INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE
Campus Campos-Centro

Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

Ministério da Educação

GOVERNO FEDERAL BRASIL PAÍS RICO É PAÍS SEM POBREZA

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

# RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: PERSPECTIVAS DA UTILIZAÇÃO DESTA METODOLOGIA EM ÁLGEBRA DOS ANOS FINAIS

BRUNA VIANA VILLAÇA

CAMPOS DOS GOYTACAZES/RJ
2012

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE Campus Campos-Centro

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

# RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: PERSPECTIVAS DA UTILIZAÇÃO DESTA METODOLOGIA EM ÁLGEBRA DOS ANOS FINAIS

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos – Centro, como requisito parcial para a conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Drª. Mônica Souto da Silva Dias

CAMPOS DOS GOYTACAZES/RJ

2012

BRUNA VIANA VILLAÇA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: PERSPECTIVAS DA UTILIZAÇÃO DESTA METODOLOGIA EM ÁLGEBRA DOS ANOS FINAIS

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos – Centro, como requisito parcial para a conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovada em 21 de novembro de 2012.

Banca Avaliadora:

----------------------------------------------------------------------------------------------------

Profª. Mônica Souto da Silva Dias (orientadora)
Doutora em Educação Matemática/PUC/SP
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos – Centro

----------------------------------------------------------------------------------------------------

Profª. Carmem Lúcia Vieira Rodrigues Azevedo
Mestre em Economia Empresarial/UCAM/RJ
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos – Centro

----------------------------------------------------------------------------------------------------

Profª. Ana Paula Rangel de Andrade
Especialista em Educação Matemática/FAFIC
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos – Centro

Aos meus pais, minha irmã e a todos os meus familiares.

# AGRADECIMENTOS

A Deus, fonte de Luz e Sabedoria, sempre presente nos momentos difíceis.

Agradecimentos especiais aos meus pais e minha irmã Bárbara, pelo apoio, amor, compreensão e motivação pelo estudo.

A todos os professores do curso de Licenciatura em Matemática que contribuíram para a minha formação acadêmica, com exemplo de dedicação e respeito.

A minha orientadora, Mônica Souto, pela dedicação, paciência, apoio, boa vontade, sabedoria e sua constante disposição em me orientar.

A minha madrinha, Sônia, e o meu tio, Luiz Fernando, pelo incentivo e apoio.

A minha tia, Nelma Vilaça, pela revisão ortográfica desta pesquisa e pelo apoio constante, ao padrinho, Alberto Luiz, pelo apoio.

As minhas amigas, Ana Kelly, Miriã e Quézia, pela força nos momentos difíceis do curso.

Aos participantes do teste exploratório e das experimentações que contribuíram para a realização desta pesquisa.

Enfim, a todos que, direta ou indiretamente, colaboraram para a realização desta pesquisa.

Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema.

George Polya

**RESUMO**

Este trabalho investigou a contribuição da metodologia Resolução de Problemas para introdução da notação algébrica no contexto dos Anos Finais do Ensino Fundamental. Foi utilizada a concepção de produção de significado para a educação algébrica na elaboração dos instrumentos de pesquisa e na análise dos dados. A metodologia foi estudo de caso, cuja unidade foi uma turma do 8º. Ano do Ensino Fundamental. O problema consistiu na determinação de uma configuração genérica para a constituição de um quadrado mágico com três filas horizontais e três filas verticais, utilizando notação algébrica. A coleta de dados se deu a partir da experimentação de uma proposta didática, materializada num roteiro com o objetivo de orientar o aluno na construção da notação algébrica para a configuração de um quadrado mágico três por três, e ocorreu em quatro encontros. A análise dos dados indicou que a metodologia Resolução de Problemas pode propiciar a legitimidade e a adequação da notação algébrica, possibilitando a construção de significado para a mesma, pelos alunos.

Palavras- chave: Resolução de Problemas. Educação Algébrica. Quadrado Mágico.

**ABSTRACT**

This work investigated the contribution of the methodology Resolution of Problems for introduction of the algebraic notation in the context of the Final Years. The conception of production of meanings for the algebraic education for the elaboration of the research instruments and the analysis of the data was used. The methodology was case study, whose unit was a group of 8º. Year of Basic Ensino. The problem consisted of the determination of a generic configuration for the constitution of a magical square with three horizontal lines and three vertical lines, using algebraic notation. The collection of data if gave to leave of the experimentation of a proposal didactic, materialized in a script with the objective to guide the pupil in the construction of algebraic notation for the configuration of a magical square three for three, and occurred in four meeting. The analysis of the data indicated that methodology Resolution of Problems propitiates the legitimacy and the adequacy of the algebraic notation, making possible the construction of meanings for the same one.

Words key: Resolution of Problems. Algebraic Education. Squared Magical.

## LISTA DE FIGURAS

**SUMÁRIO**

# INTRODUÇÃO

Devido às dificuldades encontradas no ensino e aprendizagem de Matemática, professores e pesquisadores desenvolveram diferentes metodologias para o ensino dessa disciplina. Dentre tais metodologias, a autora escolheu pesquisar a metodologia Resolução de Problemas, elaborada pelo matemático George Polya (1944).

Polya (2006) estabeleceu uma lista de indagações para ajudar o aluno a traçar um plano de trabalho a fim de resolver um problema matemático, bem como orientar o professor a indagar aos seus alunos, visando auxiliar o estudante na resolução do problema.

Ao estudar a lista de indagações e sugestões para o ensino e aprendizagem de Matemática, apresentada por Polya, na obra *A arte de Resolver Problemas* (POLYA, 2006), no contexto de uma disciplina do curso de licenciatura, a pesquisadora observou que essa pode trazer grandes contribuições para a aprendizagem de conteúdos matemáticos, uma vez que as orientações metodológicas levam o professor a atuar como um mediador, agindo como um estimulador da autonomia acadêmica do aluno. Atentou, ainda, que tal metodologia possibilita ao aluno organizar as ideias para a resolução do problema, e este modo pode até ser aplicado a outras disciplinas escolares.

Outro ponto que chamou a atenção da pesquisadora foi a orientação de Polya (2006) para que o aluno retorne ao início do problema, após ter encontrado a solução, a fim de fazer uma retrospectiva de toda a resolução, visando uma aprendizagem global acerca do problema, e não apenas restrito ao solicitado no enunciado.

Neste trabalho, a pesquisadora denominará a lista de indagações e as sugestões constantes da obra *A Arte de Resolver Problemas* de Polya, como metodologia de Resolução de Problemas segundo Polya (2006).

O estudioso George Polya (1897 – 1985) foi um dos mais importantes matemáticos do século XX, nasceu em Budapeste na Hungria, passou grande parte de sua vida na Universidade de Stanford nos Estados Unidos, fazendo pesquisa em diversos ramos da Matemática, e sua grande contribuição foi a criação de um conjunto de regras e métodos que visam à descoberta, à investigação e à resolução de problemas. Muitas das ideias de Polya são utilizadas como base em estudos matemáticos até os dias atuais de muitos pesquisadores na formulação de seus trabalhos (PEREIRA et al. 2002).

Polya acreditava que para ser um bom resolvedor de problemas é necessário que se tenha um bom treinamento sobre o que se almeja ser bom. Ele fez uma comparação com finalidade de esclarecer essa ideia: compara a resolução de problema com a natação, afirmando que para ser um bom nadador é necessário que primeiro seja feita uma boa observação na maneira como nadadores movimentam pernas e braços, o segundo passo que a pessoa deve seguir é o treinamento. Deste modo, Polya acreditava que para ter uma habilidade é necessário muito treino e dedicação (POLYA, 2006).

Para resolver um problema Polya sugere quatro etapas: (a) a primeira consiste em fazer a compreensão do problema, é a hora em que o resolvedor deve observar o problema e saber qual é a incógnita deste; (b) a segunda etapa visa construir uma estratégia de resolução, estabelecer um plano que deverá ser seguido com a finalidade de chegar à resposta do problema; (c) a terceira etapa é quando ocorre a execução do plano que foi formulado na etapa anterior, ou seja, na segunda etapa, é a hora em que se emprega cada passo que foi utilizado na formulação do plano; (d) a quarta e última etapa é quando ocorre a revisão da solução, é o momento em que se deve acontecer um retrospecto de tudo que foi feito e utilizado para chegar à resposta do problema, visando verificar cada passo utilizado (POLYA, 2006).

O professor, além de selecionar as situações que serão trabalhadas em sala de aula por seus alunos, deve também ser o mediador da aprendizagem dos mesmos. O professor terá a função de incentivar e mediar as ideias de seus alunos, que assumem uma função ativa, deixando de ser alunos observadores, em que apenas eram encarregados de ver a Matemática “ser feita” pelo professor. Polya acredita que, seguindo esses princípios, a aprendizagem dos alunos ocorre de forma dinâmica, em que eles são os encarregados de fazer descobertas e elaborar conjecturas. Sendo assim, fica a ideia de que a aprendizagem será alcançada, pois as descobertas e as respostas são encontradas pelos próprios alunos (DANTE, 1994; POLYA, 2006).

Com a nova função assumida pelo professor, este deve estar sempre atento aos passos utilizados pelos alunos, percebendo o erro, não deve intervir, deve aguardar o aluno terminar a questão e junto dele encontrar o erro, nunca fornecer respostas, e sim, fazer perguntas e incentivar que as soluções para as mesmas sejam encontradas pelos próprios alunos. Este método de questionamento do professor deve ser constituído das indagações genéricas até as mais específicas e concretas, com a finalidade de que o aluno tenha a resposta em mente e que, com o auxílio do professor, ele seja capaz de resolver o problema. O professor ao selecionar questões deve buscar situações interessantes para os alunos, e com o grau de dificuldade em consonância com o nível cognitivo destes, para que constituam desafios para os alunos, proporcionando assim o desenvolvimento do seu raciocínio (DANTE, 1994; POLYA, 2006).

É válido ressaltar que, nesta metodologia, o professor não é incumbido apenas de propor questões e resolvê-las junto aos alunos, a ação do professor vai além, este é o responsável também por tornar seus alunos capazes de solucionar questões e por questionar as respostas obtidas pelos alunos, bem como a própria questão (DANTE, 1994; POLYA, 2006; REIS, ZUFFI, 2007).

A metodologia Resolução de problemas já foi bastante mencionada como uma possibilidade de otimizar o ensino e aprendizagem de Matemática. Contudo, observa-se que a sua utilização nas aulas de Matemática está muito distante de ocorrer. Uma justificativa para este fato é a dificuldade dos professores em lidar, de forma rigorosa e ao mesmo tempo flexível com este tipo de atividade em sala de aula, sem contar com uma orientação especializada. Esta dificuldade ainda é maior para os professores que não estudaram a metodologia Resolução de Problemas no curso de licenciatura (REIS, ZUFFI, 2007).

Neste trabalho estudar-se-á a influência da metodologia Resolução de Problemas no estudo de Álgebra no contexto dos Anos Finais do Ensino Fundamental[1].

A opção por esta área da Matemática deu-se pelo fato da pesquisadora encontrar um número de pesquisas relacionando Álgebra e Resolução de Problemas, inferior ao de Geometria e Resolução de Problemas.

É importante esclarecer a concepção de Álgebra adotada nesta pesquisa, uma vez que tal concepção norteará a elaboração dos instrumentos de coleta de dados deste trabalho. A Álgebra possui muitas interpretações a respeito de sua definição:

> As tentativas mais superficiais de descrever a atividade algébrica têm em comum o fato de ficarem apenas na primeira parte do trabalho; a associação com conteúdos é imediata, e a caracterização pára por aí: atividade algébrica é resolver problemas de álgebra (resolver equações, por exemplo), sejam eles problemas "descontextualizados" ou parte da solução de problemas descontextualizados (LINS, GIMENEZ, 2006, p.90).

Diante deste fato, os mesmos autores assumem que a Álgebra:

> [...] consiste em um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade ou desigualdade (LINS, GIMENEZ, 2006, p.137).

[1] Anos Finais do Ensino Fundamental corresponde a faixa etária de 11 a 14 anos, segundo a Resolução n° 3, de 3 de agosto de 2005.

Após o exposto, se construiu a seguinte questão de pesquisa: *Quais são as contribuições da metodologia de Resolução de Problemas para a aprendizagem dos alunos em Álgebra, no contexto dos Anos Finais do Ensino Fundamental?*

Buscando um recorte para o estudo proposto, constitui objetivo desta pesquisa: verificar a contribuição da metodologia Resolução de Problemas segundo Polya (2006), para a elaboração de notações algébricas com significado pelos alunos.

Durante a utilização da metodologia Resolução de Problemas no estudo da Álgebra, a principal função adotada pelo professor, além de mediador da aprendizagem, é de estimular os alunos e ajudá-los na construção do pensamento algébrico, fazendo da sala de aula um ambiente de discussão, de confronto de ideias, de argumentações e de construção coletiva da aprendizagem. Essas ações possibilitam que os alunos explorem, argumentem e defendam suas ideias, assumindo assim, um papel ativo na construção de sua aprendizagem (CANAVARRO et al. 2007).

A concepção de educação algébrica adotada neste trabalho, e as ideias da metodologia Resolução de Problemas, pilares teóricos desta pesquisa, sobre os quais se apoiou a elaboração dos instrumentos de pesquisa e a análise dos dados, são apresentadas no Capítulo 1 e 2, respectivamente. A ordem de apresentação é devida a sua utilização neste trabalho. Primeiramente, a concepção de educação algébrica norteou a busca por um problema que possibilitasse a introdução da notação algébrica com significado para os alunos. Após, a metodologia Resolução de Problemas, orientou toda a experimentação, consistindo na questão de pesquisa.

O Capítulo 3 traz a metodologia da pesquisa que orientou o trabalho de campo e a organização dos dados, tendo em vista a natureza da investigação realizada.

O relato da pesquisa e a análise dos dados são apresentados no Capítulo 4.

A síntese da análise dos dados e a sugestão de estudos futuros constam nas Considerações Finais.

# 1. EDUCAÇÃO ALGÉBRICA

As ideias expostas a seguir estão baseadas principalmente, na concepção de Lins e Gimenez (2006) a respeito do ensino e aprendizagem de Álgebra, retratada na obra Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI.

## 1.1. Educação Algébrica

Segundo Lins e Gimenez (2006), não há um consenso do que seja pensar algebricamente, o que existe é uma conformidade com relação às coisas da Álgebra, tais como equações, cálculo literal, funções, etc. A diversidade de ideias ocorre devido ao consenso ser baseado em conteúdos da Álgebra e não no pensar algebricamente. A fim de apresentar tais posicionamentos, é retomada a citação dos autores, apresentada na Introdução deste trabalho:

> As tentativas mais superficiais de descrever a atividade algébrica têm em comum o fato de ficarem apenas na primeira parte do trabalho; a associação com conteúdos é imediata, e a caracterização pára por aí: a atividade algébrica é resolver problemas da álgebra (resolver equações, por exemplo), sejam eles problemas "descontextualizados" ou parte da solução de problemas contextualizados. Em resumo, a atividade algébrica é descrita como "fazer ou usar Álgebra". A versão mais banal dessa posição é a que descreve a atividade algébrica como "calcular com letras" (LINS e GIMENEZ, 2006, p. 90).

Na citação acima, é clara a intenção dos autores em diferenciar caracterização da Álgebra e o pensar algebricamente. É claro que uma implica na outra, porém, o que incomoda aos autores é o caráter limitado das concepções do que seja a Álgebra e do que seja o pensamento algébrico apresentado em várias abordagens.

## 1.2. O Desenvolvimento da Álgebra e o Cálculo com letras

Os autores buscam na história da Álgebra justificativas para a compreensão daquela Álgebra conhecida como cálculo com letras. Os diferentes entendimentos existentes relacionados à educação algébrica apresentam raízes desde o início dos estudos relacionados à atividade algébrica.

A Álgebra teve início no ano de 1700 a.C. com os babilônicos e egípcios, quando foram desenvolvidas regras eficientes para cálculos e para a resolução de problemas existentes na época. Entretanto, não foi desenvolvida nenhuma notação para representar essas regras de forma geral (LINS, GIMENEZ, 2006).

Cerca de dois mil anos depois, a Álgebra volta a ser estuda pelo grego Diofanto, cuja grande contribuição está ligada a criação de um sinal especial para a incógnita em uma equação, que pode ser interpretada como a conhecida atualmente (LINS, GIMENEZ, 2006).

Após 1400 anos, o francês Vieta foi o primeiro a utilizar, ou seja, sistematizar letras para representar os valores desconhecidos de problemas em uma expressão algébrica, o que foi de suma importância para o estudo da Álgebra. Para os estudiosos que adotam a linha de pensamento de Vieta, o cálculo com letras está relacionado à representação de quantidades ou grandezas geométricas, cálculo com regras baseadas nas noções usuais da Aritmética e da Geometria (LINS, GIMENEZ, 2006).

A origem da noção de estrutura algébrica teve início com Galois (1811-1832) e Abel (1802-1829) de forma subentendida até chegar a Bourbaki (a partir de 1940), ingressando no domínio próprio do "cálculo com letras", em um sentido de cálculo com regras próprias e a parte de qualquer sistema particular, em um mundo completamente "abstrato" (LINS, GIMENEZ, 2006).

Com a introdução de uma nova notação no estudo da Álgebra, a utilização de letras está diretamente relacionada às mudanças conceituais, que simbolizam o estágio de "desenvolvimento"[2] em que a atividade algébrica se encontra (LINS, GIMENEZ, 2006).

## 1.3. Caracterizações da atividade algébrica

Lins e Gimenez (2006) concluem que para a atividade algébrica existem quatro linhas de pensamento, a primeira consiste na caracterização da atividade algébrica pelo uso de determinadas notações; a segunda consiste na caracterização da atividade algébrica pela presença de certos conteúdos (temas), ressaltando que a primeira e a segunda linhas apresentam em comum o fato de que ambas apenas descrevem a atividade algébrica; a terceira consiste no fato de que a atividade algébrica resulta da ação do pensamento formal[3]. Para restringir a amplitude do que vai ser considerado como pensamento formal algébrico, estabelece-se a discussão que tem por base o fato de que a atividade algébrica implica que o

[2] Os autores fazem comparação com os níveis de desenvolvimento mental, estabelecidos por Piaget.
[3] Segundo Piaget o pensamento formal consiste em fazer reflexões sobre operações.

pensamento opera sobre as operações (concretas) aritméticas, o que faz com que a Álgebra escolar seja apenas uma Aritmética generalizada, na qual a caracterização depende dos conteúdos.

A última linha é baseada na Teoria dos Campos Conceituais, desenvolvida por G. Vergnaud (2003). Tal teoria pode ser distinguida de três formas diferentes: (i) a primeira consiste em um conjunto de esquemas operacionais e de invariantes; (ii) a segunda se refere a um conjunto de formas notacionais; (iii) esta consiste em um conjunto de problemas que, a um mesmo tempo, são resolvidos por aqueles esquemas e dão sentidos a eles. A noção de campo conceitual é fundamentada em estudos desenvolvidos por Piaget, visando à resolução de problemas específicos (LINS, GIMENEZ, 2006).

Vergnaud (2003, apud LINS, GIMENEZ, 2006) determina um campo conceitual em relação ao qual as atividades são propostas; este acredita que quando o aluno faz ou diz coisas "certas", estas são vistas da perspectiva de noção implícita, e se diz ou faz coisas "erradas", estas são vistas como falha no entendimento ou inadequação em termos de desenvolvimento.

As quatro linhas analisadas visam à sala de aula, ou seja, buscam entender como o ensino e aprendizagem da atividade algébrica pode ser encaminhados de forma que os alunos consigam alcançar o máximo de seu entendimento. Isto possibilita que professores e desenvolvedores curriculares se orientem. No caso do professor, possibilita a este conhecer em qual momento do ensino e aprendizagem da atividade algébrica o aluno se encontra. No caso dos desenvolvedores curriculares, possibilita que elaborem maneiras consideradas adequadas para que os alunos se engajem corretamente na que é considerada atividade algébrica (LINS, GIMENEZ, 2006).

Os autores ressaltam ainda a existência de outras abordagens que consistem em descrições, com a diferença de que, estas últimas, descrevem a Álgebra do ponto de vista científico, ou seja, são descrições elaboradas por especialistas. Dentre estes, são citados David Kirshner, que afirma que os seres humanos processam a Álgebra como uma atividade de reconhecimento de padrões e não como um conjunto de regras; e Paolo Boero que analisa a atividade algébrica em termos de seus processos centrais[4] (LINS, GIMENEZ, 2006).

Para Lins e Gimenez (2006) o ensino e aprendizagem da Álgebra estão relacionados à natureza dos processos cognitivos, à natureza dos objetos que são relacionados ou à

---

[4] De forma simplificada, seria o processo de decidir que transformações são requeridas num determinado ponto da atividade algébrica (e efetivá-las) e o processo de antecipação, que consiste em "antever" a onde quero chegar, de modo que as transformações aplicadas não o são "às cegas" (LINS, GIMENEZ, 2006, p. 101).

concepção de conhecimentos, frisando que as propostas para a sala de aula resultam na maioria das vezes de visões do que seja aquilo que se quer promover por meio do ensino.

### 1.4. A tendência letrista no ensino e aprendizagem de Álgebra

Há a concepção de que a atividade algébrica seja o "cálculo com letras". Na realidade, seguir este pensamento não propõe melhoras na sala de aula, pois geralmente resume a atividade algébrica como sendo técnica (algoritmo) / prática (exercícios), não percebendo assim a essência da mesma. Esta formatação é a frequentemente utilizada nas escolas brasileiras (LINS, GIMENEZ, 2006).

Durante algum tempo a Álgebra foi utilizada com a finalidade de resolver equações, inequações, simplificar expressões, aplicar regras para manipular símbolos e elevar o nível de abstração dos alunos (CANAVARRO, 2007).

A grande falha existente no ensino e aprendizagem da atividade algébrica pode relacionar-se ao fato de que muitos professores não sabem a verdadeira essência da Álgebra, ou, então, não estão preparados para ensinar a mesma, e consequentemente, seguem os livros didáticos, que podem apresentar equívocos. Deste modo, torna-se necessário que as editoras e as universidades colaborem para uma prática correta da aprendizagem da atividade algébrica (LINS, GIMENEZ, 2006). Os resultados desta pesquisa pretendem colaborar neste sentido.

Os autores ainda afirmam que a aceitação de se resumir a atividade algébrica ao simples cálculo com letras, à utilização de algoritmos, não acontece apenas por resignação dos professores, sendo importante ressaltar que esta visão realmente é considerada em parte como correta, caso contrário não seria utilizada por tanto tempo (LINS, GIMENEZ, 2006).

Seguindo a linha "letrista" existem propostas que afirmam que a capacidade de se trabalhar com expressões literais ocorrem por "abstração", a partir de trabalhos desenvolvidos com situações "concretas", buscando assim um meio de facilitar o ensino e aprendizagem da Álgebra (LINS, GIMENEZ, 2006).

No Brasil, país que resume a atividade algébrica ao ideal letrista, o processo de ensino e aprendizagem da Álgebra apresenta resultados não satisfatórios e não direcionados às técnicas algébricas mais sofisticadas (LINS, GIMENEZ, 2006).

### 1.5. Relações entre o ensino e aprendizagem da Álgebra e da Aritmética

Um aspecto relacionado à atividade algébrica diz respeito à ideia do pensamento operatório formal, acreditando-se que é preciso primeiro aprender a Aritmética para depois aprender a Álgebra, ou seja, a atividade algébrica deve ocorrer de forma tardia, Os autores defendem que esta ordem é infundada, justificando-a com pesquisas realizadas (MURRAY, 1981; HAPER, 1987; DAVYDOV, s.d., apud LINS, GIMENEZ, 2006).

A diferença entre Álgebra e Aritmética está relacionada ao tratamento que é dado a ambas, não ocorre apenas de uma se beneficiar da outra, é mais que isso, uma depende da outra. Faz-se necessário compreender de qual forma a Aritmética e a Álgebra se relacionam, é preciso encontrar a raiz que permite repensar a Aritmética e a Álgebra de forma única (LINS, GIMENEZ, 2006).

Pensando no momento em que a Aritmética e a Álgebra sejam unificadas, o educador russo V.V. Davydov formulou como ponto de partida, que a atividade algébrica deve ocorrer de forma quantitativa, ou seja, quando o aluno é capaz de resolver o mais simples problema aritmético (LINS, GIMENEZ, 2006). No trabalho desenvolvido por aquele autor, a raiz estabelecida como comum para a Álgebra e a Aritmética é o trabalho com relações quantitativas (LINS, GIMENEZ, 2006).

Lins e Gimenez (2006) acreditam que uma mesma afirmação pode ter distintos significados, sendo assim necessário investigar os significados produzidos pelos alunos.

O problema escolhido para o instrumento de coleta de dados desta pesquisa propicia um trabalho mesclando Aritmética e Álgebra, no qual, a segunda é um meio de representação para solução de problemas da primeira.

### 1.6. A proposta de Lins e Gimenez para a compreensão de atividade algébrica

Lins e Gimenez (2006) acreditam que a Álgebra consiste em formar um conjunto de afirmações para as quais é possível ocorrer a produção de significados em termos de números e operações aritméticas, envolvendo igualdades e desigualdades. Faz-se necessário que ocorra uma investigação dos significados que são produzidos no interior da determinada atividade.

Ideia fundamental de sua proposta, os autores afirmam que significado consiste em um conjunto de coisas que estão relacionadas a um objeto, ou seja, o que efetivamente se diz no interior de uma atividade, e não o conjunto do que poderia ser dito (LINS, GIMENEZ, 2006).

Neste trabalho, procurou-se levar os alunos a falarem sobre as descobertas que faziam, e, mais, que as registrassem com o auxílio da pesquisadora. Este conjunto de ações propiciou que as conjecturas fossem carregadas de significado. Tomando os termos dos autores, pode-se afirmar que *o conjunto do que poderia ter sido dito* consiste nas afirmações que a pesquisadora esperava ouvir dos alunos, e *o que efetivamente se diz no interior de uma atividade* relaciona-se ao que os alunos falaram conscientemente sobre a tarefa que estavam executando, ou seja, as conclusões elaboradas por eles.

Os autores destacam que a criação de significados é complexa e rica, e envolvendo os seguintes aspectos:

> i) a atividade em questão, e também a tarefa que a origina;
> ii) os significados sendo produzidos – e, portanto, o núcleo (ou núcleos) em jogo;
> iii) o possível processo de transformação do (s) núcleo(s), e as possíveis rupturas na direção de novos modos de produção de significado;
> iv) os textos sendo produzidos – notações, diagramas, escrita, fala, gestos, e sua eventual constituição em objeto;
> v) o papel do professor como interlocutor;
> vi) os alunos como interlocutores uns dos outros;
> vii) interlocutores não presentes;
> viii) a existência de certos modos de produção de significados que queremos que os alunos dominem; e,
> ix) a existência de certas *afirmações* que eles venham a assumir como corretas (LINS, GIMEMEZ, 2006, p. 146).

Alguns itens acima serão comentados tendo em vista as especificidades desta pesquisa. Neste trabalho, a tarefa proposta aos alunos os envolveu em sua resolução de modo que a atribuição de significado surgiu naturalmente (i). Isto é, para continuar resolvendo o problema, os alunos precisaram desta linguagem, por isso, eles acataram a sugestão da pesquisadora em associar termos desconhecidos a uma representação literal.

Caso os alunos não tivessem se envolvido com a proposta de atividade, talvez eles não sentissem a necessidade da representação, e as sugestões da pesquisadora tivessem soado como algo indiferente para eles. O núcleo, em torno do qual gerou a produção de significado, foi o quadrado mágico. Quando os alunos buscam a resposta correta e encontram significados para o que estão fazendo, isso denota que a atividade algébrica aconteceu (ii). Não houve transformação do núcleo, pois a utilização das expressões algébricas foi voltada para a determinação dos elementos do quadrado mágico (iii).

A pesquisadora esteve atenta ao significado que os alunos atribuíam à notação algébrica escolhida pelos alunos, cuidando para que sua intervenção não invadisse ou deturpasse o significado produzido por eles (iv).

Os alunos que estavam acostumados com respostas fornecidas pelo professor, sentiram diferença durante o desenvolvimento deste trabalho, pois a pesquisadora do mesmo apenas mediou às atividades. Em momento algum, esta fornecia respostas prontas, ou seja, os alunos é quem tinham que encontrar as respostas para as questões propostas, e isso ocorreu a partir da produção de significado. Durante este processo de ensino e aprendizagem ocorreram rupturas do pensamento, e, nesses momentos, a pesquisadora buscou de forma constante administrar as mesmas, e levar os alunos a encontrar seus erros ou equívocos na solução encontrada, isto geralmente ocorreu na releitura da solução encontrada (v).

Ocorreu, em poucos momentos da pesquisa, de os participantes auxiliarem uns aos outros, ou que suas colocações despertassem ideias nos colegas com finalidade de que todos alcançassem a resposta correta (vi).

Na elaboração da atividade, na experimentação e na análise dos dados, esteve presente a preocupação com o que a pesquisadora queria que os alunos produzissem, e o que efetivamente produziram, bem como os modos utilizados para tal (viii e ix).

De acordo com Lins e Gimenez (2006) existem distintos modos de se produzir significado para a Álgebra; o pensamento algébrico é apenas um desses modos e apresenta três características fundamentais:

1. o *aritmeticismo* consiste em produzir significados apenas em relação a números e operações aritméticas;
2. o *internalismo* consiste em considerar números e operações apenas segundo suas propriedades, e não "modelando" números em outros objetos, por exemplo, objetos "físicos" ou "geométricos"; e,
3. a *analiticidade* consiste em operar sobre números não conhecidos como se fossem conhecidos.

Reportando ao trabalho monográfico, foi o *aritmeticismo* foi observado no momento em que os alunos trabalharam com as sequências numéricas, buscando as relações existentes entre a configuração do quadrado mágico e os elementos que compõem a sequência numérica, assim como a origem da soma utilizada em cada sequência. O *internalismo* e a *analiticidade* não foram observados na experimentação deste trabalho.

O trabalho de Lins e Gimenez (2006) apresenta duas características para a educação algébrica:

1. permitir que os alunos sejam aptos a produzir significado para a Álgebra; e,
2. permitir que os alunos desenvolvam a capacidade de pensar algebricamente.

É conseqüência de ambas as características o desenvolvimento de habilidades "técnicas", como por exemplo, o domínio de técnicas manipulativas, entretanto isto não pode nem deve preceder as duas características definidas anteriormente.

Para serem alcançados os objetivos da educação algébrica, existem dois tópicos que devem ser levados em consideração:

1. para que ocorra uma enunciação é necessário produzir afirmações e justificações para situações concretas; e,
2. junto ao primeiro tópico deve-se trabalhar com transformações diretas de expressões.

Cabe ressaltar que ambos os modos de produção de significado são distintos. Na fase de experimentação desta pesquisa, foi contemplado o primeiro aspecto, por estar diretamente relacionado com a atividade proposta aos alunos.

É importante frisar que o ritmo do processo geralmente está relacionado com a série na qual o aluno está cursando, com as experiências anteriores vividas pelos alunos e com a concentração da turma na qual o aluno está inserido. O papel do professor é de estar sempre voltado aos passos do aluno no decorrer das atividades e manter-se sempre atento aos objetivos a serem alcançados pelo mesmo (LINS, GIMENEZ, 2006).

Os autores insistem que o trabalho em sala de aula deve ser sustentado pelo fato de que manipular a expressão algébrica é legítimo. A otimização da manipulação pelos alunos pode ocorrer a partir de simples "exercícios". Sendo de extrema importância que os alunos tenham a compreensão da natureza dos exercícios, saibam distinguir quando estão apenas pondo em prática um determinado conjunto de técnicas, mas que esta prática está totalmente inserida em um quadro ainda maior, e que não se justifica em si mesma (LINS, GIMENEZ, 2006).

Lins e Gimenez (2006) concentram-se, principalmente, em criar situações nas quais os alunos possam entender como legítimo um determinado modo de produzir significado e de pensar. Sendo extremamente essenciais, essas atividades são denominadas "atividades de inserção".

É sempre válido expor que existe um conjunto de atividades que também é importante na sala de aula, um exemplo de outro tipo de atividade é de investigação que utiliza a Álgebra como forma de sistematizar propriedades observadas, podendo ser por generalização, por resolução e por discussão de problemas, empregando a Álgebra como ferramenta. Todas as formas de trabalho devem ser usadas pelo professor. Nesta experimentação foi utilizada a generalização de problemas.

O professor deve sempre buscar alcançar a coexistência da educação algébrica com a educação aritmética, de forma que uma seja implicada no desenvolvimento da outra. Esta afirmação apóia a escolha do problema do quadrado mágico para a pesquisa.

A educação aritmética e a educação algébrica devem ter como principal objetivo:

1. proporcionar aos alunos condições de uso de habilidades de resolver problemas, de investigar e de explorar situações;
2. possibilitar aos alunos a capacidade de desenvolver diferentes modos de produzir significado, de pensar; e,
3. proporcionar aos alunos o aprimoramento de suas habilidades técnicas, ou seja, proporcionar aos alunos a capacidade de utilizar as ferramentas desenvolvidas com facilidade (LINS, GIMENEZ, 2006).

No entendimento da autora desta pesquisa, os três objetivos mostrados anteriormente constituem a ponte que relaciona a educação algébrica e a metodologia Resolução de Problemas, segundo Polya (2006).

Os autores ressaltam que a proposta de trabalhar com base em significado, e não em conteúdo possibilita:

> ao professor uma leitura positiva e permanente do que os alunos estão dizendo e fazendo, ao passo que o trabalho centrado em conteúdos padece dos problemas, em relação à álgebra: é difícil trabalhar da perspectiva de que o aluno ou bem alcançou plenamente o que queríamos ou bem está em falta (e não sabemos onde ele está) (LINS, GIMENEZ, 2006, p. 166).

### 1.7. A produção de significado em Álgebra e o uso de notações

Os autores também afirmam que:

> Uma outra característica do trabalho com base em significado refere-se à questão das notações. Nos capítulos 2 e 3, tivemos oportunidade de observar que muitas pessoas ainda parecem considerar que notações carregam “em si” este ou aquele significado. A questão poderia ser tratada de forma simples, pois poderíamos dizer que o significado “está em quem interpreta, e não na notação”. Mas essa questão tem mais aspectos a serem explorados (LINS, GIMENEZ, 2006, p. 167).

Quando uma notação está carregada de significados definidos como próprios da mesma, fica a ideia de que o significado está na notação, e quando a mesma notação é utilizada com um significado diferente do habitual, fica a impressão de que há erros. Deste modo, conclui-se que os alunos ficam em um patamar diferente do qual o professor se encontra, pois os mesmos não entendem a notação como o professor entende (LINS, GIMENEZ, 2006).

Sendo assim, é importante que o aluno entenda a notação, ou seja, que compreenda o significado da mesma (CANAVARRO, 2007).

Deste modo, não sendo feita a análise da atividade algébrica e da atividade aritmética baseadas em significados, observa-se que a utilização de determinada notação algébrica tem um poder absoluto (LINS, GIMENEZ, 2006).

Referente à notação com letras, é válido ressaltar que os significados devem estar claros para que não exista dificuldade em observar que determinada notação é adequada e legítima, sendo assim ocorre o carregamento de significado na notação utilizada. Isto deve ocorrer a partir de estímulos do professor, que deve ser capaz de auxiliar os alunos a escolherem uma notação que realmente tenha significado para eles. Conclui-se que a notação algébrica não deve ser carregada de significado, mas sim, que seja capaz de carregar-se de significado pelos alunos (LINS, GIMENEZ, 2006).

Nesta investigação, houve uma preocupação grande em relação à escolha da notação utilizada pelos alunos. A pesquisadora relutou em sugerir representações, o que se deu apenas em caso de bloqueio dos alunos, ou seja, quando eles pareciam se distanciar da atividade por não terem uma ideia. Como será visto no Capítulo 4, segunda experimentação, uma sugestão da turma pesquisada para um determinado termo foi composto de duas letras – NM. Essa representação, que para outras pessoas pode significar, por exemplo, o produto de N por M, para os alunos que a sugeriram, estava claro que tal notação indicava um dado termo, e, em nenhum momento, foi motivo de confusão, sendo utilizado com destreza por eles.

Outras notações foram sugeridas pelos alunos e utilizadas por eles para compor expressões algébricas (ainda que não tenha sido ventilado este termo na experimentação). O fato dos alunos calcularem o valor das expressões algébricas sem apresentar dificuldade na substituição por valores numéricos, pode indicar que as representações por eles escolhidas estavam repletas de significado para os mesmos.

# 2. METODOLOGIA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Com as inadequações existentes sobre a atividade e a educação algébrica dos alunos (LINS, GIMENEZ, 2006), neste trabalho, a pesquisadora relaciona a educação algébrica à metodologia Resolução de Problemas, buscando verificar se tal metodologia proporciona a elaboração de notações, pelos alunos, com significado para eles.

Durante o estudo da Álgebra nas escolas ocorre apenas uma parte da atividade algébrica, que é a parte na qual o resolvedor de problemas encontra a solução do mesmo (LINS, GIMENEZ, 2006), entretanto utilizando a metodologia Resolução de Problemas se faz necessário um retrospecto da solução encontrada, momento em que o resolvedor do problema retorna ao problema e a sua solução, buscando refletir sobre a coerência da resposta encontrada e as estratégias utilizadas em sua resolução.

Como apresentada na Introdução, a metodologia Resolução de Problemas acontece a partir de quatro etapas. A primeira etapa consiste na compreensão do problema, momento em que o resolvedor procura compreender o problema proposto, saber o que é solicitado. A segunda etapa aponta em estabelecer um plano para resolver o problema em questão, ou seja, criar estratégias que visem à solução correta do mesmo. A terceira etapa atua na execução do plano estabelecido na etapa anterior, é o momento de colocar em prática caminhos pensados para obter a solução do problema. A quarta e última etapa consiste em um retrospecto; é o momento que ocorre a revisão do problema e sua solução, em que o resolvedor de problemas deve examinar a solução obtida e os caminhos utilizados para encontrar a mesma (POLYA, 2006).

## 2.1. A atitude do professor na metodologia Resolução de Problemas

Na metodologia Resolução de Problemas, o professor deve ser um constante mediador da aprendizagem, deve estar sempre bem atento aos passos utilizados pelos alunos durante a resolução de um determinado problema, podendo colocar-se na situação de aluno, e assim perceber possíveis dúvidas, com a finalidade de compreender o raciocínio dos alunos (POLYA, 2006).

Durante a mediação da aprendizagem, o professor deve buscar tornar as aulas de Matemática criativas, estimulando a participação de todos os alunos, para que ocorra troca de informações e o aprendizado seja coletivo (CANAVARRO, 2007).

É importante enfatizar que o problema escolhido pelo professor deve: (i) ser sempre condizente com o nível do ensino ao qual o aluno está inserido; (ii) ser interessante para o mesmo, ou seja, deve motivar as atividades investigativas, e para que isto aconteça o problema não pode ser fácil nem difícil, pois em ambos os casos possibilita que o aluno perca o interesse pelo problema, e (iii) deve buscar sempre aguçar a curiosidade do aluno, levando-o a encontrar a solução correta (POLYA, 2006).

Nesta pesquisa, o problema sobre os quadrados mágicos foi escolhido tendo em vista tais orientações, até mesmo na determinação das sequências apresentadas (estritamente composta de números inteiros positivos). Foi cuidado para que as adições envolvendo números inteiros negativos não prejudicasse o andamento da investigação realizada com os alunos, pois não era objetivo da pesquisa averiguar se os alunos sabiam operar com números inteiros negativos.

Um dos principais deveres do professor é o de auxiliar os alunos, e para que isto ocorra de forma correta, é necessário que o ele tenha tempo, prática, dedicação e princípios firmes, devendo agir de forma natural e com bastante descrição. Isto implica em que o professor saiba dosar o quanto deve interferir, não podendo ser demais, pois assim faz praticamente tudo e pouco resta para os alunos, e nem deve interferir pouco, pois os alunos quando não sabem por onde começar nem qual caminho devem seguir, desistem rapidamente do problema proposto (POLYA, 2006).

Para auxiliar os alunos, o professor deve utilizar diversos recursos; um deles é fazer indagações, ou seja, perguntas genéricas que visem guiar os alunos de forma não direta para que alcancem a solução de problemas. As perguntas genéricas devem ser aplicáveis a problemas de diversos tipos, cabendo ao professor utilizar o caminho que julgar mais correto para que os alunos obtenham uma aprendizagem com significado. Sendo assim, o professor que é o constante mediador da aprendizagem, busca alcançar dois objetivos. O primeiro consiste em apenas auxiliar os alunos durante a resolução dos problemas; e o segundo, em desenvolver nos alunos a capacidade de resolver outros problemas por si mesmos (POLYA, 2006).

Para que os alunos adquiram tal capacidade, o professor precisa estimulá-los a se interessar por problemas e possibilitar que os resolvam durante suas aulas. Quando o professor resolve algum problema em sala de aula, deve buscar fazer as mesmas indagações genéricas, que utiliza para ajudar os alunos com a intenção de que os mesmos percebam o quanto fazer perguntas genéricas facilita na obtenção da solução do problema e ao fazê-las "adquirirá algo mais importante do que o simples conhecimento de um fato matemático" (POLYA, 2006, p.4).

## 2.2. As Etapas da metodologia Resolução de Problemas segundo Polya

A primeira etapa identificada como sendo a compreensão do problema, é que se deve perceber com clareza o que o problema quer encontrar, e também despertar nos alunos o desejo em resolvê-lo. É nesta etapa em que eles devem entender o seu enunciado, ou seja, os alunos devem saber o que o problema quer encontrar com clareza (POLYA, 2006).

A segunda etapa dessa metodologia consiste no estabelecimento de um plano, e que se tem o conhecimento do que é necessário executar para obter a solução do problema. O plano pode surgir de forma gradativa ou a partir de tentativas infrutíferas. Nesta etapa, o professor pode utilizar artifícios para promover nos alunos o estabelecimento de um plano, fazer perguntas genéricas, mas que as mesmas tenham como objetivo encaminhar os alunos a estabelecer o plano que promova a obtenção da solução (POLYA, 2006).

O professor deve estar apto a perceber os obstáculos encontrados pelos alunos a partir de suas dificuldades apresentadas, devendo o professor resolver problemas constantemente, pois assim o mesmo pode perceber com maior facilidade as dificuldades apresentadas pelos alunos na resolução de problemas (POLYA, 2006).

É válido ressaltar que é muito difícil ter uma boa ideia quando não se conhece praticamente nada sobre o assunto abordado no problema, e para que a boa ideia surja faz-se necessário que os alunos se baseiem em experiências anteriores e em conhecimentos previamente adquiridos. Pode-se pensar também em um problema correlato, ou seja, um problema que apresente alguma correspondência com o problema em questão (POLYA, 2006).

Já a terceira etapa identificada como sendo a execução do plano, consiste em que, após idealizar um plano, é preciso muita concentração no objetivo, e algo absolutamente importante é ter paciência para seguir com firmeza o plano anteriormente estabelecido (POLYA, 2006).

A execução do plano é a etapa mais fácil da metodologia Resolução de Problemas, é como seguir um roteiro, o mesmo deve ser seguido detalhadamente para que o resolvedor não se perca em nenhum momento, buscando não deixar passar nenhum erro (POLYA, 2006).

Na etapa da execução do plano, os alunos estarão resolvendo o problema, pondo em prática seus planos. O que pode acontecer é o aluno esquecer seu plano e isto geralmente acontece quando o plano é aceito pelo professor, ou quando recebe de alguma colega. Mas quando é o aluno quem realmente estabelece seu plano dificilmente se esquece dele. O professor, mediador da aprendizagem, deve sempre insistir para que os alunos verifiquem os passos utilizados pelos mesmos para a resolução do problema (POLYA, 2006).

No período em que os alunos verificam os passos utilizados durante a resolução do problema, devem estar convictos de cada um destes passos utilizados (POLYA, 2006).

A quarta etapa da metodologia Resolução de Problemas é a do retrospecto, é nessa que, após os alunos terem chegado a uma solução para o problema, examinam e reconsideram o resultado final e o caminho utilizado. Deste modo, os alunos podem solidificar o seu conhecimento e aperfeiçoar a sua capacidade de resolver problemas. É importante que o professor mostre a seus alunos que nenhum problema fica esgotado, que sempre resta algo a fazer, que é sempre possível aperfeiçoar a compreensão da resolução do problema (POLYA, 2006).

A etapa do retrospecto é o momento em que erros são percebidos durante a resolução dos problemas, podendo ser corrigidos. Outras questões desta etapa são também importantes e apontados na citação abaixo:

> Um dos primeiros deveres do professor é não dar aos seus alunos a impressão de que os problemas matemáticos têm pouca relação uns com os outros, de que nenhuma relação tem com qualquer outra coisa. Surge uma oportunidade natural de investigar as relações de um problema quando fazemos o retrospecto de sua resolução. Os estudantes acharão realmente interessante o retrospecto se eles houverem feito um esforço honesto e ficarem conscientes de terem resolvido bem o problema. Neste caso, ficarão ansiosos para ver o que mais poderão conseguir com aquele esforço e como poderão, da próxima vez, fazer tão bem quanto desta. O professor deve encorajar os alunos a imaginar casos em que eles poderão outra vez utilizar o procedimento usado ou o resultado obtido. *É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?* (POLYA, 2006, p. 13).

## 3. METODOLOGIA

Neste capítulo, é caracterizada a presente pesquisa e apresentados outros aspectos metodológicos pertinentes ao seu desenvolvimento.

### 3.1. Caracterização da pesquisa

Essa pesquisa consistiu em um estudo de caso e foi realizada em uma turma dos Anos Finais do Ensino Fundamental. Segundo Goldenberg (2000):

> O estudo de caso não é uma técnica específica, mas uma análise holística, a mais completa possível, que considera a unidade social estudada como um *todo,* seja um indivíduo, uma família, uma instituição ou uma comunidade, com o objetivo de compreendê-los em seus próprios termos (GOLDENBERG, 2000, p.33).

Nesta investigação, buscou-se compreender os significados produzidos pelos alunos para as situações didáticas envolvendo o quadrado mágico.

Optou-se pelo estudo de caso, numa turma de 8º. ano de uma escola pública, pois o mesmo pode ser utilizado nas mais variadas situações, possibilitando a contribuição a conhecimentos dos fenômenos desde os individuais até os grupais (YIN, 2010).

O estudo de caso possibilita que o pesquisador possa depreender as características holísticas e significativas, ou seja, é possível perceber com detalhamento as mudanças de comportamentos dos indivíduos estudados, assim como a melhora em seu desempenho, na sua aprendizagem (YIN, 2010). Neste trabalho, buscou-se o desenvolvimento de uma linguagem algébrica pelos alunos, numa situação de resolução de problemas, visando identificar a contribuição da metodologia Resolução de Problemas (POLYA, 2006) na atribuição de significados à notação algébrica.

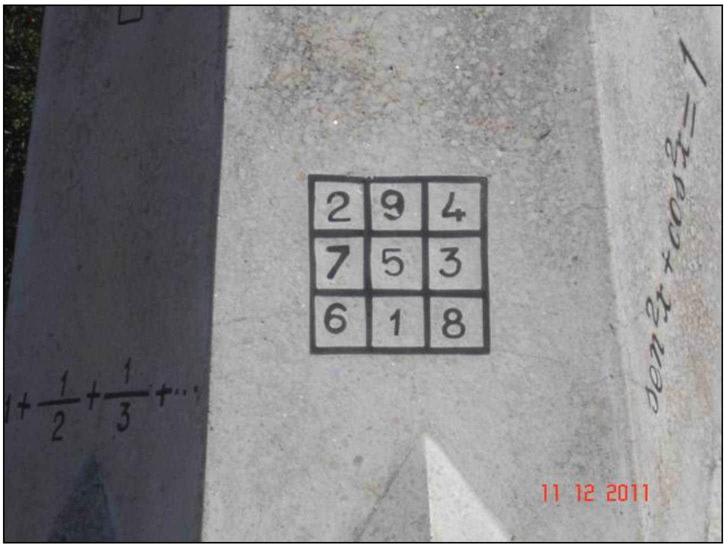
Os dados foram coletados por meio da observação participativa e dos registros escritos produzidos pelos alunos. Entende-se observação participativa como aquele em que o observador também age como pesquisador.

### 3.2. Elaboração do problema a ser resolvido

Na busca por um problema que pudesse estar ao nível cognitivo de uma turma de oitavo ano do Ensino Fundamental, e, simultaneamente, despertasse nos alunos a motivação para resolver tal problema, e ainda, que envolvesse iniciação ao estudo de Álgebra, chegou-se à situação descrita a seguir. Num minicurso intitulado Exploração de Problemas, Laboratório de Ensino de Matemática e Formação de Conceitos Científicos[5], assistido pela pesquisadora, foi apresentado o quadrado mágico. Deste modo, o tema quadrado mágico foi analisado pela pesquisadora e sua orientadora, concluindo que este poderia atender aos itens citados no início desse parágrafo.

Há estudiosos que acreditam que os quadrados mágicos (Figura 3.1) surgiram na China há cerca de 2200 a.C., e ainda, segundo esses estudiosos surgiram também na Índia. Os quadrados mágicos são arranjos quadrados de numerais em que as filas horizontais, as filas verticais e as duas diagonais apresentam a mesma soma. E o nome quadrado mágico foi dado a este tipo especial de arranjo geométrico porque se acreditava que tivessem poderes especiais (HECK; FEY, 1992).

Figura 3.1 Quadrado Mágico 3X3




Fonte: Pesquisadora

Elaborou-se o roteiro para o problema intitulado quadrado mágico, que consistiu numa sequência de pequenos problemas envolvendo a constituição de um quadrado mágico 3X3 (com três filas horizontais e três filas verticais). Alguns problemas foram apresentados aos alunos oralmente, e outros por escrito. O objetivo da sequência foi encontrar uma

5 Tal minicurso ocorreu na II Semana Unificada da Universidade Estadual do Norte Fluminense em novembro de 2010, ministrado por Dr. Silvanio Andrade.

representação genérica, utilizando notação algébrica, para a configuração de um quadrado mágico 3X3, que permitisse, a partir de qualquer P.A. (Progressão Aritmética) dada de nove números, determinar a posição correta de cada elemento no quadrado, sem utilizar o método das tentativas, de modo que as três filas horizontais, as três filas verticais e as duas diagonais tivessem a soma determinada para tal sequência.

### 3.3. Distribuição das fases da resolução de problema na 2ª. experimentação

A sequência de problemas foi agrupada em duas fases. A primeira fase que incluiu os problemas identificados como 1, 2 e 3, teve por objetivo familiarizar os alunos com o tema quadrado mágico.

No problema 1, foi entregue aos alunos uma sequência composta por nove números registrados um a um, em pedaços de papel com formato quadrangular (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9), em que a soma da sequência fornecida era 15. Inicialmente, foi solicitado aos alunos que arrumassem os elementos desta sequência em três filas horizontais, e que cada fila fosse composta por três elementos da sequência. Em seguida, os alunos tiveram que somar os elementos de cada uma dessas filas. Após, tiveram que arrumar os elementos de forma que a soma deles nas três filas horizontais fosse 15. Sendo feito o solicitado pela pesquisadora, foi proposto aos alunos somar os elementos de cada uma das três filas verticais. Prosseguindo, requereu-se aos alunos que arrumassem os elementos de modo que as três filas horizontais e as três verticais, simultaneamente somassem 15. Após cumprirem o solicitado pela pesquisadora, foi pedido aos alunos que somassem as duas diagonais do quadrado mágico. Em seguida, a pesquisadora solicitou aos alunos que arrumassem os elementos de forma que no quadrado mágico, as três filas horizontais, as três filas verticais e as duas diagonais somassem 15.

No problema 2, os alunos tiveram que buscar entender qual era a relação existente entre a soma e os elementos da sequência.

No problema 3, os alunos deveriam relacionar as conclusões feitas nos problemas anteriores com o novo problema proposto. Foi entregue aos alunos uma nova sequência, entretanto, a sequência não foi a mesma para todos os alunos, havia três sequências diferentes, cada uma continha um valor diferente para a soma do quadrado mágico.

Com isso, a segunda fase da pesquisa se iniciou.

O roteiro montado que inclui os problemas 4 e 5, foi inspirado nas orientações de Polya (2006) para estimular os alunos e nortear o raciocínio destes na busca pela solução dos problemas apresentados.

No problema 4, a pesquisadora incentivou os alunos, com perguntas, a formular todas as possíveis conjecturas existentes. Em seguida, estimulou a busca de uma representação genérica para as mesmas relativas aos casos particulares. Para que isto ocorresse, a pesquisadora procurou seguir fielmente as orientações de Polya (2006), bem como exerceu o papel de mediadora e estimuladora do processo de ensino e aprendizagem.

Durante o momento descrito acima, a fim de alcançar seus objetivos, a pesquisadora, estimulou os alunos procurando guiar de forma sutil o raciocínio dos mesmos, usando perguntas genéricas, para que a partir delas, encontrassem a solução do problema.

No problema 5, após terem escrito os elementos da sequência na forma algébrica, os alunos deveriam formular a configuração do quadrado mágico algebricamente e formular, também, um esquema que possibilitasse montar um quadrado mágico correto e rapidamente, sem utilizar o método das tentativas.

### 3.4. Perfil dos participantes da pesquisa

Neste estudo, foram considerados como sujeitos da pesquisa os grupos de alunos relacionados a seguir, com perfis diversos:

a) sete alunos do 1°. ano do Ensino Médio de uma escola pública federal do município de Campos dos Goytacazes;
b) oito alunos do 8°. ano do Ensino Fundamental de uma escola particular do município de Campos dos Goytacazes – RJ;
c) 27 alunos do 8°. ano de uma escola pública do município de Campos dos Goytacazes – RJ.

#### 3.4.1. Participantes do teste exploratório

Os alunos que participaram do teste exploratório eram alunos do 1°. ano do Ensino Médio de uma escola pública federal do município de Campos dos Goytacazes – RJ, com faixa etária entre 14 e 15 anos. Eram alunos que, em determinados momentos, tomavam iniciativa, e, em outros, esperavam estímulos da pesquisadora. Foi percebido que os alunos tomavam a iniciativa de resolver o que havia sido solicitado pela pesquisadora, quando os mesmos sabiam fazer corretamente, e nos momentos que esperavam o estímulo da pesquisadora foi porque não sabiam qual caminho seguir, o que deveriam fazer. Eram alunos bastante participativos.

Os alunos que participaram do teste exploratório já haviam estudado conteúdos de Álgebra.

### 3.4.2. Participantes da 1ª. experimentação

Os alunos participantes da 1ª. experimentação cursavam o 8°. ano do Ensino Fundamental de uma escola particular do município de Campos dos Goytacazes – RJ, com faixa etária entre 12 e 13 anos. Eram alunos bastante interessados em aprender coisas novas, participaram da pesquisa de forma intensa. A pesquisadora necessitou estimulá-los apenas em momentos de dificuldades, ou seja, durante toda a aplicação do trabalho os alunos se mostraram interessados em fazer as descobertas que os auxiliasse na obtenção da resposta correta.

Os alunos que participaram da 1ª. experimentação já haviam iniciado o estudo de conteúdos de Álgebra.

### 3.4.3. Participantes da 2ª. experimentação

Os participantes da 2ª. Experimentação, alunos do 8°. ano de uma escola pública do município de Campos dos Goytacazes – RJ, com faixa etária entre 14 e 15 anos, eram alunos bastante acomodados, não tomavam iniciativa alguma. Somente procuravam resolver o problema, após a pesquisadora solicitar e insistir com eles para que realizassem tal tarefa. Eles apresentavam dificuldades na interpretação das questões, pois estes alunos geralmente vêem a Matemática ser feita pela professora, ou seja, não participavam da construção da mesma.

Estes alunos não começaram o estudo de conteúdos de Álgebra.

# 4. EXPERIMENTAÇÃO E ANÁLISE

Neste capítulo estão registradas as experimentações realizadas e a análise dos fatos observados à luz do referencial teórico.

A situação didática proposta foi experimentada em três momentos. O primeiro momento consistiu no teste exploratório cujo objetivo foi verificar a adequação da proposta ao nível pretendido (8 °. ano) bem como a condução do trabalho por parte da pesquisadora e outros aspectos tais como o tempo de duração, dúvidas dos alunos e as atitudes dos mesmos diante de um desafio proposto pela pesquisadora. Os outros dois momentos foram com experimentações em turmas distintas de 8°. ano.

A 1ª. experimentação ocorreu com oito alunos do 8°. ano de uma escola particular de Campos dos Goytacazes - RJ, em horário extraclasse. A 2ª. experimentação ocorreu em uma turma de 8°. ano composta por vinte e sete alunos, de uma escola pública municipal da cidade de Campos dos Goytacazes - RJ. As atividades foram desenvolvidas nos horários da aula de Matemática. Segue a descrição e análise dos três momentos da pesquisa.

## 4.1. Primeiro momento da pesquisa: o teste exploratório

O teste exploratório aconteceu com sete alunos voluntários da primeira série do Ensino Médio, com idades entre 14 e 15 anos de uma escola pública federal do município de Campos dos Goytacazes - RJ. O teste ocorreu em dois encontros com duração de 2h30min cada encontro, constituindo uma atividade extraclasse.

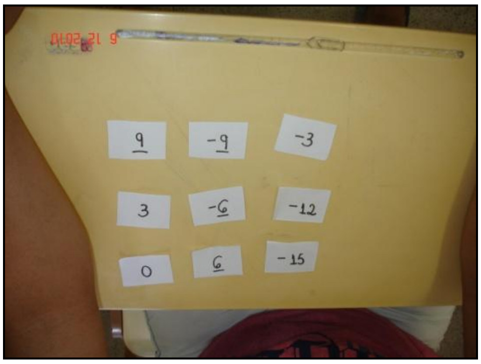
No primeiro dia, 06 de dezembro de 2010, houve a apresentação da autora e pesquisadora do trabalho, que enfatizou a importância do teste exploratório para o amadurecimento do tema da pesquisa, bem como as futuras contribuições deste trabalho para a aprendizagem do conteúdo matemático abordado. Também falou o quanto os participantes voluntários podiam contribuir, desde as dúvidas que surgissem até as soluções e observações encontradas pelos mesmos.

O papel da pesquisadora, no primeiro momento, foi mediar as descobertas feitas pelos participantes. A pesquisadora entregou aos alunos, individualmente, um conjunto composto por nove números distintos, ou seja, os elementos da sequência, escritos em pequenos retângulos de papel. O conjunto distribuído foi igual para todos os participantes da pesquisa (Figura 4.1), foi a sequência composta pelos números -15, -12, -9, -6, -3, 0, 3, 6 e 9, e solicitou que os mesmos fossem arrumados em três filas horizontais compostas por três elementos em cada uma destas (Figura 4.2). O objetivo foi despertar a atenção dos participantes da pesquisa para possíveis regularidades relativas à soma dos elementos em cada fila (horizontais, verticais e diagonais), ou seja, a soma dos elementos que compunham cada uma das três filas horizontais.

Figura 4.1 Elementos da sequência


Fonte: Pesquisadora

Figura 4.2 Elementos da sequência arrumados em três filas horizontais




Fonte: Pesquisadora

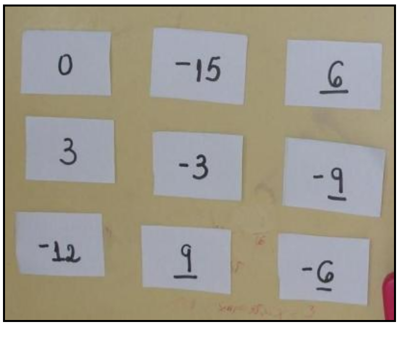
É importante ressaltar que, até esse momento, esta pesquisadora utilizou a palavra sequência para os participantes da pesquisa. Prosseguindo com o trabalho, a pesquisadora pediu para que os alunos somassem os elementos que compunham cada uma das três filas horizontais. As respostas foram bem variadas. Em seguida, a pesquisadora solicitou aos participantes que organizassem os elementos nas três filas horizontais de modo que a soma dos elementos de cada uma delas fosse igual a -9. Todos os participantes da pesquisa conseguiram cumprir a tarefa sem dificuldade.

Após terem arrumado as três filas horizontais com a soma solicitada, a pesquisadora pediu que somassem os elementos de cada uma das três filas verticais; alguns obtiveram respostas iguais. Sendo assim, a próxima tarefa foi solicitada, arrumar novamente os elementos da sequência de modo que a soma dos elementos de cada uma das três filas horizontais e de cada uma das três filas verticais fosse -9. A partir deste momento, os participantes começaram a apresentar dificuldade em conseguir arrumar tais elementos com a soma solicitada pela pesquisadora, pois não queriam mudar a arrumação das três filas horizontais, uma vez que estas já totalizavam a soma solicitada. Alguns participantes, inicialmente, hesitavam em alterar a configuração que implicasse em desfazer as somas já obtidas nas três filas horizontais.

Diante da dificuldade dos participantes em montar a configuração solicitada, a pesquisadora questionou-os sobre tal dificuldade, os mesmos disseram que estavam tentando arrumar conforme o solicitado, sem alterar os elementos das três filas horizontais, isto é, eles permutavam os elementos em cada fila horizontal e as filas horizontais entre si, sem alterar os elementos que compunham cada uma delas, já que estas haviam sido feitas anteriormente quando solicitado pela pesquisadora. Ao observar a arrumação de seus elementos, um participante percebeu que não precisava mudar muita coisa, outro participante trocou apenas dois elementos de lugar e chegou à resposta pedida pela pesquisadora. O tempo gasto nesta atividade foi de aproximadamente 15 minutos.

Em seguida, a pesquisadora perguntou qual era a soma dos elementos que compunham as duas diagonais. Em nenhum dos quadrados formados, as diagonais totalizaram a soma -9. Sendo assim, foi solicitado aos participantes que além de cada uma das três filas horizontais e de cada uma das três filas verticais, a soma dos elementos que compunham as duas diagonais também fosse igual a -9 (Figura 4.3). Os participantes iniciaram a busca pela resposta correta, a maioria realizou permutações entre filas horizontais e entre filas verticais. Em face da demora em chegar ao resultado esperado, a pesquisadora interviu, sugerindo que mexessem com todos os elementos, ou seja, não era porque cada uma das três filas horizontais e cada uma das três verticais estava com a soma solicitada pela pesquisadora que os elementos que compunham as mesmas não poderiam ser alterados. Neste momento a pesquisadora buscou atender aos participantes individualmente. A pesquisadora mediou as atividades constantemente seguindo as orientações de Polya (2006), fez perguntas genéricas com a finalidade de que os alunos alcançassem a solução correta dos problemas e estimulou os mesmos a verificarem os passos utilizados. Houve uma diversidade no tempo de alcance da resposta correta desta atividade, entre 30 minutos e 45 minutos.

Figura 4.3 Arrumação de cada uma das três filas horizontais, de cada uma das três filas verticais e das duas diagonais com a soma igual a -9




Fonte: Pesquisadora

Após todos os participantes terem montado o quadrado de modo que os elementos de cada uma das três filas horizontais, cada uma das três verticais e as duas diagonais somasse -9, a pesquisadora registrou no quadro as diferentes configurações (Figura 4.4). Houve configurações iguais. Com as configurações dos quadrados já escritos no quadro pela pesquisadora, os alunos observaram que filas horizontais da configuração de um quadrado eram filas verticais de outro quadrado, e o elemento que estava no centro de todos os quadrados era o mesmo nas variadas configurações e este elemento era o mesmo do meio da sequência utilizada, neste caso o número é o -3. Estas observações foram feitas pelos participantes com mediação da pesquisadora, que seguiu de forma constante as orientações de Polya (2006).

Figura 4.4 Registro no quadro das diferentes configurações do quadrado mágico com os elementos de cada uma das três filas horizontais, cada uma das três filas verticais e as duas diagonais com a soma -9

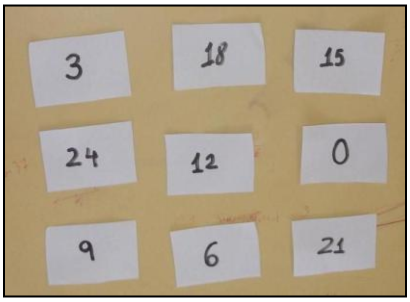

Fonte: Pesquisadora

Logo após a conclusão desta atividade, a pesquisadora entregou três diferentes sequências de nove elementos distintos às duplas e a quem preferiu fazer individualmente, de modo que participantes ficaram com sequências iguais.

A pesquisadora solicitou aos alunos que dispusessem todos os elementos das sequências de modo a formar quadrados, tal que a soma dos elementos que compunham cada uma das três filas horizontais, cada uma das três filas verticais e das duas diagonais foi uma determinada soma previamente estipulada pela pesquisadora (Figura 4.5 e Figura 4.6).

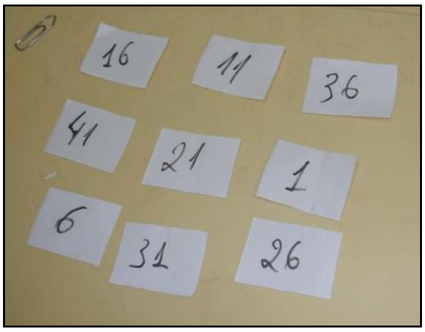
Uma sequência dada aos alunos foi 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21 e 24, cuja soma é 36, outra foi 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36 e 41, cuja soma é 63 e outra foi 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70 e 80, cuja soma é 120. Apenas um participante não conseguiu montar o quadrado conforme pedido pela pesquisadora, sendo ajudado pelos demais participantes da pesquisa. A pesquisadora escreveu no quadro as configurações feitas pelos alunos que ficaram surpresos novamente, com o fato de sequências iguais terem configurações diferentes de elementos. Este fato proporcionou uma discussão bastante enriquecedora das diferentes soluções encontradas. O foco da discussão relacionava-se ao porquê de ter diferentes respostas para uma mesma questão, uma vez que se tratava de um problema de Matemática, conhecida por ter apenas uma única resposta correta para o mesmo problema. De fato, só existe uma resposta correta, o que há são diferentes configurações da mesma.

Figura 4.5 Configuração do quadrado cuja soma era 36




Fonte: Pesquisadora

Figura 4.6 Configuração do quadrado cuja soma era 63




Fonte: Pesquisadora

As diferentes respostas foram percebidas quando a pesquisadora escreveu no quadro, buscando organizar as diferentes configurações de uma mesma sequência lado a lado. Neste momento, os participantes observaram que não se tratava de respostas diferentes, mas sim de arrumações diferentes. Tomando como exemplo a sequência 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, podemos montar as seguintes configurações:

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 3 | 8 |
| 9 | 5 | 1 |
| 2 | 7 | 6 |

Quadrado 1

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 1 | 6 |
| 3 | 5 | 7 |
| 4 | 9 | 2 |

Quadrado 2

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 1 | 8 |
| 7 | 5 | 3 |
| 2 | 9 | 4 |

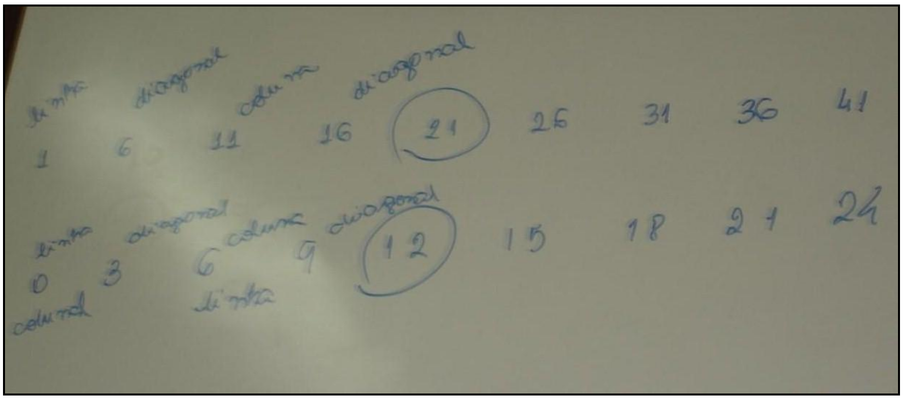
Quadrado 3

Observa-se que nos três quadrados acima a soma dos elementos que compõem cada fila horizontal, cada vertical e cada diagonal é 15. Pode-se notar que a diferença de uma configuração para outra se dá a partir da troca de filas paralelas ou de fila horizontais por filas verticais e vice-versa. O quadrado 2 é obtido do quadrado 1 trocando-se as filas horizontais pelas filas verticais, isto é, os elementos que compõem a primeira fila horizontal do quadrado 2 são os mesmos que compõem a terceira fila vertical do quadrado 1. O quadrado 3 é obtido do quadrado 2 trocando-se a primeira e terceira filas verticais.

Tomando como exemplo a sequência 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36 e 41, cuja soma era 63, a pesquisadora fez uma análise detalhada desta sequência com os participantes da pesquisa. Foi percebido que o elemento do meio da sequência é o mesmo elemento do meio do quadrado, neste caso o elemento é 21. A pesquisadora estudou em seguida a sequência 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21 e 24, na qual o elemento do meio da sequência é o mesmo elemento do meio do quadrado, que no caso é 12.

Com as configurações feitas pelos participantes da pesquisa a partir dessas duas sequências, eles perceberam que o primeiro elemento da sequência nunca pode estar nas diagonais do quadrado, tem que estar sempre na segunda fila horizontal ou na segunda fila vertical (Figura 4.7).

Figura 4.7 Conjecturas dos elementos da sequência relacionadas à localização no quadrado mágico




Fonte: Pesquisadora

Nada até então havia sido falado a respeito da origem da soma determinada previamente pela pesquisadora para cada uma das sequências.

O primeiro encontro foi encerrado, a pesquisadora agradeceu a participação de todos os participantes e pediu para que não faltassem ao segundo e último encontro.

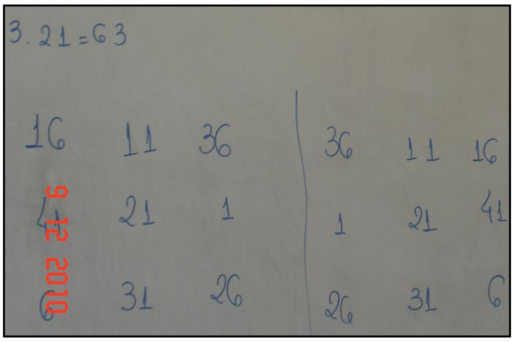
O segundo e último encontro ocorreu no dia 09 de dezembro de 2010. A pesquisadora iniciou o encontro escrevendo em ordem crescente, no quadro, a sequência 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36 e 41, utilizada no encontro anterior, bem como as configurações geradas a partir de mesma (Figura 4.8). O objetivo da investigação foi utilizar a linguagem algébrica para generalizar as observações feitas sobre as configurações dos quadrados a partir da compreensão dos participantes, mas para que isto ocorresse fez-se necessário que se descobrisse a origem da soma das sequências.

Figura 4.8 Pesquisadora escrevendo no quadro as diferentes configurações de quadrados mágicos para os elementos da sequência (1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41)


Fonte: Pesquisadora

Neste momento, a função da pesquisadora continuou sendo a de mediadora da aprendizagem com significado, dos participantes da pesquisa, estimulando sempre a participação de todos. A partir do que estava escrito no quadro, a pesquisadora perguntou como a soma 63 se relaciona com a sequência 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36 e 41. Os participantes responderam que a soma tem origem a partir da soma do primeiro termo com o último termo e o termo do meio da sequência, ou do segundo termo com o penúltimo termo com o termo do meio da sequência e assim por diante, sendo assim a soma 63 provem de 1+41+21, 6+36+21, 11+31+21, 16+26+21. A resposta estava correta, entretanto, não atendia ao objetivo da pesquisa. Para tal, a mesma estimulou-os a fazer a operação contrária da origem da soma, ou seja, dividir a soma da sequência pelo elemento do meio da mesma. Sendo assim, os participantes realizaram mentalmente o seguinte: 63 dividido por 21 é igual a 3. Então conjecturaram que a soma da sequência era o produto do elemento do meio da sequência por 3 (Figura 4.9). Para que tal conjectura fosse confirmada, a pesquisadora utilizou novamente a sequência 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, cuja soma previamente estipulada por ela mesma era 15. Com auxílio desta sequência, os alunos confirmaram a conjectura, ou seja, 15 é o elemento 5, que é o elemento do meio da sequência, multiplicado por 3.

Figura 4.9 Conjectura da origem da soma da sequência




Fonte: Pesquisadora

A pesquisadora iniciou uma nova etapa da pesquisa que consistiu em escrever os elementos da sequência usando linguagem algébrica e, seguindo as orientações de Polya (2006), estimulou os participantes, iniciando o seguinte diálogo, utilizando P para pesquisadora e A para participantes da pesquisa:

> P: Como o elemento do meio da sequência, que é o mesmo elemento do meio do quadrado, pode ser indicado?
>
> A: De *x*.
>
> P: Sendo assim, como os demais elementos da sequência podem ser escritos?
>
> A: A escrita dos demais elementos fica a seguinte, o elemento 1 igual a x-20, o elemento 6 igual a x-15, o elemento 11 igual a x-10, o elemento 16 igual a x-5, o elemento 26 igual a x+5, o elemento 31 igual a x+10, o elemento 36 igual a x+15 e o elemento 41 igual a x+20.

> P: Mas será que esta escrita é a mais correta?
> A: Sim.
> P: Será que não pode ser encontrado um registro ainda melhor?
> A: Pode.
> P: O que vocês entendem como um registro ainda melhor?
> A: Um registro que sirva para todas as sequências.
> P: Então como o registro encontrado por você pode ser melhorado?
> A: Escrever tudo com letras.
> P: E como vocês pretendem fazer isso?

Para que todos os participantes da pesquisa entendessem corretamente a qual resposta a pesquisadora desejava chegar, esta fez detalhadamente todos os passos para que não ocorressem dúvidas. A pesquisadora seguiu com o seguinte diálogo:

> P: O que ainda é necessário ser feito neste registro, para que o mesmo sirva para todas as sequências?
> A: Fazer o registro com letras.
> P: Falta registrar com letras o quê?

A pesquisadora encaminhou a discussão no sentido de que os alunos observassem que há elementos aritméticos que devem ser substituídos por letras. Seguiu-se o seguinte diálogo:

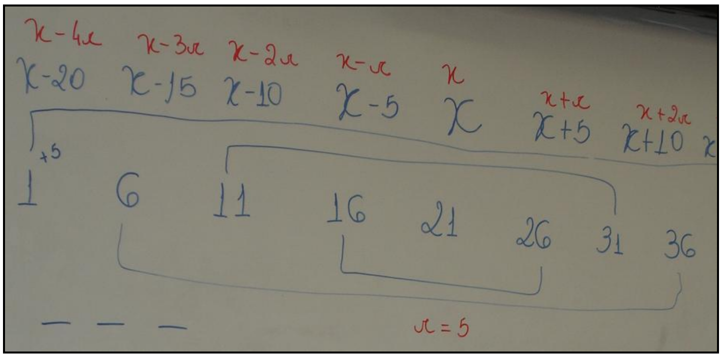
> P: De um elemento para o outro quanto é acrescentado, somado?
> A: É somado 5.
> P: Isto mostra alguma coisa para vocês?
> A: Sim, o 5 é um valor constante e, sendo assim pode ser chamado por outra letra.
> P: Pensam em alguma?
> A: Não.

A pesquisadora, diante de tal circunstância, sugeriu aos participantes da pesquisa que substituíssem o 5 pela letra *r*, fato que não deveria acontecer, uma vez que, a simbologia deveria partir dos alunos e não ser “imposta” pela pesquisadora. Diante de tal fato, ocorreu uma falha da pesquisadora, pois a mesma burlou as orientações de Polya (2006). O diálogo continuou:

> P: Então, como os elementos ficam escritos a partir desta informação?
> A: A escrita dos elementos é, o elemento 1 igual a *x-4r*, o elemento 6 igual a *x-3r*, o elemento 11 igual a *x-2r*, o elemento 16 igual a *x-r*, o elemento 21 igual a *x*, o elemento 26 igual a *x+r*, o elemento 31 igual a *x+2r*, o elemento 36 igual a *x+3r* e o elemento 41 igual a *x+4r*.

Registro algébrico encontrado, a pesquisadora escreveu no quadro (Figura 4.10).

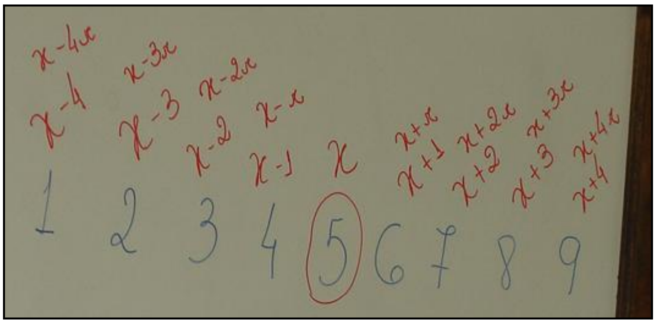
Figura 4.10 Registro algébrico




Fonte: Pesquisadora

Em seguida, a pesquisadora retornou a sequência 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, a mesma utilizada no encontro anterior, e escreveu no quadro, a partir de respostas dos participantes, como os elementos que compõem esta sequência eram escritos na linguagem algébrica, o elemento 1 igual a *x-4r*, o elemento 2 igual a *x-3r*, o elemento 3 igual a *x-2r*, o elemento 4 igual a *x-r*, o elemento 5 igual a *x*, o elemento 6 igual a *x+r*, o elemento 7 igual a *x+2r*, o elemento 8 igual a *x+3r* e elemento 9 igual a *x+4r* (Figura 4.11).

Figura 4.11 Retorno à sequência 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 para conferência da escrita algébrica




Fonte: Pesquisadora

P: Utilizando a observação feita por vocês que consiste que a soma relativa a sequência é a soma do primeiro termo, com o último termo e com o elemento do meio da sequência, como podemos escrever isto utilizando a linguagem algébrica?

A: Fica assim, $x\text{-}4r + x\text{+}4r + x$.

P: Qual é o resultado?

A: O resultado é $3x$.

P: O que vocês podem concluir?

A: Que a soma é sempre três vezes o elemento do meio da sequência.

No diálogo que ocorreu entre a pesquisadora e os participantes da pesquisa muitas conjecturas foram observadas, sendo que a principal consiste em saber a origem da soma de cada sequência (Figura 4.12).

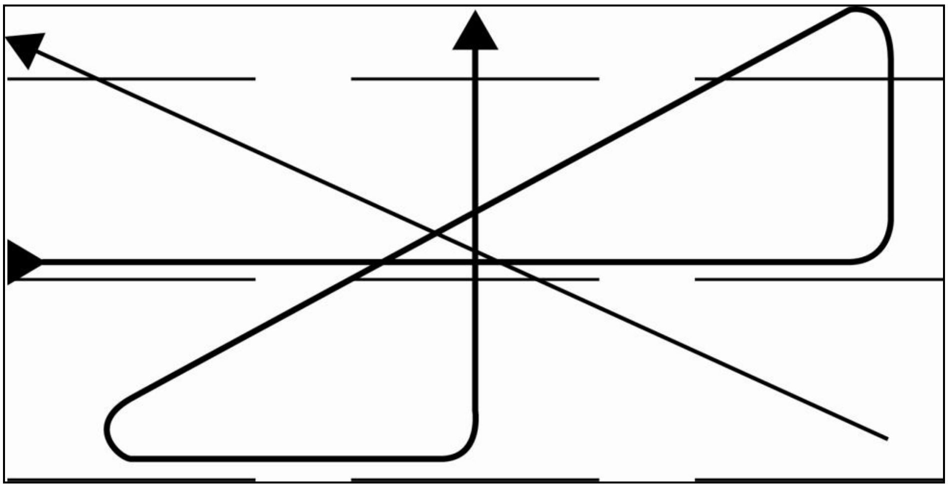
Figura 4.12 Conjecturas validadas

Fonte: Pesquisadora

A pesquisadora retomou algumas observações feitas pelos participantes no encontro anterior, com a finalidade de que todos entendessem as conjecturas e, em seguida retornou ao trabalho para finalizá-lo.

As conjecturas revisadas foram as seguintes: quando o primeiro termo, o último termo e o termo do meio da sequência compunham a segunda fila horizontal ou a segunda fila vertical, o segundo termo, o penúltimo termo e o termo do meio da sequência obrigatoriamente formavam uma das duas diagonais do quadrado. Outra observação dos alunos foi que não era possível começar a montar o quadrado mágico por uma das diagonais. Dever-se-ia iniciar a composição pela fila horizontal central ou pela fila vertical central, além de que se for iniciada pela fila horizontal central ou fila vertical central, a próxima fila a ser montada é, obrigatoriamente, uma das diagonais, em seguida compõem-se a fila vertical central ou fila horizontal central respectivamente, finalizando com a composição da última diagonal, segundo o esquema abaixo:

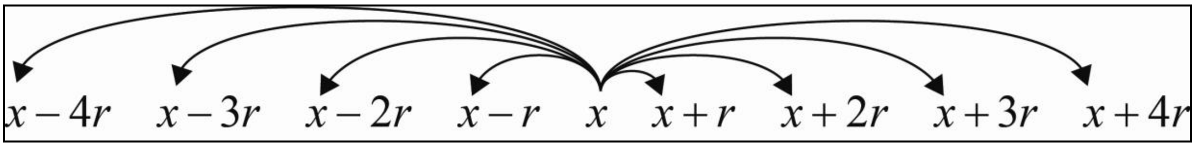
Figura 4.13 Esquema de configuração do quadrado mágico



Fonte: Pesquisadora

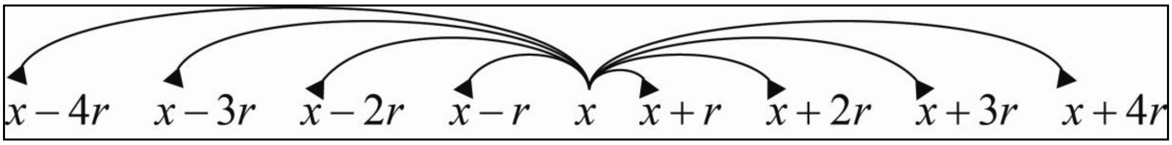
Um dos participantes identificou a seguinte ordem para a montagem do quadrado: fila horizontal central – diagonal – fila vertical central - diagonal ou fila vertical central – diagonal – fila horizontal central – diagonal. Este participante perguntou à pesquisadora como poderia montar o quadrado iniciando por uma das diagonais. A pesquisadora respondeu que este deveria começar com o quarto termo da sequência e terminar com o sexto termo da sequência, ou seja, deveria pensar em montar o quadrado seguindo de dentro para fora, já no outro modelo, a montagem ocorre de fora para dentro.

Figura 4.14 Esquema 1 para montagem do quadrado mágico




Fonte: Pesquisadora

Figura 4.15 Esquema 2 para montagem do quadrado mágico




Fonte: Pesquisadora

A partir das conclusões anteriormente alcançadas pelos participantes da pesquisa com a mediação da pesquisadora, foi pedido aos alunos que montassem a configuração algébrica do quadrado mágico. Alguns apresentaram dificuldades, semelhantes às que apresentaram quando montaram o quadrado com números inteiros. Contudo, todos chegaram ao resultado esperado pela pesquisadora. Algumas configurações algébricas são:

$$\begin{array}{ccc} x+3r & x-2r & x-r \\ x-4r & x & x+4r \\ x+r & x+2r & x-3r \end{array}$$

Configuração 1

$$\begin{array}{ccc} x+r & x+2r & x-3r \\ x-4r & x & x+4r \\ x+3r & x-2r & x-r \end{array}$$

Configuração 2

$$\begin{array}{ccc} x+3r & x-4r & x+r \\ x-2r & x & x+2r \\ x-r & x+4r & x-3r \end{array}$$

Configuração 3

$$\begin{matrix} x+r & x-4r & x+3r \\ x+2r & x & x-2r \\ x-3r & x+4r & x-r \end{matrix}$$

Configuração 4

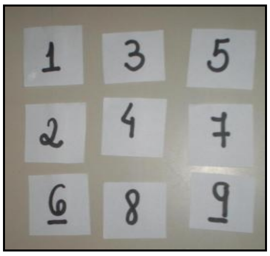
Ao encerrar o encontro, a pesquisadora comunicou aos participantes que as sequências utilizadas são Progressões Aritméticas (P.A.), conteúdo a ser estudado por eles futuramente com um maior aprofundamento.

## 4.2. Segundo momento da pesquisa: primeira experimentação

A primeira experimentação da pesquisa ocorreu com oito alunos do 8°. ano de uma escola particular de Campos dos Goytacazes - RJ, com idades entre 12 e 13 anos, em horário extraclasse no dia 4 de abril de 2011. A pesquisadora iniciou o encontro agradecendo a disponibilidade dos alunos em participar das atividades e pediu para que expressassem de forma constante seus questionamentos e suas dúvidas.

Em seguida, a pesquisadora entregou aos alunos, individualmente, uma sequência composta por nove elementos distintos, a sequência foi igual para todos os alunos, a saber 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Solicitou aos alunos que colocassem os elementos em três filas horizontais, ficando cada uma delas com três elementos. Após pediu para que os alunos somassem os elementos de cada fila horizontal e os resultados foram variados (Figura 4.16). Posteriormente, solicitou-lhes que dispusessem os elementos de forma que a soma de cada fila horizontal fosse 15. Os alunos atenderam rapidamente e resolveram com êxito a tarefa (Figura 4.17).

Figura 4.16 Elementos dispostos em três filas horizontais




Fonte: Pesquisadora

Figura 4.17 Elementos dispostos em três filas horizontais, cada uma destas com soma 15


Fonte: Pesquisadora

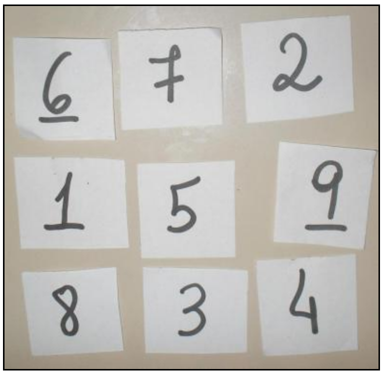
Após a arrumação de cada uma das três filas horizontais com a soma solicitada, a pesquisadora pediu para que os alunos somassem os elementos de cada uma das três filas verticais, tendo apresentado variedade nas respostas. Sendo assim, foi solicitado que os alunos arrumassem os elementos de cada uma das três filas horizontais e de cada uma das três filas verticais com a soma 15. Eles, na busca pela resposta correta, não se restringiram a não modificar os elementos que compunham as filas horizontais, que já estavam com a configuração desejada, modificaram as mesmas com a finalidade de alcançar a resposta correta. Esta atividade durou aproximadamente 15 minutos (Figura 4.18).

Figura 4.18 Os elementos de cada uma das três filas horizontais e de cada uma das três filas verticais somando 15


Fonte: Pesquisadora

Em seguida a conclusão da tarefa, a pesquisadora pediu que os alunos somassem os elementos das duas diagonais, houve variedade de resposta. Em seguida, lhes solicitou que fizessem uma arrumação em que os elementos de cada uma das três filas horizontais, de cada uma das três verticais e das duas diagonais estivessem com a soma 15 (Figura 4.19). Uma participante se pronunciou falando que sua configuração já havia cumprido a tarefa solicitada, a pesquisadora perguntou se foi de forma aleatória, a resposta da aluna foi positiva. A pesquisadora informou que não havia problema, mas pediu para que a mesma cobrisse sua resposta para que os demais participantes da pesquisa não olhassem e pediu para que os outros alunos cumprissem o solicitado. Durante a tarefa, a pesquisadora mediou a resolução, seguindo as orientações de Polya (2006), contudo sem influenciá-los, deixando-os livres para pensar, expor suas idéias e pô-las em prática.

Figura 4.19 Elementos de cada uma das três filas horizontais, de cada uma das três filas verticais e das duas diagonais somando 15




Fonte: Pesquisadora

Quando todos os participantes da pesquisa terminaram a atividade, a pesquisadora escreveu no quadro as variadas configurações formuladas pelos alunos (Figura 4.20).

Figura 4.20 Configurações dos elementos feitas pelos alunos

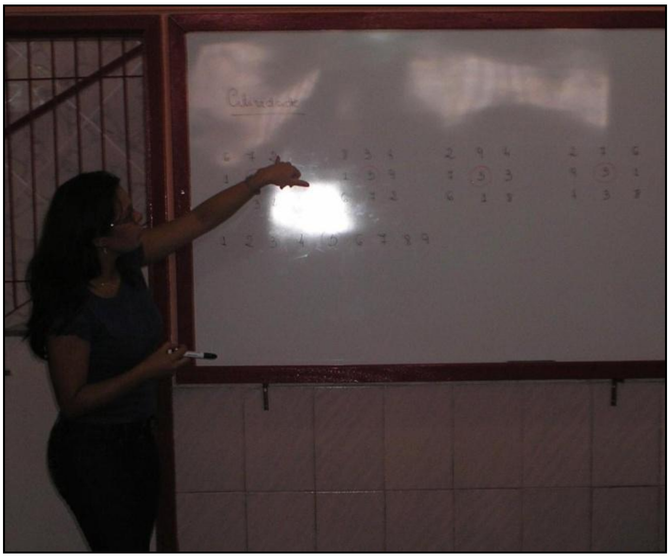
Fonte: Pesquisadora

Em seguida, a pesquisadora fez algumas perguntas, considerando P para pesquisadora e A para participantes da pesquisa:

> P: Há algo comum nas configurações?
>
> A: Sim, o elemento que está no meio é o mesmo em todos.
>
> P: Vocês observaram mais alguma coisa?
>
> A: Os elementos que compõem as filas são sempre os mesmos. Tem arrumação que estão na fila horizontal e em outra que estão na fila vertical.
>
> P: Mais alguma observação?
>
> A: Não.

As conclusões feitas pelos participantes da pesquisa puderam ser observadas com maior clareza a partir do momento em que as configurações começaram a ser analisadas no quadro pela pesquisadora (Figura 4.21).

Figura 4.21 Conjecturas observadas pelos participantes da pesquisa



Fonte: Pesquisadora

Finalizadas as conjecturas observadas anteriormente pelos alunos com orientação e mediação da pesquisadora, deu-se início a uma nova atividade, entregando a cada aluno uma nova sequência também composta por nove elementos distintos. Como havia três sequências diferentes, houve alunos com sequências iguais.

A pesquisadora comunicou aos participantes da pesquisa a soma de cada sequência, a saber: (i) a composta por 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 e 18 com a soma de sua configuração sendo 30; (ii) a formada por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 que a soma de sua configuração é 18; e (iii) a última  sequência 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 cuja soma de sua configuração é 12.

A pesquisadora solicitou aos participantes que montassem o quadrado mágico de forma que os elementos de cada uma das três filas horizontais, de cada uma das três filas verticais e das duas diagonais seguissem a orientação dada pela mesma, ou seja, com a soma previamente estabelecida. Em seguida, os participantes da pesquisa iniciaram a tarefa. O tempo para o cumprimento da mesma foi diversificado (Figura 4.22, Figura 4.23 e Figura 4.24).

Figura 4.22 Configuração da sequência 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18


Fonte: Pesquisadora

Figura 4.23 Configuração da sequência 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

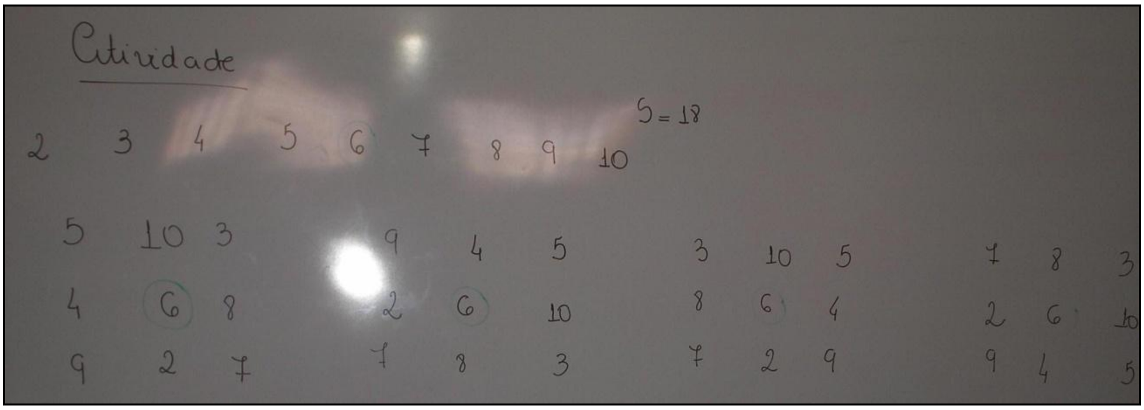

Fonte: Pesquisadora

Figura 4.24 Configuração da sequência 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8


Fonte: Pesquisadora

Quando todos os participantes haviam cumprido a atividade, a pesquisadora escreveu no quadro as configurações da sequência 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 cuja soma é 18 (Figura 4.25).

Figura 4.25 Algumas configurações da sequência 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10




Fonte: Pesquisadora

Com a finalidade de refinar as conjecturas dos alunos, sempre buscando alcançar o objetivo da pesquisa que consistiu em formular o registro algébrico para a configuração do quadrado mágico, a pesquisadora iniciou uma nova série de perguntas:

P: O que há de comum nas configurações?

A: O elemento do meio é o mesmo em todas as configurações, assim como os elementos que compõem as filas, ora estão na horizontal ora estão na vertical.

P: Percebem mais alguma coisa?

A: Sim, que o primeiro termo da sequência está na linha horizontal do meio do quadrado ou na linha vertical do meio do quadrado e o segundo termo da sequência está na diagonal, o terceiro termo está na linha vertical do meio do quadrado ou na linha horizontal do meio do quadrado e que o quarto termo da sequência está na outra diagonal.

P: Sendo assim, o que vocês podem concluir?

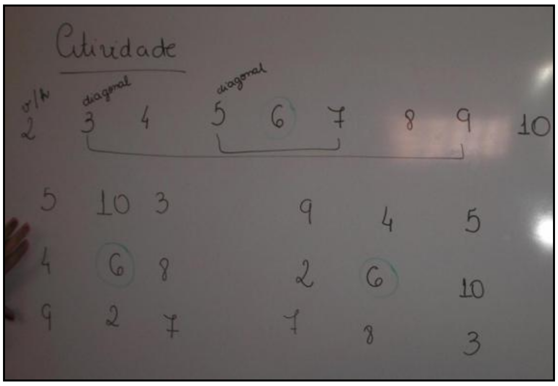
A: Nunca pode colocar o segundo termo da sequência na linha horizontal do meio do quadrado ou na linha vertical do meio do quadrado (Figura 4.26).

P: Boa conclusão!

P: Vocês acham que isso vale para as demais sequências?

A: Professora, devemos conferir.

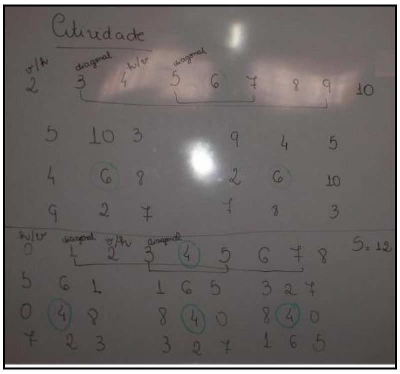
Figura 4.2 Conjectura de por onde deve iniciar a configuração do quadrado mágico




Fonte: Pesquisadora

A pesquisadora, seguindo a sugestão dos participantes da pesquisa, escreveu no quadro as configurações da sequência 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 cuja soma é 12 e verificou a veracidade da conjectura formulada anteriormente (Figura 4.27).

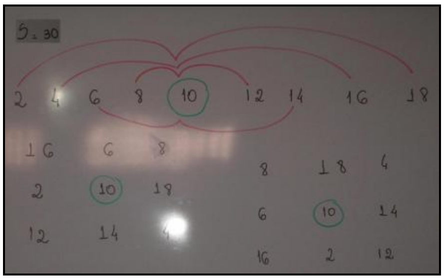
Figura 4.27 Confirmação de conjectura



Fonte: Pesquisadora

Foi escrito no quadro as configurações da sequência 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 e 18 cuja soma é 30 e com perguntas feitas aos participantes da atividade, foram reforçadas tais conjecturas (Figura 4.28).

Figura 4.28 Finalização da conjectura da ordem de configuração dos quadrados



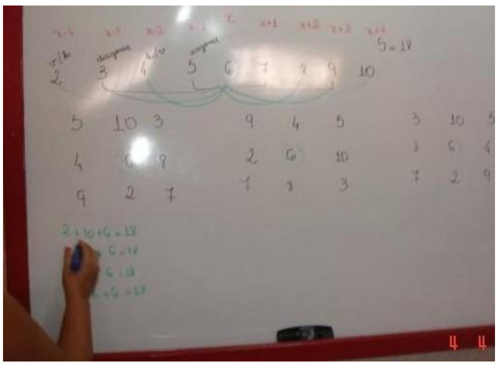

Fonte: Pesquisadora

Sendo assim, a pesquisadora seguiu com o diálogo:

> P: Já sabemos muitas coisas sofre as configurações dos quadrados, mas há muitas coisas ainda a serem descobertas. O que mais pode ser concluído?
>
> A: A configuração é: o primeiro termo com o último termo e o termo do meio da sequência; o segundo termo com o penúltimo termo com o termo do meio da sequência; o terceiro termo com o sétimo termo e o termo do meio da sequência; e o quarto termo com o sexto termo e o termo do meio da sequência.
>
> P: Boa conclusão! Como podemos escrever os elementos pertencentes à sequência, de modo que este registro sirva para todas as sequências?

Os participantes da pesquisa iniciaram a busca pela resposta correta. Para mediar esta atividade, a pesquisadora escreveu no quadro a sequência 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 cuja soma é 18 e junto aos alunos foi formulando conjecturas. Para que isto ocorresse, a pesquisadora fez diversas perguntas (Figura 4.29):

Figura 4.29 Busca pelo registro algébrico



Fonte: Pesquisadora

P: Como podemos chamar o termo do meio?

A: Podemos chamá-lo de *x*.

P: Sendo assim, como os demais elementos podem ser chamados em função do termo do meio?

A: Primeiro termo $x-4$, segundo termo $x-3$, terceiro termo $x-2$, quarto termo $x-1$, quinto termo $x$, sexto termo $x+1$, sétimo termo $x+2$, oitavo termo $x+3$ e nono termo $x+4$.

P: Acham que esta é a melhor forma?

A: Sim.

P: Vamos experimentar com outra sequência para verificar a validade da conjectura?

A: Vamos sim, professora.

Em seguida, a pesquisadora escreveu no quadro a sequência 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 e 18 e fez os seguintes questionamentos:

P: A forma registrada anteriormente serve para esta sequência?

A: Não.

P: E agora?

A: Basta escrever uma para ela.

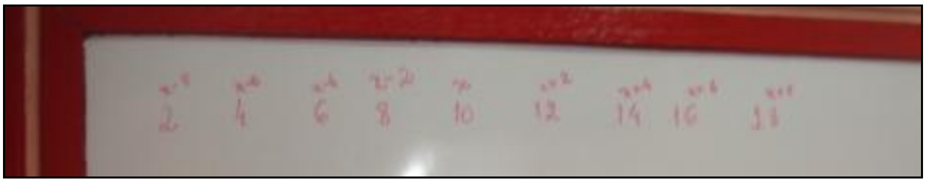
P: Como vocês vão fazer isso?

A: Primeiro termo $x-8$, segundo termo $x-6$, terceiro termo $x-4$, quarto termo $x-2$, quinto termo $x$, sexto termo $x+2$, sétimo termo $x+4$, oitavo termo $x+6$ e nono termo $x+8$ (Figura 4.30).

P: Que conclusão vocês podem chegar sobre a forma encontrada para o registro algébrico?

A: Que ainda não encontramos o registro algébrico correto, o que serve para todas as sequências.

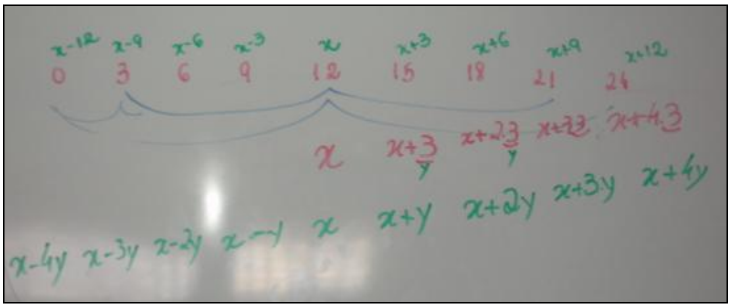
Figura 4.30 Busca do registro algébrico



Fonte: Pesquisadora

A pesquisadora retornou ao quadro e escreveu no mesmo uma nova sequência, 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21 e 24 e retornou ao questionamento (Figura 4.31):

Figura 4.31 Busca do registro algébrico com auxílio da sequência 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21 e 24




Fonte: Pesquisadora

P: Qual é soma desejada para a sequência?

A: A soma é: 0 + 12 (termo do meio da sequência) + 24 = 36.

P: Está é a melhor forma para encontrar a soma?

A: Sim.

P: Vocês não têm outra idéia?

A: O número 36 é 3 vezes 12.

P: Então, o que podemos concluir?

A: A soma é 3 vezes o elemento do meio.

P: No registro geral isto significa o que?

A: A soma é 3 vezes *x*.

P: Parabéns! Vocês estão corretos. Voltando a nossa dúvida, como podem ser escritos os demais termos da sequência em função do termo do meio?

A: Primeiro termo *x-12*, segundo termo *x-9*, terceiro termo *x-6*, quarto termo *x-3*, quinto termo *x*, sexto termo *x+3*, sétimo termo *x+6*, oitavo termo *x+9* e nono termo *x+12*.

P: Lembrando que queremos encontrar um único registro que sirva para todas as sequências, como esta deve ser?

Silêncio.

P: Como podemos escrever os elementos 3, 6, 9 e 12?

A: O elemento 3 é 3 vezes 1, 6 é 3 vezes 2, 9 é 3 vezes 3 e 12 é 3 vezes 4.

P: Então, como podemos escrever todos os elementos da sequência, percebendo o que há em comum em todos?

A: O número 3 aparece em todos.

P: Podemos chamá-lo de que?

A: De *y*.

P: Como podem ser escritos os elementos da sequência então?

A: Primeiro termo *x-4.y*, segundo termo *x-3.y*, terceiro termo *x-2.y*, quarto termo *x-1.y*, quinto termo *x*, sexto termo *x+1.y*, sétimo termo *x+2.y*, oitavo termo *x+3.y* e nono termo *x+4.y*.

P: Será que este registro vale para outras sequências?

Para verificar se o registro algébrico encontrado pelos alunos foi geral, ou seja, se servia para outras sequências, a pesquisadora retornou à primeira sequência utilizada durante esta pesquisa (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), e, com a participação dos alunos constatou a veracidade da resolução.

O objetivo da pesquisadora, além de empregar o registro algébrico para facilitar a configuração do quadrado mágico, foi o de encontrar um esquema a partir do registro algébrico que facilitasse a construção do quadrado mágico.

Desta forma, a pesquisadora retornou às conclusões comprovadas, ou seja, as conjecturas comprovadas como verdadeiras, para que as mesmas servissem de auxílio para novas conjecturas. Então uma nova série de perguntas foi iniciada:

P: Como a soma é encontrada?

A: Ela é 3 vezes o elemento do meio da sequência.

P: Então, a soma dos elementos que compõem as filas tem que ser 3 vezes o elemento do meio?

A: Sim.

P: Com a sequência 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 de soma 15, que é 3 vezes 5, a partir do registro algébrico, acontece o seguinte: o elemento 1 igual a *x-4.y*, o elemento 2 igual a *x-3.y*, o elemento 3 igual a *x-2.y*, o elemento 4 igual a *x-1.y*, o elemento 5 igual a *x*, o elemento 6 igual a *x+1.y*, o elemento 7 igual a *x+2.y*, o elemento 8 igual a *x+3.y* e o elemento 9 igual a *x*+4.y. Tomando como estudo a configuração:

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 1 | 6 |
| 3 | 5 | 7 |
| 4 | 9 | 2 |

Somando, com o registro algébrico, cada fila horizontal. Como fica?

A: A primeira linha fica: *x+3.y + x-4.y + x+1.y = 3x*; a segunda linha fica: *x-2.y + x + x+2.y = 3x* ; e a terceira linha fica: *x-1.y + x+4.y + x-3.y = 3x*.

P: Vamos substituir os elementos desta configuração pelos registros algébricos.

A: Então a configuração fica a seguinte:

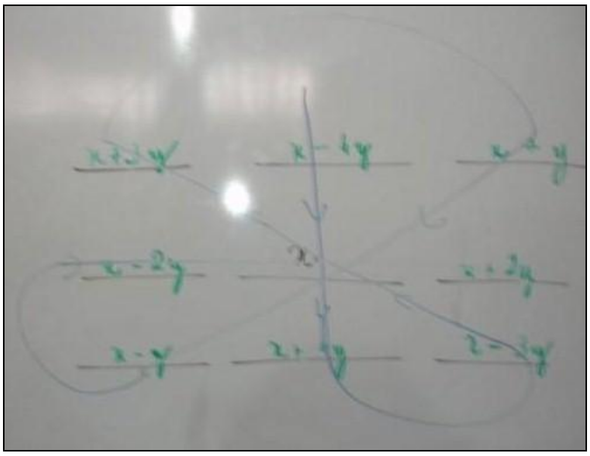
| | | |
|---|---|---|
| x + 3.y | x - 4.y | x + 1.y |
| x - 2.y | x | x + 2.y |
| x - 1.y | x + 4.y | x - 3.y |

P: Muito bem! Qual é o esquema que facilita a configuração do quadrado? Lembrando que todas as conclusões feitas são importantes para o fechamento da pesquisa.

A: Sempre tem que começar a montar o quadrado pela segunda fila horizontal ou segunda fila vertical.

O tempo para o encerramento da aplicação da pesquisa estava chegando ao fim, os alunos estavam cansados, pois todas as atividades foram aplicadas em um único dia, sendo assim a pesquisadora e sua orientadora tiveram que acelerar o desenvolvimento do trabalho e com isso a última conclusão foi feita pelas mesmas e os alunos apenas entenderam a conjectura, que consistiu em encontrar um esquema que facilitasse a obtenção da configuração do quadrado mágico (Figura 4.32).

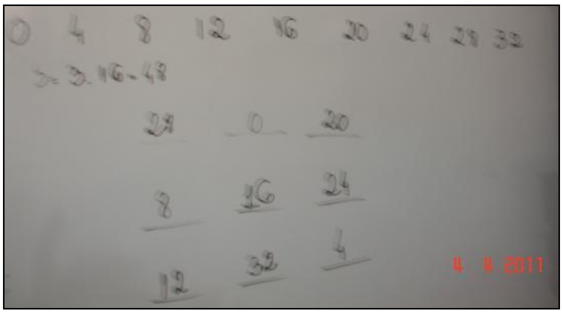
Figura 4.32 Esquema para a formação do quadrado mágico rapidamente



Fonte: Pesquisadora

Para concluir a atividade, foi solicitado aos participantes que experimentassem tal conjectura com a mediação da pesquisadora na sequência 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28 e 32 (Figura 4.33).

Figura 4.33 Experimentação da conjectura que consiste em arrumar rapidamente os elementos do quadrado mágico



Fonte: Pesquisadora

Os participantes da pesquisa fizeram o que havia sido solicitado com o auxílio da pesquisadora, a mesma encerrou as atividades da sua pesquisa e, em seguida, agradeceu a participação de todos.

Após a finalização desta experimentação, a pesquisadora observou que alguns resultados obtidos pelos alunos foram encaminhados pela mesma, ou seja, a pesquisadora interviu mais do que o previsto nas ações dos alunos durante a resolução do problema proposto e, concluiu que este fato poderia comprometer a veracidade dos resultados, uma vez que estes foram obtidos em condições não previstas na pesquisa. Por isso, a pesquisadora decidiu realizar outra experimentação em outra turma de 8°. ano.

Neste texto, a experimentação descrita neste item foi denominada primeira experimentação, e a próxima, segunda experimentação.

### 4.3. Terceiro momento da pesquisa: segunda experimentação

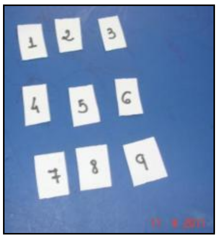
A aplicação deste trabalho ocorreu em quatro encontros com uma turma do ensino regular do 8°. ano de uma escola pertencente à rede pública da cidade de Campos dos Goytacazes, com vinte e sete alunos de idades entre 14 e 15 anos, cada encontro teve duração de aproximadamente uma hora e 30 minutos, ou seja, o total de tempo da aplicação deste trabalho foi de seis horas. Os encontros ocorreram nos dias 11/04/2011, 13/04/2011, 20/04/2011 e 25/04/2011.

No primeiro encontro, a pesquisadora fez uma apresentação para a turma, informando aos alunos que a pesquisa desenvolvida pela mesma necessitava da participação e da colaboração de todos, frisando que isto era de suma importância para a validação do trabalho.

Sendo assim, pediu aos alunos que se organizassem em trios. Entretanto, houve um aluno que preferiu trabalhar individualmente.

Em seguida a organização dos alunos, foi entregue a cada trio e a quem fez individualmente, uma faixa composta com os elementos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, para que os mesmos separassem cada um dos elementos. Em seguida, foi solicitado aos alunos que dispusessem os elementos da sequência de forma que ficassem três elementos em cada fila horizontal, totalizando três filas horizontais. Antes de fazer o que foi solicitado, a maioria dos trios já havia arrumado os elementos pertencentes à sequência em ordem crescente. E o que foi solicitado pela pesquisadora foi feito depois, sendo que na hora de arrumar os elementos em três filas horizontais com três elementos em cada fila horizontal, o fizeram de maneira crescente (Figura 4.34).

Figura 4.34 Elementos dispostos em três filas horizontais




Fonte: Pesquisadora

Após todos os participantes terem cumprido a atividade, a pesquisadora escreveu algumas das configurações feitas pelos participantes no quadro e junto deles fez a soma dos elementos de cada uma das três filas horizontais. Em seguida, a pesquisadora solicitou aos alunos que organizassem os elementos de modo que a soma de cada uma das filas horizontais fosse igual a 15. Na configuração mostrada na Figura 4.34, observou-se que a soma dos elementos da segunda fila horizontal, composta pelos elementos: 4, 5 e 6, já totalizavam 15. Deste modo, faltava apenas ajustar os elementos da primeira e da terceira fila horizontal de modo que a soma também fosse 15. Os alunos concluíram esta atividade corretamente, em cerca de cinco minutos, sem solicitar a ajuda da pesquisadora e nem de sua orientadora.

Após a conclusão desta etapa da atividade, a pesquisadora novamente escreveu no quadro algumas das configurações feitas pelos alunos, conferindo a soma dos elementos que compunham cada uma das três filas horizontais. Com a colaboração dos alunos, foi calculada a soma dos elementos que formavam cada uma das três filas verticais. Em seguida, solicitou que arrumassem os elementos da sequência de forma que a soma de cada uma das três horizontais e de cada uma das três filas verticais fosse 15. Até então, os alunos não apresentavam nenhuma dúvida (Figura 4.35).

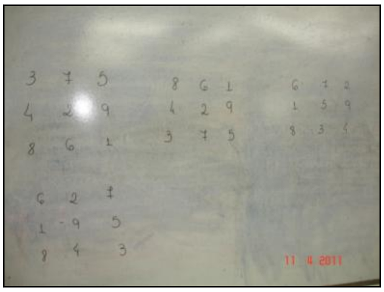
Figura 4.35 Elementos dispostos com cada uma das três filas horizontais e verticais somando 15


Fonte: Pesquisadora

Os trios que estavam com a soma de uma das três filas verticais igual a 15, resistiram em não mexer na arrumação da fila vertical que estava com a soma solicitada. Esses trios perguntaram à pesquisadora se a regra era essa, ou seja, a fila vertical que já estava com a soma solicitada pela pesquisadora, poderia sofrer alteração dos elementos que compunham a mesma. A pesquisadora respondeu que sim. Sendo assim, os trios abandonaram esta estratégia e continuaram tentando montar o quadrado.

Quando todos os participantes da pesquisa concluíram o que havia sido solicitado, a pesquisadora retornou ao quadro, escrevendo as configurações que haviam sido feitas por eles. Neste momento houve cinco configurações diferentes e todas foram escritas no quadro (Figura 4.36).

Figura 4.36 Registro no quadro das cinco configurações



Fonte: Pesquisadora

A pesquisadora conferiu com os alunos se os elementos das três filas horizontais e das três verticais somavam realmente 15, constatou que estavam corretas as configurações. Em seguida, com a participação dos alunos, a pesquisadora somou os elementos que formavam as duas diagonais de todas as configurações que estavam escritas no quadro (Figura 4.37). Logo após, a pesquisadora solicitou aos trios que arrumassem os elementos de forma que cada uma das três filas horizontais, que cada uma das três verticais e que as duas diagonais dos quadrados somassem 15[6].

Figura 4.37 Soma das duas diagonais dos quadrados mágicos

Fonte: Pesquisadora

Houve o caso de uma das configurações que estava escrita no quadro possuir as três filas horizontais, as três verticais e as duas diagonais com a soma 15. Sendo assim, a pesquisadora apagou do quadro rapidamente a solução encontrada por um dos trios, e pediu

[6] Para imprimir melhor fluidez na leitura do texto, a partir deste ponto, o termo fila horizontal significará os elementos que compõem a linha. O mesmo se aplica as filas verticais e as diagonais.

para que os demais chegassem à resposta solicitada pela mesma. A pesquisadora acredita que o trio que respondeu corretamente o que ainda ia ser solicitado, chegou à resposta correta aleatoriamente.

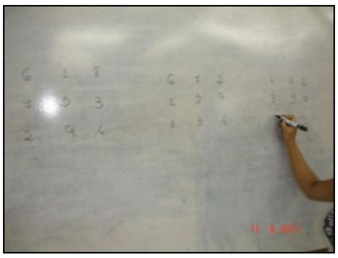
Neste momento, os alunos começaram a perceber que o que estava sendo feito não era um jogo, e perceberam que havia alguma lógica matemática por trás do que estava sendo solicitado. A pesquisadora continuou mediando o trabalho, e muitos participantes começaram a apresentar certa preguiça. Pode-se inferir que isto ocorreu porque estes alunos não estão acostumados a pensar sobre determinado problema, apresentando atitudes de passividade diante dos desafios. Logo, quando perceberam que tinham que se concentrar para alcançarem as arrumações corretas, começaram a desistir. Diante deste fato, a pesquisadora inspirada nas orientações de Polya (2006), buscou estimular a participação dos alunos, fazendo perguntas genéricas. Estas tinham como finalidade auxiliar os alunos para alcançarem as soluções corretas, sozinhos, sem intervenção direta da pesquisadora, apenas a partir de estímulos desta.

O momento da experimentação exigiu extrema dedicação da pesquisadora para com os alunos, auxiliando cada trio particularmente, procurando observar suas necessidades e dificuldades e estimulando sempre os alunos para que alcançassem a resposta correta.

A grande dificuldade encontrada pela pesquisadora nesse momento da pesquisa foi que, enquanto ela auxiliava um determinado trio, os demais que já haviam sido auxiliados, conversavam sobre a atividade proposta. E os outros, que ainda iriam receber o auxilio, conversavam sobre diversos assuntos, e não sobre o problema que tinham que resolver, sendo esse momento da pesquisa bastante complicado.

Todos os trios de alunos e o aluno que preferiu fazer individualmente receberam auxílio da pesquisadora. Após todos terem alcançado a resposta correta do problema, a pesquisadora escreveu no quadro as configurações dos quadrados montados, e constatou que todas estavam corretas (Figura 4.38).

Figura 4.38 Configurações dos quadrados com os elementos de cada uma das três filas horizontais, de cada uma das três filas verticais e das duas diagonais somando 15



Fonte: Pesquisadora

Com as configurações escritas no quadro, a pesquisadora indagou aos alunos sobre algumas características dos quadrados, buscando criar condições para que os mesmos observassem e construíssem conjecturas a respeito da configuração do quadrado mágico.

Seguiu-se o diálogo abaixo, considerando P para pesquisadora e A para participantes da pesquisa:

> P: O que há em comum em todos os quadrados?
>
> A: O elemento do meio.
>
> P: O que é o elemento do meio?
>
> A: O elemento 5 que está no meio de todos os quadrados e que é o do meio da sequência.
>
> P: Tem mais alguma coisa em comum?
>
> A: Os elementos 1, 5 e 9 formam fila horizontal de um quadrado e em outro formam a fila vertical.
>
> P: Mais alguma coisa?
>
> A: Que os valores altos não podem estar na mesma fila horizontal, nem na mesma fila vertical e nem na mesma diagonal.
>
> P: Qual é relação entre a soma e o elemento do meio?
>
> A: A soma dividida por 3 é o elemento do meio.

Os alunos perceberam e conjecturaram, a partir da mediação da pesquisadora e de sua orientadora, que o elemento que estava no meio de todos os quadrados era o mesmo, sendo este o elemento do meio da sequência. Observaram também que os elementos que estavam nas filas (horizontais e verticais) eram sempre os mesmos, isto é, em determinado quadrado os elementos 1, 5 e 9 pertenciam a uma fila horizontal, em outro, estes mesmos elementos estavam em uma das filas verticais. Além de que a soma dos elementos de cada uma das três filas horizontais, de cada uma das três verticais e das duas diagonais era o triplo do elemento do meio da sequência. O fato de que valores numéricos altos não podiam ficar em uma mesma fila, seja ela horizontal, vertical ou diagonal também foi observado pelos alunos. A pesquisadora então encerrou o primeiro encontro, agradeceu a participação e a colaboração de todos.

O objetivo do diálogo no decorrer do primeiro encontro foi de estimular a participação dos alunos com relação a suas observações sobre o problema proposto, a fim de que eles explicitassem oralmente as suas conjecturas.

Foi observado que os alunos ao procurarem o terceiro valor que somado com outros dois já alocados na fila horizontal, vertical ou diagonal, totalizasse 15, o faziam raciocinando sobre que valor faltava para chegar a 15. Segundo Lins e Gimenez (2006) o raciocínio dos alunos é semelhante ao procedimento para resolver a equação, $6 + 1 + x = 15$, supondo 6 e 1 os elementos já existentes na fila horizontal, na vertical ou na diagonal. Ainda, segundo esses autores, os alunos realizam uma atividade algébrica ao tentarem encontrar o elemento que somado com 6 e 1 dê 15 como resposta. Eles apenas não fazem o registro escrito como o citado nesse parágrafo.

No segundo encontro, a pesquisadora pediu para que os alunos se organizassem em trios e que, de preferência, eles formassem os mesmos trios do encontro anterior, o que foi acatado pelos participantes da pesquisa. Em seguida, ela iniciou o encontro relembrando as observações realizadas no encontro anterior, que o elemento do meio do quadrado era o mesmo do meio da sequência e que a soma para cada sequência era o triplo do elemento do meio da sequência. Assim sendo, a pesquisadora esperava com esta retomada, que os alunos utilizassem as observações na resolução das próximas atividades.

A pesquisadora preparou três sequências diferentes, cada uma com quatro cópias e entregou aos trios aleatoriamente uma sequência. A pesquisadora escreveu no quadro as três sequências e a soma para cada uma delas. As sequências e as somas para as mesmas foram as seguintes, para a composta por 0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8, a soma é 12; para a formada por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e10, a soma é 18 e para a última 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 e 18, a soma é 30.

A pesquisadora solicitou aos alunos que construíssem os elementos da sequência no quadrado mágico onde cada uma das três filas horizontais, cada uma das três filas verticais e as duas diagonais totalizassem a soma fornecida para a determinada sequência. Alguns alunos perguntaram se deveriam iniciar a montagem do quadrado pelas filas horizontais, em seguida as verticais e por fim, as diagonais. A pesquisadora afirmou que ficaria a critério de cada trio, podendo fazer assim, ou ir direto na configuração final.

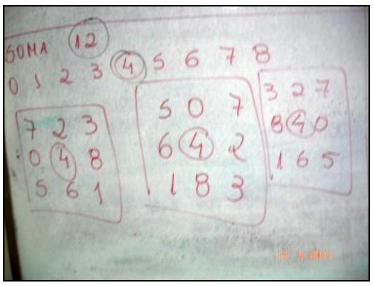
A pesquisadora esperava que os trios utilizassem as observações obtidas no primeiro encontro, e relembradas neste , principalmente o fato de que o elemento do meio do quadrado era o mesmo do meio da sequência e de que este era um terço da soma solicitada para cada quadrado. Esta perspectiva se concretizou para quatro trios, ou seja, os trios que estavam com a sequência 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 e 18, pois esta sequência não possui em sua composição o elemento 5, nesses trios a mediação da pesquisadora ocorreu somente para que fosse feita a conferência da soma utilizada pelos trios. Dentre os demais trios, ou seja, os que estavam com sequências que possuíam o elemento 5, insistiram em colocá-lo no meio de seus quadrados, não levando em consideração a relação da soma com o elemento do meio da sequência. Pode-se afirmar que tais alunos não construíram significado para o posicionamento do elemento 5 na atividade do encontro anterior, agindo dessa forma, talvez, devido à influência dos colegas.

Nestes trios, a pesquisadora seguindo orientações de Polya (2006), fez perguntas tais como: “Por que estão colocando o elemento 5 no centro do quadrado?”, “Qual a relação da soma com o elemento 5?”. Deste modo, eles perceberam que o elemento que deveria estar no centro de seus quadrados é o do centro das novas sequências utilizadas, que são os elementos 4 e 6. Então, cabe ressaltar que a pesquisadora auxiliou todos os trios, de acordo com o nível de dificuldade de cada grupo.

Na medida em que os trios concluíam a tarefa, a pesquisadora fazia a conferência do quadrado mágico e pedia para que estes aguardassem que todos terminassem a atividade. Foi possível perceber que os últimos trios a montarem o quadrado mágico corretamente, estavam desmotivados, necessitando de estímulos para continuar a tarefa. Deste modo, a pesquisadora retornou a estes trios sondando com perguntas genéricas o que estava acontecendo, procurando saber por que pararam de tentar resolver o problema proposto, e a partir de então, recomeçou a estimulá-los seguindo constantemente as orientações de Polya (2006) e assim chegaram à resposta correta.

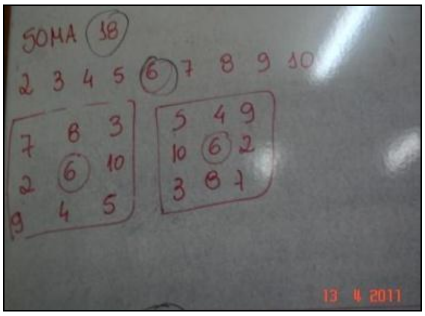
Após o término da atividade, a pesquisadora escreveu no quadro as configurações dos quadrados dos trios, agrupando lado a lado os de mesma sequência (Figura 4.39, figura 4.40 e Figura 4.41).

Figura 4.39 Configurações de quadrados mágicos da sequência 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8



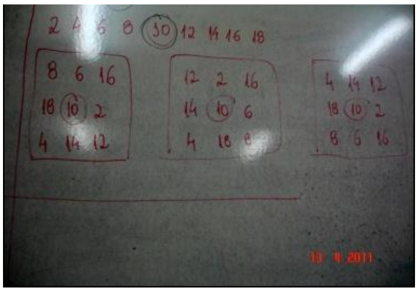

Fonte: Pesquisadora

Figura 4.40 Configurações de quadrados mágicos da sequência 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10



Fonte: Pesquisadora

Figura 4.41 Configurações de quadrados mágicos da sequência 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 e 18



Fonte: Pesquisadora

A pesquisadora prosseguiu com as seguintes indagações:

> P: O que há de comum entre os quadrados?
>
> A: O elemento do meio do quadrado é o do meio da sequência e que a soma é três vezes este elemento.
>
> P: Mais alguma coisa em comum?
>
> A: Que elementos que compõem fila vertical em um quadrado forma fila horizontal de outro quadrado.
>
> P: O que mais?
>
> A: Que valores numéricos altos não podiam ficar na mesma fila horizontal, na mesma fila vertical e nem na mesma diagonal.

As observações foram as mesmas encontradas para o quadrado de soma 15, trabalhado no encontro anterior.

Os trios que estavam com a sequência que não continha o elemento 5 foram observados pela pesquisadora e não apresentaram dificuldades em resolver a tarefa. Entretanto, os trios de alunos que estavam com as sequências que continham o elemento 5 apresentaram dificuldade em relação ao posicionamento desse elemento no quadrado mágico. O foco da dificuldade diz respeito ao fato do elemento 5 ser o do meio da sequência, mas isto ocorreu somente na sequência 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Já na sequência 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 e na outra 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10, o elemento 5 é apenas um da sequência, sem nenhuma característica própria. Pode-se observar que estes alunos não se inspiraram em um problema correlato, que é o indicado por Polya (2006).

Quando foi entregue aos alunos o problema, a pesquisadora esperava que os alunos para resolvê-lo pensassem em um outro correlato, neste caso podendo ser o do encontro anterior. Muitas vezes, esse problema auxilia e possibilita a resolução do atual problema, entretanto acabaram se confundindo por ter um elemento comum a ambos os problemas, sendo que o elemento 5 na sequência 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 é o elemento do meio da sequência, já na sequência 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 e na sequência 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 é apenas um elemento que compunha as sequências.

Com o objetivo de que os alunos observassem que apenas sequências que eram progressões aritméticas poderiam ser utilizadas para a configuração dos elementos no quadrado mágico, ou seja, sequências em que a diferença entre os elementos consecutivos é uma constante que poderia formar um quadrado mágico. A pesquisadora forneceu uma sequência na qual a diferença entre os elementos não era uma constante. Foi escrito no quadro a sequência 0, 1, 3, 7, 9, 13, 17, 19 e 23 e, em seguida, perguntou aos alunos se com a sequência fornecida seria possível montar um quadrado no qual a soma de cada uma das três filas horizontais, de cada uma das três verticais e as duas diagonais dessem uma determinada soma. Diante da resposta positiva dos alunos, a pesquisadora escreveu no quadro o que os alunos indicaram: o elemento que deveria ficar no meio da configuração do quadrado era o elemento 9 e que a soma para esse quadrado era 27, pois 27 é 3 vezes o elemento 9.

Após algumas tentativas de arrumação dos elementos no quadrado, os alunos concluíram que não era possível montar o quadrado com os elementos dessa sequência. A pesquisadora indagou aos participantes da pesquisa sobre uma justificativa para tal fato; eles responderam que não sabiam justificar. Deste modo, a orientadora da pesquisa perguntou qual era a diferença entre os elementos consecutivos da sequência dada. Foi percebido que o acréscimo de um elemento para o outro da sequência não foi um valor constante, ou seja, que os valores do acréscimo oscilavam. Para confirmar a conjectura observada a partir da sequência anterior, foi feita uma comparação com a sequência 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Então, os alunos concluíram que para gerar um quadrado mágico a sequência tem que apresentar diferença constante entre os elementos consecutivos.

Em seguida, a pesquisadora entregou aos alunos, uma atividade com sete questões para serem resolvidas por eles. A pesquisadora foi solicitada simultaneamente e incessantemente por todos os trios para explicar o que pedia em cada questão, tinha que ler as questões para os alunos e explicar com clareza o que estava sendo solicitado. Como o término do encontro estava se aproximando, a pesquisadora recolheu as folhas de respostas e disse que continuariam no próximo encontro. E encerrou agradecendo a participação e a colaboração de todos.

A atitude de dependência acadêmica apresentada pelos alunos levou a uma mudança de estratégia na condução do trabalho, decidindo-se que as questões propostas na atividade citada acima seriam respondidas coletivamente, sob a orientação e mediação da pesquisadora.

O terceiro encontro ocorreu no dia 20/04/2011. A pesquisadora entregou um exemplar da atividade a cada um dos alunos, alertando que deveriam permanecer sentados individualmente. Cabe ressaltar que a atividade com algumas questões respondidas pelo trio no encontro anterior, foi entregue a um dos participantes de cada trio. Deste modo, cerca de um terço da turma tinha em seu poder uma atividade com as primeiras questões já respondidas, e os demais estavam com a folha em branco.

Todos os enunciados foram lidos e explicados oralmente pela pesquisadora. Os alunos respondiam oralmente, contudo apresentavam dificuldades de fazer o registro escrito. Aqueles que estavam com as questões respondidas não se manifestaram com base nas mesmas.

A pesquisadora resolveu iniciar o encontro desde a questão 1 (Figura 4.42), em que os alunos apresentaram bastante dificuldade em responder. Este fato surpreendeu a pesquisadora, uma vez que a resposta dessa questão eram as observações feitas oralmente pelos próprios sobre quais devem ser as características das sequências para formarem a configuração de um quadrado mágico.

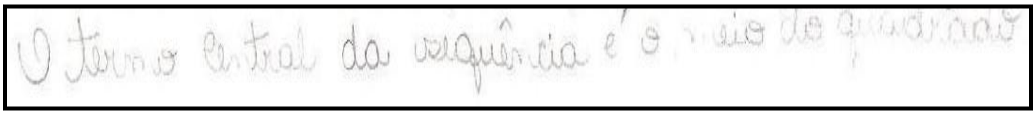
Figura 4.42 Questão 1 da folha de atividades

1. Que característica possui as sequências que formaram o quadrado mágico?

Fonte: Pesquisadora

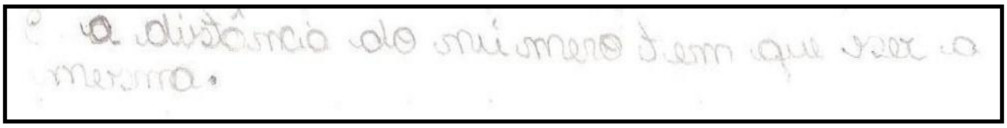
Depois de muita insistência da pesquisadora, os alunos responderam a questão, ou seja, escreveram na folha de atividade a resposta; entretanto a maioria dos alunos respondeu a questão de maneira incompleta. Para mostrar a resposta completa da questão fez-se necessário juntar as respostas de pelo menos três alunos (Figura 4.43, Figura 4.44 e Figura 4.45).

Figura 4.43 Característica do termo do meio do quadrado mágico


O termo central da sequência é o meio do quadrado

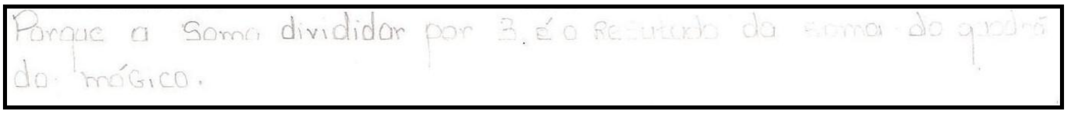
Fonte: Pesquisadora

Figura 4.44 Característica da distância entre os elementos da sequência


é a distância do número tem que ser o mesmo.

Fonte: Pesquisadora

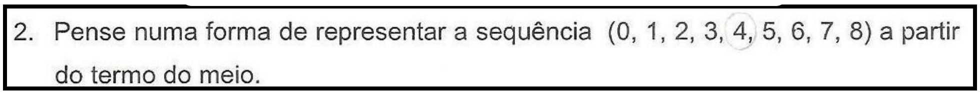
Figura 4.45 Característica sobre a soma do quadrado mágico


Porque a Soma dividido por 3, é o resultado da soma do quadrado mágico.

Fonte: Pesquisadora

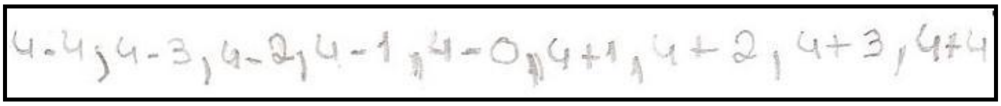
Na questão 2 (Figura 4.46) foi solicitado aos alunos que escrevessem os demais elementos da sequência (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) a partir do elemento do meio, que no caso é o elemento 4. Todos os alunos responderam corretamente a questão e não apresentaram dúvidas na resolução da mesma. Representaram o elemento 0 como 4 - 4, o elemento 1 como 4 - 3, o elemento 2 como 4 - 2, o elemento 3 como 4 - 1, o elemento 4 como 4 - 0, o elemento 5 como 4 + 1, o elemento 6 como 4 + 2, o elemento 7 como 4 + 3 e o elemento 8 como 4 + 4 (Figura 4.47).

Figura 4.46 Questão 2 da folha de atividades


2. Pense numa forma de representar a sequência (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) a partir do termo do meio.

Fonte: Pesquisadora

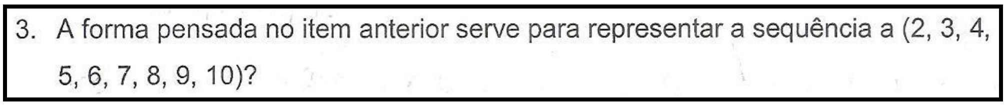
Figura 4.47 Resposta da questão 2 da folha de atividades




Fonte: Pesquisadora

A questão 3 (Figura 4.48) questionava se os elementos da sequência 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 poderiam ser registrados a partir da resposta da questão 2. Todos os alunos responderam oralmente que não, sendo assim, escreveram como devem ser representados os demais elementos dessa sequência em função do elemento do meio da sequência, que no caso é o elemento 6, o elemento 2 como 6 - 4, o elemento 3 como 6 - 3, o elemento 4 como 6 - 2, o elemento 5 como 6 - 1, o elemento 6 como 6 - 0, o elemento 7 como 6 + 1, o elemento 8 como 6 + 2, o elemento 9 como 6 + 3 e o elemento 10 como 6 + 4 (Figura 4.49).

Figura 4.48 Questão 3 da folha de atividades


3. A forma pensada no item anterior serve para representar a sequência a (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)?

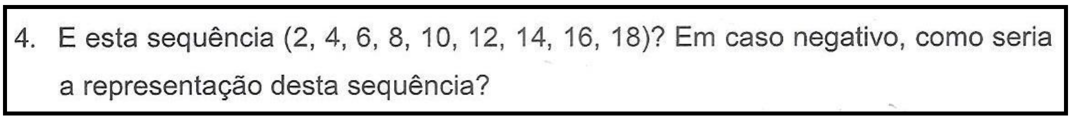
Fonte: Pesquisadora

Figura 4.49 Resposta dada por um dos alunos para a questão 3 da folha de atividades


Fonte: Pesquisadora

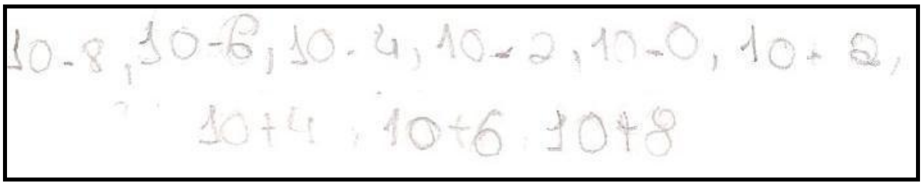
A questão 4 (Figura 4.50) indagava se a sequência 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 e 18 poderia ser registrada da forma utilizada na questão anterior e, em caso negativo como seria a nova representação. Os alunos responderam oralmente que não servia e apresentaram a seguinte resposta: o elemento 2 como 10 - 8, o elemento 4 como 10 - 6, o elemento 6 como 10 - 4, o elemento 8 como 10 - 2, o elemento 10 como 10 - 0, o elemento 12 como 10 + 2, o elemento 14 como 10 + 4, o elemento 16 como 10 + 6 e o elemento 18 como 10 + 8 (Figura 4.51).

Figura 4.50 Questão 4 da folha de atividades


4. E esta sequência (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18)? Em caso negativo, como seria a representação desta sequência?

Fonte: Pesquisadora

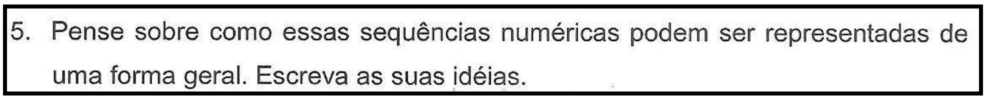
Figura 4.51 Resposta da questão 4 da folha de atividades


10-8, 10-6, 10-4, 10-2, 10-0, 10+2,
10+4, 10+6, 10+8

Fonte: Pesquisadora

A questão 5 (Figura 4.52) consistiu em elaborar uma representação geral, ou seja, encontrar uma lei de formação que valha para todas as sequências e que busque facilitar a montagem do quadrado mágico.

Figura 4.52 Questão 5 da folha de atividades


5. Pense sobre como essas sequências numéricas podem ser representadas de uma forma geral. Escreva as suas idéias.

Fonte: Pesquisadora

A pesquisadora iniciou um diálogo com perguntas genéricas, esperando que as respostas contribuíssem para a construção das respostas da folha de atividades. Deu-se o seguinte diálogo:

> P: Qual é então a melhor forma de representar todos os elementos?
>
> A: Temos que encontrar uma forma que sirva para todas as sequências.
>
> P: Então, qual é essa forma?
>
> A: Escrever os demais elementos da sequência a partir do número do meio.

Os alunos, inicialmente, quiseram chamá-lo de número do meio, depois de núcleo. Então, a pesquisadora interviu, perguntando qual seria um registro que os lembrasse rapidamente que o elemento é o número no meio. Daí os alunos resolveram chamá-lo de NM (número do meio). Seguiu o diálogo:

> P.: Na sequência 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8, como os demais elementos podem ser escritos a partir do número do meio?
> A.: Os elementos ficam: 0 = NM - 4, 1 = NM - 3, 2 = NM - 2, 3 = NM - 1, 4 = NM - 0, 5 = NM + 1, 6 = NM + 2, 7 = NM + 3 e 8 = NM + 4.

A pesquisadora registrou no quadro as respostas dos alunos e deu prosseguimento ao diálogo:

> P: Esse registro serve para a sequência 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10?
> A: Sim. 2 = NM - 4, 3 = NM - 3, 4 = NM - 2, 5 = NM - 1, 6 = NM - 0, 7 = NM + 1, 8 = NM + 2, 9 = NM + 3 e 10 = NM + 4.
> P: O registro anteriormente encontrado serve para os elementos da sequência 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 e 18?
> A: Não , 2 = NM - 8, 4 = NM - 6, 6 = NM - 4, 8 = NM - 2, 10 = NM - 0, 12 = NM + 2, 14 = NM + 4, 16 = NM + 6 e 18 = NM + 8.

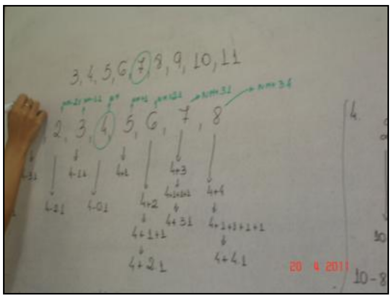
A pesquisadora questionou aos alunos por que o registro feito para as duas primeiras sequências anteriores não serviu para a terceira sequência, e os alunos não souberam responder. Então, a pesquisadora forneceu uma nova sequência, 0, 3 6, 9, 12, 15, 18, 21 e 24, e iniciou o seguinte diálogo:

> P: Qual deve ser a soma encontrada em cada uma das três filas horizontais, em cada uma das três filas verticais e nas duas diagonais?
> A: É 36, pois é 3 vezes 12, e que o elemento 12 é o número do meio das sequências.
> P: Qual é a forma de representar está sequência a partir do número do meio, utilizando as últimas conclusões?
> A: A representação é: 0 = NM -12, 3 = NM – 9, 6 = NM – 6, 9 = NM – 3, 12 = NM -0, 15 = NM +3, 18 = NM + 6, 21 = NM + 9 e 24 = NM +12.

A pesquisadora, estimulando sempre a participação dos alunos, incentivou-os afirmando que eles já haviam melhorado bastante o registro geral das sequências. Em seguida, perguntou se as mesmas poderiam sofrer melhoras, de forma que um mesmo registro servisse para todas as sequências já estudadas. Os alunos responderam que sim, mas que não sabiam como fazer. Sendo assim, a pesquisadora iniciou uma nova série de perguntas genéricas com a finalidade de que os alunos percebessem que a diferença entre dois elementos consecutivos quaisquer da sequência, que eles sabiam que deve ser constante, influenciava bastante na lei de formação da sequência. Seguiu-se o diálogo abaixo:

> P: Vocês perceberam que as sequências 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8; e 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 têm a mesma constante, no caso a constante é igual a 1, mas que a sequência 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 e 18 tem outra constante, qual é?
>
> A: A constante é 2.
>
> P.: Na sequência 0, 3 6, 9, 12, 15, 18, 21 e 24 qual é a constante?
>
> A: A constante é 3.
>
> P: Como podemos chamar essa constante, qual a representação em letra ela pode receber?
>
> A.: Podemos chamá-la de distância, podemos representá-la pela letra *d*.
>
> P: Com esta nova representação para a constante, como as sequências podem ser registradas?
>
> A: A sequência 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 a representação foi 0 = NM – 4.1, 1 = NM – 3.1, 2 = NM – 2.1, 3 = NM – 1.1, 4 = NM – 0.1, 5 = NM + 1.1, 6 = NM + 2.1, 7 = NM + 3.1 e 8 = NM + 4.1; para a sequência 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 a representação foi a mesma, 2 = NM – 4.1, 3 = NM – 3.1, 4 = NM – 2.1, 5 = NM – 1.1, 6 = NM – 0.1, 7 = NM + 1.1, 8 = NM + 2.1, 9 = NM + 3.1 e 10 = NM + 4.1 (Figura 4.53).

Figura 4.53 Representação de sequência no quadro



Fonte: Pesquisadora

Os alunos perceberam que as representações feitas antes serviram para duas sequências diferentes, contudo ambas tem a mesma distância entre dois números consecutivos.

O próximo passo feito pela pesquisadora foi verificar se a configuração encontrada pelos alunos servia para a sequência 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 e 18, os alunos responderam que não. Então, a pesquisadora iniciou o diálogo abaixo:

> P: Na sequência 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 e 18 qual é a diferença entre dois elementos consecutivos?
> A: A diferença é 2.
> P.: O que isto significa?
> A: Que a distância é 2.
> P: Então a representação dos números da sequência fica como?
> A: Fica 2 = NM – 4.2, 4 = NM – 3.2, 6 = NM – 2.2, 8 = NM – 1.2, 10 = NM – 0.2, 12 = NM + 1.2, 14 = NM + 2.2, 16 = NM + 3.2 e 18 = NM + 4.2.

Em seguida, os alunos perceberam que foi criada uma nova lei de formação. E o diálogo prossegue:

> P: Na sequência 0, 3 6, 9, 12, 15, 18, 21 e 24, qual é a constante, a distância?
> A: A distância é 3.
> P: Como é a representação dos números da sequência utilizando a distância?
> A: A representação é: 0 = NM – 4.3, 3 = NM – 3.3, 6 = NM – 2.3, 9 = NM – 1.3, 12 = NM – 0.3, 15 = NM + 1.3, 18 = NM + 2.3, 21 = NM + 3.3 e 24 = NM + 4.3.

Os alunos com isso perceberam que ainda não haviam encontrado uma única configuração que servisse para todas as sequências, e sabendo que o objetivo da atividade era criar uma lei que servisse para todas as sequências, buscaram a partir da mediação da pesquisadora, alcançar a resposta correta.

Para tanto, pesquisadora continuou a conduzir o diálogo com a finalidade de que os alunos percebessem que a distância entre os termos consecutivos da sequência deve fazer parte da configuração da lei. Os alunos já indicaram a distância pela letra *d*, entretanto não utilizaram a mesma no registro geral, ou seja, no registro algébrico. Deste modo, seguiu o diálogo:

> P: Como a configuração da sequência poder ser constituída a partir do número do meio (NM) e da distância (*d*), que são registros que vocês desenvolveram?
> A: O registro fica sendo a seguinte: NM – 4.*d*, NM. – 3.*d*, NM – 2.*d*, NM – 1.*d*, NM – 0.*d*, NM + 1.*d*, NM + 2.*d*, NM + 3.*d* e NM + 4.*d*.

Para comprovarem a veracidade da conjectura, a pesquisadora retornou a sequência 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, e continuou com o diálogo:

> P: Como ficam então os elementos pertencentes à sequência no novo registro?
> A: Fica 1 = NM – 4.*d*, 2 = NM – 3.*d*, 3 = NM – 2.*d*, 4 = 4 NM – 1.*d*, 5 = NM – 0.*d*, 6 = NM + 1.*d*, 7 = NM + 2.*d*, 8 = NM + 3.*d* e 9 = NM + 4.*d*.

Os alunos, com o auxílio da pesquisadora, perceberam que a configuração estava correta. Prosseguiu o diálogo:

> P: O que vocês podem concluir em relação ao registro formulado?
> A.: Os números anteriores ao NM ficam com o *d* negativo e os posteriores ficam com o *d* positivo.
> P: Sendo assim...
> A: O registro algébrico é: primeiro termo NM – 4.*d*, segundo termo NM – 3.*d*, terceira termo NM – 2.*d*, quarto termo NM – 1.*d*, quinto termo NM – 0.*d*, sexto termo NM + 1.*d*, sétimo termo NM + 2.*d*, oitavo termo NM + 3.*d* e nono termo NM + 4.*d*.

Após os alunos terem compreendido as conclusões a pesquisadora solicitou para que os mesmos escrevessem as conjecturas na folha de atividades (Figura 4.54).

Figura 4.54 Resposta da questão 5 da folha de atividades

n.m-d.4
n.m-d.3, n.m-d.2, n.m-d.1 nm n.m+d.1, n.m+d.2, n.m+d.3,
n.m+d.4.

Fonte: Pesquisadora

A questão 6 (Figura 4.55) consistiu em montar o quadrado mágico a partir da configuração algébrica.

Figura 4.55 Questão 6 da folha de atividades

6. Monte um quadrado mágico usando a representação que você elaborou na questão 4.

Fonte: Pesquisadora

Com o objetivo de formar a configuração do quadrado utilizando o registro algébrico, a pesquisadora aproveitou uma das configurações formulada pelos alunos (Figura 4.56):

Figura 4.56 Configuração do quadrado mágico

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 7 | 2 |
| 1 | 5 | 9 |
| 8 | 3 | 4 |

Fonte: Pesquisadora

Seguiu-se o diálogo abaixo:

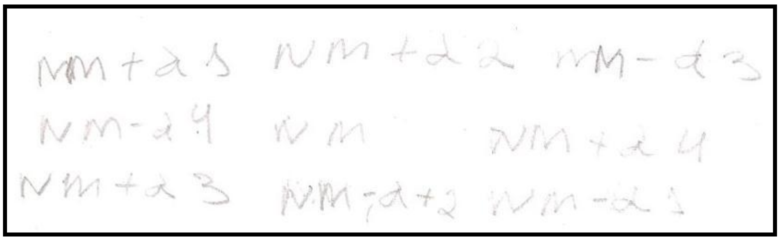
> P.: Utilizando as conjecturas formuladas anteriormente o elemento 1 = NM – 4.*d*, o elemento 2 = NM – 3.*d*, o elemento 3 = NM – 2.*d*, o elemento 4 = 4 NM – 1.*d*, o elemento 5 = NM – 0.*d*, o elemento 6 = NM + 1.*d*, o elemento 7 = NM + 2.*d*, o elemento 8 = NM + 3.*d* e o elemento 9 = NM + 4.*d*, o registro fica como?

Os alunos falaram e a pesquisadora escreveu no quadro:

$$\begin{array}{ccc} NM+1.d & NM+2.d & NM-3.d \\ NM-4.d & NM & NM+4.d \\ NM+3.d & NM-2.d & NM-1.d \end{array}$$

Após os alunos terem alcançado a resposta correta da questão 6, a pesquisadora solicitou que a mesma fosse registrada na folha de atividades (Figura 4.57).

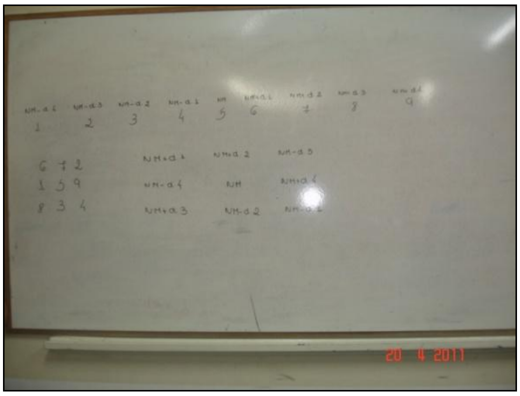
Figura 4.57 Registro feito por um aluno para a questão 6 da folha de atividades


NM+d1 NM+d2 NM-d3
NM-d4 NM NM+d4
NM+d3 NM-d+2 NM-d1

Fonte: Pesquisadora

A pesquisadora retornou ao quadro e escreveu a configuração do quadrado mágico feita pelos alunos (Figura 4.58).

Figura 4.58 Configuração algébrica do quadrado mágico



Fonte: Pesquisadora

O quarto e último encontro ocorreu no dia 25/04/2011. A pesquisadora relembrou a configuração algébrica do quadrado construída no encontro anterior, escreveu no quadro a referida configuração e o exemplo com elementos numéricos, na qual foi utilizada a sequência 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

A configuração foi a seguinte:

$$\begin{matrix} 8 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \end{matrix}$$

Para esta configuração, o registro algébrico da mesma é:

$$\begin{matrix} NM+3.d & NM-2.d & NM-d \\ NM-4.d & NM & NM+4.d \\ NM+d & NM+2.d & NM-3.d \end{matrix}$$

Logo após, escreveu no quadro a sequência 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 (Figura 4.59), e solicitou que os alunos montassem o quadrado mágico apoiando-se na configuração algébrica elaborada anteriormente. Os alunos então não fizeram tentativas para alcançarem a resposta e responderam corretamente o que havia sido solicitado.

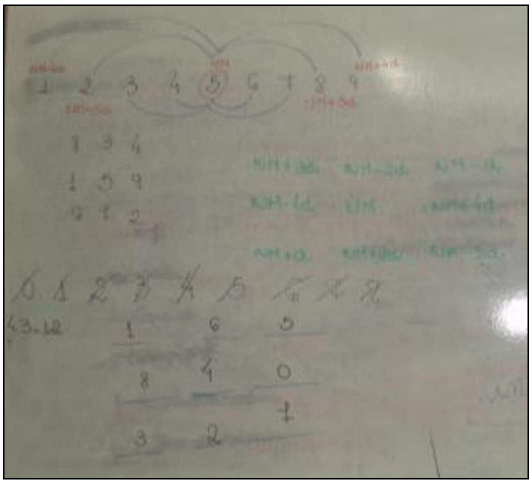
A configuração foi a seguinte:

$$\begin{matrix} 1 & 6 & 5 \\ 8 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 7 \end{matrix}$$

Para esta configuração, o registro algébrico da mesma é:

$$\begin{matrix} NM-3.d & NM+2.d & NM+d \\ NM+4.d & NM & NM-4.d \\ NM-d & NM-2.d & NM+3.d \end{matrix}$$

Figura 4.59 Configuração quadrado mágico utilizando a linguagem algébrica

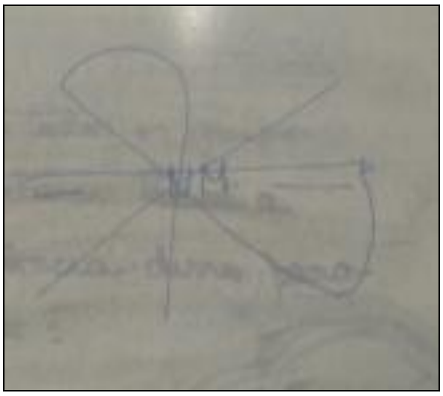


Fonte: Pesquisadora

Então a pesquisadora e sua orientadora, com a participação dos alunos, montaram o esquema que é ainda mais prático para dispor os elementos para formar o quadrado mágico (Figura 4.60). Os alunos já sabiam que a soma é 3 vezes o NM da sequência, sendo assim o esquema também tinha que seguir este pensamento.

O esquema formulado pelos alunos foi o seguinte:

Figura 4.60 Esquema para montar o quadrado mágico



Fonte: Pesquisadora

A pesquisadora, com a participação dos alunos, verificou que com a sequência 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24 também poderia ser montado um quadrado mágico com base na configuração algébrica encontrada anteriormente (Figura 4.61).

Figura 4.61 Verificação do esquema para montar o quadrado mágico

Fonte: Pesquisadora

Em seguida a pesquisadora retornou a folha de atividades para que os alunos respondessem a última questão, (Figura 4.62).

Figura 4.62 Questão 7 da folha de atividades

7. Existe alguma mágica na configuração do quadrado mágico?

Fonte: Pesquisadora

Sendo assim, o próximo passo da pesquisadora foi solicitar que os alunos respondessem a questão na folha de atividades (Figura 4.63).

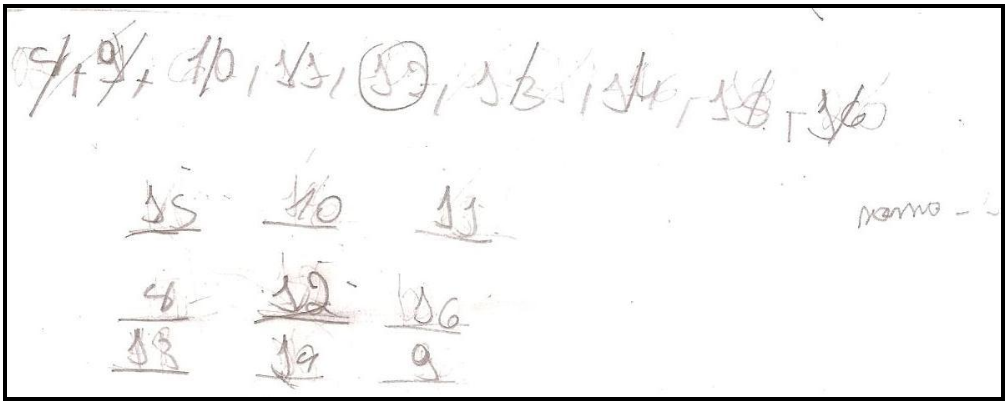
Figura 4.63 Resposta da questão 7 da folha de atividades

não. Pois é só sabe os calculos.

Fonte: Pesquisadora

Como atividade final a pesquisadora solicitou que os alunos se agrupassem em trios ou duplas, e montassem seus quadrados, a partir de exemplos criados pelos alunos. O objetivo desta atividade foi verificar se os alunos trabalhariam com sequências que eram Progressões Aritméticas (condição necessária para a validação do quadrado mágico), além de utilizar a configuração algébrica do quadrado mágico para construí-lo, sem utilizar o método de tentativa e erro do início do trabalho (Figura 4.64). Após todos os grupos entregarem o exercício, a pesquisadora novamente agradeceu a participação e a colaboração de todos e encerrou os trabalhos.

Figura 4.64 Montagem do quadrado mágico feita pelos alunos



Fonte: Pesquisadora

É importante ressaltar nesta questão que os alunos trabalharam de modo autônomo, sem nenhuma interferência da pesquisadora. A mesma constatou, por meio da observação, que os alunos utilizaram a configuração algébrica do quadrado mágico como apoio para estruturar os seus quadrados. Verificou-se que todos os quadrados estavam corretos.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, pretendeu-se introduzir a Álgebra com significado por meio da metodologia Resolução de Problemas. Foi adotada a concepção de Álgebra de Lins e Gimenez (2006), segundo a qual o aluno é capaz de atribuir representações para quantidades desconhecidas no problema, desde que o mesmo tenha significado para ele. Deste modo elaborou-se um problema e pretendeu-se que, a partir das tentativas de resolução do mesmo, os alunos desenvolvessem um registro algébrico.

O problema consistia em descobrir a "mágica" de um quadrado mágico 3X3, isto é, cabia aos alunos investigar as relações aritméticas entre os elementos que compunham o quadrado a partir de uma sequência dada, e o modo adequado de montar um quadrado, sem fazer uso de tentativas. O modo adequado diz respeito à elaboração de relações entre os termos do quadrado mágico, expressas na linguagem algébrica.

A experimentação consistiu de três momentos: teste exploratório, primeira experimentação e segunda experimentação. O teste exploratório ocorreu com sete alunos do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola pública e teve como um dos objetivos testar as estratégias de condução da experimentação. Foi possível observar que tais alunos apresentaram dificuldades em operar com números inteiros negativos, apesar do grau de escolaridade deles. Entretanto, mostraram-se interessados na tarefa, concluindo-a com êxito.

A primeira experimentação ocorreu com 8 alunos do 8°. ano de uma escola particular, em horário extraclasse. Esta experimentação, inicialmente prevista para ser a única, indicou a necessidade de uma segunda experimentação devido ao curto espaço de tempo disponível para o seu desenvolvimento, o que levou a pesquisadora a intervir mais do que o previsto nas ações dos alunos durante a resolução do problema proposto, comprometendo a veracidade dos dados. Nessa experimentação foi percebida a necessidade de elaborar um roteiro por escrito para que os alunos registrassem o seu raciocínio e as suas conclusões.

Ciente da influência de suas intervenções nas ações dos alunos, a pesquisadora iniciou a segunda experimentação, buscando praticar, mais rigorosamente, as orientações de Polya (2006) para a utilização da metodologia Resolução de Problemas. Sendo assim, a pesquisadora apenas mediou às atividades, estimulando os alunos com perguntas genéricas.

O encaminhamento dos problemas e o desenvolvimento dos trabalhos com os alunos, nos três momentos da experimentação foram pautados na metodologia de Resolução de Problemas segundo Polya (2006). Foram utilizadas perguntas genéricas a fim de estimular o raciocínio dos alunos, auxiliando-os para que alcançassem as soluções corretas, sem intervenção direta da pesquisadora.

Foi constatado que a metodologia de Resolução de Problemas segundo Polya (2006), mostrou-se adequada para o desenvolvimento da notação algébrica pelos alunos. Caso as orientações metodológicas da Resolução de Problemas não fossem utilizadas, nos momentos de bloqueios dos alunos, a pesquisadora poderia antecipar-se às conclusões dos alunos, inibindo a possibilidade destes alcançarem as soluções de modo autônomo. Nesta pesquisa, isto significaria apresentar aos alunos as notações algébricas que possuem significado para a pesquisadora, mas poderiam não significar algo para os alunos. Deste modo, estes não estariam construindo a notação algébrica com significado, reproduzindo assim situações de muitas salas de aulas de Matemática, nas quais o caráter expositivo das aulas impera, levando os alunos a serem espectadores do conhecimento. Pode-se afirmar que a metodologia Resolução de Problemas propicia a legitimidade e a adequação da notação algébrica. Tal fato ficou claro para a pesquisadora, quando os alunos utilizaram com destreza as representações algébricas por eles criadas.

O exposto no parágrafo anterior responde à questão de pesquisa. Entretanto, como não poderia deixar de ser, numa pesquisa qualitativa, cujos sujeitos são seres humanos, repletos de ideias e de possibilidades, foram observados, no decorrer da pesquisa, fatos relacionados à educação algébrica que serão relatados nos parágrafos seguintes.

Tais fatos estão relacionados à construção da notação algébrica pelos alunos, na qual os mesmos possuem capacidade de escolher a incógnita que apresenta significado, ou seja, quando o professor possibilita a autonomia aos alunos para entender e criar a notação algébrica, os mesmos passam a utilizá-la com significado.

Nesta investigação, foi possível perceber e verificar que a linguagem algébrica pode ter significado para os alunos, desde que lhes seja permitido escolher as representações, gerando com isso uma aprendizagem com significado.

Durante o momento da experimentação, foi marcante a utilização da metodologia Resolução de Problemas, pois, foi, por meio desta, que os alunos elaboraram a notação algébrica para o quadrado mágico 3X3. Essa metodologia mostrou-se adequada, uma vez que a pesquisadora apenas auxiliou os alunos, interferindo o necessário para que os mesmos desenvolvessem de forma autônoma a criação da notação algébrica.

Como continuidade desta pesquisa, é sugerida a elaboração de situações problemas para o estudo de outros temas matemáticos escolares relacionados à Álgebra.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS


CANAVARRO, Ana Paula et al. *O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos.* Quadrante**,** Lisboa-Portugal, v. , n. 2, p.81-118, 2007.

DANTE, Luiz Roberto. *Didática da Resolução de Problemas de Matemática*. São Paulo: Ed. Ática, 1994.

GOLDENBERG, Mirian. *A arte de pesquisar:* como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. 4. ed. Rio de Janeiro: Record, 2000.

HECK, William; FEY, James. Quadrados Mágicos: In: GUNDLACH, Bernard H.; trad. Hygino H. Domingues. *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula.* São Paulo: Atual, 1992. Cap. 24, p. 65-66.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI.* 7. ed. Campinas, São Paulo: Papirus, 2006. p.89-158.

PEREIRA, A. L. et al. *Problemas matemáticos:* caracterização, importância e estratégias de resolução. Seminários de Resolução de Problemas. IME-USP – Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 2001.

POLYA, George. *A Arte de Resolver Problemas***:** Um Novo Aspecto do Método Matemático. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara et al. *Educação Matemática:* uma introdução. 2. ed. São Paulo: EDUC, 2002.

Ministério da Educação e Cultura (Brasil). Resolução nº. 3 de 3 de agosto de 2005. Disponível em www.mec.gov.br. Acesso em: 28 nov 2012.

REIS, M. M. V.; ZUFFI, E. M. *Estudo de um caso de implantação da metodologia Resolução de Problemas no Ensino Médio.* Bolema: Rio Claro -SP, v. 20, n. 28, p.113-128, 2007.

YIN, R. K. *Estudo de caso*: planejamento e métodos. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

# APÊNDICES

APÊNDICE (1)

Fases da Resolução do Problema:

A sequência de problemas foi agrupada em duas fases.

- Fase 1: problemas 1, 2 e 3.
  - ✓ Problema 1: momento em que os alunos recebem os quadrados de papel com os números da sequência (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9). Inicialmente a pesquisadora solicita para que disponham os números de tal forma que cada fila horizontal possua três números, em seguida é solicitado que somem os números pertencentes a cada fila horizontal, após é solicitado que arrumem os números com a soma 15. Os alunos atendem a pesquisadora, em seguida pede-se para que somem as filas verticais, após para que arrumem os números de forma que tanto nas três filas horizontais quantos nas três filas verticais a soma dos números seja 15. Sendo atendido o pedido da pesquisadora, pede-se para que sejam somados os números das diagonais, após é solicitado para que arrumem os números das três filas horizontais, das três filas verticais e das duas diagonais com a soma 15.
  - ✓ Problema2: momento em que as conjecturas são elaboradas e verificadas para o determinado problema e busca para a relação existente entre a soma dos números da sequência e os números que compõem a mesma, em seguida, conjectura e verificação.
  - ✓ Problema 3: momento em que é entregue aos alunos sequências distintas e a pesquisadora solicita que arrumem os números no quadrado, sendo válido valar que cada uma dessas sequências possui uma determinada soma que foi fornecida pela pesquisadora e confirmada pelos alunos.
- Fase 2: problemas 4 e 5.
  - ✓ Problema 4: momento que inicia a busca pela solução da situação problema, e para que essa seja alcançada faz-se necessário que conjecturas sejam formuladas e validadas.
  - ✓ Problema 5: momento em que os alunos criaram a configuração genérica para o quadrado mágico, em seguida é encontrado um esquema que auxilia na constituição do quadrado mágico sem ser necessário efetuar operações, após a pesquisadora solicita que os alunos

testem esse esquema com uma sequência, sendo que desta vez, a sequência é formulada pelos próprios alunos.

APÊNDICE (2)

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
FLUMINENSE
Campus Campos-Centro

Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

Ministério da Educação

Atividades da Monografia: Resolução de Problemas: perspectivas da utilização desta metodologia em Álgebra dos Anos Finais.

1. Que características possuem a sequência que formou o quadrado mágico?

2. Pense numa forma de representar a sequência (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8) a partir do termo do meio.

3. A forma pensada no item anterior serve para representar a sequência (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10)? Em caso negativo, como seria a representação desta sequência?

4. E esta sequência (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 e 18)? Em caso negativo, como seria a representação desta sequência?

5. Pense como essas sequências numéricas podem ser representadas de uma forma geral. Escreva as suas ideias.

6. Monte um quadrado mágico usando a representação que você elaborou na questão 5.

7. Existe alguma mágica na configuração do quadrado mágico?