CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE CAMPOS
Universidade da Tecnologia e do Trabalho

MEC/SETEC

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

INTERPRETAÇÃO GRÁFICA DA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

Cíntia da Silva Gomes
Elena Calçada Evangelista
Jonas Defante Terra
Larissa de Sousa Moreira

CAMPOS DOS GOYTACAZES
2006.2

SUMÁRIO

1- INTRODUÇÃO

As discussões sobre o que é e como se ensina Matemática cada vez mais ganham espaço na Comunidade de Educação Matemática, e portanto esperam renovações na prática docente (D'AMBRÓSIO, 1990). Questiona-se também como se aprende Matemática (D'AMBRÓSIO, 1990).

O presente trabalho intitulado "Interpretação gráfica da resolução de sistemas lineares" foi planejado para que os alunos tenham uma oportunidade maior de desenvolver o processo de construção do seu conhecimento, colocando-os como centro do processo de aprendizagem.

Sistemas Lineares foi escolhido como tema por ser de um estudo acessível aos estudantes, pois não requer o uso de conceitos complicados, servindo como ponto de partida para diversas teorias matemáticas relevantes e atuais.

Não abordaremos aqui, suas diversas aplicações. Nosso objetivo nesse momento, é dar ênfase à interpretação gráfica, que acreditamos, muito esquecida pelo professores na sala de aula.

Estamos em uma era de tecnologia e comunicação, e segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1999) é fundamental que os alunos se familiarizem com o computador e com programas específicos para aprofundar mais e melhor sua aprendizagem matemática. Diante desse contexto, optamos pelo uso da tecnologia, para facilitar a visualização dos gráficos, com a utilização do *software Winplot* na realização da nossa atividade.

É muito importante que as conclusões das atividades estejam relacionadas com a visualização dos gráficos e com cada resposta obtida com a resolução algébrica dos sistemas.

O projeto "Interpretação gráfica da resolução de sistemas lineares" foi aplicado para 15 alunos da 3.ª série do Ensino Médio do Centro Federal de Educação Tecnológica de Campos.

2- DESENVOLVIMENTO

Nesta seção descreveremos a preparação do projeto e as etapas que o compõem.

2.1. Preparação do projeto

Este projeto iniciou-se no segundo período da Licenciatura em Matemática do Centro Federal de Educação Tecnológica de Campos. No primeiro período da disciplina, recordamos o tema funções utilizando o *software Winplot*. Foi durante esse estudo que decidimos pelo tema deste trabalho.

No segundo período, organizamos as atividades propostas relacionadas ao tema, em que os sistemas seriam resolvidos algebricamente e interpretados geometricamente, sendo visualizados na tela do computador. Ainda nesse período, ocorreu um teste exploratório com a nossa turma da Licenciatura e alguns alunos do 5º período.

Nesse teste sentimos a necessidade de nos prepararmos mais, pois não conseguirmos alcançar o objetivo esperado por nossa orientadora.

Após o teste aprimoramos nossas atividades com o intuito de facilitar o estudo, pois nosso objetivo principal era dar ênfase à interpretação geométrica.

2.2. Aplicação do projeto

Após a apresentação da nossa proposta para a turma, iniciamos a atividade (ANEXO 1).

A primeira questão continha onze sistemas. Três com duas equações e duas incógnitas, três com três equações e duas incógnitas, três com três equações e três incógnitas, e dois com duas equações e três incógnitas.

Iniciamos a resolução algébrica com a participação efetiva dos alunos. Não sentimos qualquer dificuldade da parte deles em acompanhar o que estava sendo feito. Resolvido algebricamente o primeiro sistema, foi pedido que os alunos traçassem os gráficos das equações no *Winplot*.

Com os gráficos na tela do computador, fizemos os alunos observarem o ponto de encontro entre as retas. Logo perceberam que o ponto era exatamente a solução do sistema.

O mesmo foi feito com os segundo sistema. Nesse caso, as retas eram paralelas e sem qualquer dificuldade, os alunos perceberam que o sistema era impossível.

Os seis primeiros itens foram trabalhados no IR^2, visto que cada equação do sistema representava uma reta no IR^2. Os itens restantes foram desenvolvidos no IR^3, pois cada equação era de um plano. Sendo assim, os alunos puderam associar às resoluções às intersecções dos planos visualizados no computador.

Em todos os sistemas, associaram a resolução algébrica com a gráfica, classificando-os em sistema possível e determinado, possível e indeterminado ou impossível.

Um dos momentos que percebemos alguma dificuldade por parte dos alunos foi o escalonamento dos sistemas de três equações e três incógnitas. Entretanto, esse fato não atrapalhou o bom andamento da aula, uma vez que qualquer dúvida era solucionada pelos demais integrantes.

A segunda questão consistia na observação de quatro gráficos onde o aluno deveria classificá-lo quanto à solução, marcando a opção correta. Essa questão foi de fácil entendimento dos alunos, uma vez que eles realizaram os itens primeira questão com êxito.

3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Acreditamos que o projeto atingiu o objetivo, contribuindo para que os alunos visualizassem graficamente a resolução dos sistemas lineares. Esse convencimento se deu graças ao uso da tecnologia no nosso trabalho, que permitiu a rapidez na construção dos gráficos, facilitando a observação dos alunos.

Entretanto, gostaríamos de ter tido mais tempo para a realização do nosso projeto. Um segundo encontro com a turma, talvez fosse necessário para a conclusão do trabalho, validando-o um pouco mais.

Acreditamos, até pela nossa vivência como alunos, que existe uma preferência pelas aulas que fogem ao padrão normal. Apostamos na tecnologia para alcançarmos nossos objetivos.

Esperamos que os resultados desse projeto possam contribuir para que os professores de Matemática retomem as discussões envolvendo a interpretação gráfica dos sistemas lineares nas escolas, recorrendo aos recursos tecnológicos, resultando num melhor aprendizado do tema.

4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL, Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio: Bases Legais. Brasília: 1v., 1999.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. Etnomatemática - Arte ou Técnica de Explicar e Conhecer, São Paulo: Editora Ática, 1990.

DANTE, Luiz Roberto. *Matemática*, 2 v. – São Paulo: Ática, 2006.

ANEXOS

ANEXO 1

ATIVIDADES

ATIVIDADES

1. Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} 2x+y=6 \\ x-y=-3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+4y=5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x-3y=8 \\ 15x-9y=24 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x-3y=15 \\ x+y=5 \\ -x+5y=-11 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -3x+3y=0 \\ x+8y=9 \\ x-y=1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=-3 \\ x-3y=0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=8 \\ 3x+y+z=10 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x-y+z=2 \\ 3x+y+z=2 \\ 2x-2y+2z=8 \end{cases}$

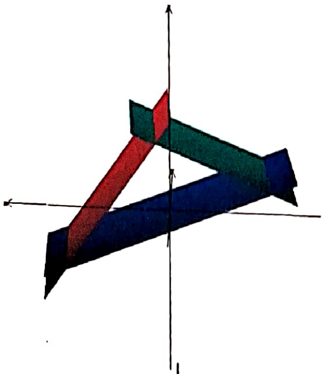
i) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=3 \\ x+y+z=5 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x+5y+z=3 \end{cases}$

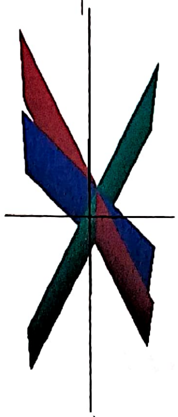
k) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+2y+2z=6 \end{cases}$

2. Considerando os planos α, β e γ, representados abaixo, marque a opção que corresponde à solução do sistema formado por eles.

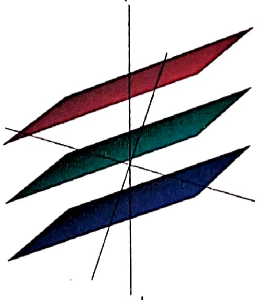
a) ( ) Sistema Possível Determinado.
( ) Sistema Impossível
( ) Sistema Possível Indeterminado



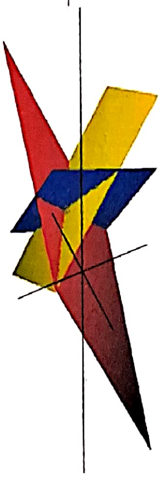
b) ( ) Sistema Possível Determinado.
( ) Sistema Impossível
( ) Sistema Possível Indeterminado



c) ( ) Sistema Possível Determinado.
( ) Sistema Impossível
( ) Sistema Possível Indeterminado



d) ( ) Sistema Possível Determinado.
( ) Sistema Impossível
( ) Sistema Possível Indeterminado



ANEXO 2

ATIVIDADES RESOLVIDAS PELOS ALUNOS

ATIVIDADES

1. Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x - y = -3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x - 3y = 8 \\ 15x - 9y = 24 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - 3y = 15 \\ x + y = 5 \\ -x + 5y = -11 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ x + 8y = 9 \\ x - y = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -3 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ 3x + y + z = 10 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x + y + z = 2 \\ 2x - 2y + 2z = 8 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 3 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 5y + z = 3 \end{cases}$

k) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 2y + 2z = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases}$ ⇝ $x = 3 - 2y$

$2(3-2y) + 4y = 5$

$6 - 4y + 4y = 5$

$0y = -1$ (F)

$S = \emptyset$

as retas são paralelas
distintas

SI

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \neq \frac{3}{5}$ ⇝ retas paralelas distintas (não há solução)

c) $\begin{cases} 5x - 3y = 8 \quad (-3) \\ 15x - 9y = 24 \end{cases}$

$\begin{cases} \cancel{-15x} + \cancel{9y} = -24 \\ \cancel{15x} - \cancel{9y} = 24 \end{cases}$

$0x + 0y = 0$ (V)

as retas são ~~paralelas~~ coincidentes
(infinitos pontos em comum)

$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 5x - 3y = 8\}$

verdade pelo produto dos meios

$\frac{5}{15} = \frac{-3}{-9} = \frac{8}{24}$

d) $\begin{cases} 2x - 3y = 15 \\ x + y = 5 \\ -x + 5y = -11 \end{cases}$

$\begin{cases} \cancel{x} + y = 5 \\ \cancel{-x} + 5y = -11 \end{cases}$ ⇝ $\boxed{x = 6}$

$6y = -6$

$\boxed{y = -1}$

$2(6) - 3(-1) = 15$

$12 + 3 = 15$

$15 = 15$ (V)

$S = \{(6, -1)\}$

e) $\begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ x + 8y = 9 \\ x - y = 1 \end{cases}$

SI ⇝ $S = \emptyset$

$x + 8y = 9$ ⇝ $(1+y) + 8y = 9$ ⇝ $\boxed{y = 8/9}$

$x - y = 1$ ⇝ $x = 1 + y$ ⇝ $x = 1 + \frac{8}{9}$

$9x = 9 + 8$

$\boxed{x = \frac{17}{9}}$

$-\cancel{3}\left(\frac{17}{\cancel{9}3}\right) + \cancel{3}\left(\frac{8}{\cancel{9}3}\right) = 0$

$-\frac{17}{3} + \frac{8}{3} = 0$ (F)

Sistema impossível

$S = \emptyset$

f) $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=-3 \\ x-3y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=3 \quad (-1) \\ x-y=-3 \end{cases} \rightarrow x-3=-3$

$\begin{cases} \cancel{-x}-y=-3 \\ \cancel{x}-y=-3 \end{cases}$ $\boxed{x=0}$

$\rightarrow 0-3(3)=0$ $\qquad -2y=-6$

$-9=0 \quad (F)$ $\qquad \boxed{y=3}$

$\rightarrow$ SI $\quad S=\emptyset$

g) $\begin{cases} x+y+z=6 \quad (-2) \; (-3) \\ 2x-y+z=8 \\ 3x+y+z=10 \end{cases}$ $\quad \begin{array}{r} \cancel{-2x}-2y-2z=-12 \\ \cancel{2x}-y+z=8 \\ \hline -3y-z=-4 \end{array}$

$\begin{cases} x+y+z=6 \\ -3y-z=-4 \quad (2) \\ -2y-2z=-8 \quad (-3) \end{cases}$ $\quad \begin{array}{r} \cancel{-3x}-3y-3z=-18 \\ \cancel{3x}+y+z=10 \\ \hline -2y-2z=-8 \end{array}$

$\begin{array}{r} \cancel{-6y}-2z=-8 \\ \cancel{6y}+6z=24 \\ \hline 4z=16 \end{array}$ $\qquad \begin{cases} x+\overset{0}{y}+\overset{4}{z}=6 \rightarrow x=2 \\ -3y-\overset{4}{z}=-4 \rightarrow y=0 \\ 4z=16 \rightarrow z=4 \end{cases}$

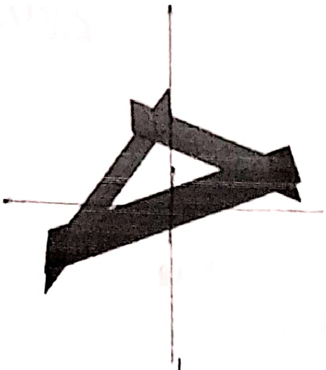
$S=\{(2,0,4)\}$ $\qquad$ SPD

h) $\begin{cases} x-y+z=2 \\ 3x+y+z=2 \\ 2x-2y \end{cases}$ $\qquad$ SI

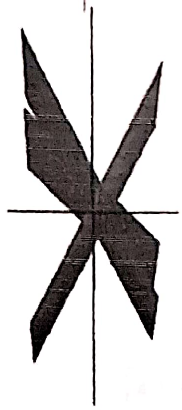
i)

2. Considerando os planos α, β e γ, representados abaixo, marque a opção que corresponde à solução do sistema formado por eles.

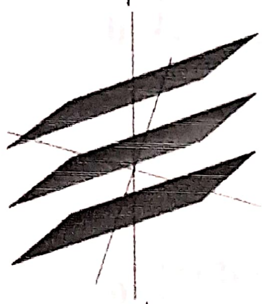
a) ( ) Sistema Possível Determinado.
(X) Sistema Impossível
( ) Sistema Possível Indeterminado



b) ( ) Sistema Possível Determinado.
( ) Sistema Impossível
(X) Sistema Possível Indeterminado



c) ( ) Sistema Possível Determinado.
(X) Sistema Impossível
( ) Sistema Possível Indeterminado



d) (X) Sistema Possível Determinado.
( ) Sistema Impossível
( ) Sistema Possível Indeterminado

ATIVIDADES

1. Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} 2x+y=6 \\ x-y=-3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+4y=5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x-3y=8 \\ 15x-9y=24 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x-3y=15 \\ x+y=5 \\ -x+5y=-11 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -3x+3y=0 \\ x+8y=9 \\ x-y=1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=-3 \\ x-3y=0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=8 \\ 3x+y+z=10 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x-y+z=2 \\ 3x+y+z=2 \\ 2x-2y+2z=8 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=3 \\ x+y+z=5 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x+5y+z=3 \end{cases}$

k) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+2y+2z=6 \end{cases}$

1a) $\begin{cases} 2x+y=6 \rightarrow y=6-2x \\ x-y=-3 \end{cases}$

$x-6+2x=-3$

$x+2x=-3+6$

$3x=3$

$x=1$

$\rightarrow y=6-2$

$y=4$

S.P.D.

$S=\{1,4\}$

b) $\begin{cases} x+2y=3 \rightarrow x=3-2y \\ 2x+4y=5 \end{cases}$

$2(3-2y)+4y=5$

$6-4y+4y=5$

$6=5$ (F)

$S=\emptyset$

$\rightarrow x+2y=3$

$2y=3-x$

$y=\frac{3-x}{2}$

$(3-x)/2$

$2x+4y=5$

$4y=5-2x$

$y=\frac{5-2x}{4}$

S.I.

$(5-2x)/4$

c) $\begin{cases} 5x-3y=8 \cdot(-3) \\ 15x-9y=24 \end{cases}$

$\begin{cases} -15x+9y=-24 \\ 15x-9y=24 \end{cases} +$

$0x+0y=0$ (V)

$5x-3y=8$

$-3y=8-5x \cdot(-1)$

$3y=-8+5x$

$y=\frac{-8+5x}{3}$

$(-8+5x)/3$

$15x-9y=24$

$-9y=24-15x \cdot(-1)$

$9y=-24+15x$

$y=\frac{-24+15x}{9}$

S.P.I.

$(-24+15x)/9$

$S=\{(x,y)\in\mathbb{R} / 5x-3y=8\}$

1) $\begin{cases} 2x-3y=15 \\ x+y=5 \\ -x+5y=-11 \end{cases}$

$2x-3y=15 \longrightarrow 2\cdot 6-3\cdot(-1)=15$

$12+3=15$

$15=15$

$x+y=5 \longrightarrow x-1=5$

$-x+5y=-11 \qquad x=6$

$6y=-6$

$y=-1$

S.P.

$S=\{(6,-1)\}$

2) $\begin{cases} -3x+3y=0 \\ x+8y=9 \quad \cdot(-1) \\ x-y=1 \end{cases}$

S.I.

$S=\emptyset$

$\begin{cases} -x-8y=-9 \\ x-y=1 \end{cases} \longrightarrow x+8\cdot\frac{8}{9}=9$

$-9y=-8$

$y=\frac{8}{9}$

$x+\frac{64}{9}=9$

$x=9-\frac{64}{9}$

$x=\frac{17}{9}$

$-3x+3y=0$

$-3\cdot\frac{17}{9}+3\cdot\frac{8}{9}=0$

$-\frac{17}{3}+\frac{8}{3}=0$ (F)

3) $\begin{cases} x+y=3 \quad \cdot(-1) \\ x-y=-3 \\ x-3y=0 \end{cases}$

$x-y=-3 \longrightarrow x-3=-3$

$x=0$

S.I.

$S=\emptyset$

$\begin{cases} -x-y=-3 \\ x-y=-3 \end{cases}$

$-2y=-6$

$y=3$

$x-3y=0$

$0-3\cdot 3=0 \longrightarrow -9=0$ (F)

g) $\begin{cases} x+y+z=6 & \cdot(-2) \quad \cdot(-3) \\ 2x-y+z=8 \\ 3x+y+z=10 \end{cases}$

$\begin{cases} x+y+z=6 \\ -3y-z=-4 & \cdot(2) \\ -2y-2z=-8 & (-3) \end{cases}$

$\begin{cases} x+y+z=6 \\ -6y-2z=-8 \\ +6y+6z=24 \end{cases}$

$x+y+z=6$
$-3y-z=-4$
$4z=16$
$z=4$

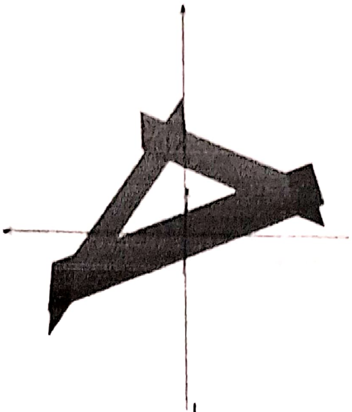
$-3y-4=-4$
$-3y=0$
$y=0$

$x+0+4=6$
$x=2$

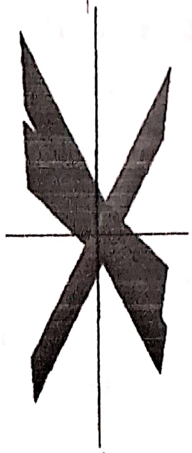
S.P.D.
$S=\{(2,0,4)\}$

2. Considerando os planos α, β e γ, representados abaixo, marque a opção que corresponde à solução do sistema formado por eles.

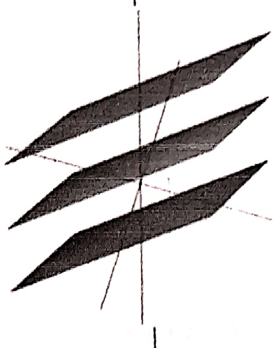
a)
( ) Sistema Possível Determinado.
(X) Sistema Impossível
( ) Sistema Possível Indeterminado



b)
( ) Sistema Possível Determinado.
( ) Sistema Impossível
(X) Sistema Possível Indeterminado



c)
( ) Sistema Possível Determinado.
(X) Sistema Impossível
( ) Sistema Possível Indeterminado



d)
(X) Sistema Possível Determinado.
( ) Sistema Impossível
( ) Sistema Possível Indeterminado

ANEXO 3

FOTOS DOS ALUNOS

Figura 1 – Alunos realizando a atividade

Figura 2 – Alunos realizando a atividade

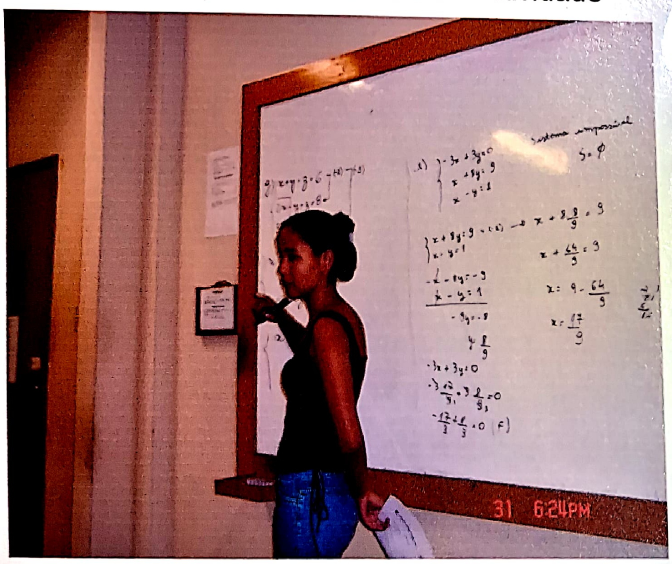


Figura 3 – Integrante do grupo solicitando resolução