INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE

Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

Ministério da Educação

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DESVENDANDO A PROGRESSÃO ARITMÉTICA: UM ESTUDO COM PADRÕES

HUGO GANDRA DE ARAÚJO

LINA PAULA ARMOND GONÇALVES

CAMPOS DOS GOYTACAZES/RJ
2014

HUGO GANDRA DE ARAÚJO
LINA PAULA ARMOND GONÇALVES

DESVENDANDO A PROGRESSÃO ARITMÉTICA: UM ESTUDO COM PADRÕES

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, *campus* Campos–Centro, como requisito parcial para conclusão do curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Profª M.Sc. Juliana Santos Barcellos Chagas
Coorientadora: Profª M.Sc. Carmem Lúcia Vieira Rodrigues Azevedo

Campos dos Goytacazes/RJ
2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca. Setor de Processos Técnicos (IFF)

A663d Araújo, Hugo Gandra de.
Desvendando a progressão aritmética: um estudo com padrões / Hugo Gandra de Araújo, Lina Paula Armond Gonçalves – 2014.
65 f. : il.

Orientadora: Juliana Santos Barcellos Chagas.
Co-orientardora: Carmem Lúcia Vieira Rodrigues Azevedo

Monografia (Licenciatura em Matemática). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense. Campus Campos Centro, 2014.
Referencias bibliográficas: p. 50 - 53.

1. Matemática (Ensino médio) – Estudo e ensino. 2.Progressão Aritmética – Estudo e ensino. I. Gonçalves, Lina Paula Armond, II. Chagas, Juliana Santos Barcellos, orient. III. Azevedo, Carmem Lúcia Vieira Rodrigues. IV. Título.

CDD – 570.7

HUGO GANDRA DE ARAÚJO
LINA PAULA ARMOND GONÇALVES

DESVENDANDO A PROGRESSÃO ARITMÉTICA: UM ESTUDO COM PADRÕES

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, *campus* Campos-Centro, como requisito parcial para conclusão do curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovada em 10 de outubro de 2014.

Banca Avaliadora:

____

Profª Juliana Santos Barcellos Chagas (orientadora)
Mestre em Matemática/UENF/RJ
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos-Centro

____

Profª Carmem Lúcia Vieira Rodrigues Azevedo (coorientadora)
Mestre em Economia Empresarial/UCAM/RJ
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos-Centro

____

Profª Ana Paula Rangel de Andrade
Mestre em Planejamento Regional e Gestão de Cidades/UCAM/RJ
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *campus* Campos-Centro

____

Profª Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho Faria
Mestre em Educação Matemática/UNESP/SP

AGRADECIMENTOS

A Deus, por toda força e saúde para superar as dificuldades e não desistir durante a caminhada.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, *campus* Campos-Centro, e ao corpo docente da Licenciatura em Matemática, que oportunizaram nossa ascensão acadêmica e nos prepararam para a prática docente.

Às orientadoras Carmem Lúcia e Juliana, pelo suporte no pouco tempo que lhes coube, pelas correções e incentivos.

Aos nossos pais, por todo suporte na difícil caminhada rumo à graduação.

Às nossas famílias, pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

Aos amigos, de modo especial a Bruno, Fernanda, Ludmilla, Pâmella, Rafaela e Sara, que nos apoiaram no convívio diário, dando-nos suporte e auxiliando na nossa formação.

À professora Ana Paula, pelas contribuições dadas a este trabalho monográfico.

A Felipe Rodrigues Azevedo, pela contribuição na tradução do inglês.

À Flavia Gomes de Abreu Siqueira, pela contribuição na formatação.

Aos participantes do teste exploratório e da experimentação das Atividades, que contribuíram para a realização deste trabalho.

Enfim, a todos que, direta ou indiretamente, colaboraram para a concretização desta pesquisa.

Dar aulas é diferente de ensinar. Ensinar é dar condições para que o aluno construa seu próprio conhecimento.

Sérgio Lorenzato

RESUMO

O estudo de regularidades e padrões tem um papel relevante no ensino da Matemática, pois tem a capacidade de desenvolver os pensamentos algébrico e geométrico nos alunos, interligando-os. As Progressões Aritméticas (PA) são sequências numéricas nas quais se observa regularidades, e seu estudo pode ser potencializado quando relacionado a outros conhecimentos matemáticos, como os padrões. Dessa forma, elaborou-se uma sequência didática para alunos da 1ª. série do Ensino Médio, com objetivo de utilizar Padrões Figurativo-Numéricos como um recurso para a formação de conjecturas e generalizações de alguns conceitos de PA. Os conceitos abordados são as fórmulas do termo geral e da soma dos *n* primeiros termos de uma PA. A pesquisa é de cunho qualitativo, desenvolvida por meio de um estudo de caso, e os dados foram coletados pelo registro das respostas dos alunos, pela observação participante e por anotações descritivas e reflexivas. Dados esses obtidos durante a aplicação da sequência didática, composta por três Atividades. As mesmas foram elaboradas de modo que os alunos se dedicassem à análise dos padrões propostos visando alcançar a generalização dos conceitos da PA supracitados, com base nas seguintes fases do processo investigativo do padrão: procura, conseguindo extrair informações relevantes; reconhecimento, fazendo uma análise matemática por meio de métodos apropriados; e generalização, interpretando e aplicando o que foi aprendido e pensando em casos similares. Os resultados indicam que o uso de Padrões Figurativo-Numéricos auxiliou no estudo da Progressão Aritmética, além de motivar os alunos.

Palavras-Chave: Padrões Figurativo-Numéricos. Ensino Médio. Ensino de Matemática.

ABSTRACT

The study of regularities and patterns have a relevant role in teaching mathematics, because it has the capacity to develop the algebraic and geometric thinking in students, linking them. The Arithmetic Progressions (PA) are numerical sequences in which it's observed regularities, its study can be potentiated when relating to other mathematical knowledge, such as patterns. This way it was elaborated a didactic sequence for the students of the first year of High School with the objective of using Figurative-Numeric Patterns as a resource to the formation of conjectures and generalization of some PA concepts. The concepts addressed are the formulas of the general term and the sum of the *n* first terms of a PA. The research is a qualitative study, developed by the case study and the data was collected by registering the students answers, by the participant observation and by descriptive and reflexive notes. The referred data was collected during the application of the didactic sequence, composed of three Activities. Those were elaborated so that the students dedicate themselves to the analysis of the proposed patterns in order to reach the generalization of the concepts of PA listed above, based n the following phases of the investigative process of the pattern: search, extracting relevant information; recognition, making a mathematical analysis using the appropriate methods; and generalization, interpreting and applying what was learned and thinking about similar cases. The result shows that the use of Patterns Figurative-Numeric supported the study of Arithmetic Progressions, besides motivating the students.

Keywords: Figurative-Numeric Patterns. High School. Teaching of Math.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Tipos de padrões 18
Figura 2 - Exemplo de Padrão Figurativo-Numérico proposto nos PCN 19
Figura 3 - Padrões Figurativo-Numéricos da Atividade 1 27
Figura 4 - Itens da questão 1 da Atividade 1 28
Figura 5 - Padrão Figurativo-Numérico da questão 1 da Atividade 2 28
Figura 6 - Itens a e b da questão 1 da Atividade 2 29
Figura 7 - Itens c e d da questão 1 da Atividade 2 29
Figura 8 - Quadro para definição de razão 29
Figura 9 - Itens e e f da questão 1 da Atividade 2 30
Figura 10 - Item g da questão 1 da Atividade 2 30
Figura 11 - Padrão Figurativo-Numérico da questão 2 da Atividade 2 31
Figura 12 - Item a da questão 2 da Atividade 2 31
Figura 13 - Itens b e c da questão 2 da Atividade 2 31
Figura 14 - Itens d e e da questão 2 da Atividade 2 31
Figura 15 - Item f da questão 2 da Atividade 2 32
Figura 16 - Questão 3 da Atividade 2 32
Figura 17 - Padrão Figurativo-Numérico da questão 1 da Atividade 3 33
Figura 18 - Itens a e b da questão 1 da Atividade 3 33
Figura 19 - Itens c e d da questão 1 da Atividade 3 33
Figura 20 - Itens e, f e g da questão 1 da Atividade 3 34
Figura 21 - Item h da questão 1 da Atividade 3 34
Figura 22 - Item i da questão 1 da Atividade 3 34
Figura 23 - Item j da questão 1 da Atividade 3 34
Figura 24 - Questão 2 da Atividade 3 35
Figura 25 - Modificação do quadro de definição de razão na questão 1 da Atividade 2 37
Figura 26 - Modificação do Item g da questão 1 da Atividade 2 37
Figura 27 - Aluno utilizando o papel carbono para resolver uma questão 39
Figura 28 - Resolução de três alunos para as questões 1 e 2 da Atividade 1 41
Figura 29 - Resolução de um aluno para o quadro de definição de razão 41
Figura 30 - Resolução de um aluno para o item g da questão 1 da Atividade 2 42

Figura 31 - Resolução de um aluno para o item b da questão 2 da Atividade 2 43
Figura 32 - Resolução de um aluno para os itens d, e e f da questão 2 da Atividade 2. 44
Figura 33 - Resolução de dois alunos para o padrão incompleto da questão 3 da Atividade 2 44
Figura 34 - Resolução de um aluno para o item a da questão 3 da Atividade 2 45
Figura 35 - Resolução de um aluno para o item h da questão 1 da Atividade 3 45
Figura 36 - Resolução de um aluno para os itens i e j da questão 1 da Atividade 3 46
Figura 37 - Resolução de dois alunos para o item c da questão 2 da Atividade 3 46

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS 8
INTRODUÇÃO 11
1 APORTE TEÓRICO 14
1.1 A Álgebra e os Padrões 14
1.2 Estudos Relacionados 22
2 ASPECTOS METODOLÓGICOS 25
2.1 Pesquisa Qualitativa 25
2.2 Elaboração das Atividades 27
2.2.1 Atividade 1 27
2.2.2 Atividade 2 29
2.2.3 Atividade 3 33
3 RELATO DE EXPERIÊNCIA 37
3.1 Teste Exploratório 37
3.2 Experimentação das Atividades 39
3.2.1 Encontro do dia 17 de dezembro de 2013 40
3.2.2 Encontro do dia 18 de dezembro de 2013 43
CONSIDERAÇÕES FINAIS 49
REFERÊNCIAS 51
APÊNDICES 55
Apêndice A: Atividade 1 56
Apêndice B: Atividade 2 59
Apêndice C: Atividade 3 64

INTRODUÇÃO

No âmbito do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Fluminense, *campus* Campos-Centro, foi desenvolvido um projeto na disciplina Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática (LEAMAT) que propunha atividades de investigação e de generalização algébrica com o auxílio de padrões formados por sequências de pontos, a serem aplicadas na Educação Básica. A partir desse projeto, os pesquisadores sentiram-se motivados a continuar as pesquisas sobre padrões formados por sequências de pontos. Uma das razões é a possibilidade de perceber, em todos os lugares, a existência de figuras que se repetem, formando sequências. Segundo Faria (2012, p. 26) "[...] basta olhar à nossa volta para repararmos que estamos rodeados por padrões e, para concebê-los como tal, devemos imaginá-los estendendo-se indefinidamente no plano ou no espaço [...]".

Pesquisas sobre o estudo de padrões no ensino de Matemática indicam a relevância do tema. Para Zazkis e Liljedahl (2002), os padrões são a essência da Matemática, uma vez que o fundamento da Álgebra e de toda a Matemática é a generalização de padrões. Vale e Pimentel (2005) confirmam essa ideia quando tratam a Matemática como a ciência dos padrões, uma vez que busca estruturas comuns a entes aparentemente sem semelhança. Logo, para essas autoras, os padrões são fortes aliados no ensino matemático e sua procura é necessária para a conjectura e a generalização.

Segundo Menegassi e Silva (2007), a Matemática era considerada, pelos babilônios e egípcios, a ciência dos números. Enquanto que os gregos deram ênfase à geometria. E entre esses povos, matemáticos já procuravam regularidades e padrões de sequências, números e figuras. Essas regularidades encontram-se presentes em todos os lugares, como na disposição das sementes de um girassol ou nas folhas de uma samambaia, criando sequências que são percebidas e estudadas. Os padrões na natureza "[...] não existem somente para serem admirados, eles são pistas vitais para as regras que governam os processos naturais" (STEWART, 1996, p.11). Além disso, podem ser utilizados em sala de aula, com atividades que permitam a observação de regularidades e também as que conduzam às generalizações, permitindo a transição do pensamento numérico para o algébrico.

Maltempi (2009 apud FARIA, 2012, p. 53) afirma:

> [...] as atividades envolvendo a generalização matemática por meio de padrões numéricos ou de figuras, podem ocorrer de várias maneiras. Os padrões que exploram sequências numéricas buscam estimular os alunos a prever o que ocorrerá com os elementos que compõem o padrão independentemente da posição na sequência, incentivando o desenvolvimento de uma regra algébrica. Já os padrões compostos por figuras, enfatizam as estruturas do padrão.

A investigação de padrões em sucessões geométricas permite reconhecer regularidades, fazer generalizações e desenvolver a linguagem e o pensamento algébrico.

Os elementos que caracterizam o pensamento algébrico, segundo Miorin, Miguel e Fiorentini (1993, p. 37), são: “[...] a percepção de regularidades, a percepção de aspectos invariantes em contraste de outros que variam, as tentativas de expressar ou explicar a estrutura de uma situação problema e a presença do processo de generalização”. Ponte (2006b) corrobora com essa ideia quando afirma que, no pensamento algébrico, levam-se em conta não apenas os objetos, mas as relações existentes entre eles. E estas são representadas e pensadas de modo geral e abstrato, tanto quanto for possível. Para o autor, isso faz do estudo de padrões e regularidades "[...] uma das vias privilegiadas para promover este raciocínio" (PONTE, 2006b, p. 8).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) apontam que a generalização de padrões auxilia no desenvolvimento de competências necessárias para a leitura e a interpretação de dados e na formalização do conhecimento matemático (BRASIL, 2002). Quanto a essa formalização, Arcavi (2006 apud BARBOSA et al., 2008) destaca que os padrões podem ser utilizados durante o desenvolvimento de conceitos fundamentais para a teoria dos números, pré-álgebra, álgebra, geometria, probabilidade e funções.

Orton (1999 apud BARBOSA et al., 2008) corrobora com essa ideia ao afirmar que os padrões permitem, aos alunos, a construção de uma imagem mais positiva da Matemática, a conexão com diversos temas, a melhora nas suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de suas habilidades de classificar e ordenar informações e a compreensão da relação existente entre a Matemática e o mundo.

Nessa pesquisa, escolheu-se trabalhar os Padrões Figurativo-Numéricos para desenvolver alguns conceitos de Progressão Aritmética (PA). Moura (2010) afirma que toda sequência segue uma "lei de formação" e que esta pode ser obtida por meio da análise e da generalização de padrões. O autor acrescenta que a fórmula da soma dos *n* primeiros termos de uma PA pode ser obtida de modo análogo, chegando-se à abstração.

Diante do exposto, a presente pesquisa pretende responder a seguinte questão: **Como o uso de Padrões Figurativo-Numéricos auxilia no estudo da Progressão Aritmética?** Para isso, traçou-se o seguinte objetivo: utilizar Padrões Figurativo-Numéricos como um recurso para favorecer a formação de conjecturas e de generalizações dos seguintes conceitos de PA: termo geral e soma dos *n* primeiros termos.

Este trabalho monográfico está dividido em três capítulos, além da Introdução e das Considerações Finais.

No primeiro capítulo, encontra-se o aporte teórico que embasou a pesquisa, no qual é descrito o surgimento e a evolução da Álgebra, o desenvolvimento do pensamento algébrico e geométrico, a relação entre a Álgebra e os Padrões Figurativo-Numéricos e o processo investigativo no estudo destes.

Os aspectos metodológicos da presente pesquisa são abordados no capítulo dois. Trata-se de uma pesquisa qualitativa desenvolvida por meio do estudo de caso, para a qual se utilizaram, como técnicas de coleta de dados, o registro das respostas dos alunos e a observação participante, além de anotações descritivas e reflexivas. Na seção referente à Elaboração das Atividades, são descritas as Atividades propostas, com seus respectivos objetivos.

No terceiro capítulo, são apresentadas a descrição e a análise das aplicações das Atividades desenvolvidas, que ocorreram na forma de um teste exploratório, aplicado a fim de detectar possíveis falhas e adequar as mesmas ao público-alvo da pesquisa e da experimentação da proposta didática realizada em uma turma de Ensino Médio.

Nas Considerações Finais, são destacados pontos relevantes sobre o desenvolvimento deste trabalho monográfico, bem como a resposta à questão da pesquisa, sugestões de outros recursos pedagógicos para o desenvolvimento das Atividades propostas e de pesquisas futuras.

1 APORTE TEÓRICO

Neste capítulo, será apresentado o aporte teórico que subsidiou o processo de elaboração deste trabalho monográfico.

1.1. A Álgebra e os Padrões

A origem e evolução dos conhecimentos matemáticos estão profundamente ligadas ao processo evolutivo do ser humano e ocorreram em momentos nos quais eram necessários soluções para situações-problema presentes no cotidiano dos povos antigos (SANTOS, 2005).

A evolução da Álgebra, na história da matemática, tem um registro tardio pois, segundo Courant e Robbins (1946 apud SANTOS, 2005), os gregos tiveram certas dificuldades relacionadas a quantidades “incomensuráveis”, dedicando-se à pura geometria axiomática, enquanto os orientais desenvolveram o cálculo numérico. Para os mesmos autores, a evolução do conceito de números e da manipulação algébrica foi retardada devido à tradição geométrica grega.

Nesselman, em 1842, caracterizou o desenvolvimento da notação algébrica em três estágios. O primeiro é o retórico, que pertence a um período anterior a Diofanto (séc. III), no qual a "Álgebra era retórica, isto é, apresentava-se a resolução dos problemas em prosa, sem abreviações ou símbolos específicos" (SANTOS, 2005, p. 7).

O segundo estágio se inicia com os estudos de Diofanto (c. 200 - c. 284), considerado por alguns o fundador da Álgebra, que, em suas pesquisas, desenvolveu métodos diferenciados para "[...] resolução de equações e sistemas de equações num estilo de linguagem conhecido como 'sincopado'. Deste modo, os enunciados dos problemas, que tinham começado por ser expressos em linguagem natural, passam a incluir pequenas abreviações" (PONTE, BRANCO, MATOS, 2009, p. 5). Diofanto foi o primeiro a utilizar notações algébricas, “[...] criou abreviaturas para a incógnita, potências de incógnitas com expoente até seis, subtração, igualdade e inverso” (SANTOS, 2005, p. 7).

O último estágio se dá quando a Álgebra é apresentada na forma simbólica, em que as resoluções dos problemas são expressas por símbolos que representam os entes algébricos (SANTOS, 2005).

A Álgebra é essencial para a resolução de problemas, já que seu objetivo é deduzir procedimentos e relações e apresentá-los de forma simples e generalizada (MODANEZ, 2003). Nesse contexto, "[...] a letra pode ser usada como símbolo sob diferentes interpretações, como incógnita, como generalizador, como variável e como representações de acções [sic] e objetos. [...]" (BRANCO, 2008, p. 5-6).

Para Ponte, Branco e Matos (2009), o grande objetivo da Álgebra escolar é desenvolver o pensamento algébrico dos alunos no Ensino Fundamental e Médio. Esse desenvolvimento, segundo orientações elaboradas pelo NCTM[1] (2000 apud BRANCO, 2008, p. 6), diz respeito a:

> - Compreender padrões, relações e funções;
> - Representar e analisar situações matemáticas e estruturas usando símbolos algébricos;
> - Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas;
> - Analisar a mudança em vários contextos.

Segundo Santos (2005), é indispensável que o professor trabalhe os conceitos algébricos, visando a uma melhor compreensão dos mesmos pelos alunos. Sobre tal compreensão, Modanez (2003) afirma que é necessário o saber aritmético como requisito, uma vez que a Álgebra não está isolada da Aritmética. Desse modo, as relações e os procedimentos aritméticos precisam ser devidamente assimilados no contexto aritmético para que não sejam obstáculos quando utilizados no contexto algébrico.

Sobre o ensino de Álgebra, Usiskin (1995), citado como autor de base do PCN, aborda duas questões básicas. A primeira refere-se ao quanto se deve exigir da capacidade dos alunos ao manipular diversas técnicas algébricas. A segunda, ao currículo de Álgebra, bem como às suas finalidades e ao momento de iniciar seu estudo. Tais finalidades se relacionam com suas diferentes concepções, que são: (i) Álgebra como aritmética generalizada; (ii) Álgebra como estudo de procedimentos

[1] National Council of Teachers of Mathematics (Conselho Nacional de Professores de Matemática).

para resolver certos tipos de problemas; (iii) Álgebra como estudo de relações entre grandezas e (iv) Álgebra como estudo das estruturas.

Na primeira concepção, as variáveis são tratadas como generalizadoras de modelos. Na segunda, as variáveis são incógnitas ou constantes, que têm como objetivo simplificar ou resolver problemas. Na terceira, as variáveis podem assumir diferentes valores numéricos e, na quarta, o aluno se dedica a manipular e a justificar as variáveis (USISKIN, 1995).

Neste trabalho, a concepção utilizada é a Álgebra como aritmética generalizada (Concepção 1), já que se espera que os alunos generalizem os problemas propostos para o estudo da Progressão Aritmética.

No Ensino Básico, a Álgebra é tratada, segundo Ponte (2006b), como regras de transformação de expressões e processos de resolução de equação, gerando uma visão reduzida da mesma. Segundo o autor, essa visão de maneira redutora desvaloriza importantes aspectos dessa área da Matemática, no que diz respeito à resolução de problemas, a relações, a estruturas algébricas, aos estudos das funções ou das variáveis em geral.

Segundo Araújo (2008), o pensar algébrico ainda não faz parte de muitos processos de aprendizagem nas escolas. Assim, a Álgebra perde seu valor como instrumento para o desenvolvimento de raciocínio abrangente e dinâmico. A autora afirma que "o pensamento algébrico está presente não apenas quando se trabalha na álgebra formal, mas em diversos campos do conhecimento manifestados por diversas linguagens, como a aritmética, a geométrica ou mesmo a natural" (ARAÚJO, 2008, p. 8).

Kaput (1998/1999 apud PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 9), afirma que:

> o pensamento algébrico é algo que se manifesta quando, através de conjecturas e argumentos, se estabelecem generalizações sobre dados e relações matemáticas, expressas através de linguagens cada vez mais formais. Este processo de generalização pode ocorrer com base na Aritmética, na Geometria, em situações de modelação matemática e, em última instância, em qualquer conceito matemático leccionado [sic] desde os primeiros anos de escolaridade.

Ponte, Branco e Matos (2009) apresentaram três vertentes fundamentais do pensamento algébrico: representar, raciocinar e resolver problemas. No Quadro 1, são apresentadas as características de cada uma delas.

Quadro 1 − Vertentes Fundamentais do Pensamento Algébrico

Representar	Ler, compreender, escrever e operar com símbolos usando as convenções algébricas usuais.
	Traduzir informação representada simbolicamente para outras formas de representação (por objectos [sic], verbal, numérica, tabelas, gráficos) e vice-versa.
	Evidenciar sentido de símbolo, nomeadamente interpretando os diferentes sentidos no mesmo símbolo em diferentes contextos.
Raciocinar	Relacionar (em particular, analisar propriedades).
	Generalizar e agir sobre essas generalizações revelando compreensão das regras.
	Deduzir.
Resolver problemas e modelar situações	Usar expressões algébricas, equações, inequações, sistemas (de equações e de inequações), funções e gráficos na interpretação e na resolução de problemas matemáticos e outros domínios (modelação).

Fonte: PONTE, BRANCO, MATOS, 2009, p. 11.

Sobre o pensamento algébrico, Ponte (2006b, p. 7- 8) afirma que esse:

> [...] inclui a capacidade de lidar com o cálculo algébrico e as funções. No entanto, inclui igualmente a capacidade de lidar com muitas outras estruturas matemáticas e usá-las na interpretação e resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios. A capacidade de manipulação de símbolos é um dos elementos do pensamento algébrico, mas também o é o 'sentido do símbolo' (*symbol sense*), como diz Arcavi (1994), ou seja, a capacidade de interpretar e de usar de forma criativa os símbolos matemáticos, na descrição de situações na resolução de problemas [...].

Percebe-se, então, uma possibilidade de relacionar Álgebra e padrões em um estudo. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), "o estudo da Álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização" (BRASIL, 1998, p. 115).

Quando a Álgebra é abordada por meio dos padrões, os alunos têm uma maior motivação para estudá-la, visto que apelam fortemente para o sentido estético e a criatividade, contribuindo para modificar a visão negativa da Matemática (BORRALHO et al., 2007).

Herbert e Brown (2000) também afirmam que o estudo da Álgebra dá aos estudantes as oportunidades e os suportes para desenvolverem habilidades de procurar padrões e a capacidade de generalizá-los a partir de situações concretas. Isso permite aos alunos compreenderem a ligação entre a Matemática e o mundo em que se vive, ou seja, os alunos aprendem uma Matemática significativa, podendo haver um envolvimento dos mesmos nesse processo, caso lhes seja oferecido um ambiente de aprendizagem que tenha algo a ver com a sua realidade e experiências (BORRALHO et al., 2007). Nesse aspecto, os autores afirmam que o estudo de padrões apoia "[...] a aprendizagem dos estudantes para descobrirem relações, encontrarem conexões, fazerem generalizações e também previsões" (BORRALHO et al., 2007, p. 5).

A generalização, segundo Vale e Pimentel (2005), resulta da identificação de padrões e de relações e da análise das mesmas. Também veem nos padrões o fundamento do pensamento algébrico. No entanto, Araújo (2008) destaca que, muitas vezes, no ensino da Álgebra em sala de aula, o professor não propõe atividades que envolvam o reconhecimento de regularidades de um fenômeno, procurem padrões em sequências e trabalhem com generalizações, as quais podem auxiliar o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Dias (2009) afirma que desenvolver os pensamentos algébrico, aritmético e geométrico é de grande importância na construção do pensamento matemático do aluno, uma vez que o capacita a realizar generalizações e abstração, assimilar o significado das operações e desenvolver as capacidades de representação do espaço e da abstração.

No que se refere ao pensamento geométrico, Nunes (2010, p. 4) afirma que "deve-se reconhecer, em sala de aula, com os alunos, a importância do pensamento geométrico ao trabalhar as diferentes áreas da Matemática levando-os à construção de novos conceitos".

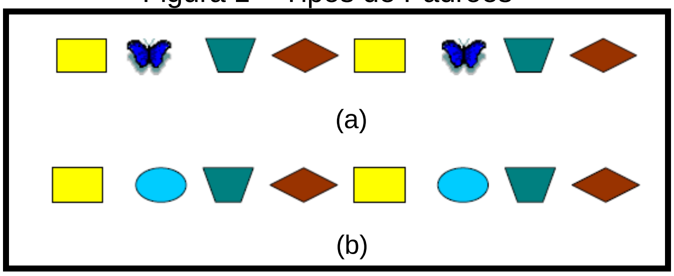
Quanto ao pensamento algébrico, vale ressaltar que durante o processo de desenvolvimento desse, percebe-se que os alunos "passam por fases", cada qual com suas características. Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2004) dividem essas fases em três: a pré-algébrica, a de transição do aritmético para o algébrico e a de pensamento algébrico mais avançado.

A primeira fase, segundo os autores, acontece quando o aluno consegue utilizar elementos algébricos (a letra, por exemplo), sem que o percebam como uma incógnita ou variável. Na segunda, o mesmo percebe a existência de um número qualquer e utiliza alguns processos de generalização, ainda que não estabeleça a representação simbólica adequada. E a terceira, é compreendida no momento em que apresenta a habilidade de pensar genericamente, sendo capaz de expressar e operar variáveis.

Na tentativa de auxiliar os alunos a avançarem nesse processo de desenvolvimento do raciocínio algébrico, as tarefas baseadas em padrões são importantes. Vale e Pimentel (2005) destacam que essas são necessárias para estabelecer conexões entre padrões e Álgebra. As autoras argumentam que a busca por padrões é parte importante na hora de resolver problemas investigativos e afirmam que essas atividades ajudam a resolver tarefas mais complexas futuramente. Herbert e Brown (2000) corroboram com essa ideia, afirmando que, se os alunos aprenderem a trabalhar com padrões desde os primeiros anos do Ensino Fundamental, no futuro, quando forem apresentados a problemas semelhantes aos propostos anteriormente, terão estratégias para abordá-los.

No âmbito matemático, são identificados diferentes tipos de padrões, segundo Zazkis e Liljedahl (2002), a saber: numéricos, geométricos, em procedimentos computacionais, lineares e quadráticos e repetitivos. Já Perez (2006) faz distinção entre padrões puramente figurativos, puramente numéricos e padrões compostos, que são denominados figurativo-numéricos (Figura 1-a). Dentre esses últimos, há aqueles que são denominados geométrico-numéricos (Figura 1-b).

Figura 1 – Tipos de Padrões

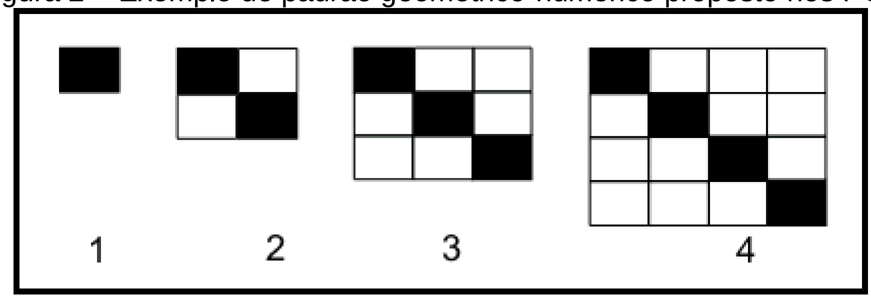


Fonte: PEREZ, 2006, p. 22.

Neste trabalho, serão adotados os Padrões Figurativo-Numéricos que, segundo Perez (2006, p. 22) estão “[...] ligados à idéia [sic] de algum tipo de regularidade, por repetição ou recursivo, na qual se possa identificar uma lei, uma expressão matemática, que permita continuar a sequência e assim chegar à generalização requerida”.

Os PCN (1998) sugerem que sejam propostas situações didáticas em que os alunos possam investigar padrões, em sucessões numéricas bem como em representações geométricas, a fim de identificar suas estruturas e construir a linguagem algébrica para descrevê-los simbolicamente. E o seguinte exemplo, envolvendo um padrão geométrico-numérico, é proposto (Figura 2). E sugerem como atividade, solicitar aos alunos que identifiquem a expressão que determina o número de quadradinhos brancos da enésima figura.

Figura 2 − Exemplo de padrão geométrico-numérico proposto nos PCN



Fonte: BRASIL, 1998, p. 117.

Um dos objetivos em relação ao ensino de Matemática, segundo os PCN (1998, p. 81), é "observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis". E, em atividades envolvendo Padrões Figurativo-Numéricos, para que se estabeleçam essas leis, é preciso que os alunos realizem um processo investigativo do padrão.

Segundo Herbert e Brown (2000), existem três fases do processo investigativo do padrão, a saber: (i) procura, que envolve conseguir extrair informações relevantes; (ii) reconhecimento, fazendo uma análise matemática por meio de métodos apropriados; e (iii) generalização, interpretando e aplicando o que foi aprendido.

Na proposta desenvolvida por Herbert e Brown, as autoras afirmam que há uma motivação, por parte dos alunos, para determinar uma generalização quando problemas começam a envolver números grandes, pois esses percebem que não há necessidade de trabalhá-los do mesmo modo que nos casos mais simples.

Borralho et. al. (2007) advertem, no entanto, sobre a necessidade de reconhecer até que ponto os alunos são capazes de compreender e generalizar os padrões que lhes são propostos e como executam esse tipo de tarefa. Para confirmar essa necessidade, argumentam que, segundo estudos: (i) para os alunos, encontrar termos numa sequência passa a ser cada vez mais difícil à medida que se distanciam dos termos que lhes foram dados inicialmente; (ii) muitos alunos são capazes de trabalhar com o padrão e continuá-lo, mas têm dificuldade para explicá-lo; e (iii) com frequência um número maior de alunos consegue explicá-lo oralmente, mas apresentam dificuldade de fazer o registro escrito.

Os padrões podem ser ferramentas utilizadas pelos professores de modo a proporcionar nos alunos a compreensão de vários tópicos matemáticos (BARBOSA et al., 2007). Nesse trabalho monográfico, o tópico da Álgebra que será abordado é a Progressão Aritmética. Apesar de serem assuntos aparentemente diferentes, os Padrões Figurativo-Numéricos e as progressões podem ser relacionados, uma vez que, segundo Moura (2010), as progressões permitem conexões e devem ser estudadas assim, interligadas a diversos conceitos matemáticos. Percebendo a existência de uma regularidade nas PA, é possível seu estudo por meio de outros conhecimentos matemáticos, como padrões. Segundo Moura (2010, p. 2):

> toda seqüência [sic] tem que obedecer uma 'lei de formação', ou uma regra que permita dizer, para todo n $\in \mathbb{N}$, qual é o seu n-ésimo termo, o que pode ser obtido por meio de observação de padrões, associações de idéia [sic] e generalizações. Da mesma forma as fórmulas de soma de PA e de PG, podem ser obtidas de maneira quase que intuitivas e a seguir observadas, generalizadas até chegar à abstração.

Perez (2006) verificou, em sua pesquisa, que um grupo de alunos do Ensino Médio conseguiu generalizar padrões por meio de métodos diferentes, construindo mecanismos de generalização para vários tipos de sequências. Porém, a autora pôde perceber que, mesmo tendo desenvolvido o pensamento algébrico, os alunos tiveram dificuldades em simbolizar a regra geral de uma sequência.

Devido a essa dificuldade, percebe-se "a necessidade de construir junto aos alunos a fórmula do termo geral de uma progressão aritmética, atendo-se à sua importância e essencialidade a um contexto de discussão" (GONÇALVES; SANTOS; SILVA, 2013, p. 2).

Gonçalves, Santos e Silva (2013, p. 3), com seus estudos, concluem que "o ensino diferenciado de PA, baseado na construção do conhecimento de forma dinâmica, propicia a comunicação entre o saber e o agente do saber, o aluno".

Nessa pesquisa, será feito um estudo relacionando a PA com os Padrões Figurativo-Numéricos, fazendo com que o aluno deduza as fórmulas necessárias ao estudo desse tópico de maneira atrativa.

1.2. Estudos Relacionados

Nessa seção, serão destacados três trabalhos relacionados ao tema desta pesquisa.

Herbert e Brown (2000), em seu artigo *Patterns as Tools for Algebraic Reasoning*, relatam o trabalho de um professor com seus alunos do sexto ano para testar as lições da unidade Padrões em Números e Formas, que foi desenvolvida como parte do currículo de matemática, financiado pela Fundação Nacional de Ciência: Vendo e Pensando Matematicamente.

Nas lições pretendidas pelos autores, os estudantes encontravam um problema apresentado em um contexto e, em pequenos grupos, trabalhavam na história, engajavam-se em um processo investigativo para resolver tal questão, no qual: procuravam o padrão na história proposta, reconheciam esse padrão e o descreviam usando diferentes métodos e, por fim, generalizavam, relacionando-o com a história.

Os estudos propostos por Herbert e Brown, com foco algébrico no currículo, tinham como propósito prover uma nova imagem de como os alunos podem desenvolver habilidades de pensamento algébrico. Uma visão ampla do pensamento algébrico é tomada para mostrar o uso da Álgebra na vida real e sua relevância (HERBERT, BROWN, 2000).

Em vez de "empurrar" uma Álgebra simbólica formal, enfatiza-se o pensamento algébrico, conduzindo os alunos a comunicar seus pensamentos com suas próprias palavras ou seus próprios símbolos. Essa abordagem também tem a intenção de aumentar a confiança dos alunos neles mesmos, sentindo-se capacitados no estudo de Álgebra (HERBERT, BROWN, 2000).

Segundo as autoras, as lições da unidade proporcionam aos alunos múltiplas oportunidades de aprender o processo investigativo de procura, de reconhecimento e de generalização de padrões. E, ao se engajarem no processo, se tornam capazes e internalizar a abordagem de resolução de situações que envolvem padrões (HERBERT, BROWN, 2000).

As autoras também consideram que a unidade tem um efeito positivo na percepção dos estudantes quanto às suas capacidades de generalizar uma regra a partir de uma situação concreta, que consideram sendo o pensamento algébrico. E afirmam que, como os alunos seguem o processo, são capazes de encontrar um padrão no problema proposto e expressá-lo como uma regra geral.

Os pesquisadores optaram por utilizar, neste trabalho monográfico, a mesma metodologia sobre o processo investigativo no estudo de padrões, adotada por Herbert e Brown (2000). Porém as autoras não abordam um tópico específico do conteúdo matemático.

Outro trabalho foi o de Modanez (2003) que, em sua tese de Mestrado intitulada *Das Sequências de Padrões Geométricos à Introdução ao Pensamento Algébrico*, procura responder a seguinte questão de pesquisa: Uma sequência de ensino por meio de padrões geométricos pode proporcionar ao aluno a introdução ao pensamento algébrico? E teve por objetivo a construção do pensamento algébrico por meio da utilização de sequências de padrões geométricos. Para tal, foi elaborada uma sequência didática com oito atividades que apresentam uma sequência geométrica e, ao final de cada uma, solicitada, como tarefa, a generalização, descrita ou algébrica, da mesma. Essas atividades foram aplicadas a alunos da 6ª. série do Ensino Fundamental de uma escola municipal da grande São Paulo.

A autora percebeu, ao fim de sua análise, um número alto no percentual de acertos, notando ainda a variedade de estratégias no momento da resolução. Sendo assim, considerou avanços significativos no conhecimento dos alunos no que se refere ao desenvolvimento do pensamento algébrico, assim como um aumento da autonomia frente a observações, levantamento de hipóteses, justificativa das respostas e conjecturas de conclusões (MODANEZ, 2003).

Tanto na pesquisa de Modanez (2003) quanto neste trabalho monográfico, busca-se chegar à generalização dos padrões propostos em atividades. No entanto, na presente pesquisa objetiva a generalização de conceitos de PA.

E o último trabalho é o de Perez (2006), que desenvolveu uma pesquisa no mestrado intitulada *Alunos do Ensino Médio e a Generalização de Padrão*, na qual foi feita uma investigação com alunos do Ensino Médio em que resolvem situações problemas que envolvem generalização de padrões. Para isso, a pesquisadora elaborou cinco atividades, que foram aplicadas a dez alunos das três séries do Ensino Médio. A aplicação foi dividida em duas sessões, de aproximadamente uma hora cada uma.

As atividades propostas pela pesquisadora baseavam-se em Padrões Figurativo-Numéricos. Nestas, os alunos apresentaram diferentes estratégias de generalização de padrões. A autora percebeu, após sua pesquisa, que essa observação e a generalização auxiliaram na construção de fórmulas que antes eram fornecidas prontas para os alunos.

Perez afirma que os alunos, ao final da experimentação, perceberam oportunidades de desenvolver o conhecimento sobre novos conceitos e também construíram uma imagem mais positiva da Matemática (PEREZ, 2006). A autora concluiu ainda que essas experiências possibilitaram aos alunos o poder e a utilidade da Matemática para desenvolver conhecimento sobre novos conceitos, além de vivenciar a possibilidade de relacionar diversos conhecimentos matemáticos entre si e, muitas vezes, num sentido mais amplo, interdisciplinar. Também tiveram a chance de compreender, de modo mais apropriado, o sentido da Álgebra (PEREZ, 2006).

Perez considerou, no fim de sua análise, que o objetivo de sua pesquisa havia sido atingido, já que os alunos que participaram tinham resolvido as questões de generalização de padrões utilizando diversas estratégias. A pesquisadora analisou ainda que haviam avançado em seus conhecimentos quanto ao pensamento algébrico, além de ganharem maior autonomia para observar, tirar conclusões e justificá-las e levantar hipóteses (PEREZ, 2006).

O trabalho desenvolvido por Perez (2006) se relaciona com este quando busca desenvolver o pensamento algébrico por meio de Padrões Figurativo-Numéricos.

2 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, será apresentada a metodologia que norteou este trabalho monográfico e a elaboração das atividades.

Esta pesquisa é de caráter qualitativo por meio da qual se realizou um estudo de caso com alunos da 1ª. série do Ensino Médio de uma escola pública de Campos dos Goytacazes.

2.1. Pesquisa Qualitativa

O trabalho monográfico tem por questão de pesquisa "**Como o uso de Padrões Figurativo-Numéricos auxilia no estudo da Progressão Aritmética?**". Para a realização e elaboração da pesquisa, optou-se pelo método qualitativo.

Segundo Neves (1996, p. 1),

> [...] a pesquisa qualitativa costuma ser direcionada, ao longo do seu desenvolvimento; além disso, não busca enumerar ou medir eventos e, geralmente, não emprega instrumental estatístico para análise de dados; seu foco de interesse é amplo e parte de uma perspectiva diferenciada da adotada pelos métodos quantitativos. Dela faz parte a obtenção de dados descritivos mediante contato direto e interativo do pesquisador com a situação objeto de estudo. Nas pesquisas qualitativas, é frequente que o pesquisador procure entender os fenômenos, segundo a perspectiva dos participantes da situação estudada e, a partir, daí situe sua interpretação dos fenômenos estudados.

Para Chizzotti (2008, p. 104), o objetivo da pesquisa qualitativa é "provocar o esclarecimento de uma situação para uma tomada de consciência pelos próprios pesquisados dos seus problemas e das condições que os geram, a fim de elaborar os meios e estratégias para resolvê-los".

No âmbito de uma pesquisa qualitativa, podem-se encontrar variados métodos. Segundo Yin (2010), os cinco principais são: experimentos, levantamentos, análise de arquivos, pesquisas históricas e estudos de casos. Para esta pesquisa, foi escolhido o estudo de caso.

Esse método “permite que os investigadores retenham as características holísticas e significativas dos eventos da vida real” (Yin, 2010, p. 24) e, segundo Ponte (2006a, p. 2):

> […] é uma investigação que se assume como particularística, isto é, que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única ou especial, pelo menos em certos aspectos, procurando descobrir a que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global de um certo fenómeno [sic] de interesse.

As técnicas de coleta de dados utilizadas na pesquisa são os registros das respostas dos alunos e a observação participante. Além disso, serão feitas anotações descritivas e reflexivas.

As vantagens de se coletar dados por meio de observação participante, segundo Creswell (2010), é que o pesquisador tem uma experiência de primeira mão com o participante e pode registrar informações, caso ocorram. Moreira e Caleffe (2008) afirmam que, nessa técnica, é difícil acontecer a ocorrência de dados falhos devido ao fato de as pessoas tentarem mentir ou enganar o pesquisador, pois este está presente no local para testemunhar o que, de fato, acontece durante a observação.

Porém, esses autores afirmam que existem várias desvantagens. São elas: "[...] frequentemente consome muito tempo; o pesquisador pode apenas estudar grupos muito pequenos de pessoas; e tem que estar fisicamente presente para que a pesquisa prossiga" (MOREIRA; CALEFFE, 2008, p. 205). Creswell (2010) também relata algumas limitações no uso dessa técnica, tais como os pesquisadores serem vistos como invasores e observarem informações privadas que não podem relatar.

A respeito das anotações descritivas e reflexivas, Moreira e Caleffe (2008, p. 217) afirmam que:

> o professor/pesquisador que faz anotações está realizando um exercício importante, porque não está simplesmente registrando os comportamentos e as atitudes com a finalidade de produzir dados, mas também está executando as primeiras fases da análise dos dados. [...] Frequentemente, essas notas de campo são completadas por outros dados coletados pelo professor/pesquisador.

A análise dos dados será feita por meio do encaminhamento exposto por Creswell (2010), que se dá em seis passos, a saber: (i) organizar e preparar os dados; (ii) ler todos os dados; (iii) codificar os dados para uma análise detalhada; (iv) gerar uma descrição do local ou das pessoas e também das categorias ou temas para análise; (v) informar como a descrição e os temas são representados na narrativa qualitativa; (vi) realizar uma interpretação ou extrair um significado dos dados. Bem como serão analisados os caminhos percorridos pelos alunos no processo investigativo dos padrões. Buscar-se-á identificar em qual das três fases propostas por Herbert e Brown (2000) os alunos estarão durante a exploração dos padrões, a saber: procura do padrão, reconhecimento do padrão e generalização. Para esses autores, procurar o padrão é extrair informação, reconhecimento é análise matemática e generalização é interpretar e aplicar o que foi aprendido.

Tendo em vista que o objetivo do trabalho é utilizar Padrões Figurativo-Numéricos como um recurso à conjectura de conceitos acerca da PA, os pesquisadores fizeram uma busca por padrões que pudessem ser úteis. Após essa seleção, elaboraram-se as atividades, que serão descritas na próxima seção.

2.2. Elaboração das Atividades

Para este trabalho foram elaboradas três Atividades com o objetivo de iniciar o estudo de Progressões Aritméticas por meio de Padrões Figurativo-Numéricos. A Atividade 1 (APÊNDICE A) é composta por duas questões, a Atividade 2 (APÊNDICE B) por três e a Atividade 3 (APÊNDICE C) por duas. A seguir, serão descritas as Atividades bem como os objetivos de cada uma das questões que as compõem.

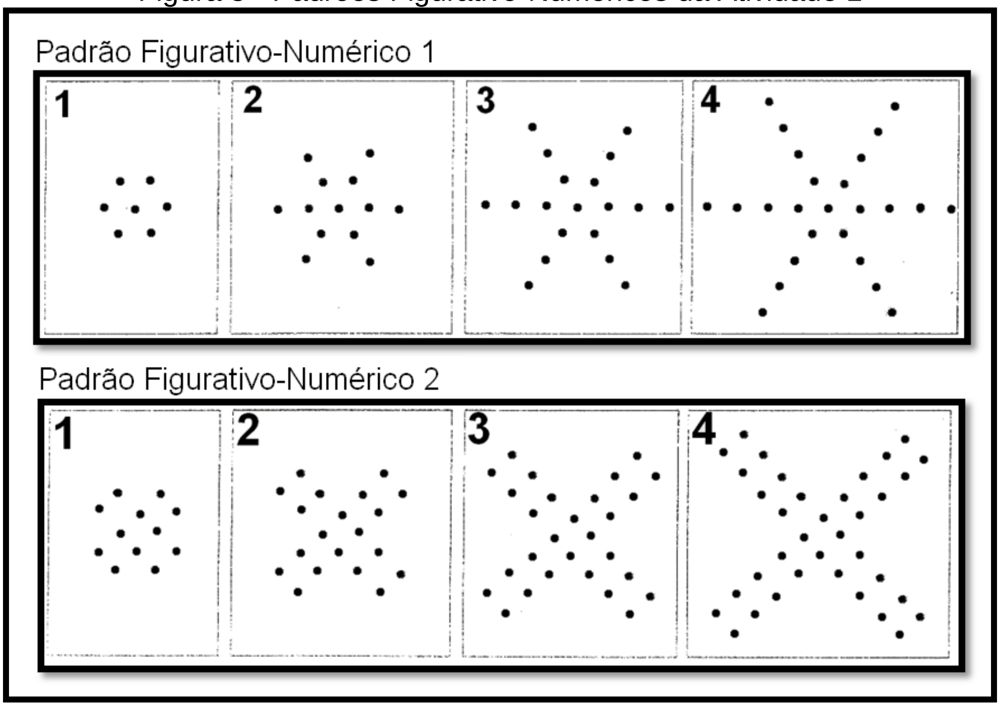
2.2.1. Atividade 1

As duas questões dessa Atividade têm por objetivo fazer com que os alunos se familiarizem a trabalhar com padrões de figuras.

Para a escolha dos padrões, foram feitas pesquisas bibliográficas nas quais não se obteve muito sucesso, pois se procuravam padrões de figuras relacionados com PA. Na literatura pesquisada, encontrou-se o texto “Seguindo um padrão”, do livro "Álgebra" (JAKUBOVIC; IMENES; LELLIS, 1992)[2], que aborda a generalização de figuras formadas por sequência de pontos. Dentre os padrões apresentados no texto, os pesquisadores optaram por utilizar dois para serem explorados nessa Atividade, visto que representavam sequências características da Progressão Aritmética. E, para as outras, construíram-se padrões que fossem adequados às atividades.

Cada questão apresenta um Padrão Figurativo-Numérico (Figura 3) e exercícios referentes a cada um deles.

Figura 3 - Padrões Figurativo-Numéricos da Atividade 1



Fonte: JAKUBOVIC; IMENES; LELLIS, 1992.

Em relação a essa Atividade, espera-se que o aluno compreenda o padrão das figuras apresentadas e encontre a expressão algébrica que o representa. Para facilitar esse desenvolvimento, é apresentada uma tabela na qual vão relacionar o número da figura ao de pontos da mesma.

A seguir, os alunos devem responder a dois itens (Figura 4), utilizando a generalização determinada anteriormente.

2 JAKUBOVIC, J.; IMENES, L. M.; LELLIS, M. C. T. **Álgebra**. 6. ed. São Paulo: Atual, 1992.(Pra que serve Matemática?)

Figura 4 - Itens da questão 1 da Atividade 1

De acordo com o padrão acima e com a expressão encontrada para a figura n, responda:
a. Quantos pontos terá a figura 35?
b. Sabendo que uma figura tem 439 pontos, qual o número dessa figura?

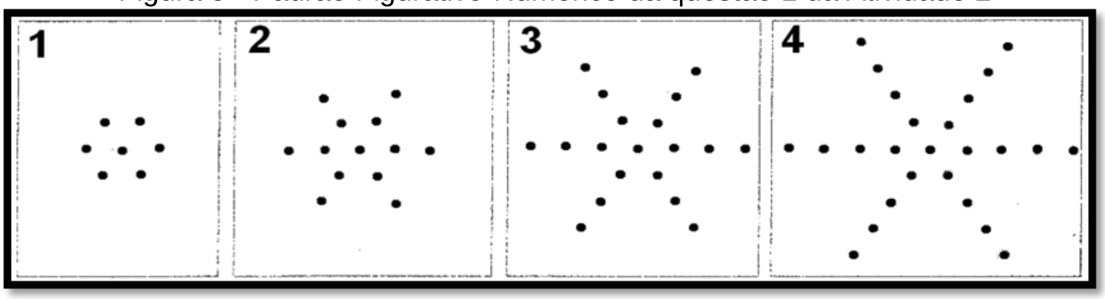
Fonte: Elaboração própria.

Essa condução é feita da mesma forma na segunda questão, reiterando o objetivo da Atividade 1.

2.2.2. Atividade 2

A segunda atividade é composta por três questões e uma folha intitulada "Progressão Aritmética". Em cada uma das questões, os alunos devem explorar o padrão apresentado. A primeira tem por objetivo fazer com que os alunos deduzam a fórmula do termo geral da PA. Nessa questão, é apresentada uma sequência de pontos (Figura 5), a mesma utilizada na questão 1 da Atividade 1. Optou-se por repetir o padrão para mostrar que a sequência formava uma Progressão Aritmética. O padrão é seguido de sete itens relacionados a este.

Figura 5 - Padrão Figurativo-Numérico da questão 1 da Atividade 2



Fonte: JAKUBOVIC; IMENES; LELLIS, 1992.

Os itens **a** e **b** da Questão 1 (Figura 6) têm por objetivos registrar a sequência formada pelo número de pontos e verificar se os alunos haviam compreendido e identificado o padrão.

Figura 6 - Itens **a** e **b** da questão 1 da Atividade 2

Considerando o padrão existente nessa sequência de pontos, faça o que se pede: a. Registre a sequência formada pelo número de pontos. b. Determine o 5º. e o 6º. termos (a_5 e a_6) dessa sequência.

Fonte: Elaboração própria.

Os itens **c** e **d** (Figura 7) têm por objetivos fazer com que os alunos identifiquem a constância nas subtrações entre dois termos consecutivos e, assim, definam razão.

Figura 7 - Itens **c** e **d** da questão 1 da Atividade 2

c. A partir da sequência obtida no item a, calcule o valor das subtrações: (i) $a_2 - a_1 =$ (ii) $a_3 - a_2 =$ (iii) $a_4 - a_3 =$ (iv) $a_5 - a_4 =$ (v) $a_6 - a_5 =$ d. Analisando os resultados obtidos no item anterior, que resultado você espera encontrar para a subtração: $a_n - a_{n-1}$?

Fonte: Elaboração própria.

Após esses itens, é proposto que os alunos escrevam a conclusão a que chegaram sobre a diferença entre dois termos consecutivos da sequência apresentada, definindo assim a razão (Figura 8).

Figura 8 - Quadro para definição de razão

Observando os resultados dos itens c e d, podemos concluir que: ____ ____

Fonte: Elaboração própria.

O objetivo dos itens **e** e **f** (Figura 9) é que os alunos utilizem a definição de razão para responder o que é proposto.

Figura 9 - Itens **e** e **f** da questão 1 da Atividade 2

e. Utilizando o valor de a_6, determine o valor de a_7.
f. Utilizando o valor de a_3, determine o valor de a_7.

Fonte: Elaboração própria.

No item **g** (Figura 10), o objetivo é que os alunos possam determinar a fórmula do termo geral do Padrão Figurativo-Numérico presente nessa questão.

Figura 10 - Item **g** da questão 1 da Atividade 2

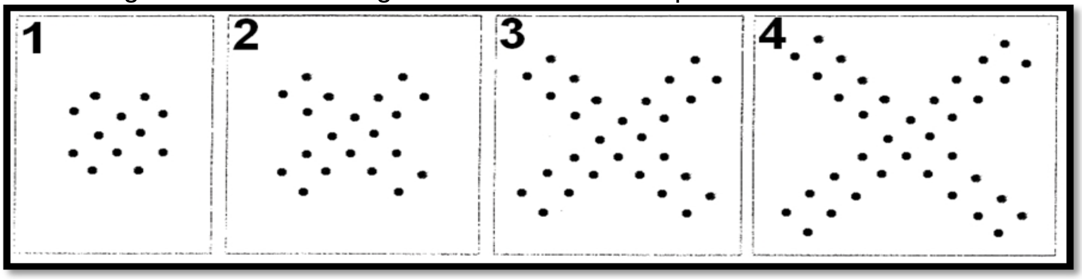
g. Expresse o enésimo termo dessa sequência em função do 1º termo e da razão.

Fonte: Elaboração própria.

Depois da questão 1, será discutida a folha intitulada "Progressão Aritmética". Nesta, será conjecturada junto aos alunos a definição de PA. A seguir, serão apresentados exemplos de PA crescente, decrescente e constante, com ênfase no primeiro termo, a razão e o termo geral de cada exemplo. Após, será debatido o tópico intitulado "Propriedades da PA", para explicar aos alunos as relações entre os termos equidistantes e o termo geral, além de um espaço para que estes registrem as fórmulas conjecturadas na experimentação.

A Questão 2 tem por objetivo verificar se os alunos compreenderam a definição de PA, estabelecida anteriormente. Nessa questão, é apresentada uma sequência de pontos (Figura 11), a mesma utilizada na Questão 2 da Atividade 1. Optou-se por repetir o padrão para mostrar que a sequência discutida anteriormente formava uma Progressão Aritmética. O padrão é seguido de seis itens relacionados ao mesmo.

Figura 11 - Padrão Figurativo-Numérico da questão 2 da Atividade 2



Fonte: JAKUBOVIC, IMENES, LELLIS, 1992

O objetivo do item **a** (Figura 12) é registrar a sequência formada pelo número de pontos.

Figura 12 - Item **a** da questão 2 da Atividade 2

a. Escreva a sequência formada pelo número de pontos.

Fonte: Elaboração própria.

Os itens **b** e **c** (Figura 13) têm por objetivo verificar se os alunos reconhecem uma Progressão Aritmética, verificando se os elementos de sua definição estão presentes na sequência.

Figura 13 - Itens **b** e **c** da 1 questão 2 da Atividade 2

b. A sequência obtida no item anterior representa uma PA? Justifique. c. Determine a razão dessa sequência.

Fonte: Elaboração própria.

Os itens **d** e **e** (Figura 14) têm por objetivos determinar os termos solicitados a partir da definição de uma PA e levar o aluno a identificar um termo qualquer, conhecidos um termo e a razão dessa sequência.

Figura 14 - Itens **d** e **e** da questão 2 da Atividade 2

d. Expresse o 9º termo em função do 4º termo e da razão. e. Expresse o enésimo termo dessa sequência em função do 4º termo e da razão.

Fonte: Elaboração própria.

O objetivo do item **f** (Figura 15) é fazer com que os alunos expressem a fórmula do termo geral dessa sequência.

Figura 15 - Item **f** da questão 2 da Atividade 2

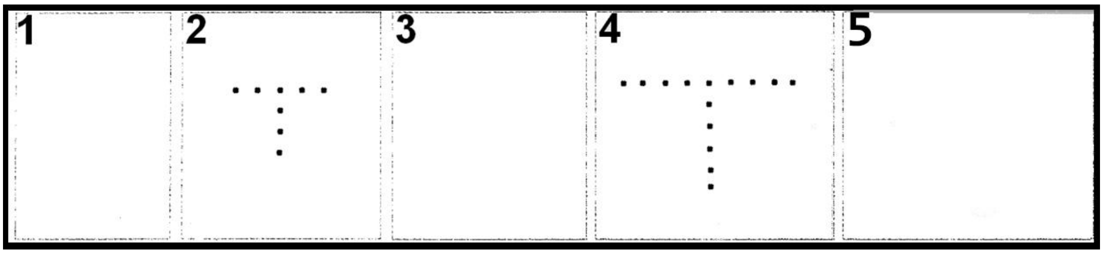
f. Expresse a fórmula do termo geral dessa sequência.

Fonte: Elaboração própria.

Na Questão 3 (Figura 16), os objetivos são verificar se os alunos reconhecem o padrão de formação de uma sequência de figuras incompletas, sabendo que o número de pontos utilizados, em cada uma delas, forma uma PA, e se são capazes de determinar um termo qualquer da mesma em função de outro termo e da razão.

Figura 16 - Questão 3 da Atividade 2

3. Complete a sequência de figuras abaixo, sabendo que o número de pontos utilizados forma uma PA.



Determine:

a. o 6º termo da PA.

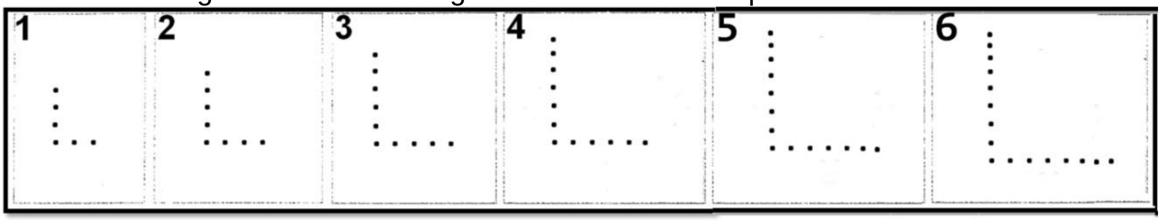
b. o enésimo termo da PA em função do 10º termo e da razão.

Fonte: Elaboração própria.

2.2.3. Atividade 3

Essa atividade é composta por duas questões e em cada uma delas, os alunos devem explorar o padrão apresentado. A primeira, cujo objetivo é fazer com que os alunos deduzam a fórmula da soma dos *n* primeiros termos de uma PA, possui uma sequência de pontos (Figura 17) seguida de dez itens relacionados ao padrão.

Figura 17 - Padrão Figurativo-Numérico da questão 1 da Atividade 3



Fonte: Elaboração própria.

Os itens **a** e **b** (Figura 18) têm por objetivo fazer com que os alunos observem que a soma dos termos equidistantes é constante e a relacionem a soma dos quatro primeiros termos.

Figura 18 - Itens **a** e **b** da questão 1 da Atividade 3

a. Calcule as seguintes somas:

(i) $a_1 + a_4 =$ (ii) $a_2 + a_3 =$

b. Analisando os resultados do item anterior, qual é o valor da soma dos 4 primeiros termos dessa PA, ou seja, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$?

Fonte: Elaboração própria.

O objetivo dos itens **c** e **d** (Figura 19) é fazer com que os alunos observem que a soma dos equidistantes é constante, independentemente do número de termos, e a relacionem com a soma dos seis primeiros termos.

Figura 19 - Itens **c** e **d** da questão 1 da Atividade 3

c. Calcule as somas:

(i) $a_1 + a_6 =$ (ii) $a_2 + a_5 =$ (iii) $a_3 + a_4 =$

d. Considerando os resultados do item anterior, qual é o valor da soma dos 6 primeiros termos dessa PA?

Fonte: Elaboração própria.

Os itens **e**, **f** e **g** (Figura 20) têm por objetivo verificar se os alunos perceberam que a soma dos equidistantes se manterá constante, independente do número de termos da PA proposta.

Figura 20 - Itens **e**, **f** e **g** da questão 1 da Atividade 3

e. Qual é o 9º termo dessa PA?
f. Calcule $a_1 + a_9$.
g. Analisando os itens anteriores, que resultado você espera encontrar para as somas
(i) $a_2 + a_8 =$ (ii) $a_3 + a_7 =$ (iii) $a_4 + a_6 =$

Fonte: Elaboração própria.

O objetivo do item **h** (Figura 21) é fazer que os alunos calculem a soma de uma quantidade ímpar de termos e percebam que se manterá a relação dos termos equidistantes e do termo central com os equidistantes.

Figura 21 - Item **h** da questão 1 da Atividade 3

h. Qual é a soma dos 9 primeiros termos dessa PA?

Fonte: Elaboração própria.

No item **i** (Figura 22), é proposto um número maior de termos, com o objetivo de fazer com que os alunos cheguem à generalização.

Figura 22 - Item **i** da questão 1 da Atividade 3

i. Qual é a soma dos 36 primeiros termos dessa PA?

Fonte: Elaboração própria.

No item **j** (Figura 23) o objetivo é que os alunos encontrem a fórmula para a soma dos *n* primeiros termos de uma PA.

Figura 23 - Item **j** da questão 1 da Atividade 3

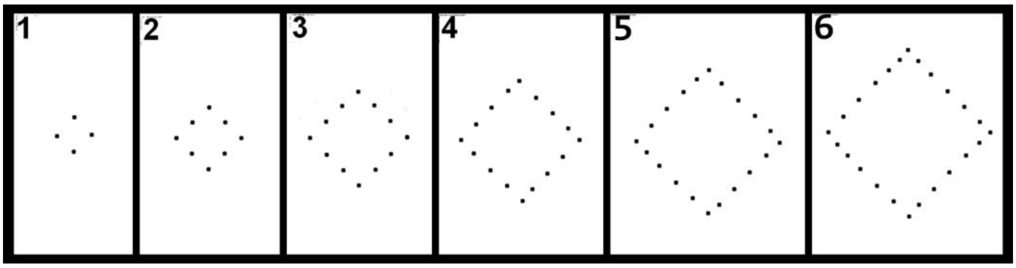
j. Qual será a soma dos n primeiros termos (S_n) dessa PA?

Fonte: Elaboração própria.

A segunda questão (Figura 24) tem por objetivo verificar se os alunos compreenderam as fórmulas deduzidas nas questões anteriores.

Figura 24 - Questão 2 da Atividade 3

2. Considere a PA formada pelo número de pontos da sequência de figuras abaixo.



a. Calcule a soma dos 5 primeiros termos.

b. Calcule a soma dos 23 primeiros termos.

c. Sabendo que a soma dos *n* primeiros termos dessa PA é 220, represente a enésima figura.

Fonte: Elaboração própria.

No próximo capítulo, serão descritos os relatos de experiência dessas Atividades na forma de teste exploratório e da experimentação, com suas devidas análises.

3 RELATO DE EXPERIÊNCIA

Neste capítulo, será descrita e analisada a experimentação das Atividades desenvolvidas neste trabalho monográfico.

3.1. Teste exploratório

O teste exploratório foi realizado com onze alunos do 1º e 5º períodos do curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição pública da cidade de Campos dos Goytacazes. Ocorreu em três encontros com duração total de 150 minutos, nos dias 11, 12 e 19 de setembro de 2013. A escolha dos alunos do 1º período se deve por terem estudado mais recentemente o conteúdo de Progressão Aritmética e poderiam assim melhor colaborar com a parte conceitual do trabalho. Os do 5º período foram convidados a participar, pois poderiam colaborar na parte estrutural das Atividades uma vez que foram adquirindo experiência no decorrer do curso e, assim, possuíam um olhar acadêmico, necessário para a pesquisa.

A realização desse teste teve por objetivos verificar: (i) a clareza dos enunciados das Atividades e dos exercícios da sequência didática e, assim, se necessário, fazer as modificações; (ii) se o grau de dificuldade dos mesmos estava de acordo com o público-alvo desta pesquisa e (iii) se o tempo previsto pelos pesquisadores seria suficiente.

Nessa seção, só serão abordados os itens das Atividades que, por algum motivo, necessitaram de alteração.

Na Atividade 2, os alunos deveriam explorar o padrão de cada questão e responder o que era solicitado, deduzindo, assim, a fórmula do termo geral de uma PA. Após o item **d** da Questão 1, deveriam escrever uma definição para razão e, para isso, foram deixadas umas linhas sem nenhum enunciado. Os alunos não entenderam para que serviam as linhas e sugeriram que fosse colocado um enunciado antes (Figura 25).

Figura 25 - Modificação do quadro de definição de razão na questão 1 da Atividade 2

Observando os resultados dos itens c e d, podemos concluir que:

Fonte: Elaboração própria.

No item **g**, houve dúvida quanto ao emprego da palavra função. Alguns entenderam que o 1º termo e a razão ficariam como incógnitas e, por isso, não substituíram os valores na equação. Logo, percebeu-se a necessidade de reescrita do enunciado, acrescentando o termo "em função dos valores" (Figura 26).

Figura 26 - Modificação do item **g** da questão 1 da Atividade 2

g. Expresse o enésimo termo dessa sequência em função dos valores do 1º termo e da razão.

Fonte: Elaboração própria.

Na questão 2, os pesquisadores perceberam que ocorreu a mesma dúvida nos itens **d** e **e**. Então, assim como ocorreu no item **g** da questão 1 dessa atividade, modificou-se o enunciado para que não gerasse uma interpretação ambígua, acrescentando o termo "em função dos valores" nesses itens.

Na terceira atividade, os alunos deveriam explorar o padrão de cada questão e responder o que era solicitado, buscando generalização para a fórmula da soma dos *n* primeiros termos de uma PA. Na questão 1, o item **i** tinha como objetivo determinar a soma dos 10 primeiros termos da PA. Sofreu modificações, porque os alunos resolveram a questão sem se preocupar com a generalização, já que o número de termos pedido era muito próximo ao que eles já haviam feito antes, e isso facilitava a resolução sem a necessidade de generalização. Segundo Herbert e Brown (2000), pedir aos alunos que resolvam um problema como um número grande, motiva-os a procurar um método geral para resolver a situação com base nos padrões vistos em casos mais simples em vez de trabalhar com um valor elevado. Desse modo, alterou-se o valor 10 para 36.

Foi acrescido o tópico "Fórmulas da PA", pois surgiu a necessidade de que houvesse um espaço para registrar as fórmulas deduzidas durante a aplicação, uma vez que os alunos registravam-nas em um espaço qualquer e, quando eram necessárias para a utilização, perdiam tempo para localizá-las novamente, ocasionando uma quebra no pensamento. Percebeu-se, também, que ao registrar as fórmulas que foram deduzidas durante as Atividades, estaria sendo feita a formalização dos conceitos. Decidiu-se que, na experimentação, esse tópico seria completado após as discussões realizadas em cada uma das Atividades.

3.2. Experimentação das Atividades

Foram realizadas duas experimentações. A primeira experimentação aconteceu em uma turma da primeira série do Ensino Médio, de um colégio particular na cidade de Campos dos Goytacazes. Foram três encontros, num total de cinco horas. Compareceram, em média, 36 alunos.

Os pesquisadores perceberam a necessidade de uma nova experimentação, devido à participação dos alunos. A maioria não estava fazendo as Atividades e preenchiam as folhas após o tempo disposto para que a turma realizasse as tarefas, o que impossibilitava a análise do registro das respostas dos alunos, comprometendo o resultado da pesquisa. Devido a esse fato, os pesquisadores resolveram que, na próxima experimentação, esse dado seria coletado por meio de uma folha de carbono e outra em branco.

A nova experimentação aconteceu em uma turma da primeira série do Ensino Médio, de uma escola pública na cidade de Campos dos Goytacazes. Ocorreram dois encontros, num total de cinco horas, nos dias 17 e 18 de dezembro de 2013. Compareceram ao primeiro encontro 36 alunos e, ao segundo, 32.

Foi explicado aos alunos que receberiam cada questão separadamente, uma folha de papel carbono e outra folha em branco para que os pesquisadores pudessem ter o registro das estratégias utilizadas na resolução das mesmas (Figura 27). Também foram avisados de que as Atividades deveriam ser feitas individualmente e que não era necessária a identificação.

Figura 27 - Aluno utilizando o papel carbono para resolver uma questão

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Em seguida, os alunos dispunham de tempo para solucionarem os problemas propostos sem interferência dos pesquisadores. Então, as folhas brancas eram recolhidas para, assim, iniciar as discussões de cada questão, preservando as respostas iniciais, que permaneciam com as folhas de questões das Atividades.

3.2.1 Encontro do dia 17 de dezembro de 2013

Primeiramente, os pesquisadores fizeram uma introdução sobre Sequências Numéricas. Apesar de não ter sido planejada no momento da elaboração da sequência didática, percebeu-se sua necessidade, uma vez que o conteúdo seria requisito para a realização da atividade que seria proposta e os alunos ainda não a haviam estudado. Desde o início da aula, era possível perceber a interatividade e a participação dos mesmos, que se mostravam interessados no que estava sendo explicado.

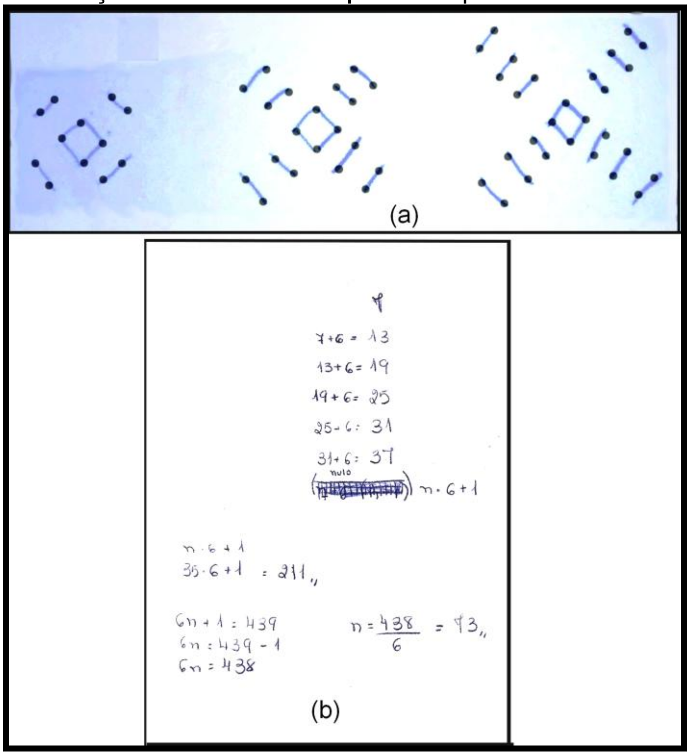
Feita a introdução, foi entregue a Questão 1 da Atividade 1. Na questão, era pedido que os alunos completassem uma tabela, relacionando o número das figuras ao número de pontos de cada uma delas. Os mesmos tiveram dúvida no momento da generalização, pois não sabiam como representar o número de pontos referente à enésima figura. Foi necessário que os pesquisadores interviessem para sanar tais dúvidas, instigando-os a pensar na álgebra existente por detrás dos números de pontos de cada figura que formava o padrão. Assim, foi pedido aos alunos que pensassem o que aconteceria se o número da figura fosse elevado, perguntando-os, por exemplo, "E se o número da figura for 10? E se for 20?". Porém, os mesmos se confundiram com os exemplos, pensando que a enésima figura era a de número 10 ou 20. Então, os pesquisadores tiveram que recorrer a outra abordagem, indagando-os a raciocinar quanto às relações entre os números de pontos e o número de cada figura, utilizando a tabela para esse encaminhamento. Assim, alguns alunos conseguiram determinar a generalização para a enésima figura. Sobre essa dúvida, Borralho et al (2007) afirmam, baseados em algumas pesquisas, que os alunos têm mais dificuldade de encontrar termos numa sequência à medida que esses ficam mais distantes.

Os itens **a** e **b** da Questão 1 não geraram questionamento por parte dos alunos.

Em seguida, foi entregue a Questão 2 da Atividade 1. Como as questões dessa atividade eram parecidas, os alunos não tiveram dúvidas.

Pôde-se observar, na Atividade 1, o modo como cada um visualizava os padrões. Na questão 1, 12 alunos resolveram a questão utilizando o pensamento geométrico e 24, o pensamento algébrico (Figura 28 - b), enquanto que, na questão 2, 10 alunos resolveram por meio do pensamento geométrico (Figura 28 - a) e 26, por meio do algébrico. Como isso, pode-se perceber que a maioria dos alunos resolveram as questões propostas por meio do pensamento algébrico.

Figura 28 - Resolução de dois alunos para as questões 1 e 2 da Atividade 1

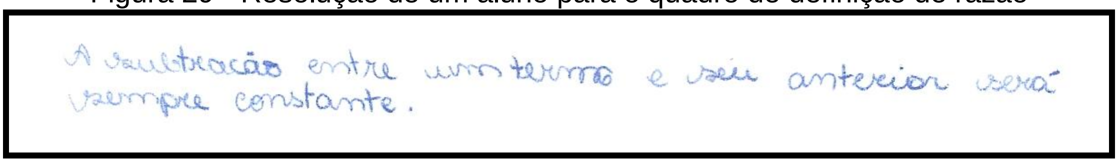


Fonte: Protocolo de pesquisa.

Pôde-se perceber, nas resoluções dos alunos que pensaram algebricamente, o avanço nas fases do pensamento algébrico concebidas por Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2004), saindo da fase pré-algébrica para a fase de transição do aritmético para o algébrico.

No momento seguinte, foi entregue a Questão 1 da Atividade 2. Percebeu-se que os alunos não tiveram dificuldades para resolver os itens **a**, **b**, **c** e **d**. Ao escreverem o conceito de razão (Figura 29), não houve necessidade de intervenção. Porém, ao fazer a discussão das respostas desse item, os pesquisadores identificaram falha na conceituação. Então reforçou-se que não eram quaisquer termos, mas a partir do segundo.

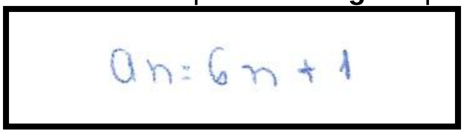
Figura 29 - Resolução de um aluno para o quadro de definição de razão



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Os alunos também não apresentaram dúvidas quanto aos itens **e** e **f**. Porém, no item **g**, alguns não expressaram a fórmula do termo geral da maneira como era solicitada no enunciado (Figura 30). Generalizaram de forma simplificada, do mesmo modo que haviam determinado na Questão 1 da Atividade 1, em vez de representá-la em função dos valores do 1º termo e da razão. Os pesquisadores informaram que, apesar de ser uma generalização correta, não estava de acordo com o que era pedido no enunciado da questão. Tal ação se deve ao fato de que esse item serviria para fazerem a generalização do termo geral da sequência quando conhecidos qualquer termo dessa sequência e a razão.

Figura 30 - Resolução de um aluno para o item **g** da questão 1 da Atividade 2



Fonte: Protocolo de pesquisa.

3.2.2. Encontro do dia 18 de dezembro de 2013

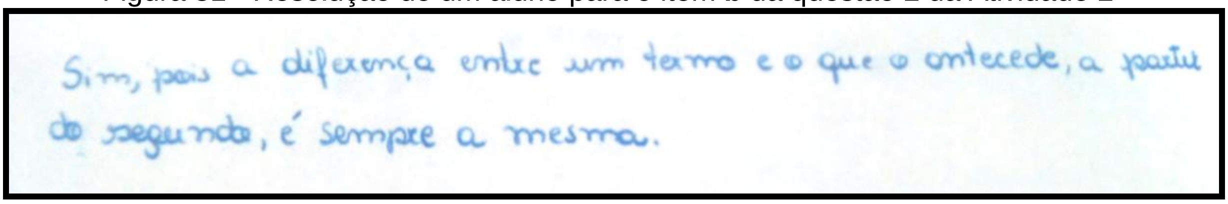
O segundo encontro iniciou-se com a recapitulação das deduções realizadas no encontro anterior. Após, foi pedido que as registrassem na folha intitulada "Progressão Aritmética". Pôde-se perceber que os alunos tiveram autonomia para definir Progressão Aritmética. Aproveitou-se esse momento para identificar uma PA crescente, decrescente e constante. Para isso, foram apresentadas três sequências e foi pedido que, em cada uma, os alunos identificassem o primeiro termo e a razão, bem como que observassem como os termos se comportavam, isto é, se estavam aumentando, diminuindo ou se permaneciam o mesmo e qual o sinal da razão em cada um dos casos.

Na generalização da fórmula do termo geral dos exemplos propostos, alguns alunos tiveram dúvida em relação ao fator (*n* - 1) da fórmula $a_n = a_1 + (n-1)r$. Não perceberam que esse fator referia-se à diferença entre o índice *n* do termo a ser encontrado e o índice 1 do termo utilizado. Então, foi necessário que os pesquisadores interferissem, explicando que essa diferença era relacionada aos índices dos termos, não sendo fixo o termo 1 da subtração. Assim, os pesquisadores deram exemplos, evidenciando a subtração, de modo que os alunos percebessem que, se o termo fosse o primeiro, a subtração seria feita pelo número 1; se o termo fosse o segundo, a subtração seria feita pelo número 2; se o termo fosse um termo qualquer *p*, a subtração seria feita pelo índice *p*.

Após os exemplos, os pesquisadores solicitaram aos alunos que construíssem uma sequência numérica que fosse uma PA. Então, um aluno sugeriu o número 5 como primeiro termo e outro, o número 7. A partir disso, a turma percebeu a razão dessa PA e continuou citando os termos subsequentes, construindo, assim, a sequência (5, 7, 9, 11, 13, 15, 17). Neste instante, um aluno sugeriu o número 20 como próximo termo. Porém, a turma o corrigiu, observando que este número não era um termo da sequência construída por eles, pois a soma do último com a razão é diferente de 20. A partir dessa sequência, promoveu-se a observação da relação entre: (i) a soma dos extremos e a dos termos equidistantes, e (ii) o termo central de uma PA, com número ímpar de termos, e a soma dos extremos. Devido às próximas Atividades as observações foram feitas, visto que seriam necessárias para a generalização da fórmula da soma dos *n* primeiros termos de uma PA, que seria feita na Atividade seguinte.

Na Questão 2 da Atividade 2, os alunos não tiveram dúvidas no item **a**, no qual deveriam escrever a sequência formada pelo número de pontos. Notou-se, no item **b**, que os alunos já sabiam identificar quando uma sequência representa uma Progressão Aritmética e justificar o porquê desta ser uma (Figura 31).

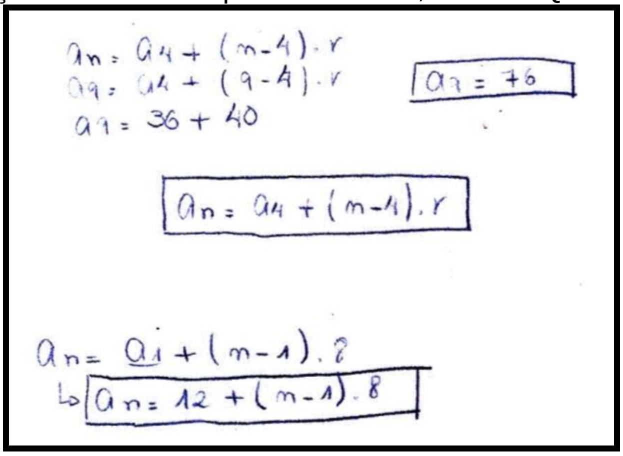
Figura 31 - Resolução de um aluno para o item **b** da questão 2 da Atividade 2


Sim, pois a diferença entre um termo e o que o antecede, a partir do segundo, é sempre a mesma.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

No item **c**, não houve dúvida por parte dos alunos. E, nos itens **d**, **e** e **f**, aplicaram a fórmula do termo geral de uma PA (Figura 32).

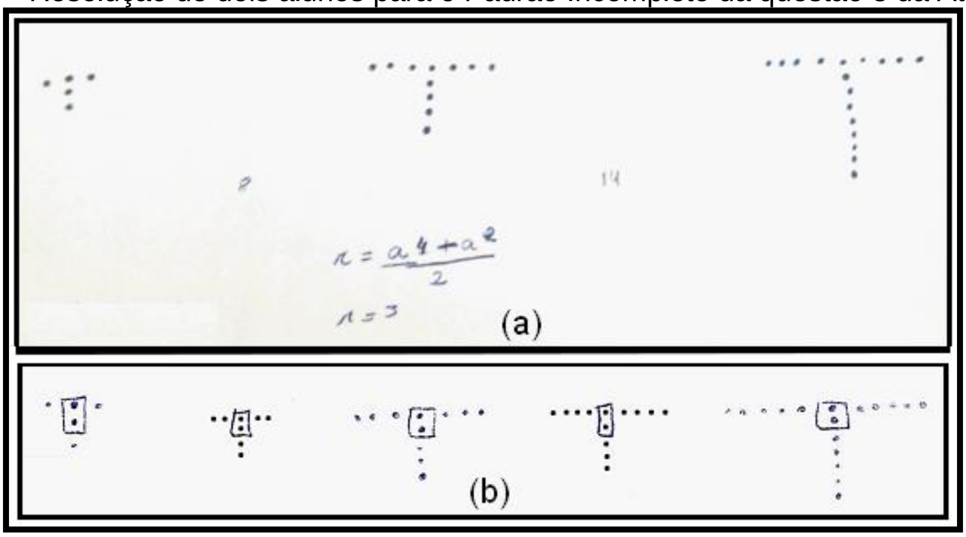
Figura 32 - Resolução de um Aluno para os itens **d**, **e** e **f** da Questão 2 da Atividade 2



Fonte: Protocolo de pesquisa.

A seguir, foi trabalhada a Questão 3 da Atividade 2. Foi possível constatar que três alunos completaram os termos que faltavam, utilizando o pensamento algébrico (Figura 33 - a) e vinte e nove, o pensamento geométrico (Figura 33 - b). Os pesquisadores notaram, nessa questão, o avanço dos alunos nas três fases descritas por Herbert e Brown (2000). Percebeu-se que os mesmos conseguiram identificar o padrão que lhes era proposto e, após algum tempo, deduziam sua generalização, para depois aplicar o que haviam generalizado.

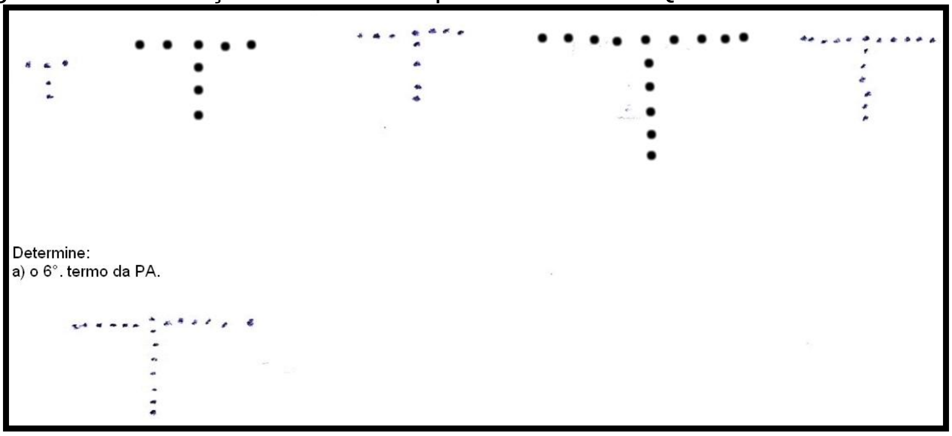
Figura 33 - Resolução de dois alunos para o Padrão Incompleto da questão 3 da Atividade 2



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Os alunos não tiveram dificuldades para resolver o item **a**. Porém, um deles, em vez de dar uma resposta algébrica, respondeu com a representação geométrica do sexto termo, seguindo a linha de pensamento do padrão incompleto (Figura 34).

Figura 34 - Resolução de um aluno para o item **a** da Questão 3 da Atividade 2

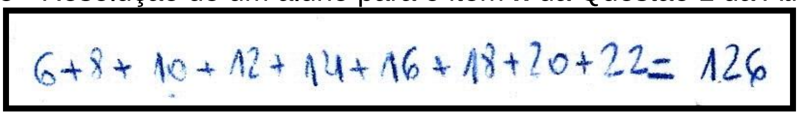


Fonte: Protocolo de pesquisa.

Os alunos não tiveram dúvida no item **b**. Após, foi proposto que respondessem a Questão 1 da Atividade 3. Não houve problemas nos itens **a**, **b**, **c**, **d**, **e**, **f** e **g**.

No item **h**, responderam o que era solicitado. Porém, muitos não conseguiram desenvolver da maneira esperada pelos pesquisadores (Figura 35). Esperava-se que reconhecessem a utilização dos termos equidistantes, visto que esse encaminhamento facilitaria a conclusão da fórmula da soma dos *n* primeiros termos de uma PA. Porém, os pesquisadores preferiram não interferir nessa resolução, já que essa abstração esperada seria novamente abordada no item seguinte, com um número maior de termos, forçando a percepção da relação entre os termos equidistantes.

Figura 35 - Resolução de um aluno para o item **h** da Questão 1 da Atividade 3

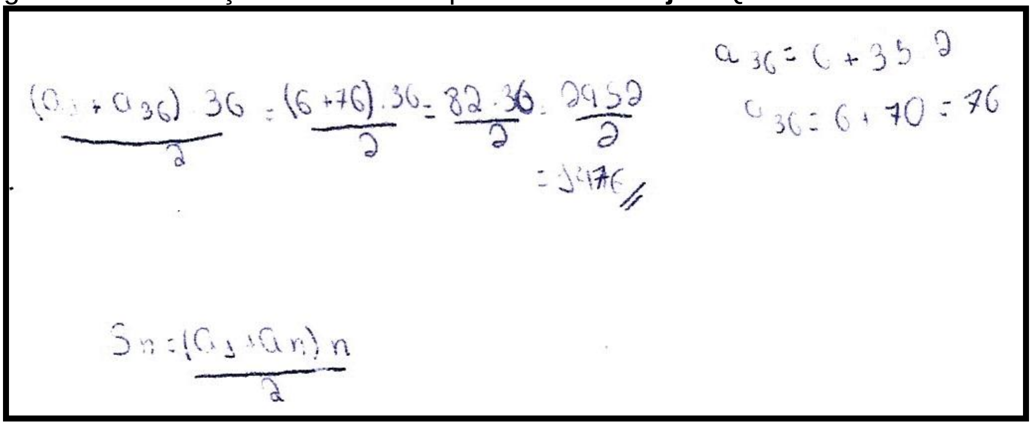


Fonte: Protocolo de pesquisa.

Para que os alunos pudessem resolver o item **i**, os pesquisadores tiveram que intervir fazendo com que retornassem aos itens **a** e **b**, **c** e **d**, **g** e **h**, identificando as relações entre os termos equidistantes e a soma encontrada. Após certo tempo, um aluno compreendeu o que era esperado para o desenvolvimento, percebendo que, se multiplicasse a soma de dois números equidistantes pela metade do número total de termos, encontraria a soma dos termos.

Depois da compreensão do item **i**, os alunos souberam generalizar e determinar a fórmula da soma dos *n* primeiros termos de uma PA no item **j** (Figura 36).

Figura 36 - Resolução de um Aluno para os itens **i** e **j** da Questão 1 da Atividade 3

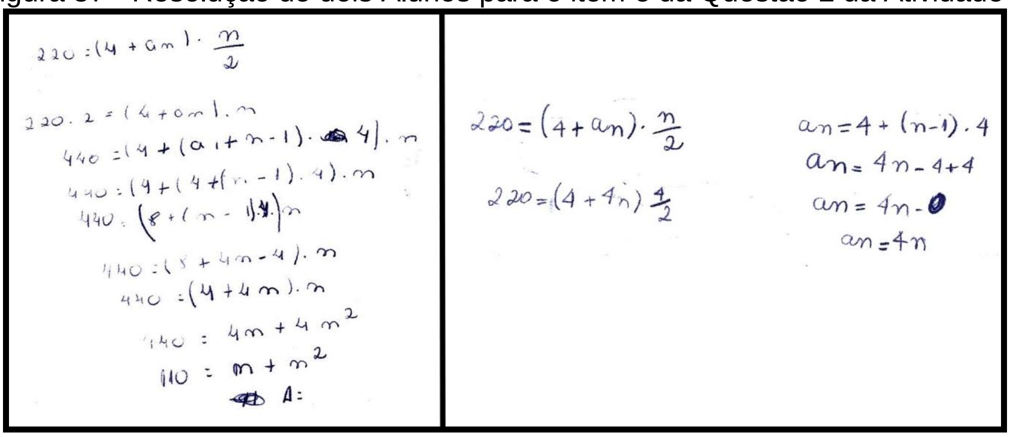


Fonte: Protocolo de pesquisa.

Para finalizar a aplicação, foi solicitado aos alunos que resolvessem a segunda questão da Atividade 3. Nos itens **a** e **b**, não tiveram dificuldades, pois alguns aplicaram a fórmula generalizada anteriormente e, no item **a**, outros contaram o número de pontos dos cinco primeiros termos.

No item **c**, alguns se atrapalharam na resolução, porque a questão necessitava de uma representação para o a_n, de modo que fosse possível continuar o desenvolvimento do item (Figura 37).

Figura 37 - Resolução de dois Alunos para o item **c** da Questão 2 da Atividade 3



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Os alunos não conseguiram determinar o valor para o *n*, pois o item necessitava da resolução de uma equação do segundo grau, que os mesmos não resolveram. Desse modo, não foi possível a representação da enésima figura.

Uma aluna, ao final da aplicação, deu um depoimento oral sobre a sequência realizada: "Quando a gente aprende com as imagens, fica mais fácil de entender do que só com as fórmulas" (informação verbal)[3]. Isso pode ser comprovado segundo Borralho et al (2007, p. 14), ao afirmarem que, dessa forma, pode-se construir uma imagem mais positiva da Matemática, além do uso de padrões promover uma maior motivação.

A análise dos dados sinaliza que a utilização de Padrões Figurativo-Numéricos tornou o estudo das PA mais atraente e motivou os alunos, porque apelam para o sentido estético e estimulam a criatividade. Esses padrões ajudaram na capacidade de classificar e de ordenar as informações.

[3] Aluna participante da experimentação. Afirmação feita durante o 2º encontro. Campos dos Goytacazes, 18 de Dezembro de 2013.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Matemática é conhecida como a ciência dos padrões, visto que estes são considerados, por alguns autores, sua essência, uma vez que seu fundamento e o da Álgebra estão na generalização.

Sobre a Álgebra, percebe-se que é essencial para a resolução de problemas, pois se dedica a deduzir procedimentos e relações, generalizando-os. Já no âmbito escolar, seu objetivo é desenvolver o pensamento algébrico dos alunos. E essa área da Matemática também constitui um espaço significativo para que o aluno desenvolva e exercite a capacidade de abstração e de generalização. Nesta pesquisa, buscou-se expor a possibilidade de desenvolver essas capacidades por meio de padrões.

Nesse contexto, foi elaborada uma proposta de ensino e realizou-se um estudo de caso numa turma de Ensino Médio. Teve por objetivo investigar como o uso de Padrões Figurativo-Numéricos auxilia no estudo das Progressões Aritméticas. Pôde-se perceber o bom desempenho dos alunos na resolução das Atividades e na formulação de conjecturas. Algumas dificuldades foram apresentadas no decorrer da experimentação, principalmente na generalização da fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PA que foram esclarecidas e mediadas pelos pesquisadores.

Quanto à exploração dos padrões, os pesquisadores perceberam que houve uma aceitação por parte dos alunos, auxiliando-os na assimilação do conteúdo abordado. Além disso, o ensino da Álgebra, aliada aos padrões, desenvolve nos alunos uma maior motivação para os estudos, pois permite que sua criatividade seja trabalhada, ao fazer com que percorram diferentes caminhos na manipulação dos mesmos para resolver as questões. Esses fatores indicam como os padrões auxiliam no estudo da PA, respondendo, assim, a questão de pesquisa.

Os Padrões Figurativo-Numéricos relacionam-se com outros temas que podem ser estudados em pesquisas futuras, como: Progressão Geométrica, ao utilizar padrões que formem esse tipo de sequência; Coordenadas Cartesianas, utilizando o número de pontos de cada figura que compõe o padrão para construir um sistema de coordenadas e, depois, aprofundá-la; e Funções, relacionando-as a aspectos geométricos, como área de quadrados.

Espera-se que este trabalho monográfico possa destacar a importância de novas abordagens na aquisição de conceitos matemáticos. Em particular, que possa contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de Progressões Aritméticas, nesse caso, utilizando os Padrões Figurativo-Numéricos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAÚJO, E. A. Ensino de álgebra e formação de professores. In: **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 10, n. 2, p. 331 - 346. PUC: São Paulo, 2008. Disponível em: <http:// revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/download/1740/1130> Acesso em: 01 jul. 2014.

BARBOSA, L.; BORRALHO, A.; CABRITA, I.; FONSECA, L.; PIMENTEL, T.; VALE, I. Padrões no Currículo de Matemática: Presente e Futuro. In: **Investigación en Educación Matemática**. p. 477-493. Badajoz: SEEM e SEIEM, 2008.

BORRALHO, A.; CABRITA, I.; PALHARES, P.; VALE, I. Os padrões no ensino e aprendizagem da Álgebra. In: ENCONTRO DA SPCE, 15. 2007, Portugal. **Actas**... Disponível em: <http://dspace.uevora.pt/rdpc/bitstream/10174/1416/1/Padr%C3%B5es%20Caminha.pdf>. Acesso em: 06 fev. 2014.

BRANCO, N. C. V. **O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico**. 2008. 251 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade de Lisboa, Lisboa, 2008.

BRASIL. **Ministério da Educação e do Desporto, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias***:* Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: 2002.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática - Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CHIZZOTTI, A. **Pesquisa em ciências humanas e sociais**. 9. ed. São Paulo: Cortez, 2008.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa**: métodos qualitativos, quantitativo e misto. Tradução de Magda França Lopes. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

DIAS, G. F. A. A Geometria como facilitadora da compreensão de conceitos algébricos: relato de atividades. In: ENCONTRO REGIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2., 2009. Natal. **Anais eletrônico...** Natal, 2009. Disponível em: <http://www.sbemrn.com.br/site/II%20erem/comunica/doc/comunica11.pdf> Acesso em: 19 set. 2014.

FARIA, R. W. S. **Padrões fractais:** contribuições ao processo de generalização de conteúdos matemáticos. 2012. 197 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2012.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTÓVÃO, E. M. Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In: SEMINÁRIO LUSO-BRASILEIRO DE INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS NO CURRÍCULO E NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR, 2004, Lisboa. **Anais eletrônicos...** Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2004. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/seminario_lb.htm>. Acesso em: 02 mar. 2014.

GONÇALVES, K. L. A. V.; SANTOS, K. C. ; SILVA, J. F. Resolução de problemas no processo de ensino aprendizagem de progressão aritmética. In: CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 7., 2013. Montevideo. **Anais eletrônico...** Montevideo, 2013. Disponível em: <http://www.cibem.org/extensos/1182_1372548952_resolun_nao_de_problemas_no_processo_de_ensino_aprendizagem_de_progressnao_aritmnntica..doc> Acesso em: 20 fev. 2014.

HERBERT, K.; BROWN, R. Patterns as tools for algebraic reasoning. Reimpresso por Barbara Moses, ed., **Algebraic Thinking, Grades K-12: Readings from NCTM's School – Based Journals and Other Publications.** Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 2000.

MENEGASSI, M. E. J; SILVA, M. M. da. Análise de problemas envolvendo padrões numéricos. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007. Belo Horizonte. **Anais eletrônicos...** Belo Horizonte: UNI-BH, 2007. Disponível em:<http://www.sbem.com.br/files/ixenem/Relato.../RE21461236053T.doc> Acesso em: 05 set. 2014.

MIORIN, M. A.; MIGUEL, A.; FIORENTINI, D. Ressonâncias e dissonâncias do movimento pendular entre álgebra e geometria no currículo escolar brasileiro. **Revista Zetetiké**. Campinas: Ano I, nº1, 1993.

MODANEZ, L. **Das sequências de padrões geométricos à introdução ao pensamento algébrico**. 2003, 105 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2003.

MOURA, M. A. L. **Investigando padrões em PA e PG.** Artigo - Fundação Comunitário de Ensino Superior de Itabira, Minas Gerais, 2010.

MOREIRA, H.; CALEFFE, L. G. **Metodologia da pesquisa para o professor pesquisador**. 2. ed. Rio de Janeiro: Lamparina, 2008.

NEVES, J. L. Pesquisa qualitativa – características, usos e possibilidades. **Caderno de pesquisas em administração**. São Paulo, v. 1, n. 3, 1996.

NUNES, C. B. O processo de ensino-aprendizagem-avaliação de geometria através da resolução de problemas: perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010.Salvador. **Anais eletrônicos...** Salvador, 2010. Disponível em: <http://www.lematec.net/CDS/ENEM10/artigos/CC/T18_CC980.pdf> Acesso em: 18 fev. 2014.

PEREZ, E. P. Z. **Alunos do ensino médio e a generalização de padrão**. 2006, 126 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2006.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no Ensino Básico**. Lisboa: DGIDC, 2009. Disponível em: < http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/7105/1/Ponte-Branco-Matos%20%28Brochura_Algebra%29%20Set%202009.pdf > Acesso em: 08 jul 2014.

PONTE, J. P.; SERRAZINA, L. **Didáctica da matemática para o 1° ciclo do ensino básico**. Lisboa: Universidade Aberta, 2000. Disponível em: < http://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/tarefas/Teoria%20de%20van%20Hiele.pdf> Acesso em: 02 mar. 2014.

PONTE, J. P. Estudos de caso em educação matemática. **Bolema**, n. 25, p. 105-132, 2006a.

PONTE, J. P. **Números e Álgebra no currículo escolar.** 2006b. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/06-ponte(caminha).pdf> Acesso em: 15 mar. 2013.

SANTOS, L. M. **Concepções do professor de matemática sobre o ensino de álgebra.** 2005, 121 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2005.

STEWART, I. **Os números da natureza.** Rio de Janeiro: Rocco, 1996.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.) **As idéias da álgebra**. São Paulo; Atual, 1995.

VALE, I.; PIMENTEL, T. Padrões: um tema transversal no currículo. In: **Revista Educação e Matemática**, Portugal, v. 85, p. 14-20, nov./dez. 2005.

VILLIERS, M. Algumas reflexões sobre a teoria de Van Hiele. In: **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 12, n. 3, p. 400 - 431. PUC: São Paulo, 2010. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/download/5167/3696> Acesso em: 02 mar 2014.

YIN, R. K. **Estudo de caso**: planejamento e métodos. Tradução Ana Thorell. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

ZAZKIS, R.; LILJEDAHL, P. Generalization of Patterns: the tension between algebraic thinking and algebraic notation. In: **Educational Studies in Mathematics**, v. 49, n. 3. Springer, 2002. p. 379-402.

APÊNDICES

APÊNDICE A

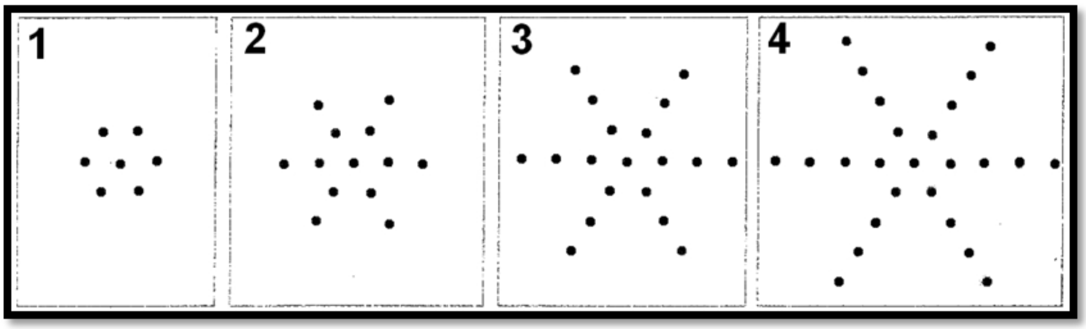
Atividade 1

Licenciatura em Matemática
Desvendando a Progressão Aritmética: um estudo com padrões
Autores: Hugo Gandra de Araújo e Lina Paula Armond Gonçalves
Aluno:

___

ATIVIDADE 1

1. Observe o padrão[4] estabelecido na sequência de figuras abaixo e complete a tabela a seguir:



Número da Figura	Número de Pontos
1	
2	
3	
4	
5	
6	
n	

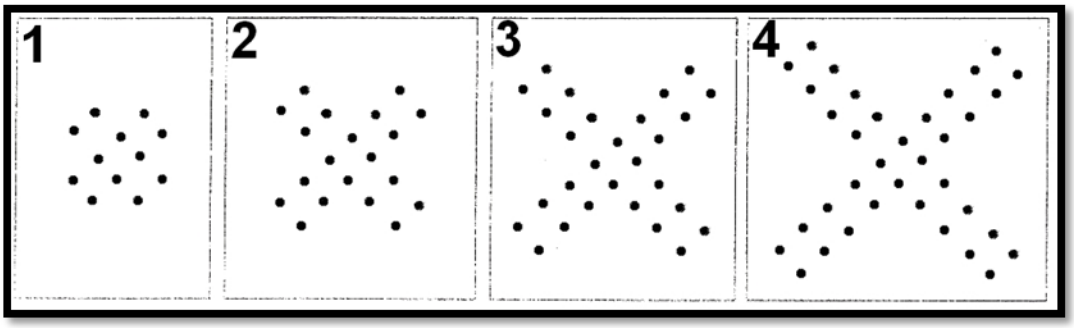
De acordo com o padrão acima e com a expressão encontrada para a figura n, responda:

a. Quantos pontos terá a figura 35?

b. Sabendo que uma figura tem 439 pontos, qual o número dessa figura?

[4] Fonte: JAKUBOVIC, José; IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo Cestari Terra. *Álgebra*. 6.ed. São Paulo: Atual, 1992.(Pra que serve Matemática?)

2. Observe o padrão[5] estabelecido na sequência de figuras abaixo e complete a tabela a seguir:



Número da Figura	Número de Pontos
1	
2	
3	
4	
5	
6	
n	

De acordo com o padrão acima e com a expressão encontrada para a figura n, responda:

a. Quantos pontos terá a figura 47?

b. Sabendo que uma figura tem 668 pontos, qual o número dessa figura?

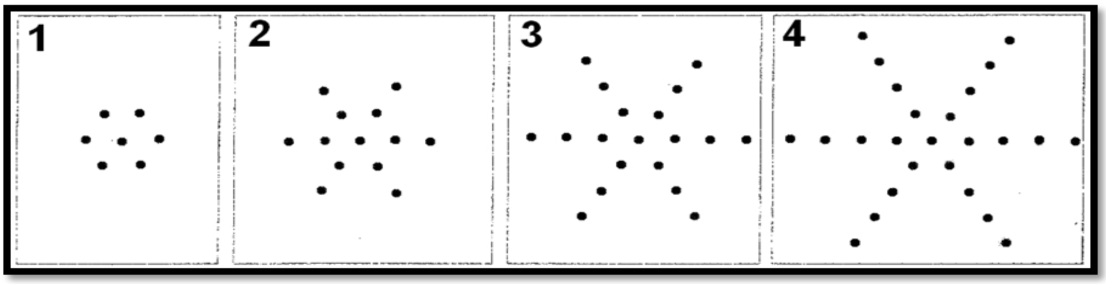
[5] Fonte: JAKUBOVIC, José; IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo Cestari Terra. *Álgebra*. 6.ed. São Paulo: Atual, 1992. (Pra que serve Matemática?)

APÊNDICE B

Atividade 2

ATIVIDADE 2

1. Observe as figuras a seguir:



Considerando o padrão existente nessa sequência de pontos, faça o que se pede:

a. Registre a sequência formada pelo número de pontos.

b. Determine o 5º. e o 6º. termos (a_5 e a_6) dessa sequência.

c. A partir da sequência obtida no item a, calcule o valor das subtrações:

(i) $a_2 - a_1 =$ (ii) $a_3 - a_2 =$ (iii) $a_4 - a_3 =$ (iv) $a_5 - a_4 =$ (v) $a_6 - a_5 =$

d. Analisando os resultados obtidos no item anterior, que resultado você espera encontrar para a subtração: $a_n - a_{n-1}$?

Observando os resultados dos itens c e d, podemos concluir que:

____

____

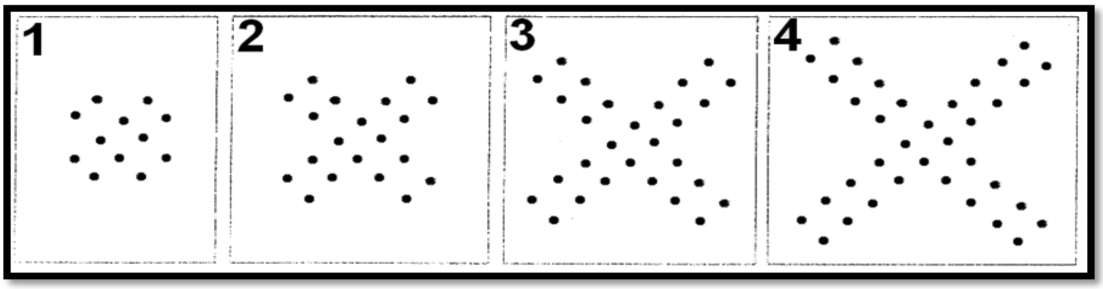
____

e. Utilizando o valor de a_6, determine o valor de a_7.

f. Utilizando o valor de a_3, determine o valor de a_7.

g. Expresse o enésimo termo dessa sequência em função dos valores do 1º. termo e da razão.

2. A partir do padrão observado na sequência de figuras:



a. Escreva a sequência formada pelo número de pontos.

b. A sequência obtida no item anterior representa uma PA? Justifique.

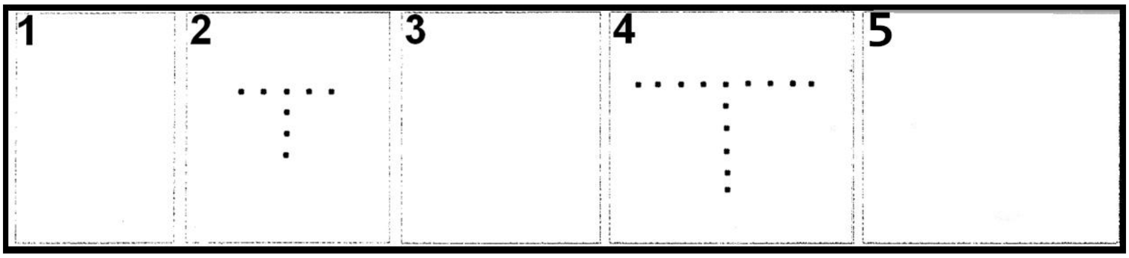
c. Determine a razão dessa sequência.

d. Expresse o 9º termo em função dos valores do 4º termo e da razão.

e. Expresse o enésimo termo dessa sequência em função dos valores do 4º termo e da razão.

f. Expresse a fórmula do termo geral dessa sequência.

3. Complete a sequência de figuras abaixo, sabendo que o número de pontos utilizados forma uma PA.



Determine:

a. o 6º termo da PA.

b. o enésimo termo da PA em função do 10º termo e da razão.

PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Definição:

____

____

____

____

Exemplos:

a. (8, 11, 14, 17, 20, ...)

a_1 = ______ r = _______ a_n = ______________

____

b. (6, 4, 2, 0, -2, -4, ...)

a_1 = _______ r = _______ a_n = ______________

____

c. (3, 3, 3, 3, 3, 3, ...)

a_1 = ______ r = _______ a_n = ______________

____

- Propriedades da PA

- Termos equidistantes: ____

____

- Termo central: ____

____

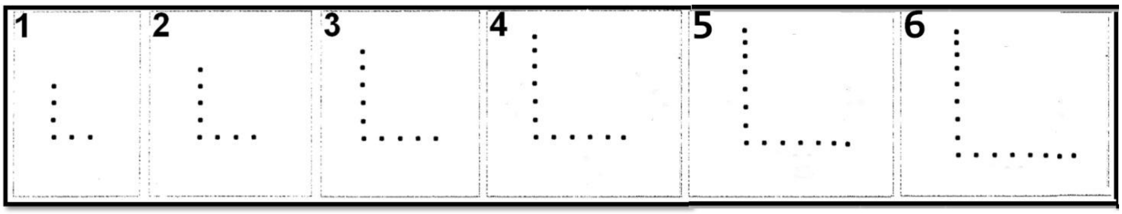
- Fórmulas da PA

APÊNDICE C

Atividade 3

ATIVIDADE 3

1. Considere a PA formada pelo número de pontos da sequência de figuras abaixo.



a. Calcule as seguintes somas:

(i) $a_1 + a_4 =$ (ii) $a_2 + a_3 =$

b. Analisando os resultados do item anterior, qual é o valor da soma dos 4 primeiros termos dessa PA, ou seja, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$?

c. Calcule as somas:

(i) $a_1 + a_6 =$ (ii) $a_2 + a_5 =$ (iii) $a_3 + a_4 =$

d. Considerando os resultados do item anterior, qual é o valor da soma dos 6 primeiros termos dessa PA?

e. Qual é o 9º termo dessa PA?

f. Calcule $a_1 + a_9$.

g. Analisando os itens anteriores, que resultado você espera encontrar para as somas

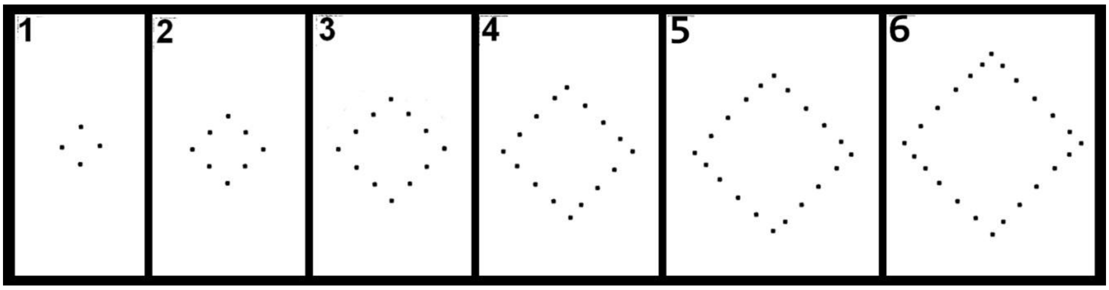
(i) $a_2 + a_8 =$ (ii) $a_3 + a_7 =$ (iii) $a_4 + a_6 =$

h. Qual é a soma dos 9 primeiros termos dessa PA?

i. Qual é a soma dos 36 primeiros termos dessa PA?

j. Qual será a soma dos n primeiros termos (S_n) dessa PA?

2. Considere a PA formada pelo número de pontos da sequência de figuras abaixo.



a. Calcule a soma dos 5 primeiros termos.

b. Calcule a soma dos 23 primeiros termos.

c. Sabendo que a soma dos n primeiros termos desta PA é 220, represente a enésima figura.