em coordenadas cartesianas. Sua abscissa será igual a $\boldsymbol{cos}(\alpha)$ e sua ordenada será igual a $\boldsymbol{sen}(\alpha)$.

Trata-se de um mesmo ponto representado graficamente em dois sistemas de coordenadas distintos – esta é uma transformação de tratamento, pois permanecemos no registro gráfico.

Ilustração 9 – Figura: Ponto da circunferência trigonométrica em Coordenadas Polares e cartesianas.



Fonte: Autora.

Assim, a representação gráfica em Coordenadas Polares permite visualizar o sinal do cosseno e do seno do ângulo instantaneamente, pois o sinal da abscissa será o sinal do cosseno, e o da ordenada será o do seno. Espera-se que a transformação de tratamento auxilie o aluno a visualizar estas relações.

4.3 Representações dos Números Complexos

Os Números Complexos têm várias representações possíveis. As mais usuais são a forma algébrica, $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}$, onde $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ são números reais, e a forma trigonométrica, $\boldsymbol{z} = \rho\,(\boldsymbol{cos}(\theta) + \boldsymbol{i}\ \boldsymbol{sen}(\theta))$, com $\rho > 0$ e $0 \leq \theta < 360^o$, ou $0 \leq \theta < 2\pi$.

A forma algébrica pode ser representada graficamente, conforme já comentamos, por um ponto no plano de Argand-Gauss. Tal plano usa o sistema de coordenadas retangulares, e cada ponto nele marcado tem sua abscissa e sua ordenada correspondentes, respectivamente, à parte real e à parte imaginária do número complexo que ele representa.

A forma trigonométrica, por utilizar o módulo e o argumento como parâmetros, pode ser associada, de forma natural, a um ponto em Coordenadas Polares. A coordenada radial é igual ao módulo do número, e a coordenada angular é igual ao argumento principal.

Pretende-se trabalhar com o tratamento entre as representações gráficas cartesiana e polar, e também com a conversão entre o registro algébrico e o gráfico, tanto em Coordenadas Polares como em retangulares,

Da mesma forma que a representação gráfica foi fundamental para a aceitação dos Números Complexos pela comunidade científica, também é extremamente importante no processo de ensino e aprendizagem do assunto. É ela que permite a visualização dos Números Complexos, e tudo o que é visualizado, é melhor apreendido.

5 METODOLOGIA DE PESQUISA

Segundo Yin (2010, p. 28-29), os estudos de caso devem ser utilizados como metodologia de pesquisa quando: as questões de pesquisa são do tipo *como* ou *porque*, o investigador tem pouco controle sobre os eventos (em particular, nenhum controle sobre os resultados) e o objeto da pesquisa é um fenômeno contemporâneo, estudado no contexto da vida real.

Neste trabalho, a questão de pesquisa é "Como a introdução de Coordenadas Polares pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de Trigonometria e Números Complexos no Ensino Médio?", que se encaixa em um dos tipos citados.

Ao aplicar as atividades, não se sabe, a priori, quais serão seus resultados, ou seja, como serão as aulas, se os alunos sentirão muita dificuldade no assunto, etc. Não haverá, pois, controle sobre os eventos.

O objeto de pesquisa é um fenômeno contemporâneo (apesar de existir há tempos, infelizmente persiste até os dias de hoje): as dificuldades de ensino e aprendizagem de Trigonometria e Números Complexos. Este fenômeno será estudado no contexto da vida real, pois as atividades serão aplicadas em uma turma de alunos do 3º ano do Ensino Médio.

Assim, pode-se dizer que a metodologia de pesquisa é o estudo de caso.

Outro fato que leva a crer que há um alinhamento com tal metodologia foi encontrar, na descrição das características desejáveis do pesquisador do estudo de caso, as seguintes afirmações: “É, por isso, muito importante que o investigador possa tirar partido da possibilidade de se surpreender por não estar afetiva e intelectualmente comprometido com os resultados que possa vir a encontrar.” (PONTE, 2006, p. 8; YIN, 2010, p. 95)

> Na verdade, para se descobrir aspectos novos, escondidos, de uma dada situação, é essencial um distanciamento e uma capacidade de interrogar de modo muito livre os acontecimentos. (PONTE, 2006, p. 8)

Após o teste exploratório, descartou-se toda uma atividade e elaborou-se outra, cujo objetivo era bastante diferente, por perceber que o objetivo proposto para a atividade original não havia sido alcançado (o que foi, aliás, sinalizado pelos próprios participantes durante o teste exploratório). A análise crítica e o constante debate sobre as situações levou, também, à inversão da ordem de aplicação das listas 2 e 3 durante a validação das atividades, o que não havia sido previsto, mas mostrou-se oportuno.

"O estudo de caso é uma investigação empírica que investiga um fenômeno contemporâneo em profundidade e em seu contexto de vida real, especialmente quando os limites entre o fenômeno e o contexto não são claramente evidentes." (YIN, 2010, p. 39)

Isto significa que o estudo de caso não é feito em ambiente controlado, como um experimento em laboratório, por exemplo. Também não se trata de uma pesquisa histórica, que em geral lida com fenômenos que não são contemporâneos.

Apesar de seu empirismo, este tipo de investigação não é intervencionista. Não se pretende modificar a situação, e sim compreendê-la. Não há a pretensão de que os alunos, em poucas aulas, terão aprendido tudo sobre Números Complexos. A finalidade das atividades é, antes de tudo, introduzir as Coordenadas Polares e analisar sua contribuição quando utilizadas no estudo de Trigonometria e Números Complexos.

Um estudo de caso é uma investigação feita em uma situação particular, conduzida de forma a descobrir as características mais importantes do objeto estudado, que contribuam para a sua compreensão global (do objeto).

Por não existir uma fronteira bem definida entre fenômeno e contexto, a investigação do estudo de caso enfrenta uma situação diferenciada, em que haverá muito mais variáveis de interesse do que pontos de dados. Como resultado, terá diversas fontes de evidência, nas quais os dados precisam convergir, e beneficia-se do desenvolvimento prévio de proposições teóricas que orientem a coleta e a análise de dados. (YIN, 2010, p. 40)

As afirmações de Yin (2010) são corroboradas por Ponte (2006).

> Um estudo de caso pode com vantagem apoiar-se numa orientação teórica bem definida; além disso, pode seguir uma perspectiva interpretativa, que procura compreender como é o mundo do ponto de vista dos participantes ou uma perspectiva pragmática, tendo em vista proporcionar uma perspectiva global, tanto quanto possível completa e coerente do objeto de estudo. (PONTE, 2006, p. 1)

Segundo Ponte (2006, p. 7), um estudo de caso é em geral uma investigação *in loco* — neste caso, a sala de aula. Fundamenta-se em uma descrição que seja a mais completa possível de seu objeto de estudo (*thick description*) — aqui, as dificuldades no estudo de Trigonometria e Números Complexos.

> Na verdade, um estudo de caso pode ter um profundo alcance analítico, interrogando a situação, confrontando-a com outras situações já conhecidas e com as teorias existentes. Pode assim ajudar a gerar novas teorias e novas questões para futura investigação. (PONTE, 2006, p. 8)

Ainda segundo Yin, os estudos de caso podem ser explanatórios (ou causais), descritivos ou exploratórios. (YIN, 2010, p. 43) Esta pesquisa se enquadra no estudo de caso explanatório, pois não se pretende simplesmente investigar porque os alunos têm dificuldades, nem descrevê-las apenas, mas sim analisá-las e propor uma alternativa à prática existente, que seria a introdução das Coordenadas Polares no estudo de Trigonometria e Números Complexos.

De acordo com Ponte (2006, p. 12), "[...] um estudo de caso produz sempre um conhecimento de tipo particularístico [...]."

> Deste modo, num estudo de caso não faz sentido formular conclusões sob a forma de proposições gerais. Poderá haver, isso sim, a formulação de *hipóteses de trabalho* a testar em novas investigações. Além disso, parte da tarefa de pensar em que medida certos aspectos se podem ou não aplicar a outros casos fica a cargo dos leitores que deles têm um conhecimento mais direto ou seja, tem lugar a *generalização pelo próprio leitor* (Merriam, 1988). Não devemos menosprezar o fato que muito do valor dos estudos de caso deriva das questões que ajudam a levantar. Na verdade, a importância da investigação educacional tem muito a ver com as questões que coloca e não apenas com as respostas que formula (Nóvoa, 1991; Yin, 1984). (PONTE, 2006, p. 16)

> Em síntese, os estudos de caso *não se usam quando se quer conhecer propriedades gerais de toda uma população*. Pelo contrário, usam-se para compreender a especificidade de uma dada situação ou fenômeno, para estudar os processos e as dinâmicas da prática, com vista à sua melhoria, ou para ajudar um dado organismo ou decisor a definir novas políticas, ou ainda para formular novas teorias. *O seu objetivo fundamental é proporcionar uma melhor compreensão de um caso específico e ajudar a formular hipóteses de trabalho sobre o grupo ou a situação em causa*. (PONTE, 2006, p. 17)

Sob estes pontos de vista, a pesquisa ora apresentada levanta questões sobre as dificuldades do processo de ensino e aprendizagem de Números Complexos e Trigonometria, ao mesmo tempo em que discute a apresentação tradicional destes conteúdos, e instiga investigações futuras ao sugerir uma possível alternativa à prática vigente.

6 RELATO E ANÁLISE DE RESULTADOS

Neste capítulo, serão abordadas as atividades elaboradas, sua aplicação e reformulação, e analisar-se-ão os resultados tanto do teste exploratório quanto da validação. As atividades utilizadas no teste exploratório estão disponíveis no **Apêndice A**. A versão reformulada, aplicada na validação, pode ser encontrada no **Apêndice B**.

6.1 Teste Exploratório

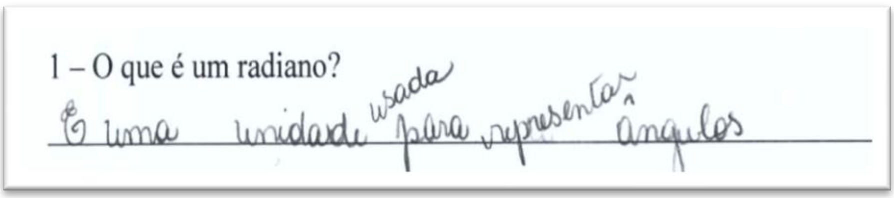
O teste exploratório foi aplicado no dia 03 de dezembro de 2010, para quatro professores em formação, do 6º período de um curso de Licenciatura em Matemática. Iniciou-se às 9h40min e terminou às 12h30min.

6.1.1 Teste de sondagem

Primeiro, foi realizado um teste de sondagem, com o objetivo de detectar as dificuldades nos assuntos que iriam ser abordados no teste exploratório.

Houve dificuldade na resolução da primeira questão. Três alunos deixaram em branco e a única resposta está apresentada na **Ilustração 10**.

Ilustração 10 – Figura: Teste exploratório – resposta à questão 1, teste de sondagem.

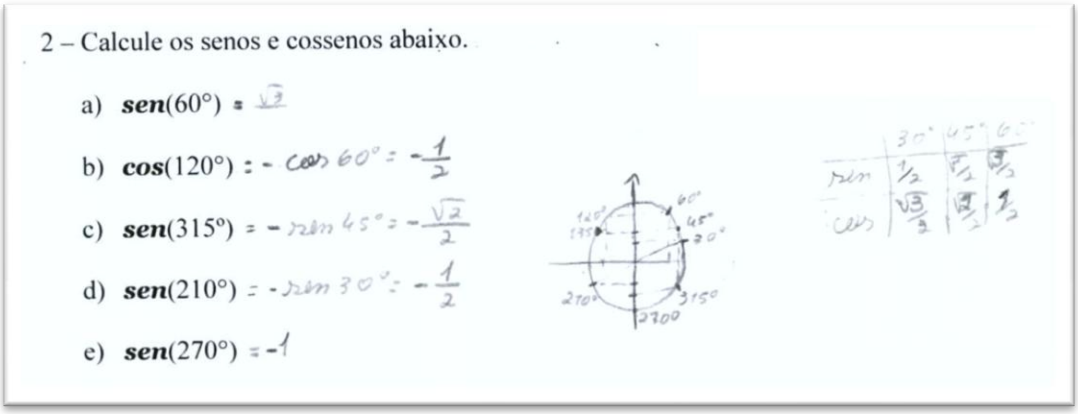

1 – O que é um radiano?
É uma unidade usada para representar ângulos

Fonte: protocolos de pesquisa.

Isto corrobora o que afirmam Quintaneiro, Giraldo e Pinto (2010), sobre o fato de que o conceito de radiano não é esclarecido pelo livro didático, nem é apreendido pelo aluno.

Ainda no teste de sondagem, três dos quatro participantes recorreram a recursos, tais como *tabelas* ou *esboços do ciclo trigonométrico*, para responder os itens da 2ª questão (**Ilustração 11**).

Ilustração 11 – Figura: Teste exploratório – resposta à questão 2, teste de sondagem.



2 – Calcule os senos e cossenos abaixo.

a) $\boldsymbol{sen}(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\boldsymbol{cos}(120°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

c) $\boldsymbol{sen}(315°) = -\text{sen } 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

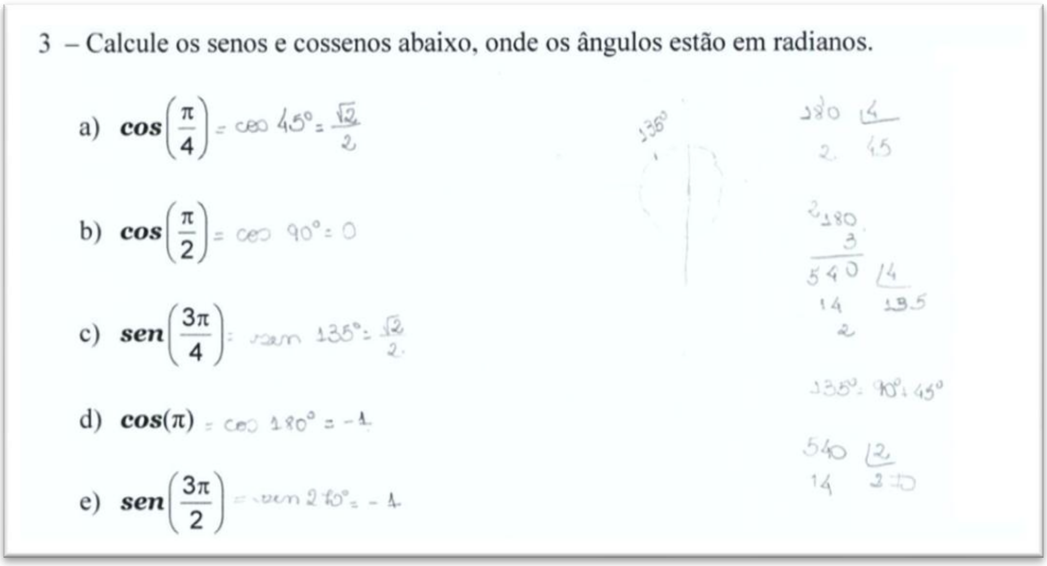
d) $\boldsymbol{sen}(210°) = -\text{sen } 30° = -\frac{1}{2}$

e) $\boldsymbol{sen}(270°) = -1$

Fonte: protocolos de pesquisa.

Já na questão 3, todos os participantes sentiram necessidade de converter a unidade de medida dos ângulos de radianos para graus, o que mostra novamente o desconforto no trabalho com o radiano (**Ilustração 12**).

Ilustração 12 – Figura: Teste exploratório – resposta à questão 3, teste de sondagem.



3 – Calcule os senos e cossenos abaixo, onde os ângulos estão em radianos.

a) $\boldsymbol{cos}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\boldsymbol{cos}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos 90° = 0$

c) $\boldsymbol{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \text{sen } 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\boldsymbol{cos}(\pi) = \cos 180° = -1$

e) $\boldsymbol{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \text{sen } 270° = -1$

Fonte: protocolos de pesquisa.

Em todas as listas de exercícios foram utilizados planos representados nos sistemas de coordenadas retangulares ou polares, conforme o caso, confeccionados em folhas no formato A3.

As folhas foram presas ao quadro, como recurso para que os participantes acompanhassem a resolução das questões. Pudemos observar que isto auxiliou a apresentação e a visualização dos itens propostos.

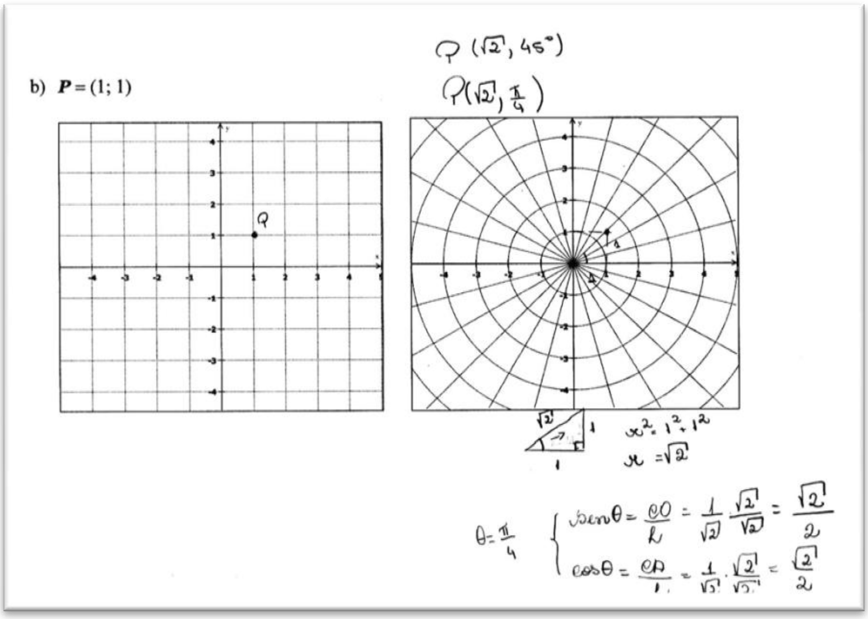
6.1.2 Lista 1

A Lista 1 foi resolvida em conjunto. Explicou-se o sistema de Coordenadas Polares e relacionou-se a marcação de pontos nestas coordenadas e em coordenadas cartesianas ou retangulares. Vale ressaltar que os participantes já conheciam as Coordenadas Polares, e esta era apenas uma recordação. Buscavam-se contribuições no sentido de aprimorar ou corrigir a fala ou o método utilizados nas explicações.

Ao longo dos exercícios desta lista, relembrou-se o ciclo trigonométrico.

No primeiro exercício, era dado um ponto em coordenadas cartesianas que deveria ser representado graficamente no plano cartesiano. A seguir, seriam encontradas suas Coordenadas Polares e feita sua representação gráfica no plano polar (**Ilustração 13**).

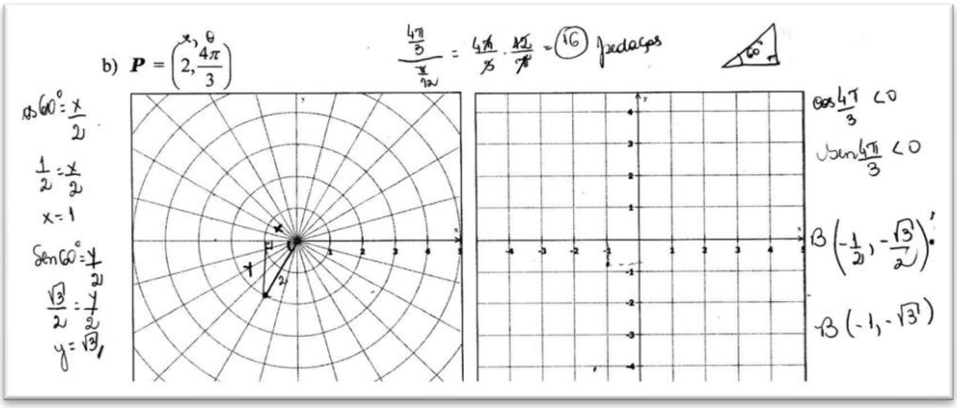
Ilustração 13 – Figura: Teste exploratório – resposta ao item (b), questão 1, Lista 1.



Fonte: protocolos de pesquisa.

Após a parte teórica de definição das Coordenadas Polares, feita oralmente, foi resolvido em conjunto o exercício 2. Seu objetivo era de, dadas as Coordenadas Polares de um ponto, escrever suas coordenadas retangulares. Isto foi feito tendo por base o ciclo trigonométrico, já que, a partir da projeção desse ponto polar nos eixos x e y, respectivamente, são obtidos os valores do raio multiplicado pelo cosseno e pelo seno da coordenada angular do ponto, respectivamente (**Ilustração 14**).

Ilustração 14 – Figura: Teste exploratório – resposta ao item (b), questão 2, Lista 1.



Fonte: protocolos de pesquisa.

A terceira questão foi proposta para que eles fizessem sozinhos, contendo duas situações de cada uma das descritas anteriormente.

6.1.3 Lista 2

A Lista 2 foi entregue logo após a Lista 1. Seu objetivo era o de verificar, usando uma régua, que as medidas da abscissa e da coordenada de um ponto $\boldsymbol{P}$ da circunferência unitária correspondiam realmente ao cosseno e ao seno do arco subentendido pela parte positiva do eixo $\boldsymbol{Ox}$ e pelo segmento $\boldsymbol{OP}$, relacionando as representações polar e cartesiana de $\boldsymbol{P}$. A grande maioria não alcançou tal objetivo.

Houve então algumas sugestões de modificação, dentre elas reescrever o primeiro enunciado e 'mudar' seu objetivo, retirando a parte relativa à determinação do cosseno e do seno com a régua. Outra sugestão foi a de retirar esta lista, pois mesmo mudando o enunciado, haveria dificuldade em alcançar o objetivo proposto. Assim foi feito, e elaborou-se outra lista para a validação.

6.1.4 Lista 3

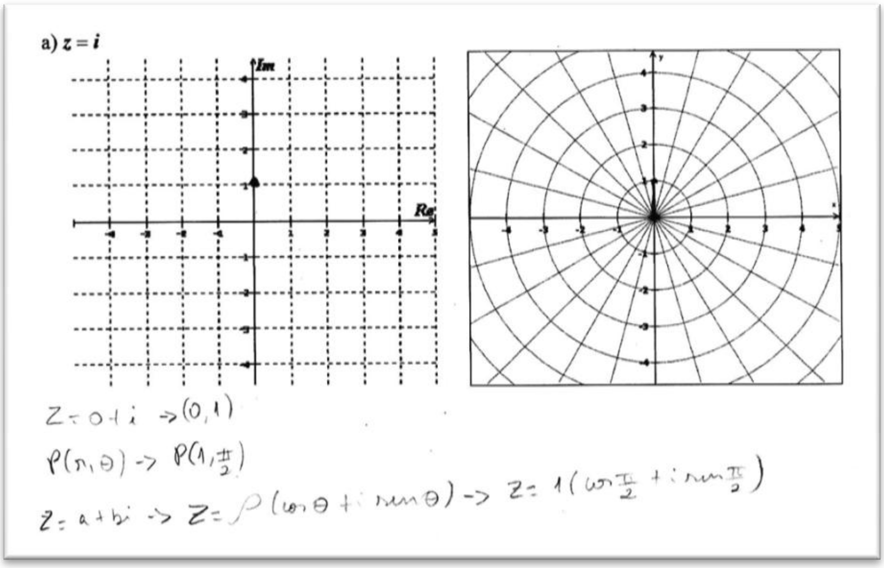
Na Lista 3, foram abordados os Números Complexos em suas formas algébrica e trigonométrica.

Esta lista era relativamente pequena, com apenas três questões de dois itens cada uma. As questões 1 e 2 foram feitas em conjunto, com explicação do conteúdo. A questão 3 foi proposta para que fizessem sozinhos.

É importante dizer que a todo o momento foram usadas expressões do tipo: “o número complexo $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{i}$, representado na forma algébrica, é exatamente o mesmo número $\boldsymbol{z} = 1\ (\boldsymbol{cos}\ \frac{\pi}{2} + \boldsymbol{i}\ \boldsymbol{sen}\ \frac{\pi}{2})$, representado na forma trigonométrica”, ou “estamos marcando o mesmo ponto tanto no plano cartesiano quanto no plano polar”, a fim de ressaltar que eram representações distintas de um mesmo objeto.

Na questão 1, pedia-se que representassem graficamente no plano cartesiano Números Complexos apresentados na forma algébrica, e em seguida fizessem a representação gráfica e escrita do ponto correspondente em Coordenadas Polares, para então escrever o número complexo na forma trigonométrica (**Ilustração 15**).

Ilustração 15 – Figura: Teste exploratório – resposta ao item (a), questão 1, Lista 3.



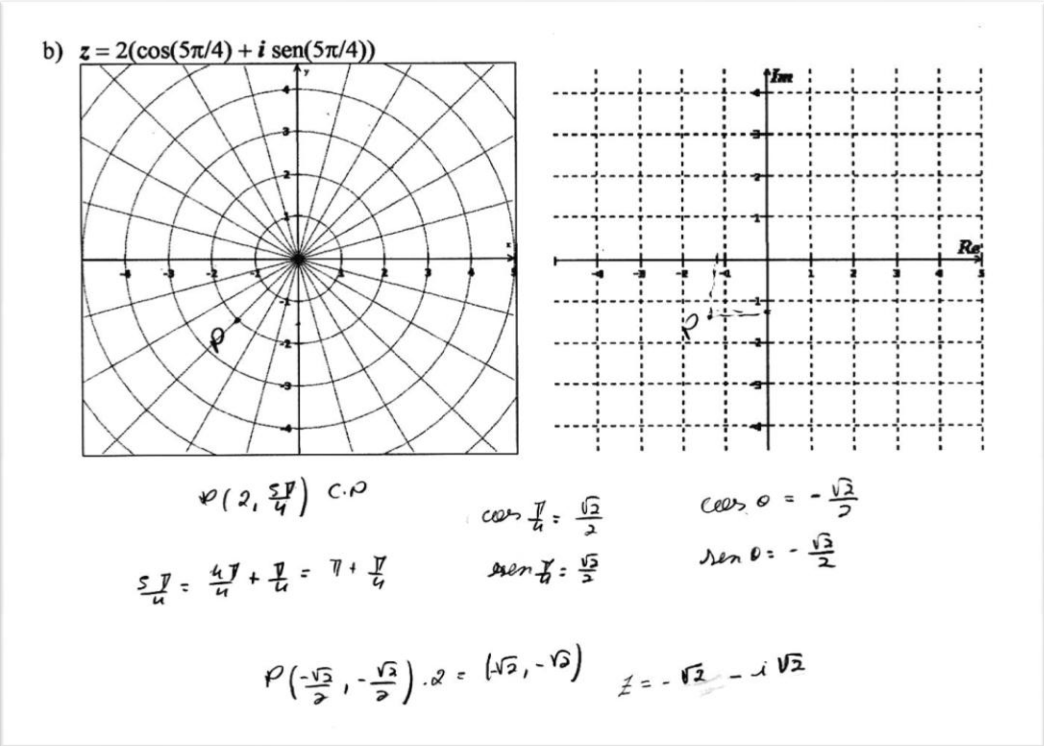
Fonte: protocolos de pesquisa.

Os participantes do teste exploratório disseram-se "encantados" com a facilidade de resolução do exercício através das Coordenadas Polares. Embora já tivessem estudado ambos os assuntos – Coordenadas Polares e Números Complexos, até aquele momento não haviam estabelecido um elo entre ambos.

Isto mostra a importância do tratamento e da conversão de representações para a apreensão do conceito.

Na questão 2, o proposto era o inverso. Foram dados Números Complexos na forma trigonométrica para serem representados graficamente no plano polar e depois escritos na forma algébrica, representando-os no plano cartesiano (**Ilustração 16**).

Ilustração 16 – Figura: Teste exploratório – resposta ao item (b), questão 2, Lista 3.



Fonte: protocolos de pesquisa.

A questão 3, como dito anteriormente, foi proposta para que fizessem sozinhos, sendo composta por um caso de cada questão anterior.

Foi possível observar a facilidade que os participantes sentiram ao efetuar a mudança de representação dos Números Complexos, relatada por eles mesmos, após a introdução das Coordenadas Polares. Ficaram encantados ao ponto de perguntar: “Mas é só isso? Vocês têm que ensinar isso aos meninos do Ensino Médio!” (sic).

Houve grande satisfação com o resultado desta lista, que era o objetivo maior. Os participantes gostaram muito, elogiaram e fizeram sem dificuldade.

Ao final, passamos um questionário com algumas perguntas sobre o trabalho, pedindo também sugestões para a melhoria do mesmo.

Mais de 50% marcaram que obtiveram muitas informações novas, e que os alunos do Ensino Médio não teriam dificuldade de acompanhar as atividades de Coordenadas Polares. Todos foram unânimes ao afirmar que estas atividades contribuiriam para um melhor entendimento da circunferência trigonométrica e da forma trigonométrica de complexos. Três opiniões compõem a **Ilustração 17**.

Ilustração 17 – Figura: Teste exploratório – Questionário: algumas opiniões.

Em sua opinião, a introdução de coordenadas polares pode auxiliar a compreensão de trigonometria e números complexos? Por quê?

Enorme e ultima técnica de resolução.

Em sua opinião, a introdução de coordenadas polares pode auxiliar a compreensão de trigonometria e números complexos? Por quê?

Pode auxiliar muito, pois geralmente os alunos tem gran-de dificuldade com a trigonometria, e com essa forma de ensino o aluno pode visualizar melhor, o que torna o conteúdo mui-to mais fácil de ser aprendido.

Em sua opinião, a introdução de coordenadas polares pode auxiliar a compreensão de trigonometria e números complexos? Por quê?

Sim. acredito que pode fortalecer a compreensão, pois trabalha conteúdos diferentes que tem algo em comum. Fazendo essa comparação permite uma melhor visualização do conteúdo

Fonte: protocolos de pesquisa.

6.2 Alterações no material

6.2.1 Lista 1

Na questão 1 da referida lista, foi acrescentado um espaço para a resposta, sem alteração em coordenadas de pontos ou objetivo, apenas aperfeiçoando o enunciado.

Foi inserida a parte teórica referente às Coordenadas Polares, por ser um assunto novo no Ensino Médio. Várias possibilidades de divisão do plano polar foram ilustradas, e deduziu-se a relação entre coordenadas cartesianas e polares.

Também foi acrescentada a aplicação dessas *novas* coordenadas à Trigonometria, o que inicialmente seria abordado na 'extinta' Lista 2.

6.2.2 Lista 2

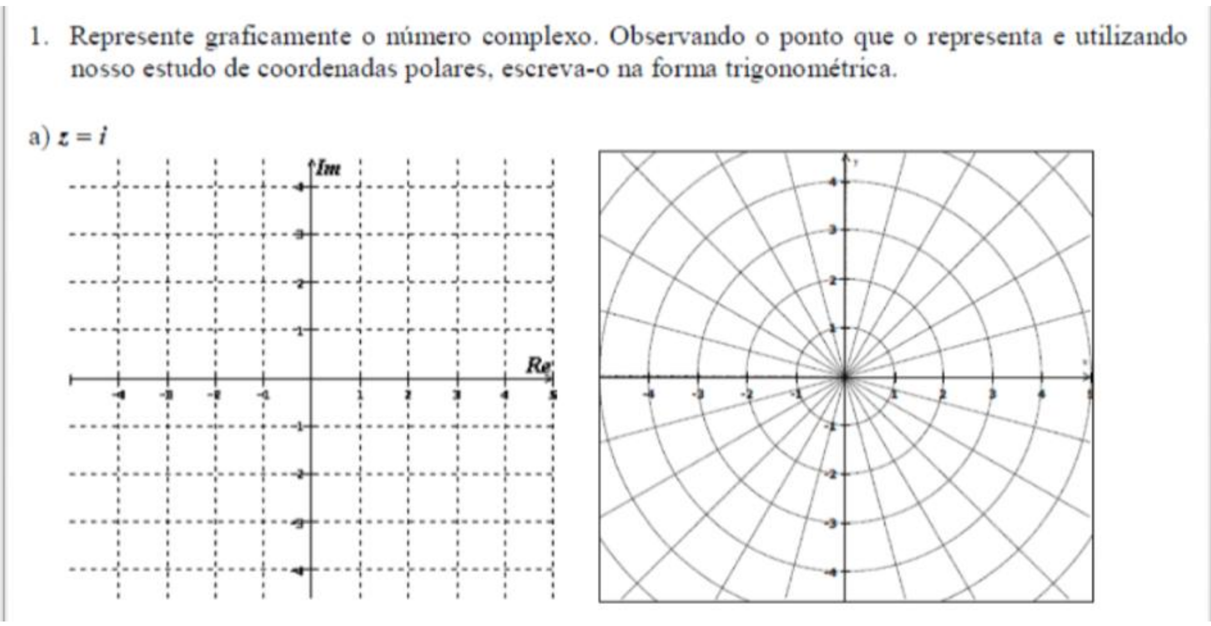
Esta lista foi completamente reformulada. Outra foi elaborada, com exercícios de fixação, para ser aplicada entre a 1ª e a 3ª listas. À época da validação, porém, houve alguns contratempos, e a Lista 2 foi utilizada após a Lista 3, sem prejuízo de seu objetivo.

6.2.3 Lista 3

Assim como na Lista 1, foi elaborada uma parte teórica para a introdução da Lista 3. Acrescentou-se uma breve explicação sobre Números Complexos, suas formas algébrica e trigonométrica, e a representação gráfica. Ressaltou-se que, quando o número é dado na forma algébrica, o ponto que o representa está em coordenadas cartesianas. Por outro lado, quando o número está na forma trigonométrica, sua representação *natural* é em Coordenadas Polares. Destacou-se ainda que todas são representações distintas de um mesmo objeto matemático, ou seja, todo número complexo pode ser representado dessas quatro formas.

A questão 1 foi reescrita e rediagramada (**Ilustrações 18 e 19**).

Ilustração 18 – Figura: Teste exploratório – questão 1, Lista 3.



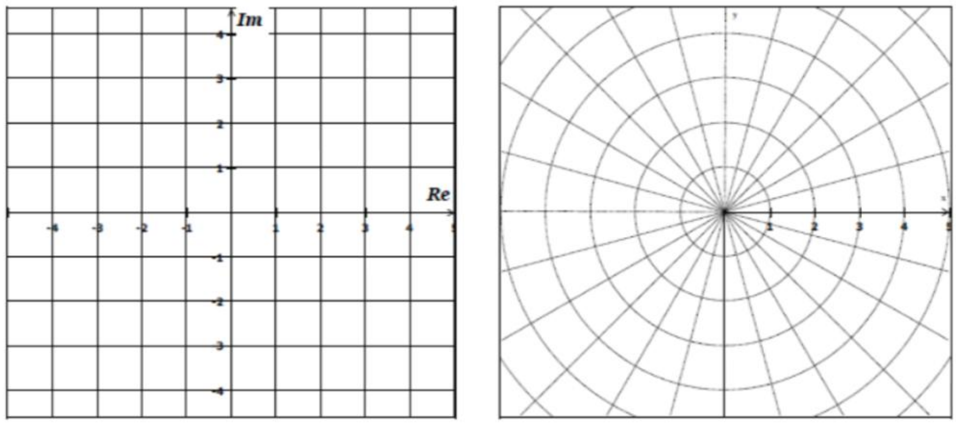
Fonte: protocolos de pesquisa.

Ilustração 19 – Figura: Validação – questão 1, Lista 3.

1. Represente o ponto $\boldsymbol{P}$, afixo de z, no plano complexo, e dê suas coordenadas retangulares. Depois, escreva $\boldsymbol{P}$ em coordenadas polares e represente-o no plano polar. Utilize então a forma polar de $\boldsymbol{P}$ para escrever o número complexo z na forma trigonométrica.

a) $z = i \;\; \rightarrow \boldsymbol{Re}(z) =$ _____ ; $\boldsymbol{Im}(z) =$ _____

→ afixo em coordenadas retangulares: $\boldsymbol{P}$ (_____ ; _____)



→ afixo em coordenadas polares: $\boldsymbol{P}$ (_____ ; _____)

→ número complexo na forma trigonométrica: $z =$ ______________________

Fonte: protocolos de pesquisa.

6.3 Validação

6.3.1 Teste de Sondagem

O teste de sondagem aconteceu no dia 13 de abril de 2011 às 16h10min, com duração de 50 minutos, tendo sido aplicado para trinta e seis alunos de uma turma do 3º ano do Ensino Médio regular de uma Instituição Federal de Ensino do município de Campos dos Goytacazes.

A turma havia estudado Trigonometria no 2º ano do Ensino Médio, com a atual professora regente, e estava iniciando Números Complexos à época da aplicação do teste de sondagem. Ainda não conheciam a forma trigonométrica, que seria abordada pela professora regente nas aulas subsequentes.

A escolha do momento da aplicação do teste de sondagem deu-se justamente em função desta característica, pois a trigonometria não havia sido revista pela professora regente.

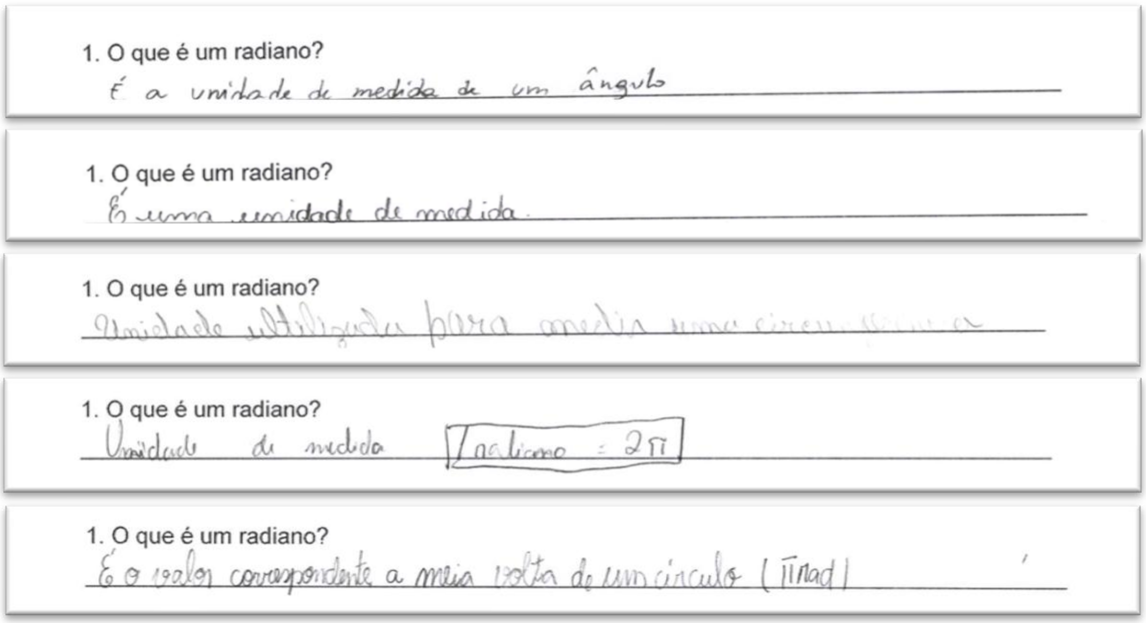
Foi aplicado o teste de sondagem e aguardou-se que a professora ministrasse uma aula sobre forma trigonométrica dos Números Complexos, para, só então, dar continuidade à aplicação das atividades.

Embora, conforme comentado acima, os alunos houvessem estudado Trigonometria no ano anterior, ninguém acertou a primeira questão do referido teste: “O que é um radiano?”. Onze alunos deixaram em branco, e os outros vinte e cinco responderam de diversas formas. As mais comuns estão na **Ilustração 20**.

Ao fazer esta pergunta, o objetivo era aferir se os alunos sabiam que um radiano é a medida de um arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência. É medida tanto de amplitude como de comprimento, sendo por isso utilizada na definição de funções trigonométricas, cujos argumentos são números reais, e não ângulos. Observe-se aqui que a pergunta não era "O que é **o** radiano?", mas sim "O que é **um** radiano?", remetendo-se à sua **definição**.

Os alunos que responderam sabiam que o radiano é uma unidade de medida de ângulos, e nada mais. Não foi mencionado que é também uma medida de comprimento. Mais uma vez, comprovou-se o que apuraram as pesquisas já citadas: os alunos não apreenderam o conceito de radiano.

Ilustração 20 – Figura: Validação – respostas à questão 1, teste de sondagem.



1. O que é um radiano?
É a unidade de medida de um ângulo

1. O que é um radiano?
É uma unidade de medida.

1. O que é um radiano?
Unidade utilizada para medir uma circunferência

1. O que é um radiano?
Unidade de medida $\boxed{1\ \text{radiano} = 2\pi}$

1. O que é um radiano?
É o valor correspondente a meia volta de um círculo (π rad)

Fonte: protocolos de pesquisa.

As questões 2 e 3 demandavam cálculo de senos e cossenos de ângulos, alguns escritos em graus e outros em radianos. Mais de 50% erraram ou deixaram em branco (em maior percentual), as respostas de: $\boldsymbol{sen}(315^{o})$, $\boldsymbol{sen}(210^{o})$, $\boldsymbol{cos}(270^{o})$, $\boldsymbol{cos}(\pi)$ e $\boldsymbol{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, evidenciando dificuldades na redução ao 1º quadrante.

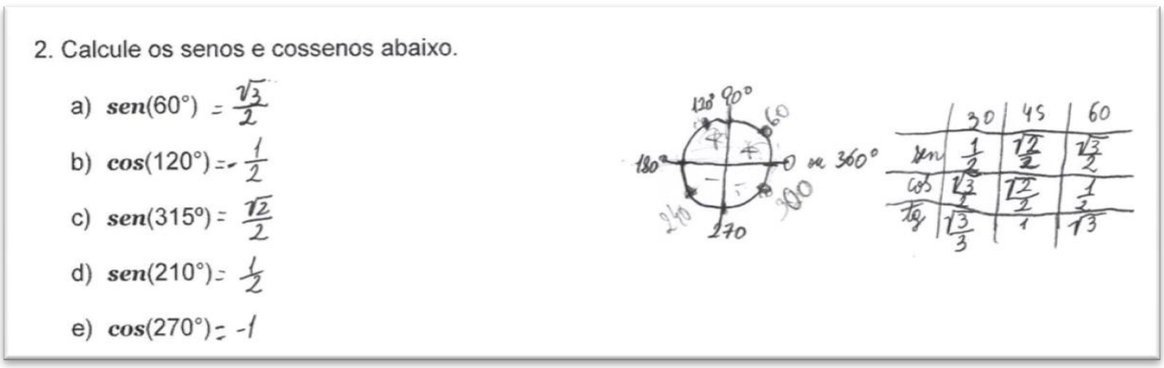
A maioria dos alunos deixou muitos itens em branco em todo o teste de sondagem. Nas questões 2 e 3, dezenove alunos utilizaram a *tabelinha* (verdadeira "criação didática") ou esboçaram o ciclo trigonométrico.

Pudemos comprovar o que já foi comentado nas pesquisas, sobre a dificuldade dos alunos em Trigonometria, com a consequente não apreensão de conceitos.

Dos dez alunos que explicitaram tanto o uso da *tabela* como o esboço do ciclo trigonométrico, deixando-os registrados na folha, um acertou todos os itens, três deixaram alguns itens incompletos, com alguns erros de sinal e valor (o mais comum foi o de $\boldsymbol{cos}(270°)$), seis fizeram todos os itens e erraram alguns valores e sinais. Destes, três erraram 'em comum' os valores de $\boldsymbol{cos}(\pi)$ ou $\boldsymbol{cos}(270^{o})$. Outros dois erraram o valor de $\boldsymbol{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ e o último errou o sinal de $\boldsymbol{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ (exemplo de registro na **Ilustração 21**, a seguir).

Pode-se deduzir que, mesmo utilizando recursos mnemônicos e tentando visualizar a circunferência trigonométrica, os alunos não foram capazes de lembrar-se do que haviam estudado. Isto caracteriza a não apreensão de conceitos: não se consegue resgatá-los quando necessário.

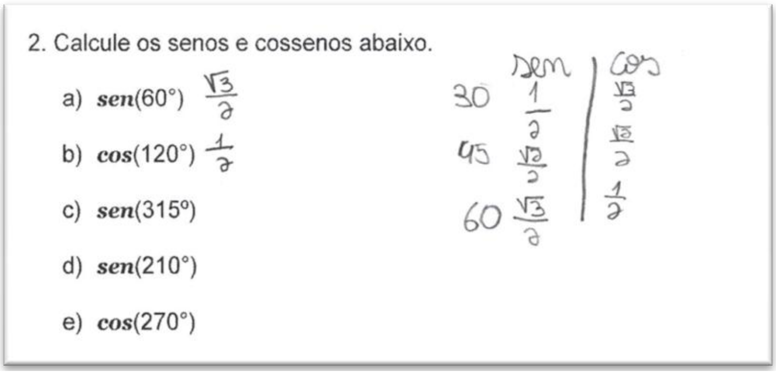
Ilustração 21 – Figura: Validação – questão 2, teste de sondagem: aluno com registro de *tabela* e ciclo.



Fonte: protocolos de pesquisa.

Sete alunos explicitaram apenas o uso da *tabela* (**Ilustração 22**). Destes, dois fizeram todos os itens, sendo que um errou alguns sinais e outro errou sinais e valores. Cinco deixaram itens incompletos, e do que foi respondido, só estavam coretos os valores correspondentes a ângulos no 1º quadrante.

Ilustração 22 – Figura: Validação – questão 2, teste de sondagem: aluno com registro só de *tabela*.



2. Calcule os senos e cossenos abaixo.

a) $sen(60°)$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $cos(120°)$ $\frac{1}{2}$

c) $sen(315º)$

d) $sen(210°)$

e) $cos(270°)$

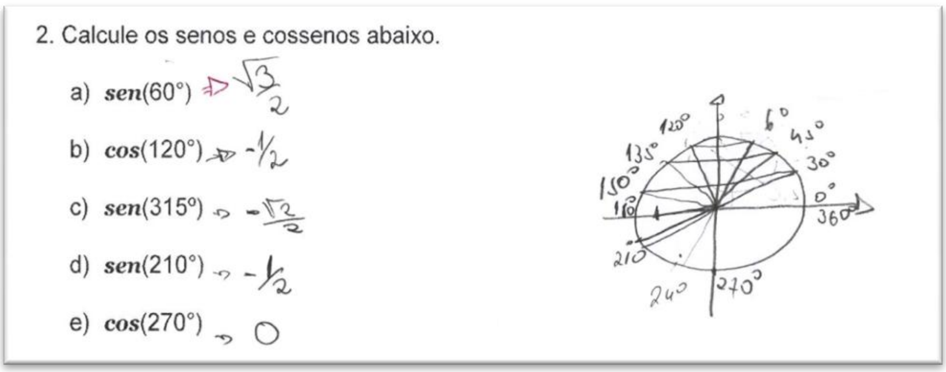
	sen	cos
30	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Fonte: protocolos de pesquisa.

Esses resultados já eram esperados, uma vez que a *tabela* só traz valores de ângulos do 1º quadrante, e uma das principais dificuldades é a redução ao primeiro quadrante para a determinação de seno e cosseno de ângulos maiores do que 90º.

Dois alunos explicitaram apenas o esboço do ciclo trigonométrico na folha. Um deles fez todos os itens corretamente (**Ilustração 23**), demonstrando correta apreensão dos conceitos relacionados à circunferência trigonométrica, inclusive as representações de seno e cosseno e a redução ao 1º quadrante. O outro aluno deixou a maioria dos itens das questões 2 e 3 em branco, fazendo apenas quatro e errando um dos sinais. Talvez tenha apenas memorizado a figura, sem reter os conceitos a ela relacionados.

Ilustração 23 – Figura: Validação – questão 2, teste de sondagem: aluno com registro apenas de ciclo.



2. Calcule os senos e cossenos abaixo.

a) $sen(60°) \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $cos(120°) \Rightarrow -\frac{1}{2}$

c) $sen(315º) \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $sen(210°) \Rightarrow -\frac{1}{2}$

e) $cos(270°) \Rightarrow 0$

Fonte: protocolos de pesquisa.

Quanto aos dezessete alunos que não explicitaram o uso da *tabela* nem do ciclo, onze responderam de dois a três itens, deixando quase tudo em branco, um deixou a 3ªquestão em branco e errou um item da 2ª questão, e cinco fizeram todos os itens. Destes, um acertou tudo, dois erraram dois itens e dois só acertaram dois itens. Não foi possível tirar conclusões sobre este grupo, pois não havia registro de como haviam obtido as respostas.

A partir dos resultados do teste de sondagem, inferiu-se que a turma, de modo geral, não havia apreendido os conceitos relativos à Trigonometria no ciclo.

Alguns haviam memorizado valores, como pudemos notar pelos comentários durante a aplicação do teste de sondagem. Outros utilizavam artifícios como a *tabela*.

Chamou à atenção, ainda, a postura frente ao teste de sondagem. Enquanto estávamos apresentando a proposta à turma, os alunos se mostraram interessados, inclusive porque os Números Complexos estavam sendo estudados naquele momento. Porém, ao receberem o teste de sondagem com as questões relativas à Trigonometria, não se mostraram muito dispostos a fazê-lo, alegando que "não lembravam mais" (sic), ou perguntando à professora se "ia mesmo precisar daquilo em Números Complexos" (sic), uma vez que a forma trigonométrica ainda não havia sido apresentada. Esta atitude deu uma ideia das dificuldades que seriam expostas no teste de sondagem.

6.3.2 Lista 1

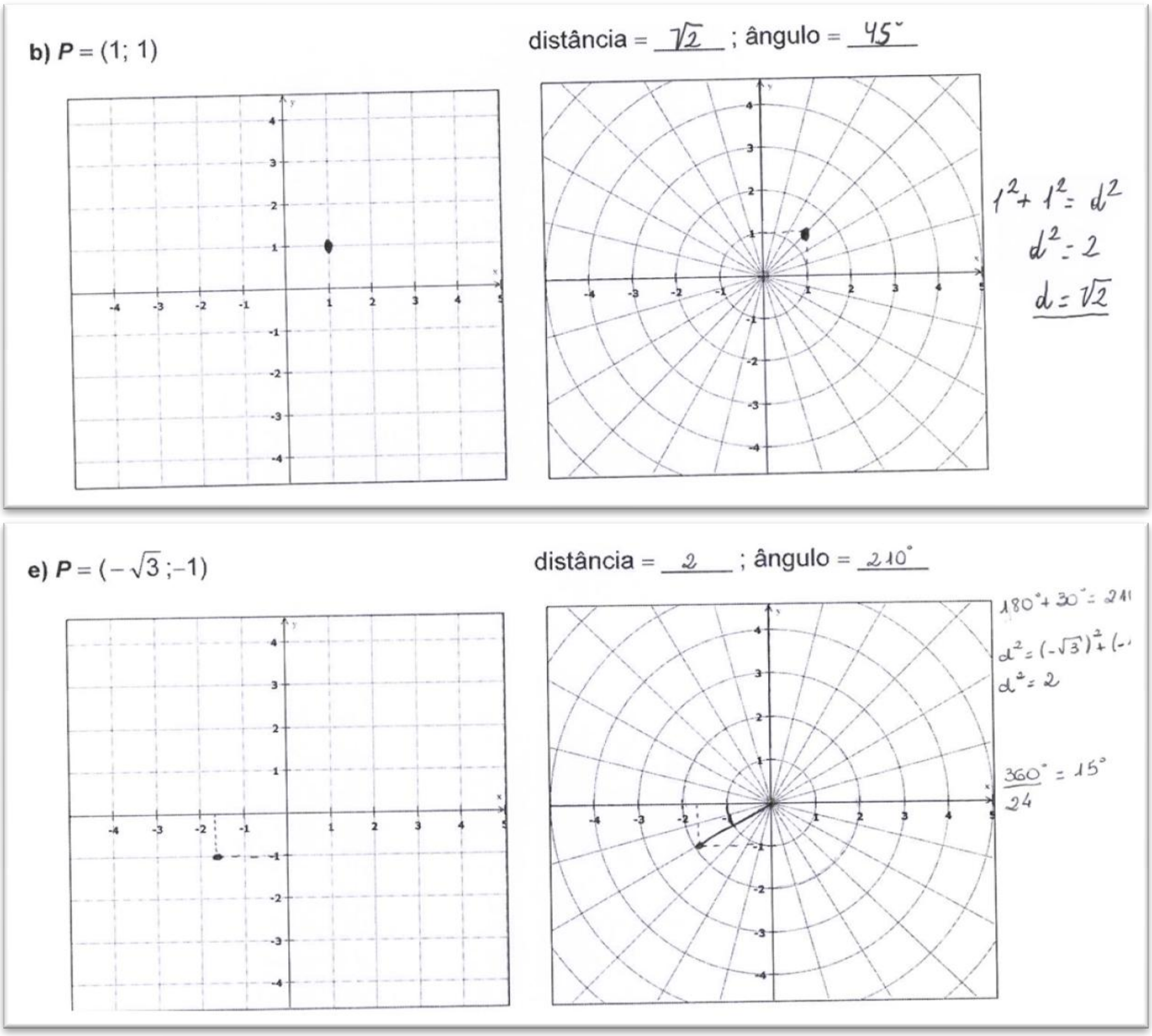
A Lista 1 foi aplicada no dia 26 de abril de 2011, às 16h10min, terminando às 18h. Neste dia, havia vinte e quatro alunos presentes.

Conforme combinado com a professora regente, já haviam sido apresentadas tanto a forma algébrica quanto a forma trigonométrica dos Números Complexos. No entanto, não haviam sido feitos exercícios sobre a forma trigonométrica.

Na questão 1, trabalhou-se com a representação gráfica de pontos nos planos cartesiano e polar, sem dizer neste momento que o “outro” plano era o polar. Pedia-se apenas que encontrassem a distância do ponto dado à origem e determinassem o ângulo formado pela parte positiva do eixo $\boldsymbol{Ox}$ e pelo segmento $\boldsymbol{OP}$.

Nesta questão, diferentemente do que aconteceu no teste exploratório, os alunos não sentiram necessidade de usar seno e cosseno para encontrar o ângulo, usando-os apenas na questão seguinte, após a explicação sobre a relação entre os dois sistemas de coordenadas. Eles encontraram outras formas de resolver os itens, tais como descobrir quanto cada setor valia em graus e multiplicar pelo número de setores, marcar o ponto, entre outros (**Ilustração 24**).

Ilustração 24 – Figura: Validação – respostas à questão 1, Lista 1.



Fonte: protocolos de pesquisa.

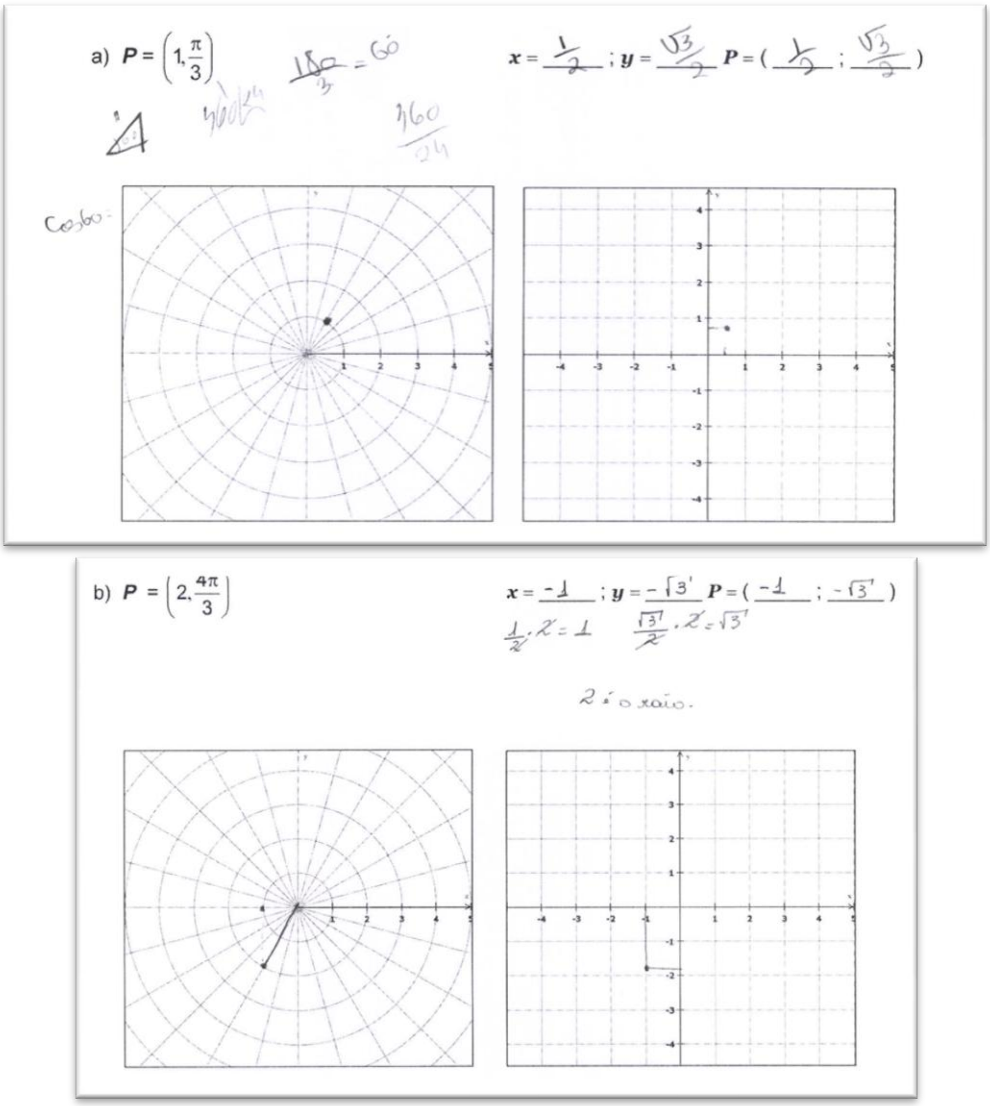
Em seguida, foi explicada a parte teórica de Coordenadas Polares, mostrando o plano polar e adotando a divisão em 24 setores iguais.

Frisou-se bastante que o ponto marcado em coordenadas cartesianas era **o mesmo** ponto marcado em Coordenadas Polares.

Mostrou-se a aplicação dessas *novas* coordenadas na análise do ciclo trigonométrico, e chamou-se atenção para o fato de que um mesmo ponto representava um ângulo sob a ótica das Coordenadas Polares e ao mesmo tempo o cosseno e o seno deste ângulo, em coordenadas retangulares. Isto permite visualizar o sinal do seno e do cosseno do ângulo, pois o sinal da **abscissa** será o sinal do **cosseno**, e o da **ordenada** será o do **seno**.

Na questão 2, foram dados pontos em Coordenadas Polares para que fossem representados graficamente e, em seguida, escritos em coordenadas cartesianas (**Ilustração 25**). Nesse momento foi relembrada a redução ao 1º quadrante para encontrar os valores de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, pois já havia sido explicado que $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ eram, respectivamente, os valores do cosseno e do seno do ângulo em Coordenadas Polares, multiplicados pela coordenada radial do ponto (o raio). Vale ressaltar aqui que um dos alunos observou tal fato e explicou a alguns colegas, antes mesmo de ter sido mencionado pela professora em formação.

Ilustração 25 – Figura: Validação – respostas à questão 2, Lista 1.



Fonte: protocolos de pesquisa.

A Lista 1 foi fundamental para que compreendessem as Coordenadas Polares, visto que era um conteúdo totalmente novo para eles. Os alunos estavam bastante interessados, sempre perguntando, tirando dúvidas e acompanhando a atividade. Alguns estavam inclusive à frente do que era feito no quadro, e contribuíam explicando uns aos outros. Em todos os itens os alunos participavam, trocando ideias entre si e respondendo os questionamentos.

Uma das hipóteses que explicaria tal interesse foi a dificuldade percebida por eles mesmos na realização do teste de sondagem, junto ao fato de já saberem que precisariam rever o assunto para compreender a forma trigonométrica.

Ao final desta lista havia um questionário, cuja frequência de respostas dos alunos encontra-se na **Ilustração 26**. Dois deles não responderam. A **Ilustração 27** traz exemplos de justificativas daqueles que responderam "sim" à última pergunta.

Ilustração 26 – Figura: Validação – frequência de respostas ao questionário, Lista 1.

Em termos de conhecimento do assunto (coordenadas polares), a participação nessas atividades acrescentou:

( ) nada. (7) algumas informações novas. (14) muitas informações novas. (1) tudo foi novidade.

O tempo das atividades referentes à introdução de coordenadas polares foi:

( ) muito longo. (3) um pouco longo. (19) "normal". ( ) rápido.

Estas atividades contribuíram para um melhor entendimento da circunferência trigonométrica?

(21) sim. (1) não.

Por quê?

Fonte: protocolos de pesquisa.

Ilustração 27 – Figura: Validação – respostas à pergunta do questionário, Lista 1.

porque temos bastantes gráficos que "abrem" nossa mente.

Por quê? Para melhor visualização dos graficos trabalhados

Por quê? Aprendi a visualizar melhor o gráfico da circunferência trigonométrica.

Fonte: protocolos de pesquisa.

6.3.3 Lista 3

Inicialmente prevista para ser aplicada entre as Listas 1 e 3, em função do tempo e também por uma questão de conveniência, a Lista 2 foi aplicada por último.

Para manter a ordem cronológica, a Lista 3 será analisada antes da Lista 2.

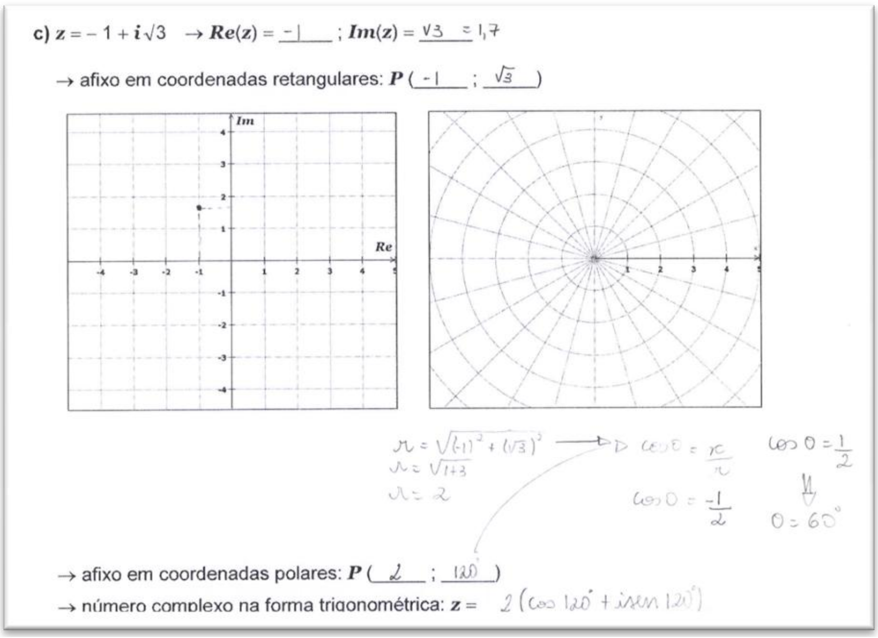
A Lista 3 foi aplicada no dia 27 de abril de 2011, no horário de 16h10min às 18h, para dezenove alunos. Destes, apenas quatorze haviam participado da aplicação da Lista 1, no dia anterior.

Na introdução, foram relembradas as formas algébrica e trigonométrica.

Na primeira questão, foram dados cinco Números Complexos na forma algébrica, para que fossem representados graficamente (em coordenadas cartesianas e polares) e em seguida escritos na forma trigonométrica.

Os dois primeiros itens desta questão foram resolvidos juntamente com os alunos, sempre fazendo conexão entre o ponto no plano de Argand-Gauss e a forma algébrica do número, e entre o ponto no plano polar e a forma trigonométrica do número, frisando que "é o mesmo número, representado de maneiras diferentes". Os outros itens foram feitos pelos alunos, e eles mesmos explicaram como haviam resolvido. A partir de suas falas, foi feita a correção no quadro. Houve basicamente uma transcrição com algumas explicações adicionais, uma vez que os itens haviam sido feitos corretamente pelos alunos (**Ilustração 28**).

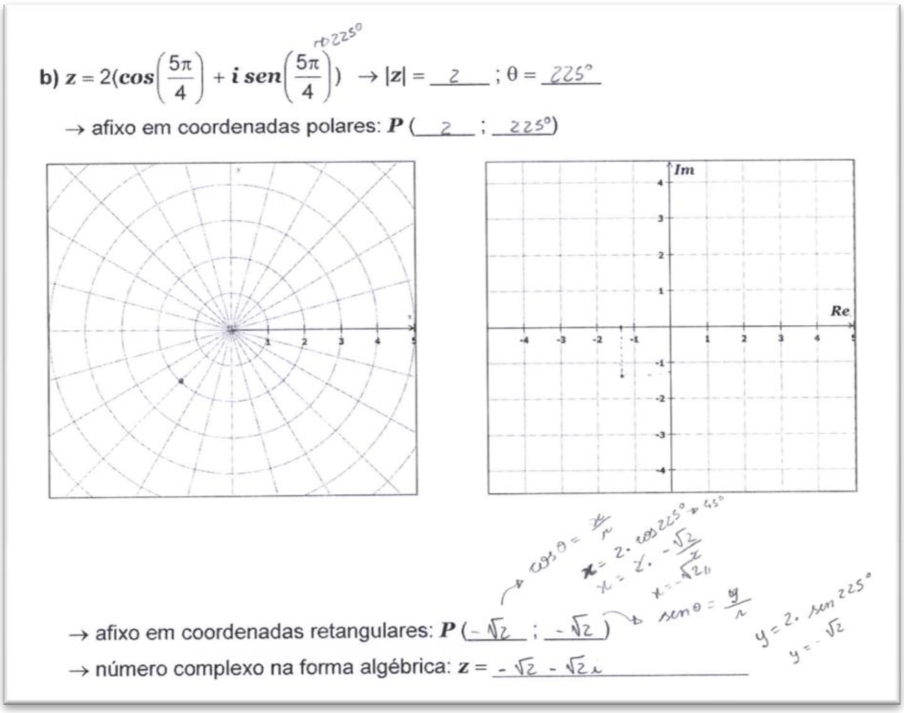
Ilustração 28 – Figura: Validação – resposta à questão 1, Lista 3.



Fonte: protocolos de pesquisa.

Na questão 2, os Números Complexos estavam na forma trigonométrica, e os alunos precisavam representá-los no plano polar e no plano cartesiano, descobrindo primeiro as coordenadas retangulares para depois escrevê-los na forma algébrica (**Ilustração 29**).

Ilustração 29 – Figura: Validação – resposta à questão 2, Lista 3.



Fonte: protocolos de pesquisa.

Os alunos resolveram muito bem as duas questões da lista, relacionando rapidamente o módulo e o argumento do número complexo às Coordenadas Polares do ponto que o representava. Também demonstraram mais segurança na representação de ângulos maiores do que 90º na circunferência trigonométrica, bem como em sua redução ao primeiro quadrante para a determinação de seno e cosseno. Participaram animadamente, inclusive explicando aos colegas que estavam ausentes à última aula.

Pudemos observar que o fato de estarem entendendo e conseguindo fazer os exercícios serviu-lhes de estímulo, assim como a visualização proporcionada pela marcação dos pontos nos planos retangular e polar.

Ao final desta lista havia também um questionário, cujas respostas estão resumidas nas **Ilustrações 30 e 31**.

Ilustração 30 – Figura: Validação – frequência de respostas ao questionário, Lista 3.

Em termos de conhecimento do assunto (forma trigonométrica de números complexos), a participação nessas atividades acrescentou:

( ) nada. (2) algumas informações novas. (15) muitas informações novas. ( ) tudo foi novidade.

O tempo das atividades referentes a números complexos (Lista 3) foi:

(3) muito longo. (2) um pouco longo. (10) "normal". (2) rápido.

Estas atividades contribuíram para um melhor entendimento da forma trigonométrica de números complexos?

(17) sim. ( ) não.

Por quê?

Fonte: protocolos de pesquisa.

Ilustração 31 – Figura: Validação – respostas à pergunta do questionário, Lista 3.

Por quê?

Porque aprendo nº complexo na forma algébrica e na forma trigonomé-
trica.

Porque facilitou o raciocínio.

onseguiu passar todas informações importantes para o nosso aprendizac

Fonte: protocolos de pesquisa.

6.3.4 Lista 2

Após o término da 3ª lista, soube-se que a turma teria um tempo vago dois dias antes da avaliação sobre Números Complexos. Propôs-se então que fosse utilizado para fazer a Lista 2. Aqueles que optassem por fazê-la receberiam uma cópia com o gabarito ao final da resolução, para ajudá-los nos estudos.

Esta lista foi aplicada no dia 03 de maio de 2011, no horário vago da turma, de 17h10min às 18h, para treze alunos que demonstraram interesse em participar.

Dos alunos presentes, nove haviam participado da 1ª e da 2ª atividades propostas na semana anterior. Dois não haviam participado de atividade anterior alguma, um só da primeira e outro só da segunda.

Esta lista foi respondida pelos alunos sem auxílio algum, pois nosso objetivo era utilizar sua análise para ter ideia da contribuição do trabalho realizado.

Analisar-se-ão aqui apenas as respostas dos nove alunos que haviam participado de todas as atividades propostas.

Foi possível perceber que eles ficaram à vontade para fazer a lista, bem tranquilos, e não houve dúvidas. Nada perguntaram, terminando a lista rapidamente, em menos de um tempo de aula.

A Lista 2 é composta por duas questões. Nos três primeiros itens da primeira questão, eram dados pontos em coordenadas cartesianas, para que fossem representados graficamente tanto no plano cartesiano quanto no plano polar, e, em seguida, escritas suas Coordenadas Polares. Os três itens subsequentes traziam os pontos em Coordenadas Polares, e, depois de representá-los graficamente, o aluno deveria escrever suas coordenadas cartesianas.

Na segunda questão, o aluno deveria considerar os pontos da primeira questão como afixos de Números Complexos, e sendo assim, escrevê-los nas formas algébrica e trigonométrica.

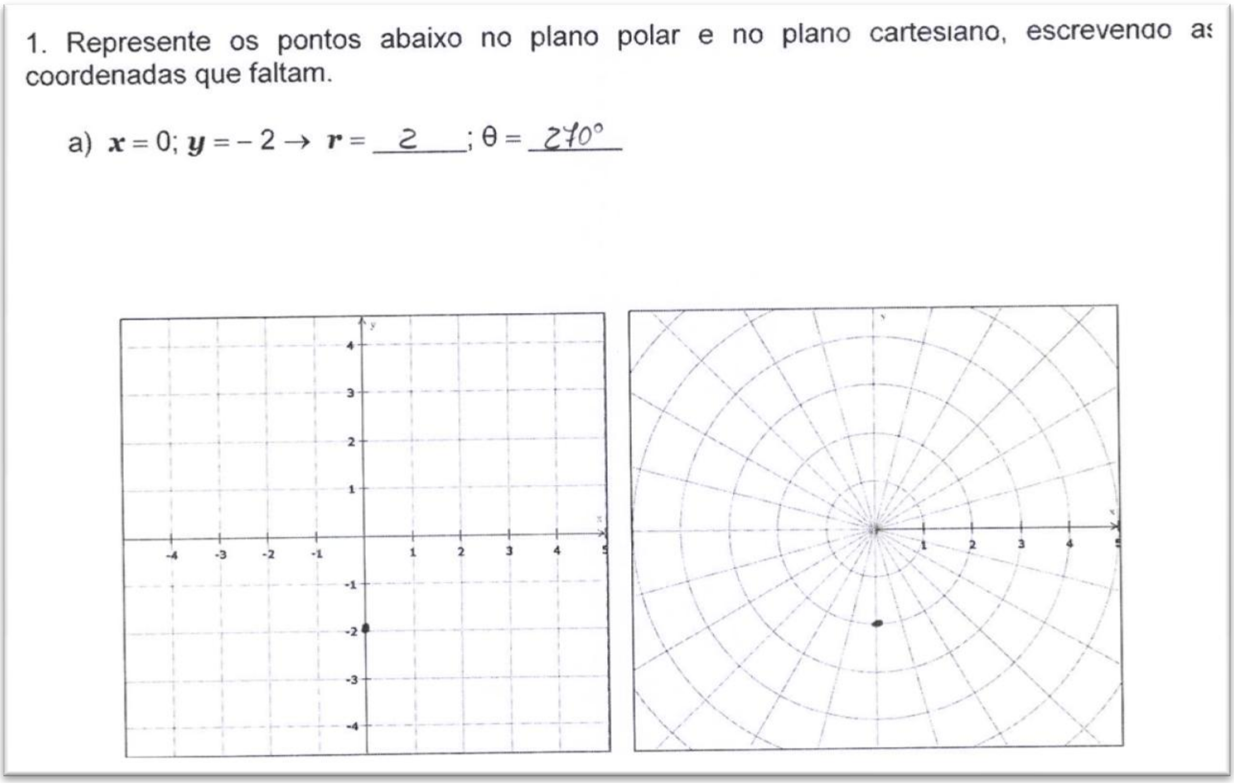
Observou-se que a primeira questão foi feita com facilidade. Os alunos conseguiram efetuar o tratamento de representações – dentro do registro gráfico, e a conversão de registros – do algébrico para o gráfico e vice-versa, sem problemas.

Dos seis itens da primeira questão, só houve um erro de sinal no item (a), no qual o valor do raio foi -2 (acredita-se inclusive que tenha sido um descuido, pois o aluno acertou todos os outros itens). Muitos fizeram o item (a) sem necessitar de cálculos, o que antes da atividade seria impensável, segundo eles mesmos. No item (b), a redução ao primeiro quadrante foi feita sem dificuldade. Um exemplo de resolução dos itens (a) e (b) da questão 1 encontra-se nas **Ilustrações 32** e **33**, a seguir.

No item (e), houve três erros, na ordenada do ponto. Quanto à representação gráfica, houve quatro erros de marcação no plano polar, que acredita-se tenham sido por falta de atenção, já que a diferença foi de apenas um setor, e a posição do ponto pode ter ocasionado um erro de visualização. Um exemplo de resolução do item (e) questão 1 encontra-se na **Ilustração 34**, a seguir.

Um fato interessante observado durante a realização do exercício foi o de que os alunos deram mais ênfase à resolução da parte algébrica do que ao registro gráfico. Uma possível causa seria o histórico do ensino, que prioriza a representação algébrica. Outra seria a própria maneira pela qual a questão foi elaborada.

Ilustração 32 – Figura: Validação – resposta ao item (a), questão 1, Lista 2.

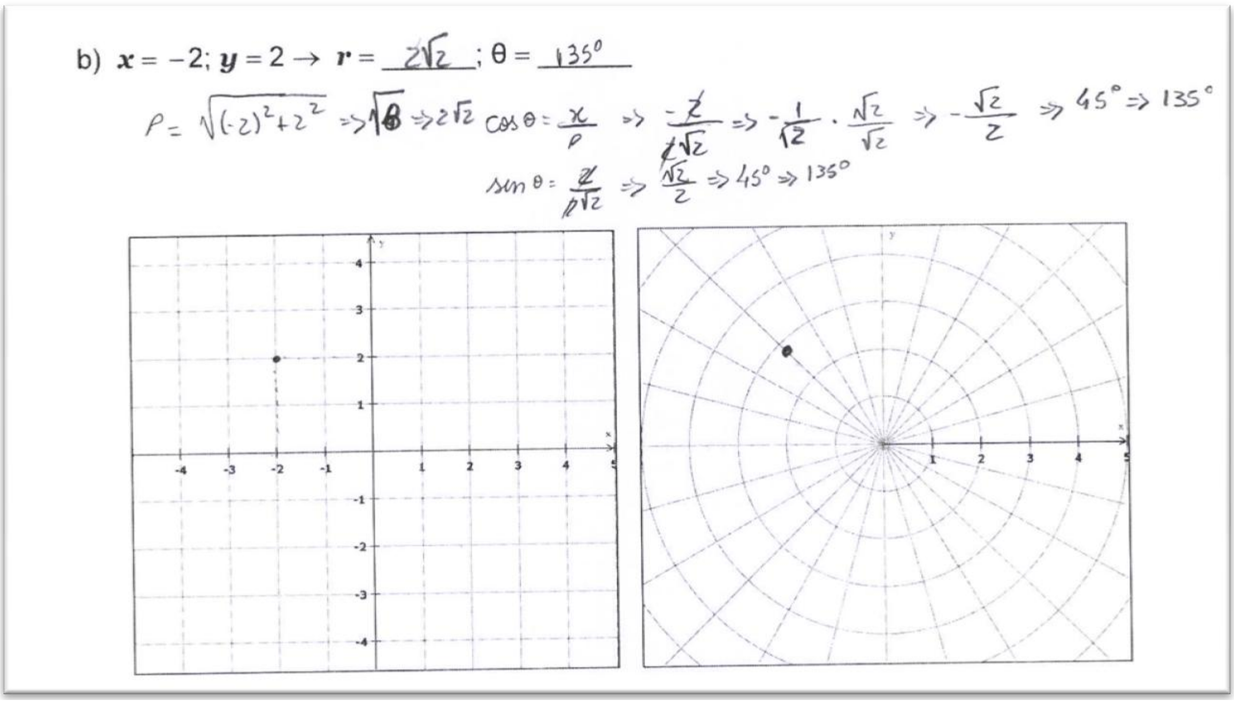


1. Represente os pontos abaixo no plano polar e no plano cartesiano, escrevendo as coordenadas que faltam.

a) $x = 0$; $y = -2 \rightarrow r =$ _2_; $\theta =$ _270°_

Fonte: protocolos de pesquisa.

Ilustração 33 – Figura: Validação – resposta ao item (b), questão 1, Lista 2.



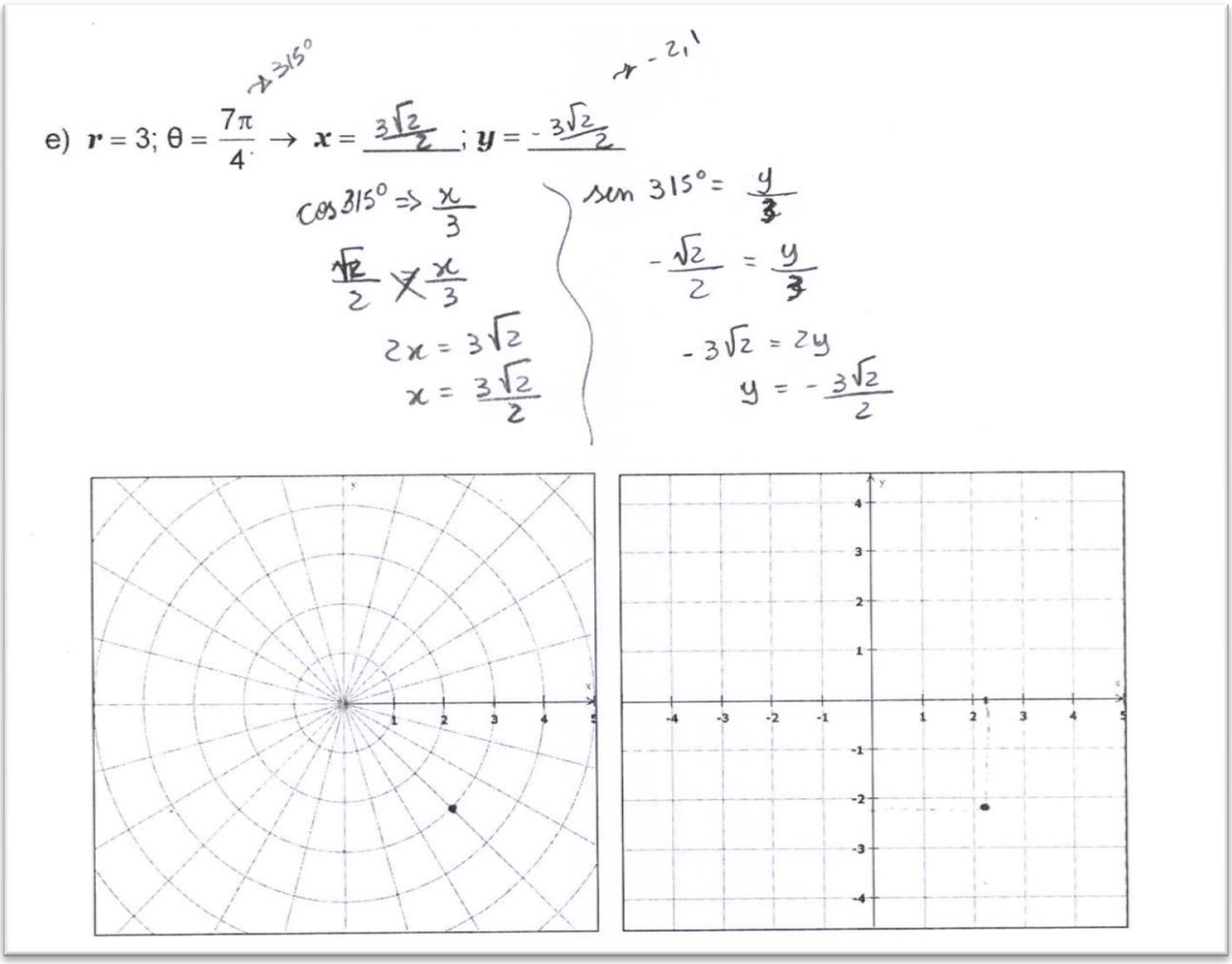
b) $x = -2$; $y = 2 \rightarrow r =$ _$2\sqrt{2}$_; $\theta =$ _135°_

$\rho = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} \Rightarrow \sqrt{8} \Rightarrow 2\sqrt{2}$ $\cos\theta = \frac{x}{\rho} \Rightarrow \frac{-2}{2\sqrt{2}} \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 45° \Rightarrow 135°$

$\sin\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 45° \Rightarrow 135°$

Fonte: protocolos de pesquisa.

Ilustração 34 – Figura: Validação – resposta ao item (e), questão 1, Lista 2.



Fonte: protocolos de pesquisa.

Outro fato observado ao analisar as questões respondidas por eles foi o de que nenhum aluno utilizou o ângulo em radianos, mesmo havendo três itens na 1ª questão com pontos em Coordenadas Polares onde o ângulo estava em radianos. (**Ilustração 34**, acima.)

A segunda questão foi feita tão rapidamente quanto a primeira, associando de imediato os *afixos* dados com sua representação algébrica. Houve apenas uma inversão de posição nas respostas dos três últimos itens, feita pela maioria. Um exemplo está na **Ilustração 35**.

Pôde-se perceber que os alunos mostraram-se mais seguros e saíram-se bem melhor no que diz respeito aos conceitos da Trigonometria, em relação ao teste de sondagem. Além disso, o fato de alguns itens desta lista terem sido feitos sem a necessidade de cálculos e o imediato entendimento da questão 2 da Lista 2 indicam que a aplicação das Coordenadas Polares aos números complexos foi plenamente compreendida por eles.

Ilustração 35 – Figura: Validação – resposta à questão 2, Lista 2.

2. Agora, se cada ponto da questão 1 fosse na verdade o afixo de um número complexo, qual seria a forma algébrica e a forma trigonométricla de cada número complexo?

a) forma algébrica: z = $-2i$

forma trigonométrica: z = $2(\cos 270° + i\, sen\, 270°)$

b) forma algébrica: z = $-2+2i$

forma trigonométrica: z = $2\sqrt{2}(\cos 135° + i\, sen\, 135°)$

c) forma algébrica: z = $-1-\sqrt{3}i$

forma trigonométrica: z = $2(\cos 240° + i\, sen\, 240°)$

d) forma trigonométrica: z = $\sqrt{3}+i$

forma algébrica: z = $2(\cos 30° + i\, sen\, 30°)$

e) forma trigonométrica: z = $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

forma algébrica: z = $3(\cos 315° + i\, sen\, 315°)$

f) forma trigonométrica: z = $-2+2\sqrt{3}i)$

forma algébrica: z = $4(\cos 120° + i\, sen\, 120°)$

Fonte: protocolos de pesquisa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa e a escrita realizadas promoveram grande aprendizado sobre os assuntos estudados.

Não se imaginava que as Coordenadas Polares, recém aprendidas, poderiam ser usadas também na representação gráfica de Números Complexos na forma trigonométrica, nem que a conversão da escrita algébrica para a representação gráfica seria tão evidente e tão simples após a conexão com essas *novas* coordenadas.

Ao longo da aplicação, observou-se que a introdução de Coordenadas Polares no Ensino Médio pode ser feita sem problemas, e que os alunos não apresentaram qualquer dificuldade de aprendizagem.

Na aplicação das Coordenadas Polares à Trigonometria, foi destacado que o mesmo ponto possuía duas representações diferentes, que são: o raio e o ângulo; e os valores de $\boldsymbol{x}$ e de $\boldsymbol{y}$. Assim, quando o ponto está representado no plano polar, duas características são percebidas de imediato: seu raio e seu ângulo. Se o raio for 1, está-se falando da circunferência trigonométrica, e assim imediatamente temos o valor do cosseno e do seno desse ângulo, já que o valor do cosseno é a abscissa do ponto e o valor do seno é a ordenada do ponto, em coordenadas retangulares.

Quando o ponto está no plano cartesiano, temos o valor do cosseno e do seno, conseguindo visualizar seus sinais, o que permite a identificação do quadrante em que o ângulo polar está.

Acredita-se que tal visualização auxilia no entendimento de Trigonometria, pois o ângulo, seu cosseno e seu seno são facilmente interligados a partir do entendimento das duas representações do ponto no plano (cartesiano e polar) e da relação entre elas.

Na aplicação das Coordenadas Polares aos Números Complexos, a conversão do registro algébrico para a representação gráfica foi feita de maneira simples e rápida, deixando pra trás qualquer dúvida.

Pelo fato de ter dado as coordenadas do ponto (ou cartesiano ou polar), só se pode garantir que foi feita a conversão do registro algébrico para o gráfico, mas não o contrário. Na transformação do tratamento algébrico, o aluno utilizou a escrita algébrica do número complexo, talvez sem efetuar a conversão da representação gráfica para a escrita algébrica. Isto poderia ocorrer se fosse dada a representação gráfica sem mencionar as coordenadas. Assim, garantir-se-ia que tal conversão fosse feita.

Uma crítica a ser feita sobre este trabalho foi a valorização, sem perceber, da escrita álgebra, uma vez que não se aventou a possibilidade de colocar exercícios da conversão gráfica para algébrica. Houve maior ênfase na transformação de tratamento algébrico (forma trigonométrica para a algébrica, e vice-versa), exatamente como os autores pesquisados citaram.

Segundo as observações feitas ao longo das aulas e relatos dos alunos, a introdução de Coordenadas Polares no estudo de Trigonometria e Números Complexos contribuiu para a melhoria do processo de ensino aprendizagem. Teoricamente, isto pode ser explicado pelo fato de que foram feitas pelo menos duas conversões de registros, e segundo Duval, tais conversões são essenciais para a compreensão do objeto matemático como um todo.

Uma sugestão para a continuidade deste trabalho seria propor exercícios no quais é dada a representação gráfica e é pedida a representação algébrica. Isto garantiria a conversão entre a representação gráfica e a escrita algébrica, evidenciando mais uma conversão.

Espera-se que este trabalho contribua para futuros professores, e propicie uma reflexão por parte daqueles que já estão em sala de aula, sobre outras formas de ensinar um conteúdo, distintas da *tradicional*.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da Matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.

ARAÚJO, Nanci Barbosa Ferreira. **Números Complexos**: Uma Proposta de Mudança Metodológica para uma Aprendizagem Significativa no Ensino Médio. Natal, 2006. 111p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – UFRN. Natal: UFRN, 2006. Disponível em: <http://www.ppgecnm.ccet.ufrn.br/publicacoes/publicacao_34.pdf>. Acesso em: set. 2010.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Tradução Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL. **Orientações curriculares para o Ensino Médio**. v.2. 135p. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006.

BRASIL. **Parâmetros curriculares Nacionais**: Ensino Médio. Parte III. 58p. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2000.

CARMO, Manfredo Perdigão do; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. **Trigonometria-Números Complexos**. Rio de Janeiro: IMPA/VITAE, 1992.

CARNEIRO, José Paulo. A geometria e o ensino dos Números Complexos**.** In: Encontro Nacional de educação Matemática (ENEM), VIII. **Anais ...** Recife: SBEM, 2004. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/15/PA07.pdf> acesso: out. 2010.

CERRI, Cristina; MONTEIRO, Martha S. **História dos Números Complexos***.* São Paulo: CAEM - Centro de Aperfeiçoamento de Ensino de Matemática Instituto de Matemática e Estatística da USP, 2001. São Paulo: USP, 2001. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/~martha/caem/complexos.pdf> Acesso em: mai. 2011.

CHEVALLARD, Yves. **La transposición didáctica**: del saber sabio al saber enseñado. Tradução: Claudia Gilman. 3. ed. Buenos Aires: Aique Grupo Editor, 2005.

COSTA, Nielce Lobo da. A História da Trigonometria. In: **Educação Matemática em Revista**, Ano 10, n. 13, março de 2003, p. 60-68. Brasília: SBEM, 2003.

DAMM, Regina Flemming. Registros de Representação. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). **Educação Matemática**: uma (nova) introdução. 3. ed. revista. p. 167-188. São Paulo: EDUC, 2008.

DUVAL, Raymond. **Representation, vision and visualization**: cognitive functions in mathematical thinking. [S. l. : s. n.], 1999.Disponível em: <http://eric.ed.gov/ERICDocs/data/ericdocs2sql/content_storage_01/0000019b/80/1a/

30/a7.pdf>. Acesso em: nov. 2009.

DUVAL, Raymond. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. In: **Educational Studies in Mathematics**, n. 61, p. 103-131. [S. l.]: Springer, 2006. Disponível em <http://www.cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/eudoxus/article/viewFile/162/297>. Acesso em out. 2010.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e Pensamento Humano**: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais (Fascículo I). São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, Sílvia Dias Alcântara (org.). **Aprendizagem em Matemática**. 7. ed. p. 11-33. Campinas, SP: Papirus, 2010.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. 5. ed. São Paulo: UNICAMP, 2008.

GAMBARATO, Renira Rampazzo. Signo, significação, representação. In: **Contemporânea**. n. 4, 2005.1, p. 204-214. Rio de Janeiro: UERJ, 2005. Disponível em: <http://www.contemporanea.uerj.br/pdf/ed_04/contemporanea_n04_18_ReniraRam.pdf>. Acesso em: nov. 2011.

GARBI, Gilberto Geraldo. **A Rainha das Ciências**: Um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2010.

GÓMEZ, Gregório Rodriguez; FLORES, Javier; JIMÈNEZ, Eduardo. **Metodologia de la Investigacion Cualitativa**. Malaga: Ediciones Aljibe, 1996. 378 p.

KLEIN, Marjúnia Edita Zimmer; COSTA, Sayonara Salvador Cabral da. O ensino da trigonometria subsidiado pelas teorias dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud e da Aprendizagem Significativa de David Ausubel. In: Mostra de Pesquisa da Pós-Graduação, III, PUCRS, 2008. **Anais ...** Porto Alegre: PUCRS, 2008. Disponível em: <http://www.pucrs.br/edipucrs/online/IIImostra/EducacaoemCienciaseMatematica/61997%20-%20MARJUNIA%20EDITA%20ZIMMER%20KLEIN.pdf>. Acesso em: set. 2010.

LIMA, Elon Lages et al. **Exame de Textos**: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

LOPES, Adrielle Cristine Mendello; CABRAL, Vanessa Pereira Garcez; ALVES, Fábio José da Costa. Números Complexos na vida real: uma abordagem sobre o ensino e algumas aplicações. In: Encontro Paraense de Educação Matemática (EPAEM), VIII. **Anais ...** Belém: SBEMPA, 2011. Disponível em:<http://www.sbempa.mat.br/Boletim/Anais/secoes%5CCC0103.pdf>. Acesso em: nov. 2011.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). **Educação Matemática**: uma (nova) introdução. 3. ed. revista. São Paulo: EDUC, 2008.

MACHADO, Sílvia Dias Alcântara (org). **Aprendizagem em Matemática**: Registros de representação semiótica. 7. ed. Campinas: Papirus, 2010.

MERRIAM, Sharan. **Case study research in education**: A qualitative approach. San Francisco, CA: Jossey-Bass, 1988.

MOREIRA, Filipe Rodrigues de S. **Trigonometria**. Apostila. São Paulo: ITA, 2005. Disponível em: <http://www.rumoaoita.com/materiais/filipe/apostila_de_trigonometria_filipe.pdf >. Acesso em: jun. 2011

NEVES, Késia Caroline Ramires. **Um exemplo de transposição didática**: o caso das matrizes. Maringá, 2009, 164f. Dissertação (Mestrado em Educação para as Ciências e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá. Maringá, Paraná, 2009. Disponível em: <http://cienciaematematica.vivawebinternet.com.br/media/dissertacoes/e19a9a4b3eaee4a.pdf>. Acesso em: set. 2010.

NÓVOA, Antonio. As ciências da educação e os processos de mudança. In: NÓVOA, Antonio et al. **Ciências de educação e mudança**. Porto: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 1991. p. 18-67.

OLIVEIRA, Francisco Canindé de. **Dificuldades no processo ensino aprendizagem de trigonometria por meio de atividades**. Natal, 2006. 111f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – UFRN, Natal, 2006. Disponível em: <http://www.ppgecnm.ccet.ufrn.br/publicacoes/publicacao_62.pdf>. Acesso em: set. 2010.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática**: uma análise da influência francesa. 2.ed. 2. Reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2008a.

PAIS, Luiz Carlos. Transposição didática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). **Educação Matemática**: uma (nova) introdução. 3. ed. revista. São Paulo: Educ, 2008b. p.11-48.

PEREIRA, Cicero da Silva. Aprendizagem em Trigonometria – Contribuições da Aprendizagem Significativa. In: Encontro Paraibano de Educação Matemática (EPBEM), VI – Monteiro, PB – 09, 10 e 11 de novembro de 2010. **Anais ...** Campina Grande: SBEMPB, 2010. Disponível em: <http://www.sbempb.com.br/anais/arquivos/trabalhos/CC-19398666.pdf>. Acesso em: abr. 2011.

POMMER, Wagner M. Diversas abordagens das regras de sinais nas operações elementares em Z. In: Seminários de Ensino de Matemática/SEMA–FEUSP. **Anais ...** São Paulo: Universidade do Estado de São Paulo, 2010. Disponível em: <http://www.nilsonjosemachado.net/sema20100316.pdf>. Acesso em: nov. 2011.

PONTE, João Pedro M. da. Estudos de caso em educação Matemática. In: **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, Vol. 19, Ano 25, 2006. p. 105-132. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/06-Ponte%20(Estudo%20caso).pdf>. Acesso em: jun. 2010.

QUINTANEIRO, Wellerson. **Representações e definições formais em trigonometria no Ensino Médio**. Rio de Janeiro, 2010. 154f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – UFRJ, Rio de Janeiro, 2010. Disponível em: <http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/23%20Wellerson%20Quintaneiro.pdf >. Acesso em: abr. 2011.

QUINTANEIRO, Wellerson; GIRALDO, Victor; PINTO, Márcia Fusaro. De onde vem a unidade radiano e por que seu uso é necessário? In: Encontro Estadual de Educação Matemática do Rio de Janeiro (EEMAT), 2010, Rio de Janeiro. **Anais ...** v. 1. p. 1-11. Rio de Janeiro: LIMC/UFRJ, 2010

REIS NETO, Raimundo Martins. **Alternativa Metodológica para o Ensino e Aprendizagem de Números Complexos**: Uma Experiência com Professores e Alunos. Belo Horizonte, 2009. 142f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – UFMG, Belo Horizonte, 2009. Disponível em: <http://www.biblioteca.pucminas.br/teses/EnCiMat_ReisNetoR_1.pdf>. Acesso em: ago. 2011.

ROSA, Mário Servelli. **Números Complexos**: Uma abordagem histórica para aquisição do conceito. São Paulo, 1998. 170f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – PUC-SP. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica, 1998. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/mario_servelli_rosa.pdf>. Acesso em: ago. 2011.

SANTOS, Cristiane do S. F.; FERREIRA, Keila dos S. **A História da Trigonometria**. Universidade do Estado do Pará – UEPA, 2009. Disponível em: <http://pt.scribd.com/doc/19942994/A-Historia-da-Trigonometria>. Acesso em: mai. 2011.

SPINELLI, Walter. Nem tudo é abstrato no reino dos complexos. In: Seminários de Ensino de Matemática/SEMA–FEUSP. **Anais ...** São Paulo: FEUSP, 2009. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2009. Disponível em: <http://www.nilsonmachado.net/sema20091027.pdf>. Acesso em: dez. 2010.

VASSALLO NETO, Rafael. **A Utilização De Material Manipulativo Na Construção Do Conceito De Números Complexos**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Severino Sombra. Vassouras: USS, 2010. 96f. Disponível em: <http://*www.uss.br/arquivos/dissertacao-rafael-vfinal.pdf* > acesso em: mai. 2011.

YIN, R. **Case study research**: Design and methods. Newbury Park, CA: Sage, 1984.

YIN, Robert K. **Estudo de Caso**: Planejamento e Métodos. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

APÊNDICES

APÊNDICE A – PRIMEIRA VERSÃO DAS ATIVIDADES

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE
Campus Campos-Centro

Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

Ministério da Educação

Teste de sondagem

1 – O que é um radiano?

---

2 – Calcule os senos e cossenos abaixo.

a) $sen(60°)$

b) $cos(120°)$

c) $sen(315°)$

d) $sen(210°)$

e) $sen(270°)$

3 – Calcule os senos e cossenos abaixo, onde os ângulos estão em radianos.

a) $cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

b) $cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$

c) $sen\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

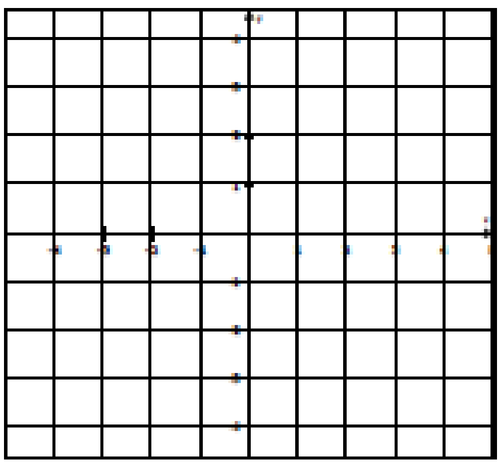
d) $cos(\pi)$

e) $sen\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

4 – Represente graficamente os pontos abaixo:

P (1, 2)

R (-3, 1)



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
FLUMINENSE
Campus Campos-Centro

Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

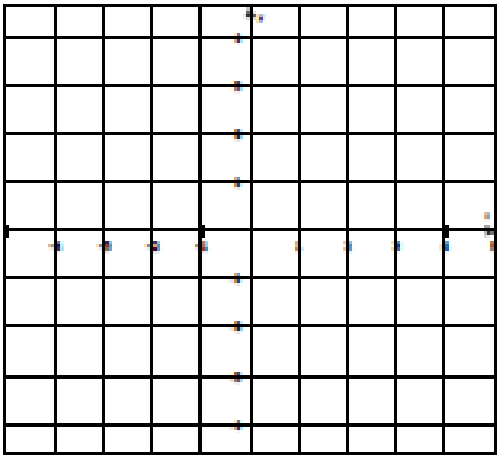
Ministério da Educação

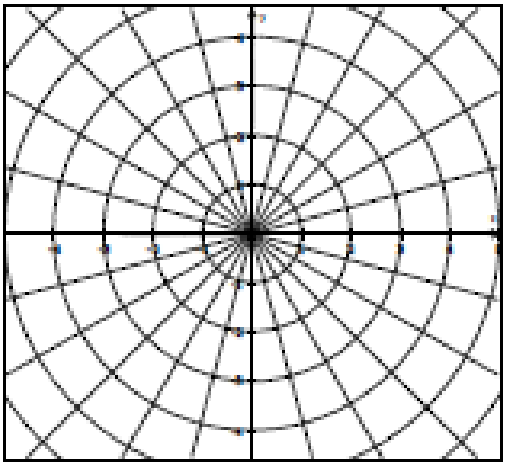
Teste exploratório
Rafaela dos Santos Souza Muniz
Orientadora: Carla Antunes Fontes

Lista 1

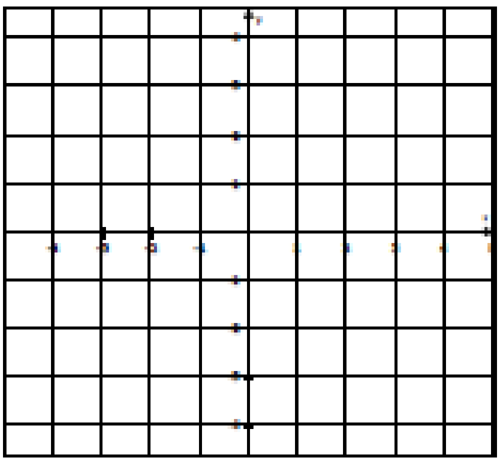
1. Represente graficamente os pontos abaixo.

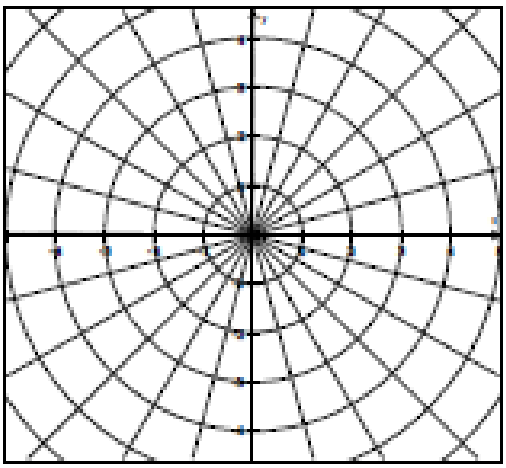
a) $\boldsymbol{P} = (0; 1)$



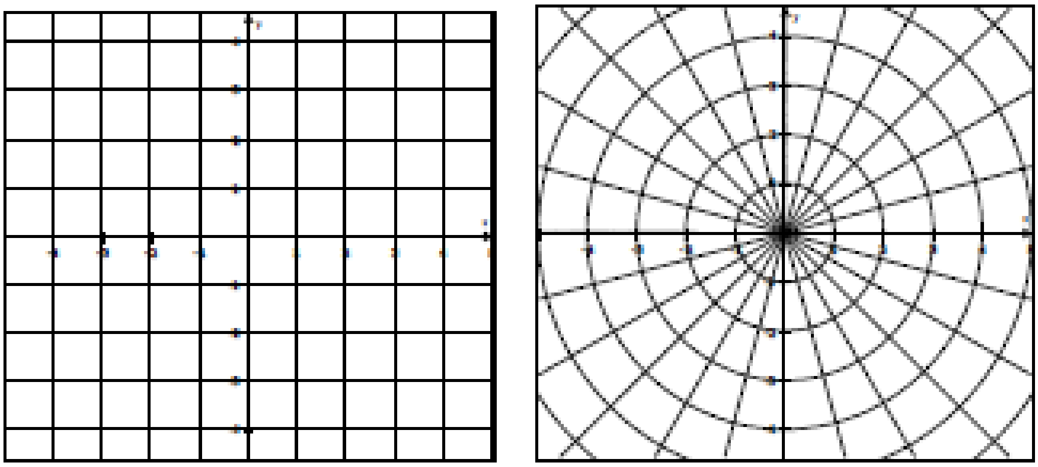


b) $\boldsymbol{P} = (1; 1)$

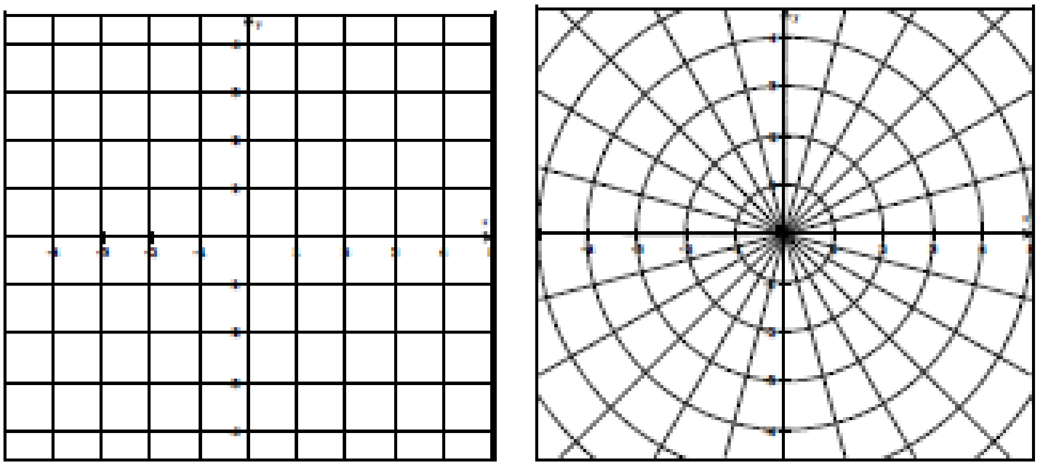




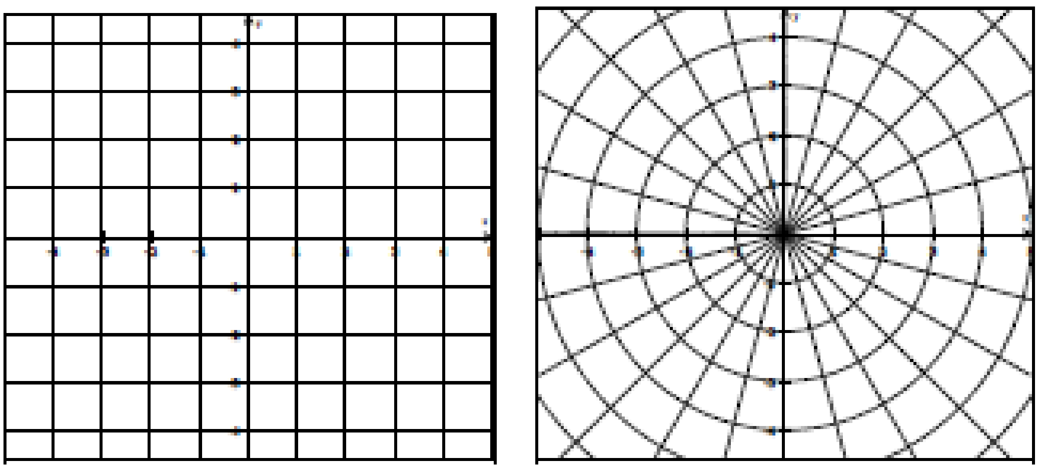
c) $\boldsymbol{P} = (-2; 0)$



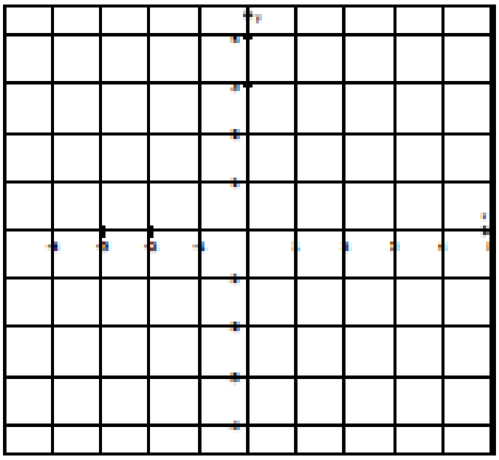
d) $\boldsymbol{P} = (1; -1)$

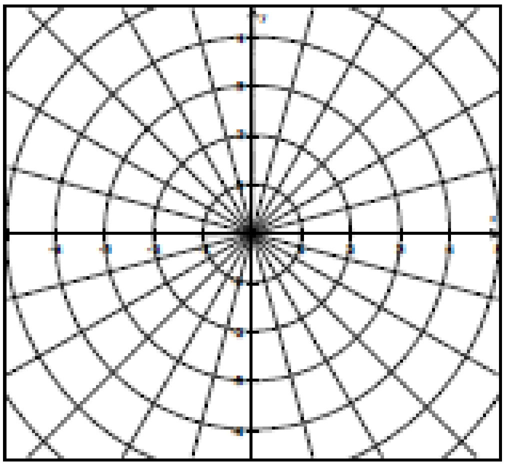


e) $\boldsymbol{P} = \left(-\sqrt{3}; -1\right)$



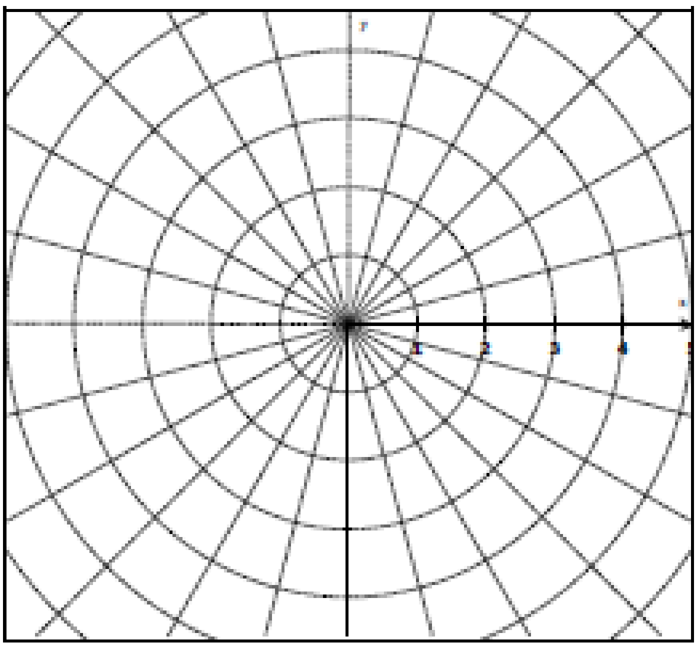
f) $P = \left(-1; \sqrt{3}\right)$





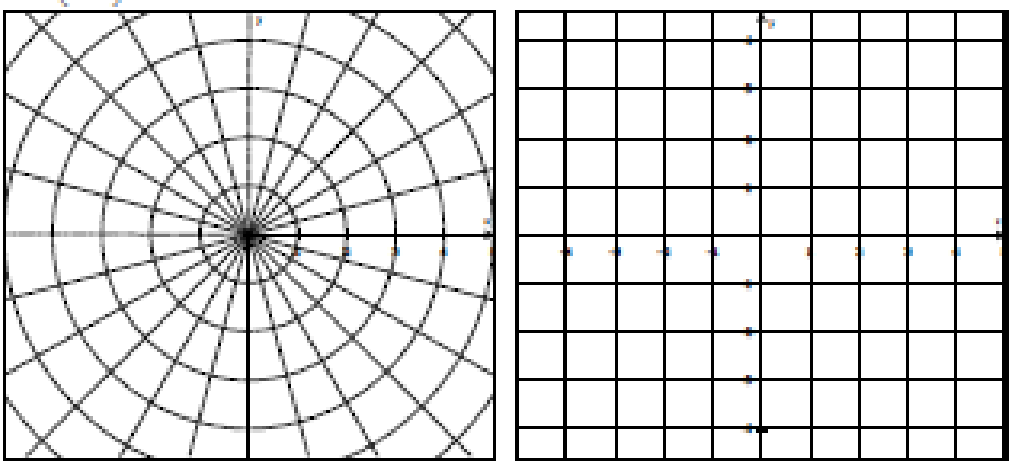
O *Sistema de Coordenadas Polares* consiste num ponto fixo O chamado **pólo** (ou origem) e de um eixo de referência, começando em O, chamado **eixo polar**. Nesse sistema, a cada ponto P (do plano) podemos associar um par de coordenadas (r, θ), onde r é a distância de P ao pólo e θ é o ângulo formado pelo eixo polar e o segmento de reta OP. Convenciona-se que um ângulo é positivo se for medido no sentido anti-horário e negativo se medido no sentido horário.

- Plano das coordenadas polares.

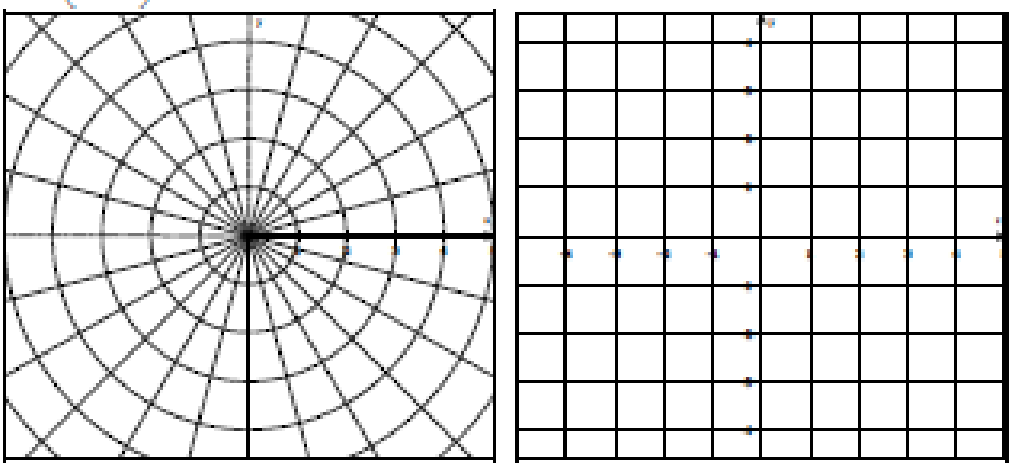


2. Passe das polares para as retangulares.

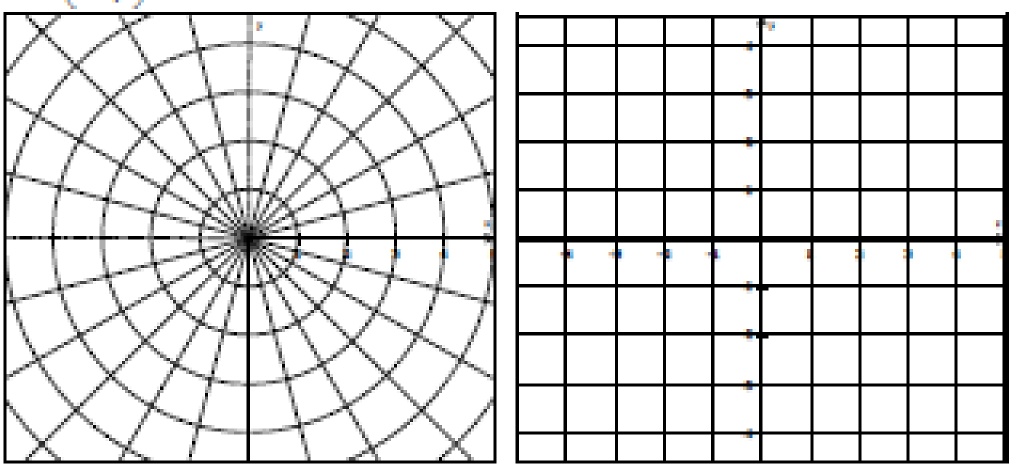
a) $\boldsymbol{P} = \left(1, \frac{\pi}{3}\right)$



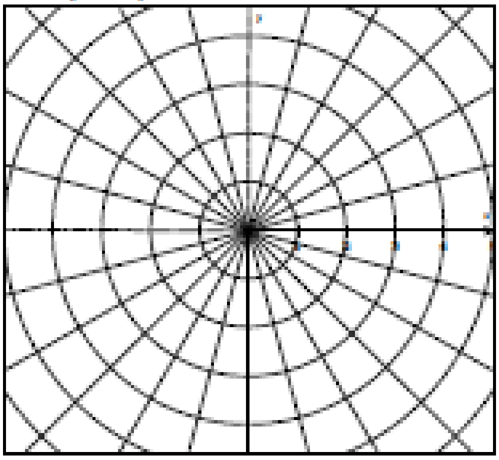
b) $\boldsymbol{P} = \left(2, \frac{4\pi}{3}\right)$

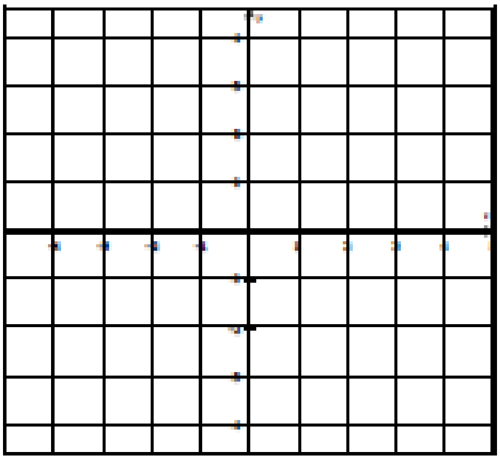


c) $\boldsymbol{P} = \left(1, \frac{5\pi}{4}\right)$



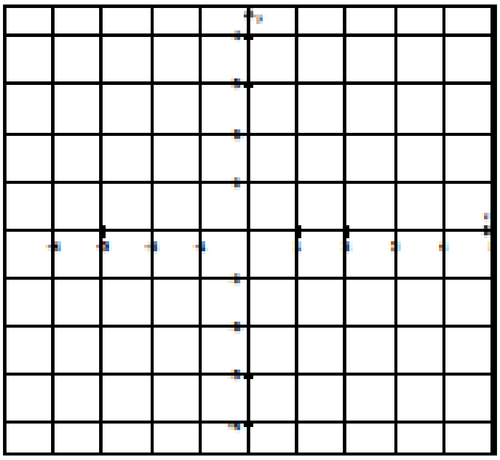
d) $\boldsymbol{P} = \left(3, \frac{7\pi}{4}\right)$

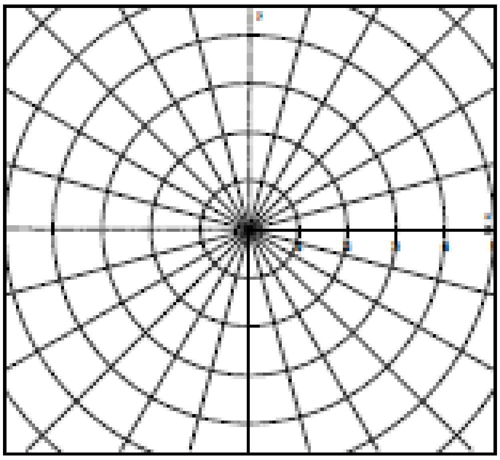




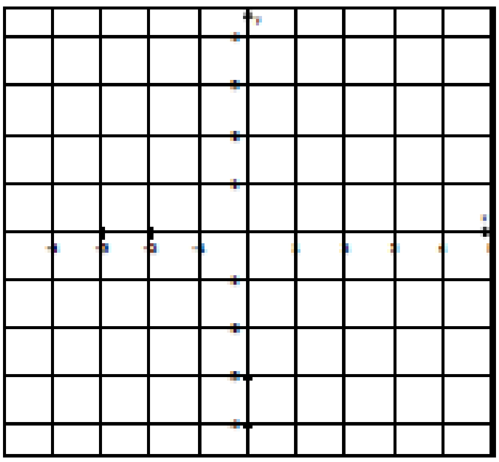
3. Represente os pontos abaixo no plano polar e no plano cartesiano.

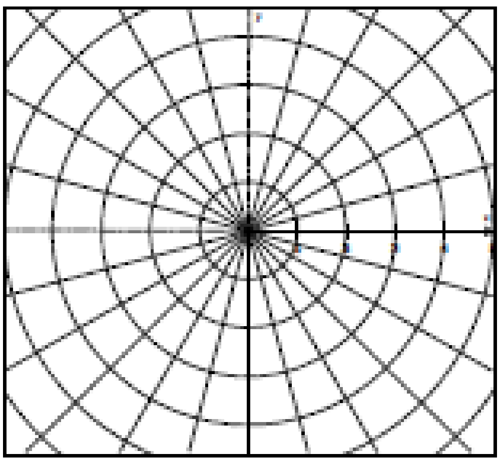
a) $x = -1; y = -\sqrt{3} \rightarrow r =$ ______; $\theta =$ ______



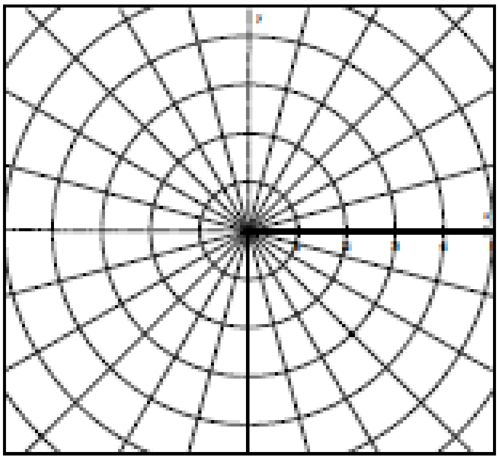


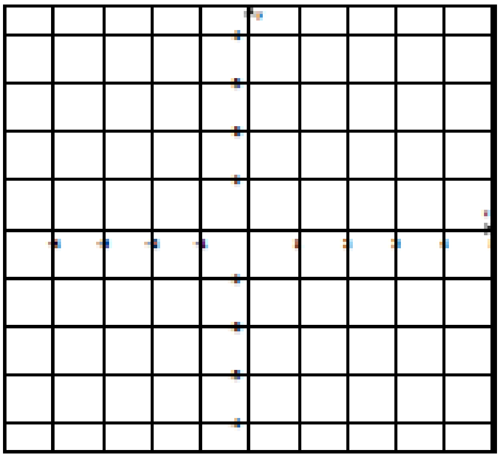
b) $x = -2; y = 2 \rightarrow r =$ ______; $\theta =$ ______



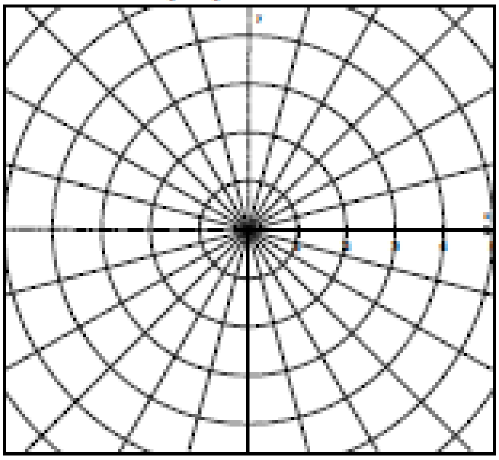


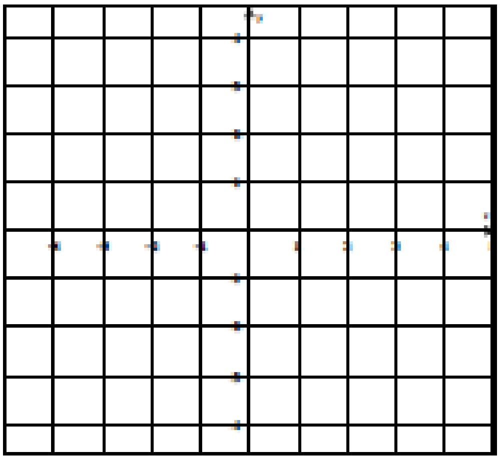
c) $r = 2;\ \theta = \left(\frac{\pi}{6}\right) \rightarrow x =$ ______; $y =$ ______





d) $r = 1;\ \theta = \left(\frac{7\pi}{6}\right) \rightarrow x =$ ______; $y =$ ______



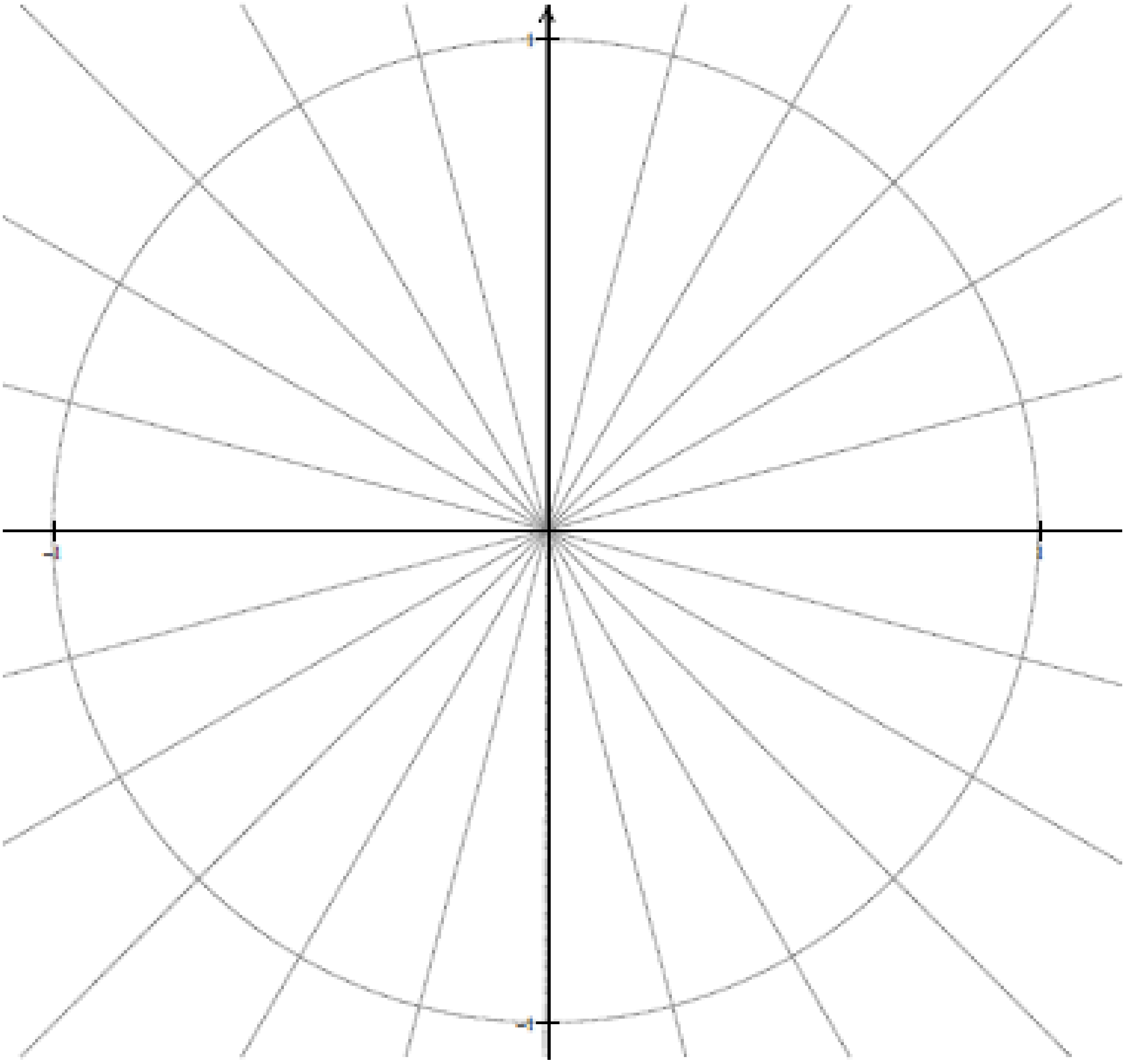


INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE
Campus Campos-Centro
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Ministério da Educação

Teste exploratório

LISTA 2

Vamos "olhar mais de perto" o plano representado em coordenadas polares.



1) Esta é uma circunferência de raio 1. Sobre ela, marque cada ângulo a seguir e, com o auxílio de uma régua, determine seno e cosseno de cada um.

a) 0 rad b) $\pi/2$ rad c) 180° d) 270° e) 150° f) 240° g) $7\pi/4$ rad

2) Em que quadrantes o seno é positivo? E o cosseno? Por quê?

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE
Campus Campos-Centro

Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

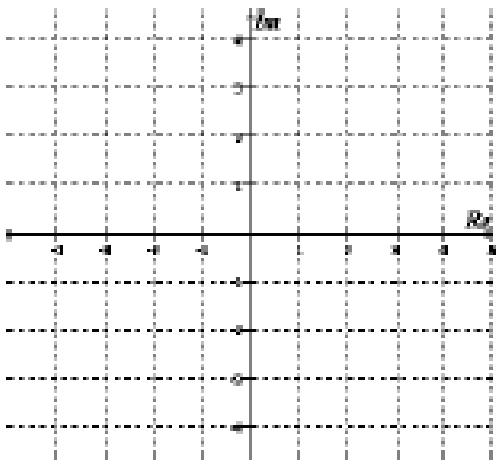
Ministério da Educação

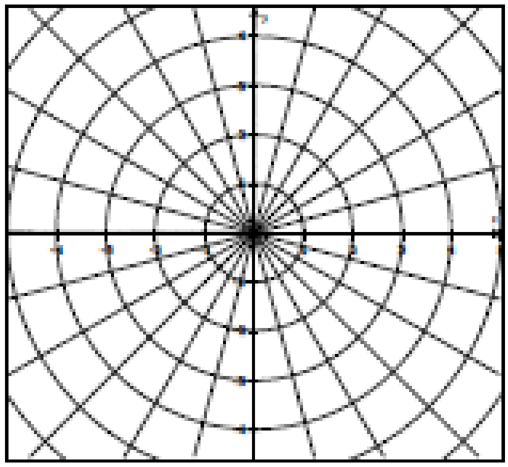
Teste exploratório

LISTA 3

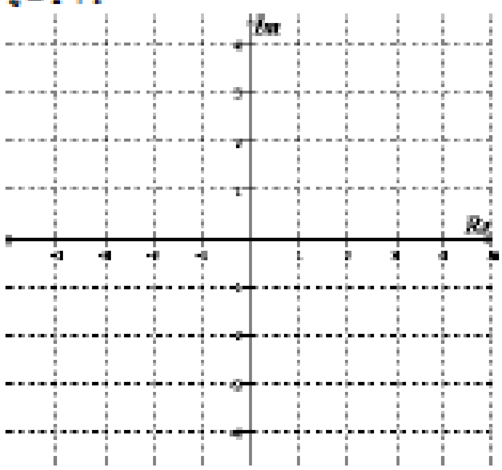
1. Represente graficamente o número complexo. Observando o ponto que o representa e utilizando nosso estudo de coordenadas polares, escreva-o na forma trigonométrica.

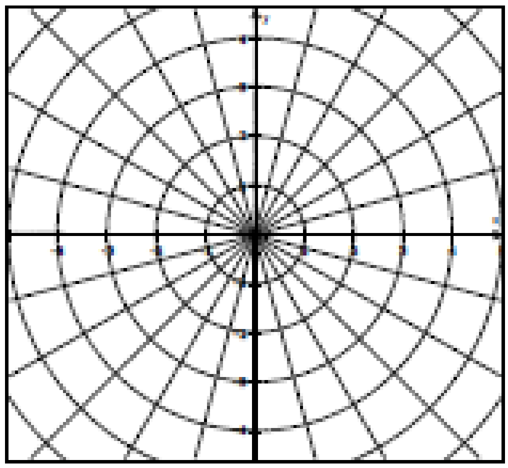
a) $z = i$





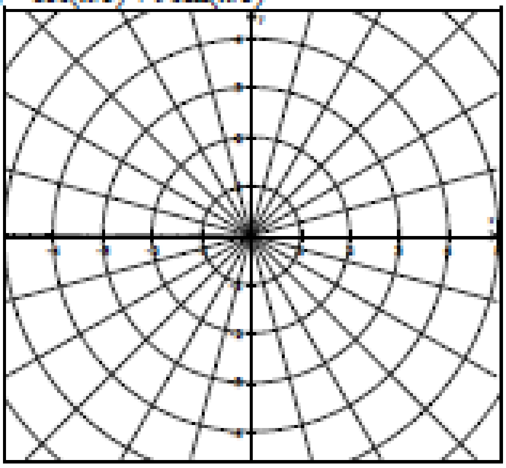
b) $z = 1 + i$

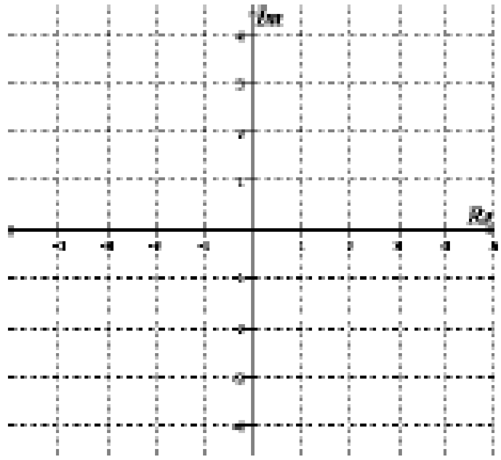




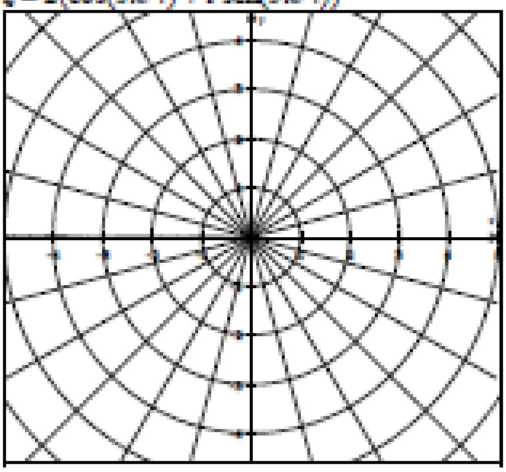
2. Represente graficamente o número complexo. Observando o ponto que o representa e utilizando nosso estudo de coordenadas polares, escreva-o na forma algébrica.

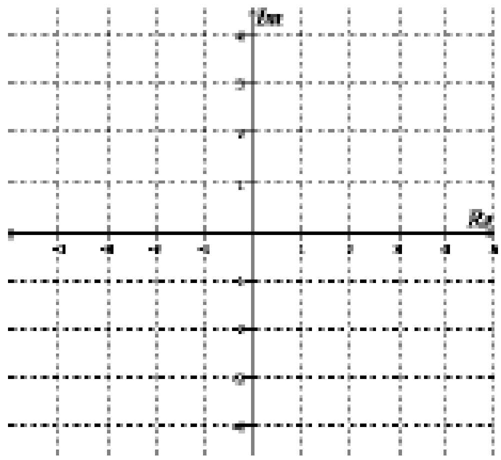
a) $z = \cos(\pi/3) + i\ \mathrm{sen}(\pi/3)$





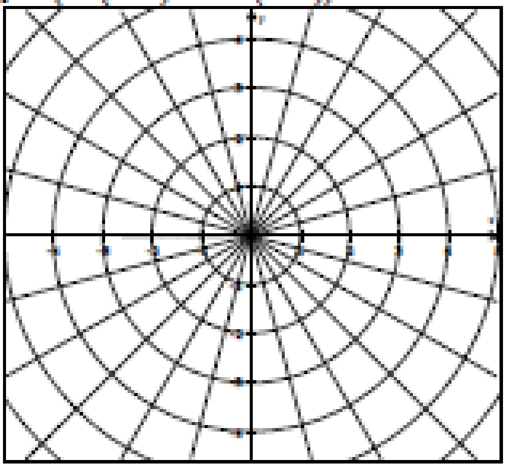
b) $z = 2(\cos(5\pi/4) + i\ \mathrm{sen}(5\pi/4))$

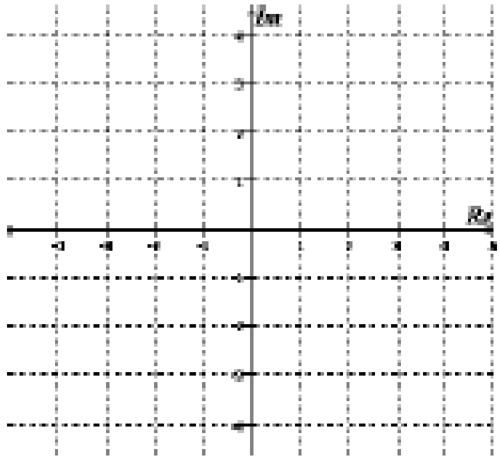




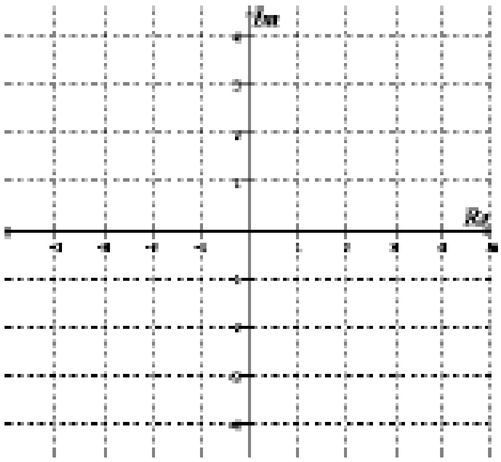
3. Escreva na forma algébrica ou trigonométrica, conforme o caso.

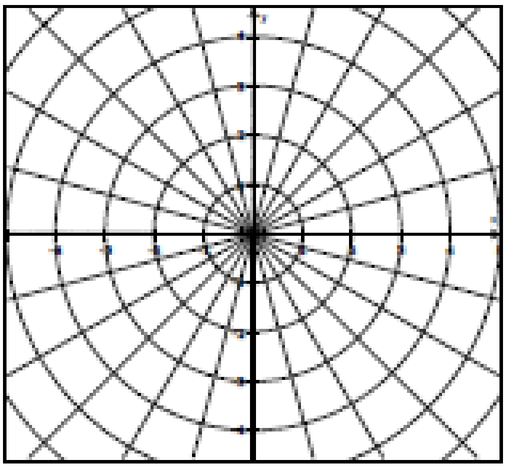
a) $z = 2(\cos(5\pi/3) + i\ \text{sen}(5\pi/3))$





b) $z = -1 - i\sqrt{3}$





APÓS TERMINAR DE FAZER OS EXERCÍCIOS DESTA LISTA, POR FAVOR, RESPONDA E DÊ SUGESTÕES PARA A MELHORIA DE NOSSO TRABALHO.
DESDE JÁ, AGRADECEMOS SUA PARTICIPAÇÃO.

Em termos de conhecimento do assunto, a participação nessas atividades acrescentou:
( ) nada. ( ) algumas informações novas. ( ) muitas informações novas. ( ) tudo foi novidade.

Quanto às atividades referentes à introdução de coordenadas polares (Lista 1):
( ) muito longa. ( ) um pouco longa. ( ) normal. ( ) passou rápido.

Em sua opinião, um aluno da 3ª série do Ensino Médio teria dificuldade em acompanhá-las?
( ) sim. ( ) não. ( ) não sei dizer.

Quanto às atividades referentes à circunferência trigonométrica (Lista 2):
( ) muito longa. ( ) um pouco longa. ( ) normal. ( ) passou rápido.

Em sua opinião, um aluno da 3ª série do Ensino Médio teria dificuldade em acompanhá-las?
( ) sim. ( ) não. ( ) não sei dizer.

Estas atividades contribuíram para um melhor entendimento da circunferência trigonométrica?
( ) sim. ( ) não. ( ) não sei dizer.

Quanto às atividades referentes aos números complexos (Lista 3):
( ) muito longa. ( ) um pouco longa. ( ) normal. ( ) passou rápido.

Em sua opinião, um aluno da 3ª série do Ensino Médio teria dificuldade em acompanhá-las?
( ) sim. ( ) não. ( ) não sei dizer.

Estas atividades contribuíram para um melhor entendimento da forma trigonométrica de complexos?
( ) sim. ( ) não. ( ) não sei dizer.

Em sua opinião, a introdução de coordenadas polares pode auxiliar a compreensão de trigonometria e números complexos? Por quê?

____
____
____
____
____
____

APÊNDICE B – ATIVIDADES REELABORADAS

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
DISCIPLINA: MONOGRAFIA II
ALUNA: RAFAELA DOS SANTOS MUNIZ

ORIENTADORA: CARLA
APLICAÇÃO DE ATIVIDADE

TESTE DE SONDAGEM

1. O que é um radiano?

---

2. Calcule os senos e cossenos abaixo.

a) $sen(60°)$

b) $cos(120°)$

c) $sen(315°)$

d) $sen(210°)$

e) $cos(270°)$

3. Calcule os senos e cossenos a seguir, onde os ângulos estão em radianos.

a) $cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

b) $cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

c) $sen\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

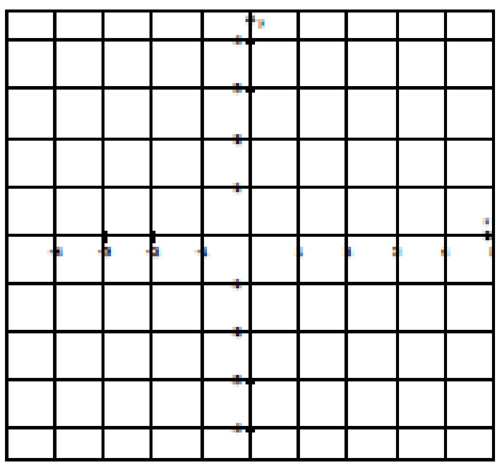
d) $cos(\pi)$

e) $sen\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

4. Represente graficamente os pontos abaixo:

$P = (1, 2)$

$R = (-3, 1)$



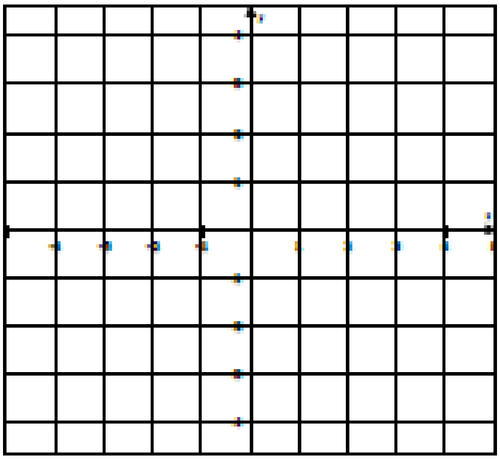
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina: Monografia II
Aluna: Rafaela dos Santos Souza Muniz

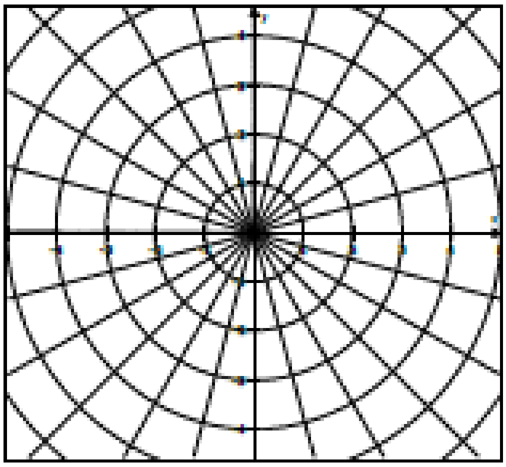
Orientadora: Carla
Aplicação de Atividade

Lista 1

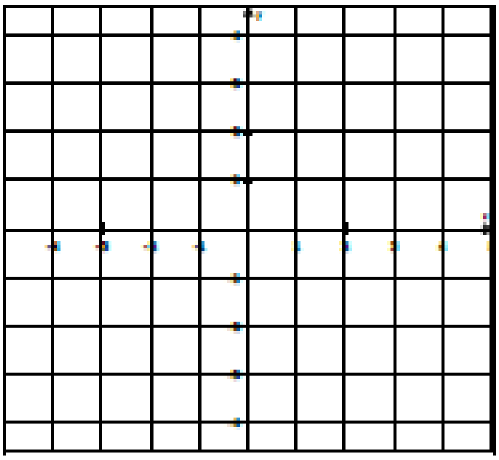
1. Represente graficamente cada ponto P, nos dois planos dados. Em seguida, dê a distância de P até a origem O e o ângulo formado pela parte positiva do eixo x e o segmento $\overline{OP}$.

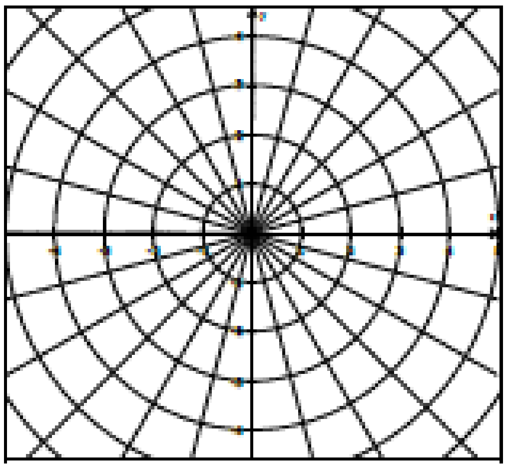
a) $P = (0; 1)$ distância = _____ ; ângulo = _____



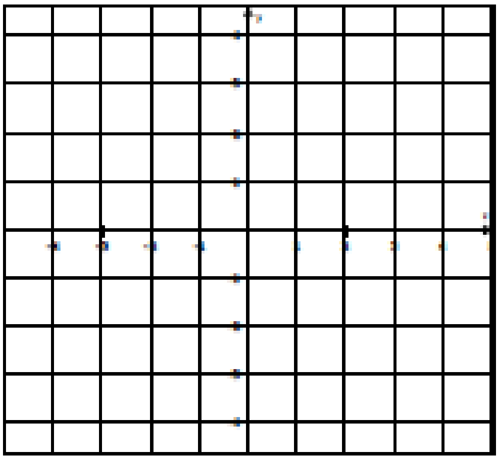


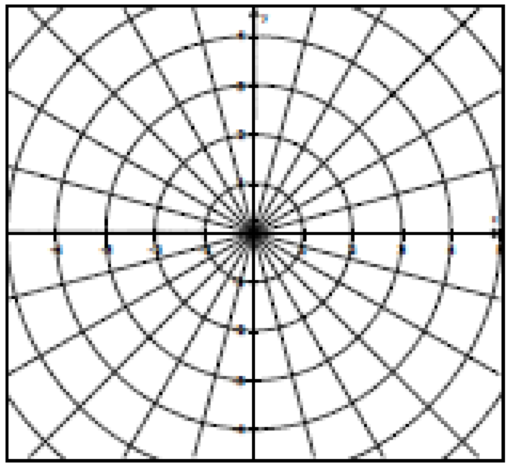
b) $P = (1; 1)$ distância = _____ ; ângulo = _____



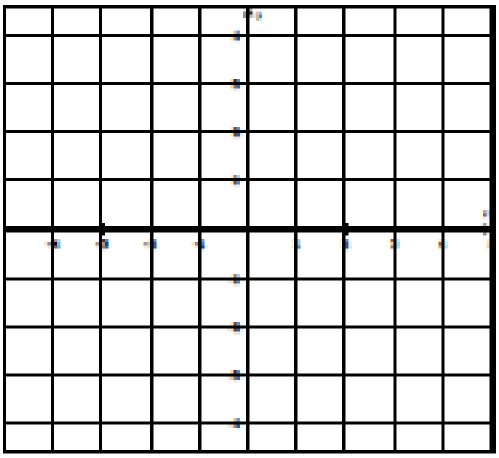


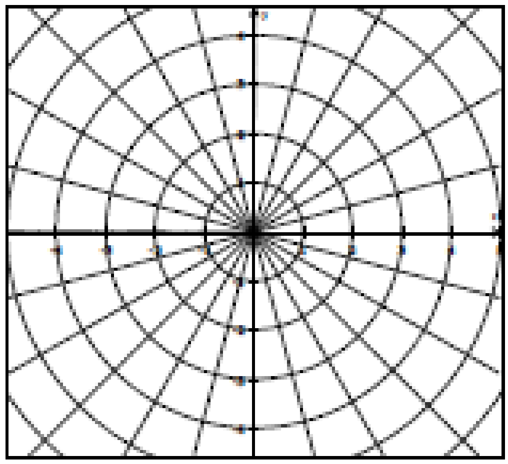
c) $P = (-2; 0)$ distância = ______ ; ângulo = ______



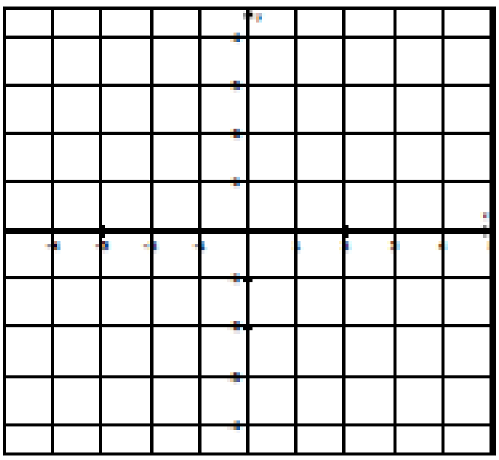


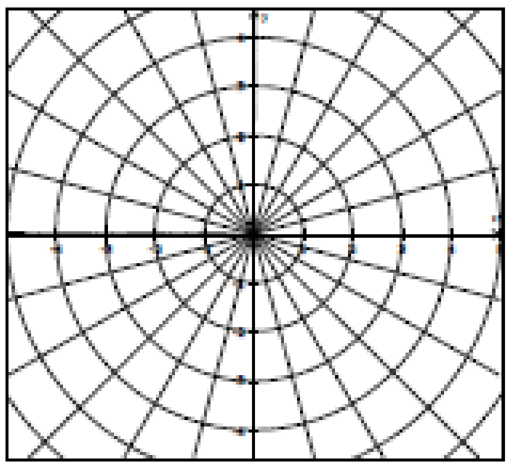
d) $P = (1; -1)$ distância = ______ ; ângulo = ______



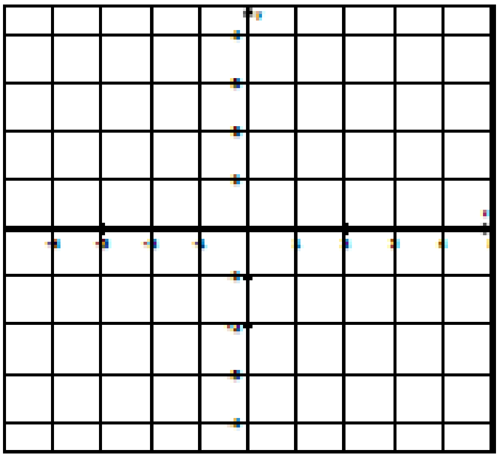


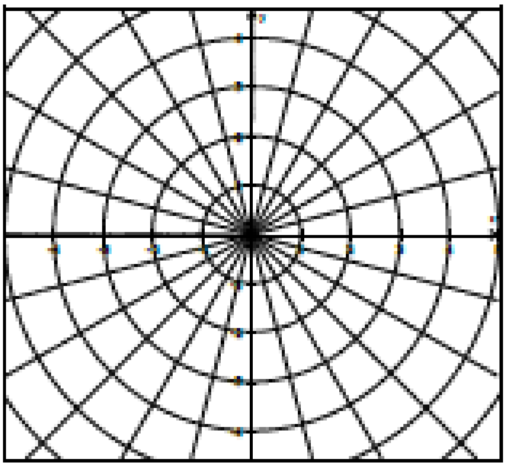
e) $P = (-\sqrt{3}; -1)$ distância = ______ ; ângulo = ______



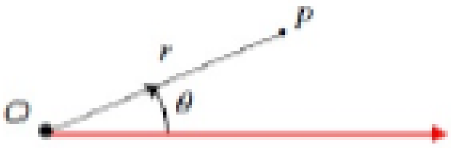


f) $P = (-1;\ \sqrt{3})$ distância = _____ ; ângulo = _____



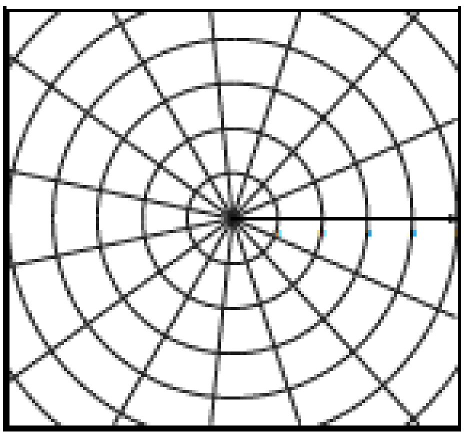


O *Sistema de Coordenadas Polares* consiste de um ponto fixo *O* chamado **polo** (ou origem) e de um eixo de referência, começando em *O*, chamado **eixo polar**. Neste sistema, a cada ponto *P* (do plano) podemos associar um par de coordenadas (r, θ), onde *r* é a distância de *P* ao polo e θ é o ângulo formado pelo eixo polar e o segmento de reta $\overline{OP}$. Convenciona-se que um ângulo é positivo se for medido no sentido anti-horário e negativo se medido no sentido horário.

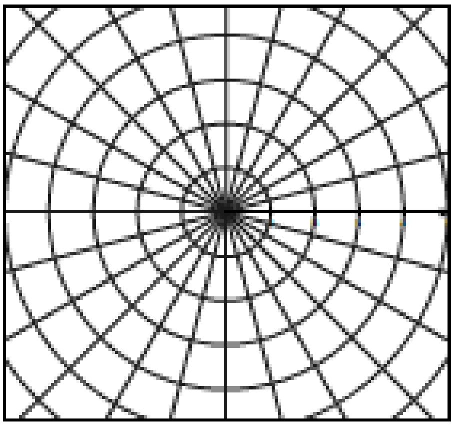


Plano em coordenadas polares.

O plano polar que estamos usando está dividido em 24 setores iguais, cada um com 15° ou $\frac{\pi}{12}$ radianos. É possível dividir o plano polar em um número de setores diferente, por exemplo, 12, 10, etc., de acordo com a necessidade. Em radares, por exemplo, são utilizados 360 setores de um grau, ou até mais, dependendo da precisão exigida na localização do ponto.



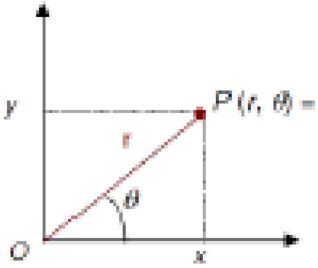
Plano dividido em 15 setores iguais



Plano dividido em 24 setores iguais

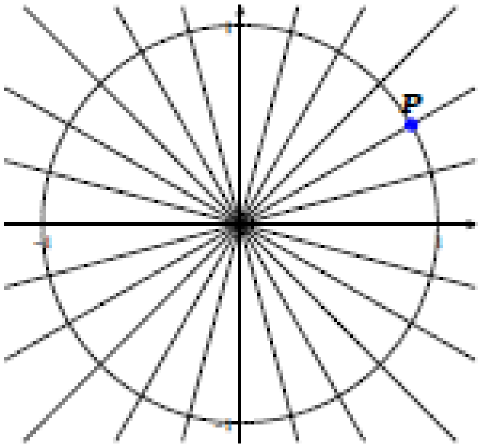
Relação entre coordenadas cartesianas e polares

Em geral, o polo do sistema de coordenadas polares coincide com a origem do sistema de coordenadas cartesianas, e o eixo polar com a parte positiva do eixo x.

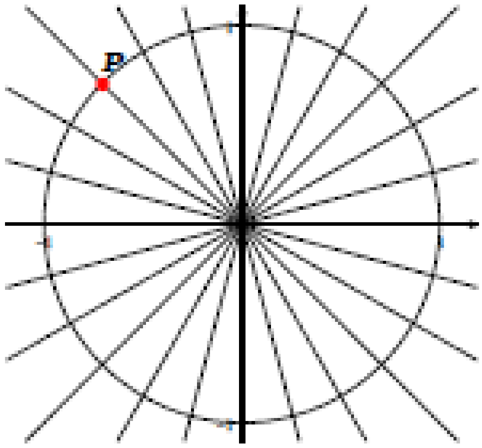


Aplicação à trigonometria

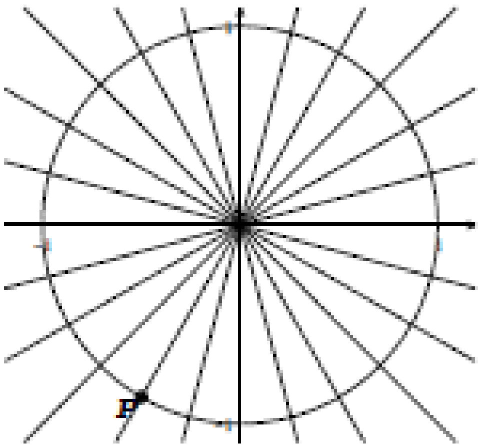
Cada ponto da circunferência trigonométrica, assim como todos os outros do plano cartesiano, também pode ser representado em coordenadas polares.



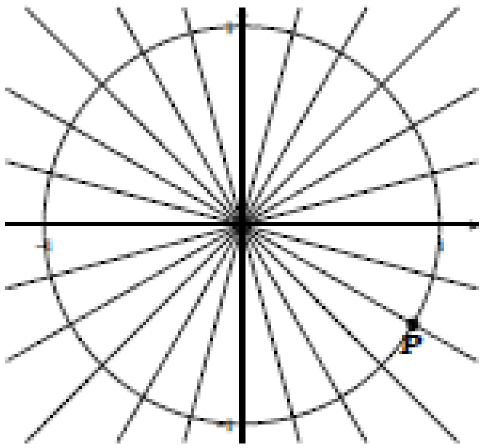
$$P\left(1;\frac{\pi}{6}\right)=P\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



$$P\left(1;\frac{3\pi}{4}\right)=P\left(cos\left(\frac{3\pi}{4}\right);\ sen\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

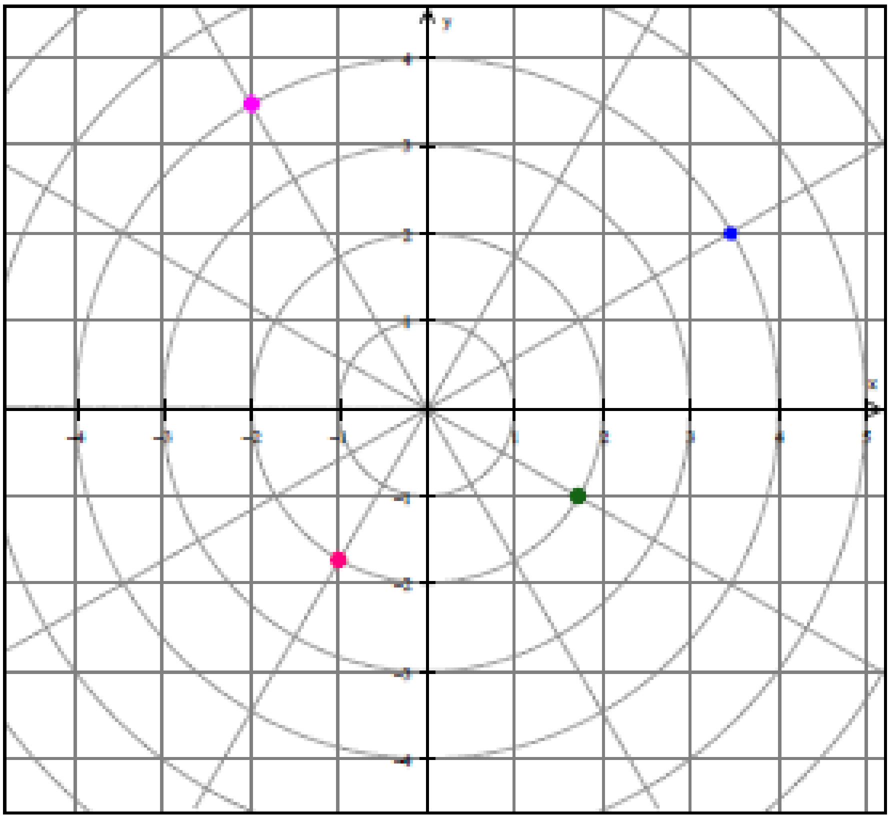


$$P\left(1;\frac{4\pi}{3}\right)=P\left(cos\left(\frac{4\pi}{3}\right);\ sen\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$$



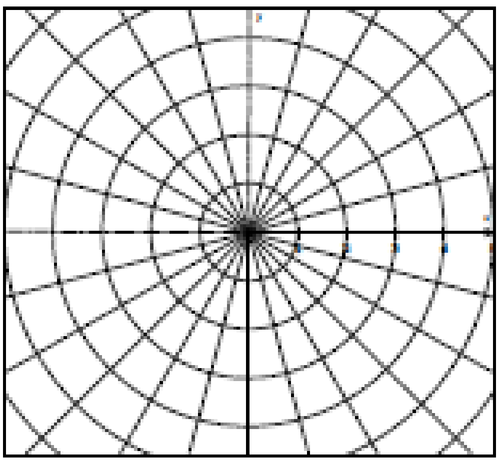
$$P\left(1;\frac{11\pi}{6}\right)=P\left(cos\left(\frac{11\pi}{6}\right);\ sen\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right)$$

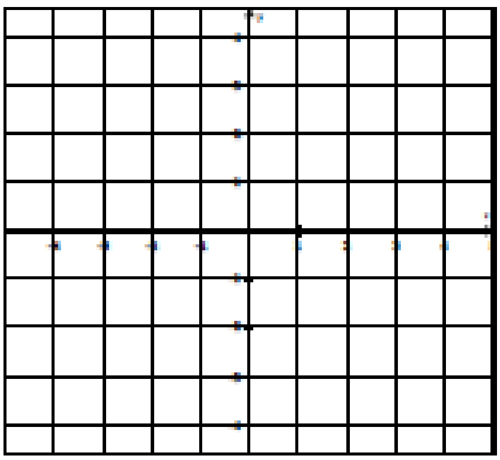
A representação em coordenadas polares nos permite visualizar o sinal do seno e do cosseno do ângulo, pois o sinal da **abscissa** será o sinal do **cosseno**, e o da **ordenada** será o do **seno**.



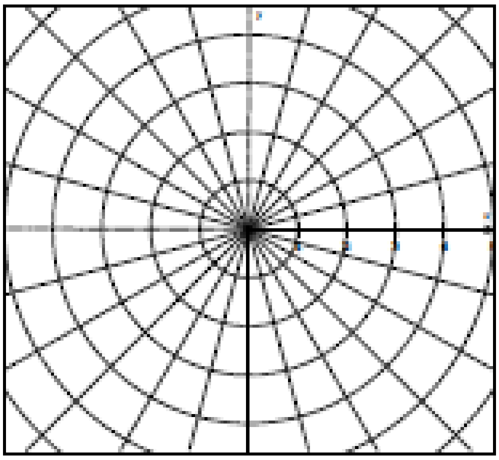
2. Os pontos a seguir estão escritos em coordenadas polares. Represente-os graficamente e escreva-os em coordenadas retangulares.

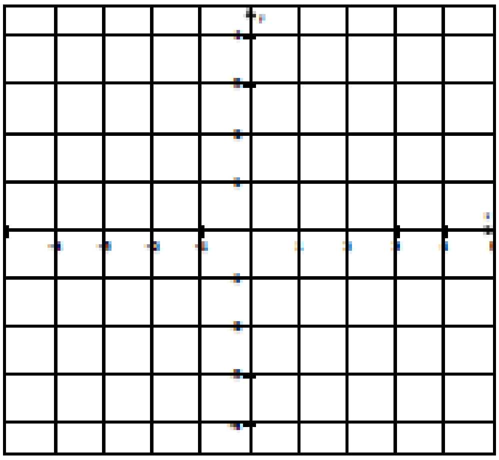
a) $P = \left(1, \frac{\pi}{3}\right)$ x = _____ ; y = _____ P = (_____ ; _____)



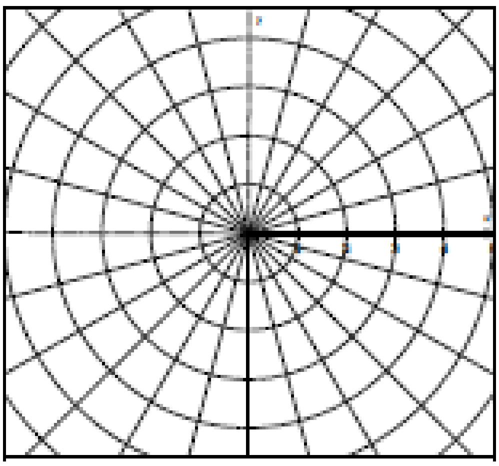


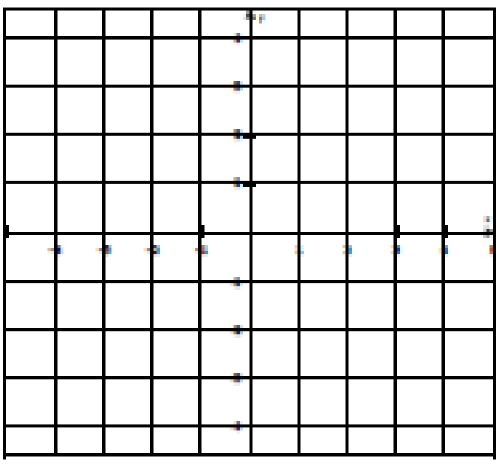
b) $P = \left(2, \frac{4\pi}{3}\right)$ $x =$ ______ ; $y =$ ______ $P =$ (______ ; ______)



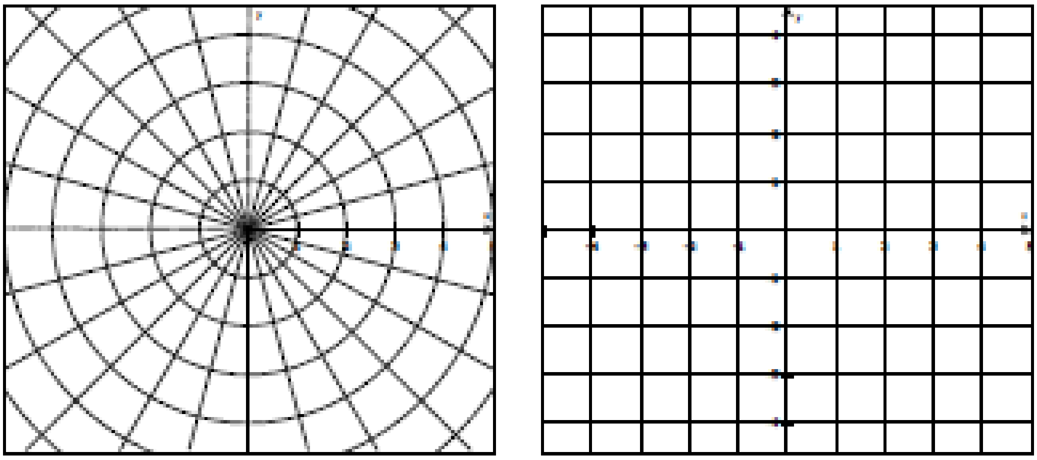


c) $P = \left(1, \frac{7\pi}{4}\right)$ $x =$ ______ ; $y =$ ______ $P =$ (______ ; ______)





d) $P = \left(3, \frac{7\pi}{6}\right)$ $x =$ _____ ; $y =$ _____ $P = ($ _____ ; _____ $)$



QUESTIONÁRIO

APÓS TERMINAR DE FAZER OS EXERCÍCIOS DESTA LISTA, POR FAVOR, RESPONDA E DÊ SUGESTÕES PARA A MELHORIA DE NOSSO TRABALHO.
DESDE JÁ, AGRADECEMOS SUA PARTICIPAÇÃO.

Em termos de conhecimento do assunto (coordenadas polares), a participação nessas atividades acrescentou:
( ) nada. ( ) algumas informações novas. ( ) muitas informações novas. ( ) tudo foi novidade.

O tempo das atividades referentes à introdução de coordenadas polares foi:
( ) muito longo. ( ) um pouco longo. ( ) "normal". ( ) rápido.

Estas atividades contribuíram para um melhor entendimento da circunferência trigonométrica?
( ) sim. ( ) não.
Por quê?

____
____
____
____

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
DISCIPLINA: MONOGRAFIA II — ORIENTADORA: CARLA ANTUNES FONTES
ALUNA: RAFAELA DOS SANTOS SOUZA MUNIZ — APLICAÇÃO DE ATIVIDADE

LISTA 3

Quando vemos números complexos pela primeira vez, eles estão escritos na **forma algébrica**, $z = a + bi$, onde a e b são números reais e $i^2 = -1$. $\underline{a}$ é parte real de z ($a = Re(z)$) e $\underline{b}$ é a parte imaginária de z ($b = Im(z)$). A forma algébrica é bastante eficiente no cálculo de adições, subtrações, produtos e quocientes.

Porém, para efetuar potenciações e radiciações de números complexos, precisamos escrevê-los na **forma trigonométrica** ou **polar**. Sendo $z = a + bi$ um complexo qualquer, utilizamos o **módulo** de z, indicado por $|z|$, e o **argumento principal** de z, representado por θ, para escrever $z = |z|(cos(\theta) + i sen(\theta))$. $|z|$ é calculado por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, e θ é o ângulo na primeira volta da circunferência trigonométrica ($0 \leq \theta < 2\pi$, ou $0° \leq \theta < 360°$), para o qual valem estas duas igualdades: $a = |z| \, cos(\theta)$ e $b = |z| \, sen(\theta)$.

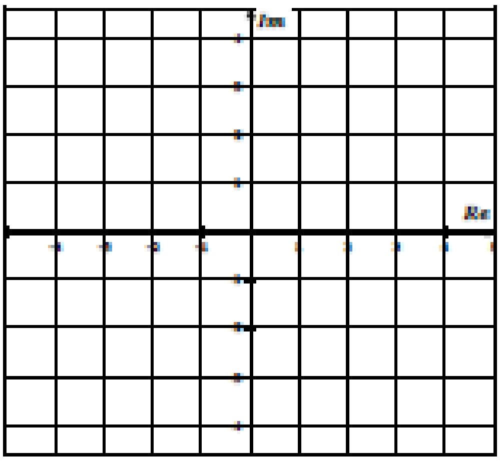
A representação gráfica de $z = a + bi$ no plano complexo é o ponto $P(a; b)$, chamado **afixo** de z. Existe uma relação visível entre pontos no plano cartesiano e afixos no plano complexo: a abscissa é a parte real de z, e a ordenada é a parte imaginária de z.

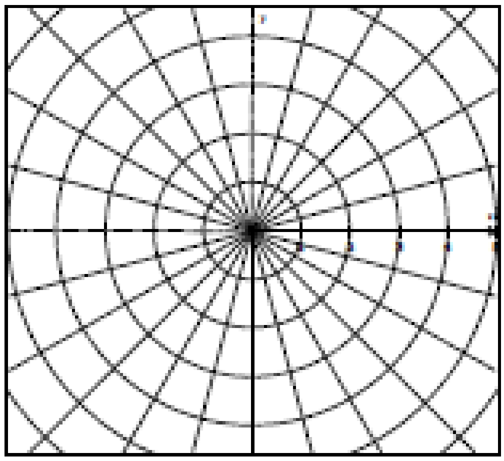
Vamos mostrar agora que também existe uma relação entre a representação do afixo P em coordenadas polares e a forma trigonométrica do número complexo z.

1. Represente o ponto P, afixo de z, no plano complexo, e dê suas coordenadas retangulares. Depois, escreva P em coordenadas polares e represente-o no plano polar. Utilize então a forma polar de P para escrever o número complexo z na forma trigonométrica.

a) $z = i \rightarrow Re(z) =$ _____ ; $Im(z) =$ _____

→ afixo em coordenadas retangulares: P (_____ ; _____)



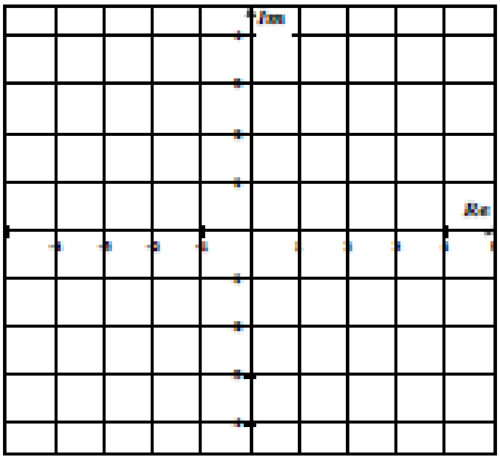


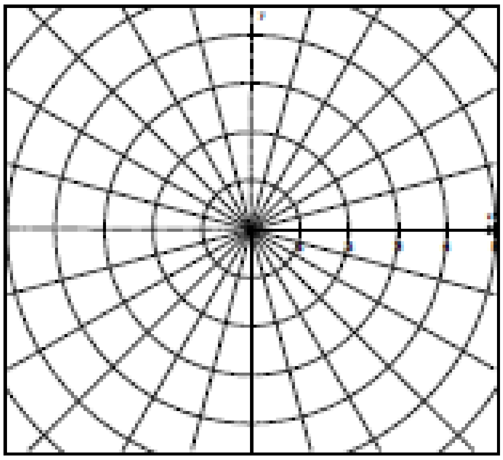
→ afixo em coordenadas polares: P (_____ ; _____)

→ número complexo na forma trigonométrica: $z =$ ____________________

b) $z = 1 + i \rightarrow Re(z) =$ ______ ; $Im(z) =$ ______

$\rightarrow$ afixo em coordenadas retangulares: P (______ ; ______)



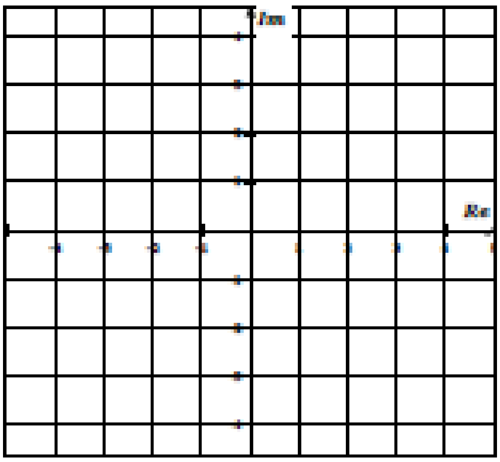


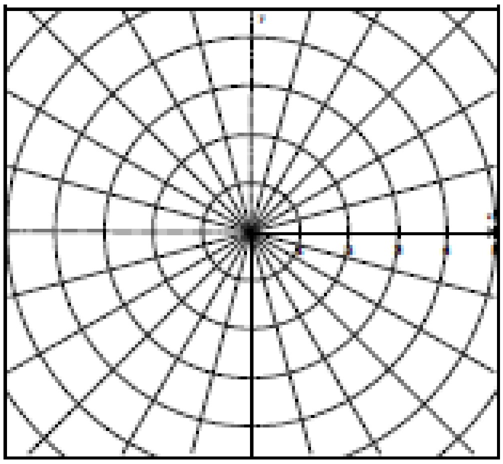
$\rightarrow$ afixo em coordenadas polares: P (______ ; ______)

$\rightarrow$ número complexo na forma trigonométrica: $z =$ ________________________

c) $z = -1 + i\sqrt{3} \rightarrow Re(z) =$ ______ ; $Im(z) =$ ______

$\rightarrow$ afixo em coordenadas retangulares: P (______ ; ______)



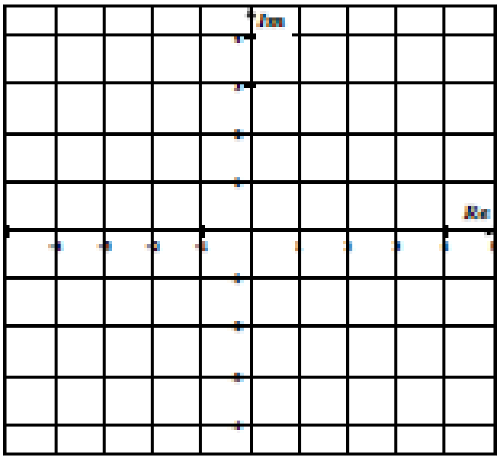


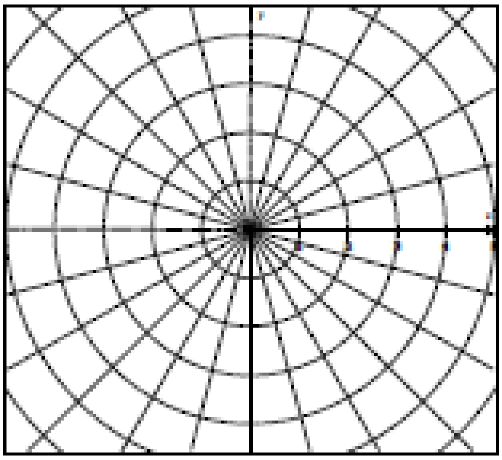
$\rightarrow$ afixo em coordenadas polares: P (______ ; ______)

$\rightarrow$ número complexo na forma trigonométrica: $z =$ ________________________

d) $z = 2 - 2i \rightarrow Re(z) =$ _____ ; $Im(z) =$ _____

$\rightarrow$ afixo em coordenadas retangulares: P (_____ ; _____)



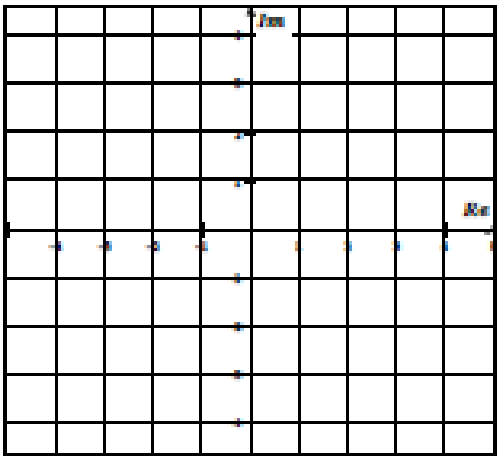


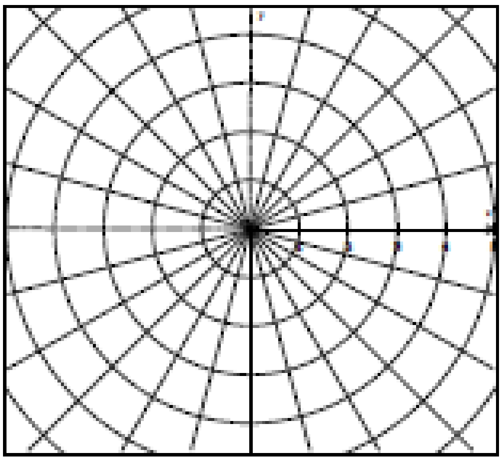
$\rightarrow$ afixo em coordenadas polares: P (_____ ; _____)

$\rightarrow$ número complexo na forma trigonométrica: $z =$ ______________________

e) $z = -2\sqrt{3} - 2i \rightarrow Re(z) =$ _____ ; $Im(z) =$ _____

$\rightarrow$ afixo em coordenadas retangulares: P (_____ ; _____)





$\rightarrow$ afixo em coordenadas polares: P (_____ ; _____)

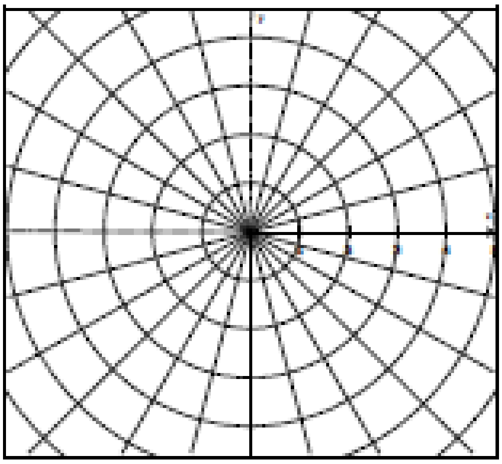
$\rightarrow$ número complexo na forma trigonométrica: $z =$ ______________________

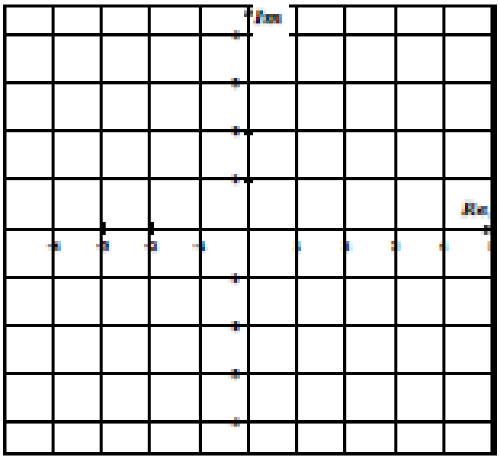
Quando encontramos as coordenadas polares do afixo P, que representa o número complexo z, o raio corresponde ao _______________ do número complexo z, e o ângulo corresponde ao ______________________ do número complexo z.

2. Dê as coordenadas polares do ponto $\boldsymbol{P}$, afixo de $\boldsymbol{z}$, e represente-o no plano polar. Depois, represente $\boldsymbol{P}$ no plano complexo e escreva-o em coordenadas retangulares. Utilize então estas coordenadas para escrever o número complexo $\boldsymbol{z}$ na forma algébrica.

a) $z = \cos(\pi) + i\,sen(\pi)$ $\rightarrow |z| =$ _____ ; $\theta =$ _____

→ afixo em coordenadas polares: $\boldsymbol{P}$ (_____ ; _____)



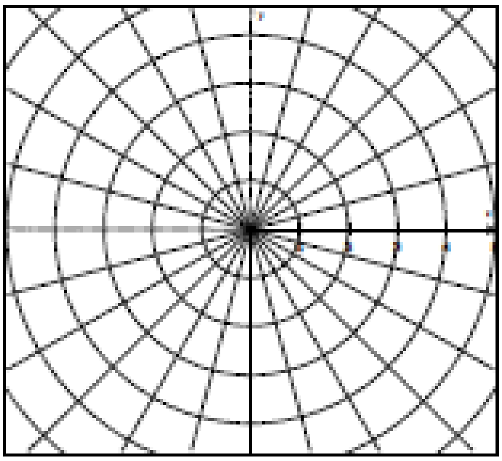


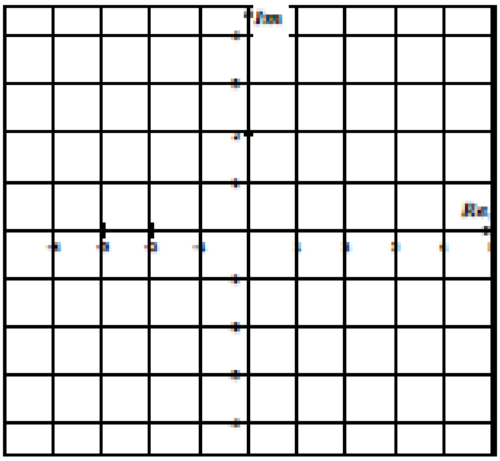
→ afixo em coordenadas retangulares: $\boldsymbol{P}$ (_____ ; _____)

→ número complexo na forma algébrica: $z =$ ____________________

b) $z = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\,sen\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$ $\rightarrow |z| =$ _____ ; $\theta =$ _____

→ afixo em coordenadas polares: $\boldsymbol{P}$ (_____ ; _____)



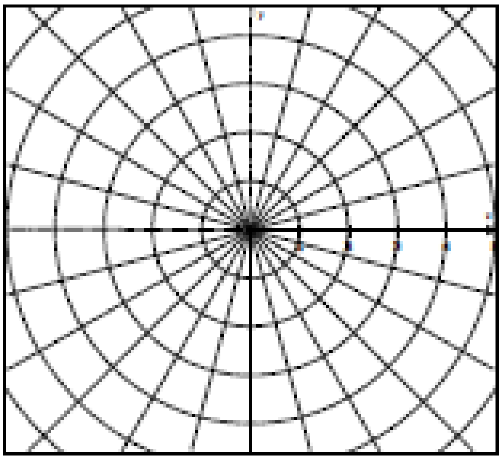


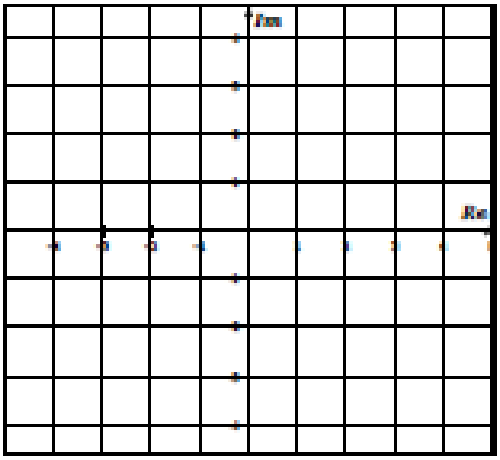
→ afixo em coordenadas retangulares: $\boldsymbol{P}$ (_____ ; _____)

→ número complexo na forma algébrica: $z =$ ____________________

c) $z = 4\left(cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\,sen\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$ $\rightarrow |z| =$ _____ ; $\theta =$ _____

→ afixo em coordenadas polares: P (_____ ; _____)



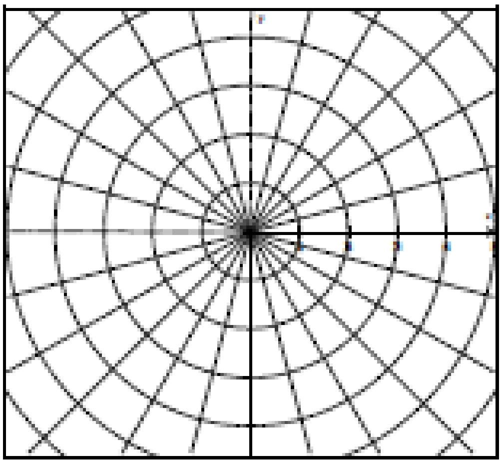


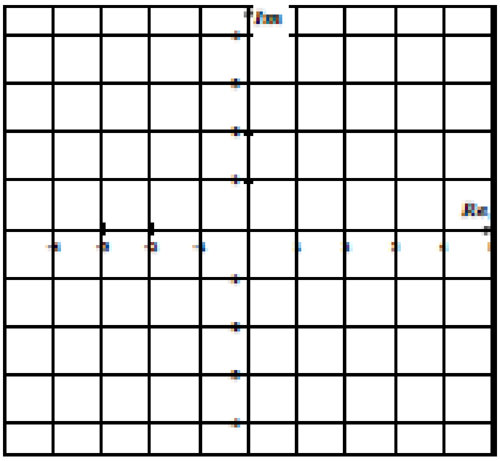
→ afixo em coordenadas retangulares: P (_____ ; _____)

→ número complexo na forma algébrica: $z =$ ____________________

d) $z = 3\left(cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\,sen\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$ $\rightarrow |z| =$ _____ ; $\theta =$ _____

→ afixo em coordenadas polares: P (_____ ; _____)





→ afixo em coordenadas retangulares: P (_____ ; _____)

→ número complexo na forma algébrica: $z =$ ____________________

APÓS TERMINAR DE FAZER OS EXERCÍCIOS DESTA LISTA, POR FAVOR, RESPONDA E DÊ SUGESTÕES PARA A MELHORIA DE NOSSO TRABALHO.
DESDE JÁ, AGRADECEMOS SUA PARTICIPAÇÃO.

Em termos de conhecimento do assunto (forma trigonométrica de números complexos), a participação nessas atividades acrescentou:
( ) nada. ( ) algumas informações novas. ( ) muitas informações novas. ( ) tudo foi novidade.

O tempo das atividades referentes a números complexos (Lista 3) foi:
( ) muito longo. ( ) um pouco longo. ( ) "normal". ( ) rápido.

Estas atividades contribuíram para um melhor entendimento da forma trigonométrica de números complexos?
( ) sim. ( ) não.

Por quê?

____

____

____

____

____

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE Campus Campos-Centro — Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica — Ministério da Educação — BRASIL

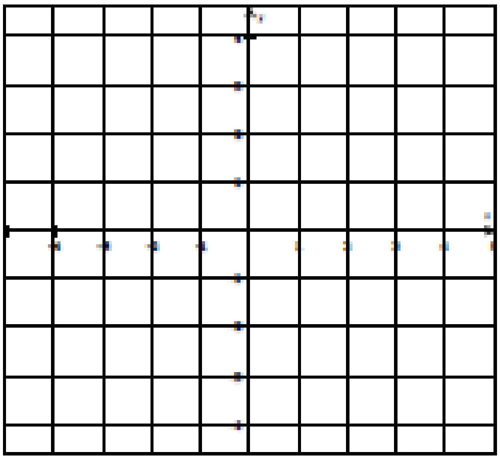
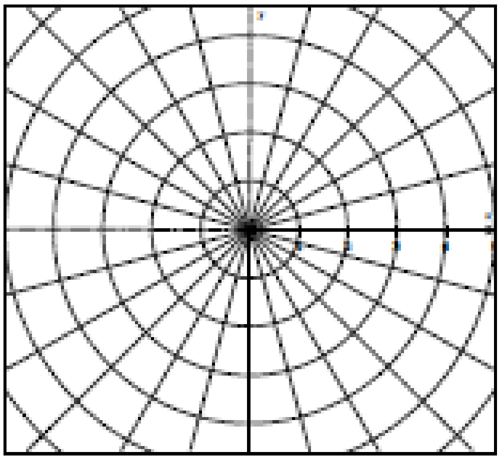
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
DISCIPLINA: MONOGRAFIA II
ALUNA: RAFAELA DOS SANTOS SOUZA MUNIZ

ORIENTADORA: CARLA ANTUNES FONTES
APLICAÇÃO DE ATIVIDADE

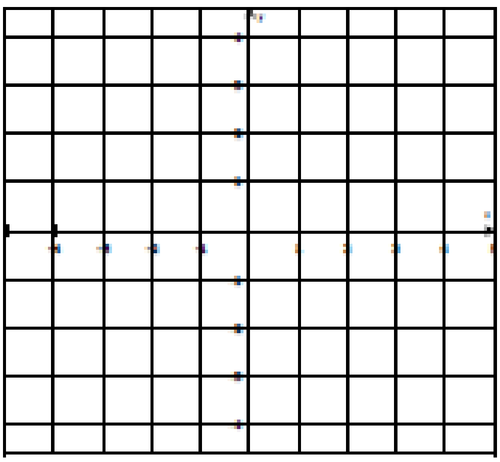
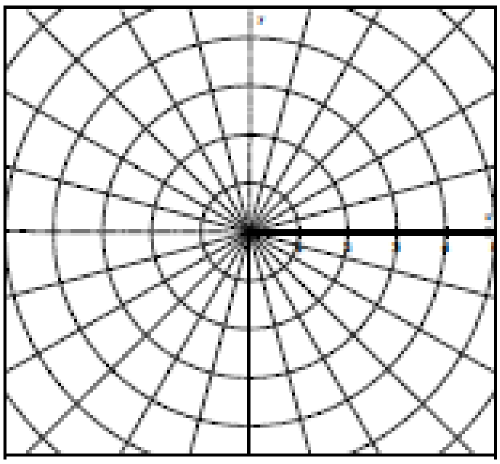
LISTA 2

1. Represente os pontos abaixo no plano polar e no plano cartesiano, escrevendo as coordenadas que faltam.

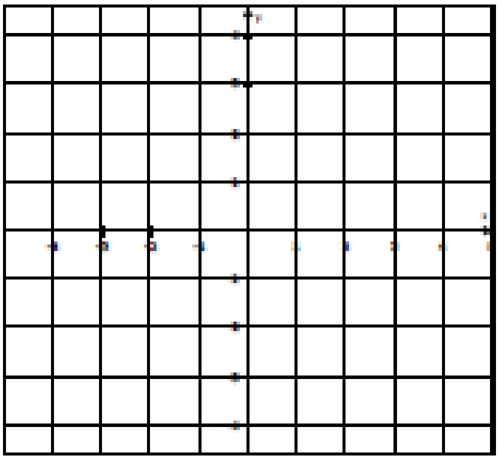
a) $x = 0; y = -2 \rightarrow r =$ ______; θ = ______

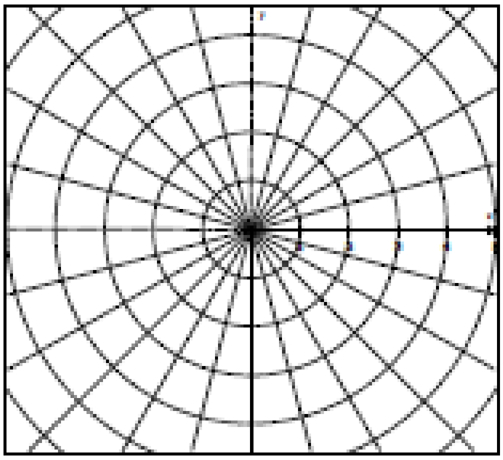



b) $x = -2; y = 2 \rightarrow r =$ ______; θ = ______

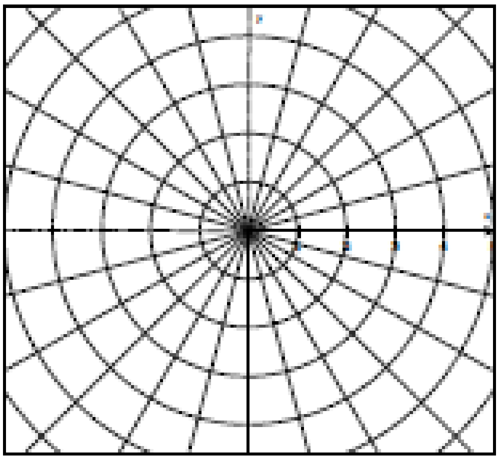



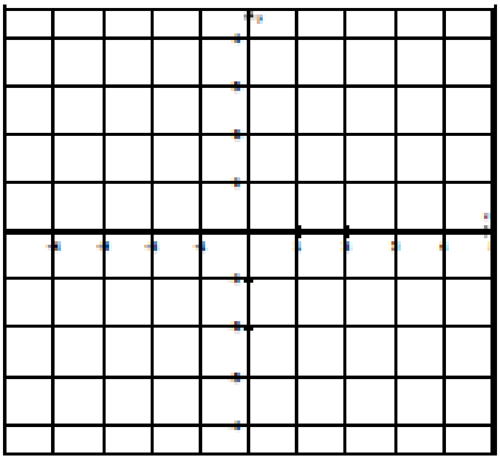
c) $x = -1$; $y = -\sqrt{3} \to r =$ ______; $\theta =$ ______



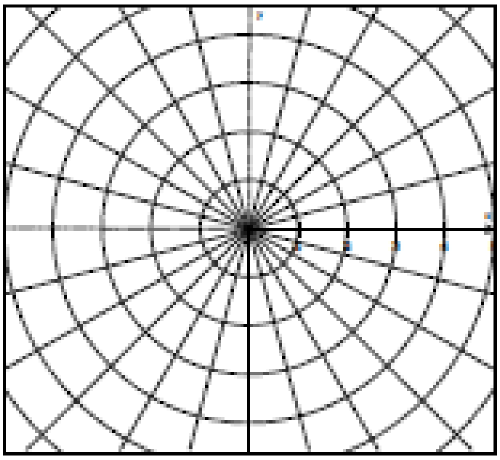


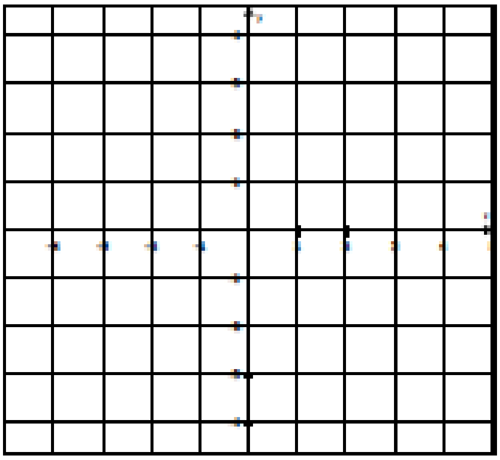
d) $r = 2$; $\theta = \frac{\pi}{6} \to x =$ ______; $y =$ ______



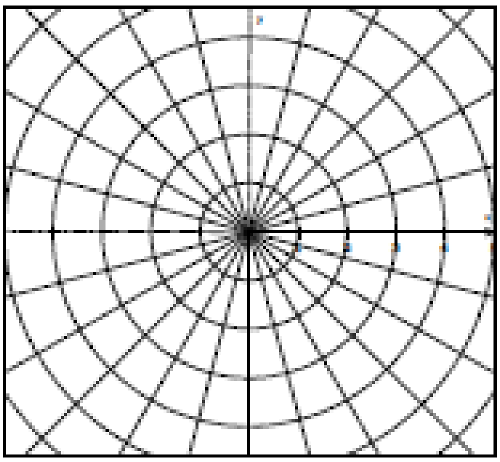


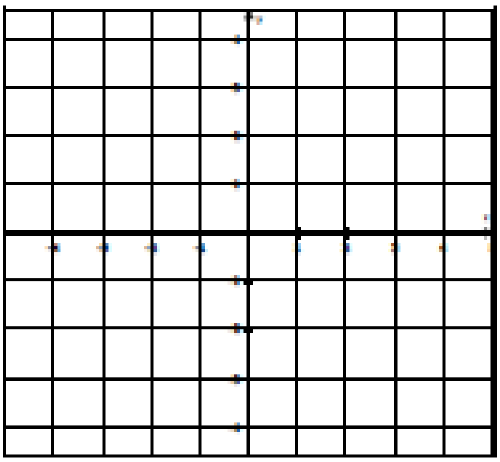
e) $r = 3; \theta = \frac{7\pi}{4} \rightarrow x =$ ______; $y =$ ______





f) $r = 4; \theta = \frac{2\pi}{3} \rightarrow x =$ ______; $y =$ ______





2. Agora, se cada ponto da questão 1 fosse na verdade o afixo de um número complexo, qual seria a forma algébrica e a forma trigonométricla de cada número complexo?

a) forma algébrica: z = ______________________

forma trigonométrica: z = ______________________

b) forma algébrica: z = ______________________

forma trigonométrica: z = ______________________

c) forma algébrica: z = ______________________

forma trigonométrica: z = ______________________

d) forma trigonométrica: z = ______________________

forma algébrica: z = ______________________

e) forma trigonométrica: z = ______________________

forma algébrica: z = ______________________

f) forma trigonométrica: z = ______________________

forma algébrica: z = ______________________

APÊNDICE C – ENTREVISTA COM A PROFESSORA REGENTE

Entrevista dia 09/08/11

1 – Que dificuldades você percebe na aprendizagem de Números Complexos?

A principal é a trigonometria, quando se trata da parte trigonométrica dos Números Complexos, de seno e cosseno dos ângulos e localização de arcos.

Outra coisa que é uma “curiosidade”, também, é a dificuldade de trabalhar com a letra ***i***, que representa uma letra e não um número. Quando eles fazem uma equação do tipo, por exemplo, $\boldsymbol{z} = 2 + 3\boldsymbol{i}$, os alunos colocam como resultado $\boldsymbol{z} = 5\boldsymbol{i}$. Aí, quando a letra ***i*** é trocada por outra letra, por exemplo, ***x***, eles entendem que, retomando a equação anterior, a resposta é $\boldsymbol{z} = 2 + 3\boldsymbol{x}$.

2 – Qual sua opinião sobre o trabalho realizado?

Bastante válido, pois os alunos viram outra forma de representação, o que ajudou a entender que o número complexo seja na forma algébrica, seja na forma trigonométrica, é o mesmo número, representado de forma diferente.

3 – Houve comentário por parte dos alunos (sobre o trabalho)?

Os alunos me “cobraram” que fizesse “o método” apresentado nos exercícios feitos em sala.

Eles gostaram mais do gráfico que da forma algébrica, apesar da preguiça de desenhar.

Eles se mostraram “preocupados” com a “possível nota” que você (Rafaela) tinha tirado, perguntando se eu tinha dado uma boa nota, porque "ela (Rafaela) explicou direitinho”, e que eles tinham entendido a matéria.

4 – Você passaria a utilizar o método proposto? Por quê?

Achei muito interessante, talvez passe a utilizar, pois os alunos conseguiram uma melhor visualização.

ANEXO – DEMONSTRAÇÕES

Dada uma equação cúbica geral: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, façamos $x = y + m$. Utilizamos este artifício na busca de encontrar dois números conhecendo sua soma e seu produto.

Portanto:

$$a(y+m)^3 + b(y+m)^2 + c(y+m) + d = 0$$
$$a(y^3 + 3y^2m + 3ym^2 + m^3) + b(y^2 + 2ym + m^2) + cy + cm + d = 0$$
$$ay^3 + 3ay^2m + 3aym^2 + am^3 + by^2 + 2bym + bm^2 + cy + cm + d = 0$$
$$ay^3 + y^2(b + 3am) + y(3am^2 + 2bm + c) + (am^3 + bm^2 + cm + d) = 0$$

Para anular o coeficiente de y^2, tomemos:

$$b + 3am = 0 \Rightarrow m = \frac{-b}{3a}, \text{ daí:}$$

$$ay^3 + y(3am^2 + 2bm + c) + (am^3 + bm^2 + cm + d) = 0$$

Podemos reescrevê-la da seguinte forma:

$$y^3 + py + q = 0$$

Se soubermos resolvê-la, acharemos o valor de x.

O matemático Tartaglia supôs que a resposta procurada era composta de duas parcelas: $y = A + B$.

Daí:

$$y^3 = (A+B)^3 = A^3 + B^3 + 3A^2B + 3AB^2 = A^3 + B^3 + 3AB(A+B) = A^3 + B^3 + 3ABy$$
$$y^3 - 3ABy - (A^3 + B^3) = 0$$

Lembremos que: $y^3 + py + q = 0$, conseqüentemente teremos:

$$p = -3AB \Rightarrow (AB)^3 = \left(\frac{p}{-3}\right)^3 \Rightarrow A^3B^3 = \frac{p^3}{-27}$$
$$q = -(A^3 + B^3)$$

Portanto: $A^3B^3 = \dfrac{p^3}{-27}$ e $A^3 + B^3 = -q$

Conhecemos então a soma e o produto, logo sabemos reduzi-la a uma equação do segundo grau, assim temos:

Sejam:

$$\alpha = A^3$$
$$\beta = B^3$$

e

$$\begin{cases} \alpha + \beta = S \\ \alpha \times \beta = P \end{cases}$$

Temos que S é a soma e P o produto das raízes, logo:

$$S = -q$$
$$P = \frac{-p^3}{27}$$

Daí:

$$A^3 = \frac{-q \pm \sqrt{(-q)^2 - 4\left(\frac{-p^3}{27}\right)}}{2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} - 4\left(\frac{\frac{-p^3}{27}}{4}\right)}$$

$$A^3 = \frac{-q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$$B^3 = \frac{-q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Mas:

$$y = A + B$$

$$A_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

e

$$A_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Portanto:

$$B_1 = A_2$$
$$e$$
$$B_2 = A_1$$

Logo:

$$y = A + B$$

$$y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Esta fórmula ficou conhecida como Fórmula de Cardano.

2.2 IMAGINÁRIOS: A NECESSIDADE DE UTILIZAÇÃO E A BUSCA DE SIGNIFICADOS

O êxito na busca da fórmula para resolver equações do terceiro grau levou os matemáticos a crerem na existência destes misteriosos elementos: as raízes quadradas de números negativos. Com o sucesso da fórmula de Cardano, estes números se tornavam úteis, mas um questionamento ainda pairava: eles fariam sentido?

Durante muito tempo os números complexos foram utilizados dentro deste ambiente obscuro. Eles eram utilizados com certa desconfiança e desconforto. Este desconforto é refletido no nome dado a estes números: imaginários.

Passamos agora a analisar como ocorreu o processo de esclarecimento do significado destes números.

Podemos dizer que a solução das equações do terceiro grau fez os matemáticos da época entrarem em contato com os números imaginários, mesmo sem conhecimento próprio deles. Juntamente com as soluções das equações do quarto grau, eles foram a maior contribuição para a álgebra desde os babilônios.

> Foi a primeira vez que a ciência moderna ultrapassou claramente os êxitos dos antigos. Nota-se que são os processos de resolução das equações algébricas de 3° grau que fazem surgir a necessidade da introdução de um novo tipo de número, os números complexos. (PONTE, 2005, p.5)

Em seu livro *Ars Magna*, Cardano entra em contato com as raízes quadradas de números negativos. Elas são ignoradas e chamadas de fictícias, enquanto as positivas foram chamadas de reais. No livro, Cardano propõe um problema onde pede que o número 10 seja escrito como soma de x e y e que o produto de x e y seja igual a 40.

$$\begin{cases} x+y=10 \Rightarrow y=10-x \\ x \times y = 40 \end{cases}$$

Daí, obtemos a seguinte equação do segundo grau:

$$x^2-10x+40=0$$

As raízes encontradas são:

$$x_1 = 5+\sqrt{-15}$$
$$x_2 = 5-\sqrt{-15}$$

Para Cardano os resultados não tinham sentido, mesmo assim operou-os e verificou que eles eram resultados da equação e satisfaziam as propriedades algébricas do problema. Cardano não entendeu a questão, mas Rafael Bombelli (1526 – 1572), de Bolonha, outro importante algebrista italiano, teve o que chamou de "idéia louca" e trabalhou em um problema similar. Bombelli desenvolveu a solução a partir do método descrito abaixo (BOYER, 1996, p. 197).

Os dois radicandos das raízes cúbicas diferem apenas por um sinal e a solução de $x^3=15x+4$, pela fórmula de Cardano, conduz ao resultado $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$. Mas ele sabia que quatro era solução da equação. Bombelli percebeu, portanto, que os radicais podiam ser relacionados.

Surgia então, uma situação onde apesar da fórmula de Cardano apresentar resultados com raízes quadradas de números negativos, existia solução real positiva para a questão. Foi esta condição que chamou a atenção e a curiosidade de Bombelli. Ele admitiu que exista um número ou expressão da forma $a+\sqrt{-b}$ que fosse raiz cúbica de $\left(2+\sqrt{-121}\right)$. Deste modo passou a ter:

$$\left.\begin{array}{c} \left(a+\sqrt{-b}\right)^3 = 2+\sqrt{-121} \\ e \\ \left(a-\sqrt{-b}\right)^3 = 2-\sqrt{-121} \end{array}\right\} (*)$$

Desenvolvendo os cubos temos:

$$\begin{aligned}\left(a+\sqrt{-b}\right)^3 &= (a)^3+3(a)^2\left(\sqrt{-b}\right)+3a\left(\sqrt{-b}\right)^2+\left(\sqrt{-b}\right)^3\\ &= a^3+3a^2\sqrt{-b}-3ab+b\sqrt{-b}\\ &= (a^3-3ab)+(3a^2+b)\sqrt{-b}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\left(a-\sqrt{-b}\right)^3 &= (a)^3-3a^2\sqrt{-b}+3a(\sqrt{-b})^2-(\sqrt{-b})^3\\ &= a^3-3a^2\sqrt{-b}-3ab-b\sqrt{-b}\\ &= (a^3-3ab)-(3a^2+b)\sqrt{-b}\end{aligned}$$

Mas, por inspeção, sabe-se que x = 4 é solução. As equações em (*) nos dizem que

$$x = a+\sqrt{-b}+a-\sqrt{-b}=\sqrt{4}\Rightarrow a=2$$

Tendo este resultado, voltou à equação e encontrou o valor de b. Vejamos:

$$\begin{aligned}&\left(a+\sqrt{-b}\right)^3=2+\sqrt{-121}\\ &\left(2+\sqrt{-b}\right)^3=2+\sqrt{-121}\\ &8+12\sqrt{-b}-6b-b\sqrt{-b}=2+\sqrt{-121}\\ &8+12\sqrt{b}\sqrt{-1}-6b-b\sqrt{b}\sqrt{-1}=2+\sqrt{-121}\\ &(8-6b)+(12\sqrt{b}-b\sqrt{b})\sqrt{-1}=2+11\sqrt{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{cases}8-6b=2 & \Rightarrow b=1\\ 12\sqrt{b}-b\sqrt{b}=11\end{cases}$$

Então:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=2+\sqrt{-1}$$

e

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=2-\sqrt{-1}$$

e

$$x=2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}=4$$

VASSALLO NETO, Rafael. **A Utilização De Material Manipulativo Na Construção Do Conceito De Números Complexos**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Severino Sombra. Vassouras: USS, 2010. 96f. Disponível em: <http://*www.uss.br/arquivos/dissertacao-rafael-vfinal.pdf* > acesso em: mai. 2011. p. 31 a 35.