INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Fluminense campus Campos Centro

MINISTÉRIO DA
EDUCAÇÃO

RELATÓRIO LEAMAT

RELACIONANDO PROGRESSÃO ARITMÉTICA COM FUNÇÃO AFIM

ENSINO E APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA

LETÍCIA CARVALHO MACIEL
LETÍCIA VIVEIROS DE SOUZA
LUCAS FRANCO BELÉM DE FREITAS
RANNA DE JESUS AMBROSIO

CAMPOS DOS GOYTACAZES
2016.2

LETÍCIA CARVALHO MACIEL
LETÍCIA VIVEIROS DE SOUZA
LUCAS FRANCO BELÉM DE FREITAS
RANNA DE JESUS AMBROSIO

RELATÓRIO LEAMAT

RELACIONANDO PROGRESSÃO ARITMÉTICA COM FUNÇÃO AFIM

ENSINO E APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA

Trabalho apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, Campus Campos-Centro, como requisito parcial para conclusão da disciplina Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Profª. Me. Lívia Azelman de Faria Abreu.
Co-orientadora: Profª. Me. Ana Mary Fonseca Barreto de Almeida.

CAMPOS DOS GOYTACAZES

2016.2

SUMÁRIO

1) Relatório do LEAMAT I

1.1) Atividades desenvolvidas

O Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática (LEAMAT) é um componente curricular da Licenciatura em Matemática do IFFluminense que funciona sob a perspectiva de um espaço de criação onde são desenvolvidas atividades: de observação e reflexão do processo de ensino e aprendizagem de Matemática na Educação Básica; de reflexão dos problemas e das alternativas no ensino específico de alguns tópicos de Matemática na Educação Básica; de investigação de materiais instrucionais que possam facilitar o processo ensino e aprendizagem de Matemática na Educação Básica (SOUTO et al., 2010).

O LEAMAT se desenvolve em três semestres com quatro linhas de pesquisa, sendo atualmente: Álgebra, Aritmética, Educação Inclusiva e Geometria. Após leituras e discussões dos temas, são elaboradas sequências didáticas e materiais pedagógicos a serem aplicados em turmas regulares de 6.º ao 9.º ano do Ensino Fundamental ou Ensino Médio, preferencialmente de redes públicas de ensino.

Os trabalhos de investigação resultam em sequências didáticas que são aplicadas em turmas de escolas da rede pública ou privada da comunidade ou a grupos de estudantes da Educação Básica no próprio IFFluminense.

Relata-se aqui, a experiência vivenciada pelo grupo no LEAMAT I.

Primeiro encontro: Teve como objetivo apresentar um dos pilares matemático denominado álgebra. Além disso, foi proposto uma pesquisa nos livros didáticos do terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental, com intuito de investigar e evidenciar se os mesmos estão de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

Segundo encontro: Foi evidenciado que a álgebra permeia todos os outros pilares da Matemática, ou seja, a Geometria e a Aritmética. Foi apresentada a justificativa gráfica de trinômios quadrados perfeitos.

Terceiro encontro: A orientadora propôs a leitura e discussão do material "Álgebra: pensar, calcular, comunicar" da autora Lucia Arruda Albuquerque Tinoco (2008). Concluiu-se a partir do debate que a álgebra é passada de maneira mecânica sem significado real, como por exemplo, o sinal de igual que é visto somente como operador e não sinal de equivalência.

Quarto encontro: Dialogou-se sobre o texto "Números e álgebra no currículo escolar" (PONTE, 2006). A leitura desse texto foi feita anterior e individualmente. Nesse texto é tratado a falta de compreensão da Álgebra e ainda evidenciada a estrutura do pensamento algébrico (estudo de estrutura, simbolização, modelação e estudo da variação). Ao fim da análise do texto, assentou-se que a dificuldade dos alunos está no fato de que a mudança de 'sentido' dos símbolos matemáticos é feita de uma só vez e causa estranhamento na cabeça dos educandos.

Quinto encontro: O Grupo A, apresentou, em forma de seminário, as dimensões da Álgebra (aritmética generalizada, funcional, equações e estrutural). O grupo ao qual esse relatório se refere apresentou as dimensões: aritmética generalizada e Álgebra funcional. Na primeira, tem-se o uso de variáveis e expressões algébricas como generalizadoras de números, operações e modelos aritméticos. Já na segunda a Álgebra é considerada como estudo de relações entre grandezas. As dimensões "equações" e "estrutural" se referem, respectivamente, à caracterização da Álgebra como instrumento para resolução de problemas e ao cálculo algébrico, onde as letras assumem símbolos abstratos, e podem ser manipulados por meio das regras de operações aritméticas.

Sexto encontro: Apresentação de seminário sobre Sinal de Igualdade e Propriedade Distributiva. O texto fala sobre a importância da evolução da compreensão dos diferentes significados do símbolo "=". É importante identificar a variedade de significados que o sinal de igualdade pode assumir: podem representar fórmulas geométricas ($A=b.h$), expressões analíticas de funções ($f(x)=ax+b$), equações com incógnitas ($10=5x$), identidades ($a^2=b^2+c^2$) e relações aritméticas ($1=n.$, $n\neq0$). Nessa perspectiva, foi debatida a sugestão do uso de exemplos com balanças para uma melhor compreensão do conceito do igual como equivalência. Esse texto ainda mostra que a propriedade distributiva é um meio eficiente de demonstrar a igualdade no sentido de equivalência, porém os alunos - de um modo geral – possuem dificuldade quanto ao conceito de distributiva.

1.2) Elaboração da sequência didática

1.2.1) Tema

Progressão Aritmética: uma abordagem aliada à ideia de função afim.

1.2.2) Justificativa

Nota-se a eminente relevância do estudo de funções, evidenciando Função Afim por ser um dos fundamentadores deste trabalho. Tal relevância é descrita nos Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN+):

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática (BRASIL, 2002, p.121).

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio - PCNEM (BRASIL, 2000), sem dúvida, os elementos fundamentais de um eixo comum devem constituir uma série de temas ou tópicos em Matemática escolhidos a partir de critérios.

> O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência (BRASIL, 2000, p.43).

Pode-se observar ao ler o livro "Exame de Textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio", os autores de livros didáticos não tentam estabelecer relação entre a ideia de progressão aritmética e a ideia de aumento constante/proporcionalidade, e muito menos tentam conectar com tal assunto já abordado anteriormente, muitas vezes tratado em um volume diferente. Tal afirmação pode ser comprovada no trecho: "Finalmente, não há referência à conexão entre as progressões aritméticas e a função afim." (WAGNER e MORGADO, 2001, p. 118).

Em uma análise complementadora à citada acima Lima (2001) interfere:

> Não é feita a representação geométrica dos termos de uma progressão aritmética como pontos igualmente espaçados sobre uma reta, nem também é exibido o gráfico de uma sequência no plano cartesiano. Este último deixaria claro que uma progressão aritmética é simplesmente a restrição de uma função afim ao conjunto N ou ao conjunto dos números naturais ≤ n para um certo n. Esta conexão entre progressão aritmética e função afim é útil e deveria ser feita. Em primeiro lugar, por uma questão geral de princípio. Assuntos aparentemente diversos porém relacionados devem sempre ter sua conexão ressaltada (LIMA, 2001, p. 279, 280).

Em vista disso, relacionando Progressão Aritmética (PA) com Função Afim, constrói-se uma visão elaborada das diferentes linguagens do ramo matemático. Por conseguinte, promove a construção de conceitos algébricos de forma contextualizada e relevante para o aluno, permitindo que este estabeleça as devidas conexões entre os conceitos matemáticos, aproveitando ao máximo as relações existentes entre eles.

As sequências, em especial as progressões aritméticas e geométricas, nada mais são que casos particulares de funções e é preciso garantir que o ensino desses temas seja apresentado de forma relacionada (BRASIL, 2000).

Segundo Fonsêca (2013), a maior parte dos educadores de matemática trabalha o tema P.A. de forma mecânica e exclusivamente por meio de fórmulas que são expostas aos alunos sem a sua aplicabilidade com o cotidiano, analisando somente exercícios tradicionais em sala de aula.

De acordo com o exposto e conforme afirmado nos PCN+ (BRASIL, 2002), relacionar os conceitos de sequência constante, crescente ou decrescente com funções e suas representações gráficas, permite o aluno compreender melhor as ideias envolvidas.

1.2.3) Objetivo Geral

Possibilitar a compreensão da relação entre Progressão Aritmética e Função Afim, na intenção de que o aluno reconheça que a P.A. é um caso particular da Função Afim.

1.2.4) Público Alvo

Alunos do Segundo Ano do Ensino Médio.

2) RELATÓRIO DO LEAMAT II

2.1) Atividades desenvolvidas

No primeiro encontro, as orientadoras apresentaram o roteiro do LEAMAT II, evidenciando as mudanças feitas na matriz. Os encontros seguintes foram destinados à elaboração da sequência didática com o auxilio da orientadora, que trouxe algumas sugestões como a organização da apostila e o uso de software.

O encontro do dia 05/07 foi designado a apresentação de relatos de experiência dos alunos que haviam concluído a disciplina LEAMAT - 2015.2.

Nos encontros posteriores ocorreram as aplicações das sequências didáticas produzidas pela turma do LEAMAT II, para as orientadoras e alunos da disciplina.

2.2) Elaboração da sequência didática

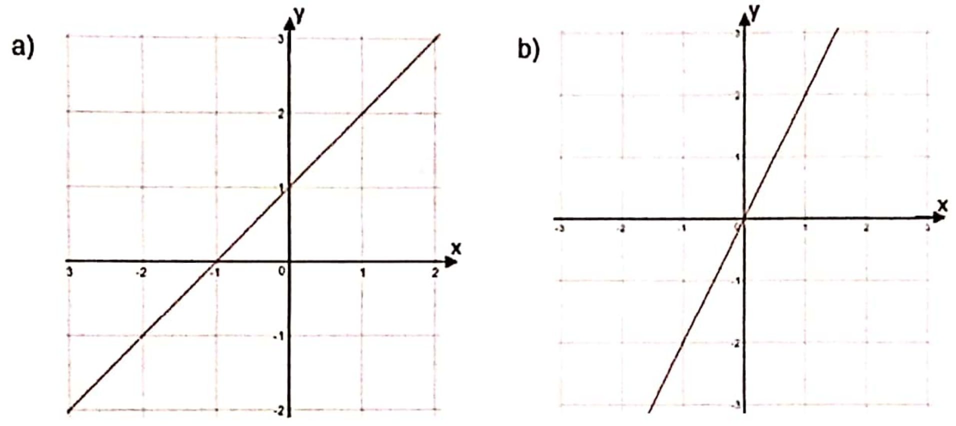
2.2.1) Planejamento da sequência didática

Primeiramente nos apresentaremos à turma, relatando brevemente o que será abordado na aula. Após a apresentação, será distribuída uma apostila sobre Função Afim, com o intuito de que os alunos relembrem o conteúdo. Esta conterá conceitos e exercícios, nos quais serão discutidos junto aos professores em formação.

O exercício 1 (figura 1) requer que os estudantes calculem a lei de formação e domínio de cada função graficamente apresentada. É necessário que os alunos identifiquem no mínimo dois pontos pertencentes ao gráfico, para primeiramente calcular o coeficiente angular e posteriormente, observando a intersecção com o eixo das ordenadas, definam o coeficiente linear.

Figura 1- Atividade de Função Afim

1- Determine a lei de formação e o domínio das seguintes funções:



Fonte: elaboração própria

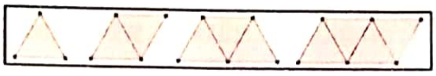
No exercício 2, os alunos terão que esboçar o gráfico de cada função dada e serão distribuídos tablets contendo um applet do geogebra[1], para que os alunos construam os gráficos, a fim de comparar o resultado descrito manualmente com o do aplicativo.

No exercício 3 (figura 2), os estudantes terão que observar uma sequência de triângulos formados por palitos, por conseguinte preencher a tabela exposta e encontrar a lei de formação da função.

[1] GeoGebra é um aplicativo de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra em uma única interface totalmente interativa.

Figura 2- Atividade de Função Afim

3) Observe a sequência de triângulos formados por palitos



a) Complete a tabela

Número de triângulos	Número de palitos
1	3
2	
3	
4	
5	
6	
n	

b) Qual a lei que expressa o número de palitos em função do número de triângulos?

____

d) Quantos palitos são necessários para formar 21 triângulos?

Fonte: elaboração própria

Posteriormente, entregaremos outra apostila contendo definição e exercícios de Progressão Aritmética. Esta seguirá o mesmo roteiro da primeira apostila, exceto o uso do tablet.

O objetivo do primeiro exercício é que o aluno analise se cada sequência é uma P.A. ou não, e em caso afirmativo encontre o primeiro termo e a razão. No exercício 2, pedimos para que marquem os pontos correspondentes aos termos gerais dados.

Na questão 3 (contextualizada), é proposto um problema com informações de despesa fixa e a quantidade de produtos vendidos por dia que cresce segundo uma P.A. O aluno deverá compreender qual é a relação entre os parâmetros do termo geral e os valores de receita e despesa, de modo a descobrir se em algum momento a despesa ultrapassa a receita ou não.

Será distribuida uma atividade final somente com exercícios na intenção de relacionar Função Afim e Progressão Aritmética.

No exercício 1, é dada uma sequência e uma função afim, com o objetivo de que os alunos comparem a imagem da função com os termos da sequência e verifiquem se existe um padrão entre eles. No exercício 2, evidenciamos que ao utilizar a propriedade distributiva no termo geral de uma P.A., encontramos um modelo semelhante ao da Função Afim. Na questão 3, queremos que os alunos identifiquem qual é a razão e o primeiro termo, apenas analisando-os e logo após, a fim de conferir o resultado, pedimos para calcularem os dois primeiros termos e a razão. Na última questão, pedimos que comparem os gráficos com a denotação de função e P.A. e respondam os itens que tem como objetivo evidenciar a relação entre os dois.

Para deixar claro que P.A. é uma Função afim com restrição no domínio, utilizaremos o tablet novamente, mostrando outro applet que deixa explícita essa relação.

2.2.2) Aplicação da sequência didática na turma do LEAMAT II

No dia 26 de setembro de 2016, a sequência didática da linha de pesquisa Álgebra foi aplicada para a turma do LEAMAT II e para as orientadoras de tal disciplina.

O grupo se apresentou e deu início à experimentação já distribuindo as apostilas que contém os conceitos, definições e atividades de função afim. Na resolução do item b da questão 2 dessa apostila, foram distribuídos tablets com o GeoGebra para auxiliar na restrição do domínio da função facilitando as observações dos alunos quanto ao comportamento do gráfico. Concluindo os exercícios dessa apostila, foi entregue a apostila de P.A. Os princípios foram relembrados e os exercícios contidos na apostila foram realizados pelos alunos antes de serem corrigidos.

Por fim, foi entregue a terceira e última apostila, que faz a relação entre os assuntos tratados anteriormente e focando, portanto, no objetivo desse trabalho. Dadas as relações alcançadas de forma intuitiva por parte da turma, mais uma vez recorremos ao GeoGebra, para que de uma forma geral, os alunos pudessem manipular as funções e termos das P.A. observando seus respectivos comportamentos e sanar qualquer tipo de dúvida e/ou desconfiança quanto à relação entre os temas.

3) Relatório do LEAMAT III

3.1) Atividades desenvolvidas

No dia 18 de outubro de 2016 ocorreu o primeiro encontro, onde as orientadoras entregaram um planejamento como forma de organizar nossas atividades do LEAMAT III. Os dias seguintes foram destinados à produção do material da sequencia didática e apresentação da mesma. Após a apresentação de todas as linhas de pesquisas, as aulas foram designadas a confecção do relatório final.

3.2) Elaboração da sequência didática

3.2.1) Versão final da sequência didática

Após a aplicação da sequência didática para a turma do LEAMAT II, levantaram-se discussões para apontar as mudanças necessárias que compreendiam correção de caráter técnico e formatação em alguns fragmentos de toda a apostila aplicada. Quanto às apostilas, também foi sugerido o aumento no tamanho dos gráficos, tanto na parte de Função Afim, quanto na de Progressão Aritmética e adicionar gráfico que demonstrasse o comportamento da função afim quando o coeficiente linear (b) é igual a 0.

Na questão 3, ainda na parte de função afim, foi pedido para alterar o enunciado de "Observe a sequência de triângulos formados por palitos" para "Na figura a seguir, os lados dos triângulos são formados por palitos, observe a sequência e preencha a tabela." e também retirar o item a.

No bloco destinado apenas à Progressão Aritmética requisitou-se reformulações nos enunciados das questões 2 e 3. A sugestão foi de se fazer um enunciado mais objetivo. Já na Atividade Final que relaciona Função Afim e Progressão Aritmética, propôs-se correção no enunciado da questão 1 e nos itens que buscam a relação entre o domínio de uma Função Afim que segue o modelo de uma P.A. e o padrão que segue a imagem desta referida Função.

3.2.2) Experimentação da sequência didática na turma regular

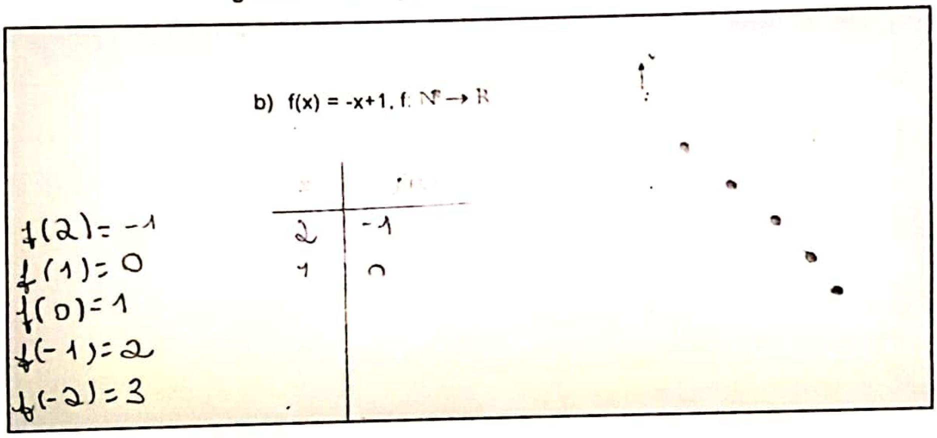
No dia 16 de novembro de 2016, o grupo aplicou a sequência em uma turma do segundo ano do Ensino Médio do Instituto Federal Fluminense – *campus* Campos Centro. Estavam presentes 18 alunos e a aula teve duração de 12:30 às 14:10 (2 horas/aula), entretanto, por ser uma aula onde os alunos voltavam do almoço, a aula começou quinze minutos após o horário previsto.

O grupo iniciou as atividades se apresentando e apresentando a disciplina LEAMAT. Logo após, foi entregue aos alunos os materiais propostos para a realização da aula, como: régua, apostila e tablet. Por conta de erro na impressão das apostilas que gerou dificuldades na leitura, o grupo projetou a apostila em uma televisão.

A primeira Licencianda revisou com os alunos os principais conceitos e propriedades de Função Afim que seriam indispensáveis no processo desta sequência didática. Assim, os alunos fizeram os exercícios acompanhados por uma segunda Licencianda de modo a fixar tais conceitos, bem como sanar dúvidas referentes ao conteúdo.

Nos exercícios 1, e 2 (item a), os alunos tiveram o desempenho esperado. No item b, conforme o imaginado houve uma dificuldade pelo fato de não perceberem a restrição do domínio da função, que nesse caso era o conjunto dos naturais (figura 3).

Figura 3- Resolução de Atividade Função Afim



Fonte: Protocolo de Pesquisa

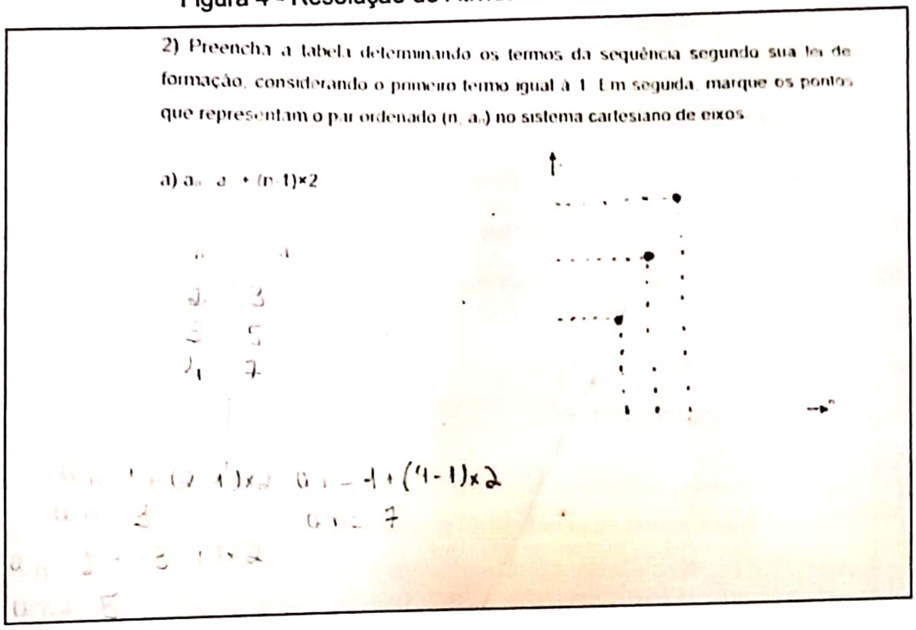
Após a correção, os alunos tiveram mais atenção quanto ao domínio, o que fez com que percebessem que ao restringir o domínio de uma função afim ao conjunto dos naturais, o gráfico obtido é idêntico ao gráfico de uma P.A.

No exercício 3, a maior dificuldade apresentou-se na generalização do número de palitos em função do número de triângulos. Ao perguntar qual seria a resposta o Aluno A disse que n triângulos é igual a n palitos, já um Aluno B disse que seria n + 2, mas logo após a resposta do Aluno C que foi 3+2n, o aluno B mudou sua opinião dizendo que a resposta certa seria 2n + 1, que é exatamente o resultado esperado.

Após os exercícios de Função Afim, uma terceira licencianda disse que iria rever alguns conceitos de Progressão Aritmética, mas antes passou a seguinte sequência no quadro: 6 7 9 13 21 X. A intenção era descobrir qual era o valor de X obedecendo ao padrão. Os estudantes deram palpites, mas não condiziam quando era analisado. Até que dois alunos falaram o resultado correto, sendo este 37 e disseram o padrão correto. A licencianda deu continuidade à explicação de P.A., que continha definição, classificação e generalização do termo geral e logo após pediu para que os alunos fizessem os exercícios posteriores.

Na primeira questão, os alunos tiveram um tempo para resolver cada item e não tiveram dificuldade. No exercício 2, alguns alunos fizeram uma reta ao invés de pontos, mesmo contendo no enunciado: "Em seguida, marque os pontos que representam o par ordenado (n, a_n) no sistema cartesiano de eixos" (figura 4).

Figura 4 - Resolução de Atividade de P.A. e Gráfico



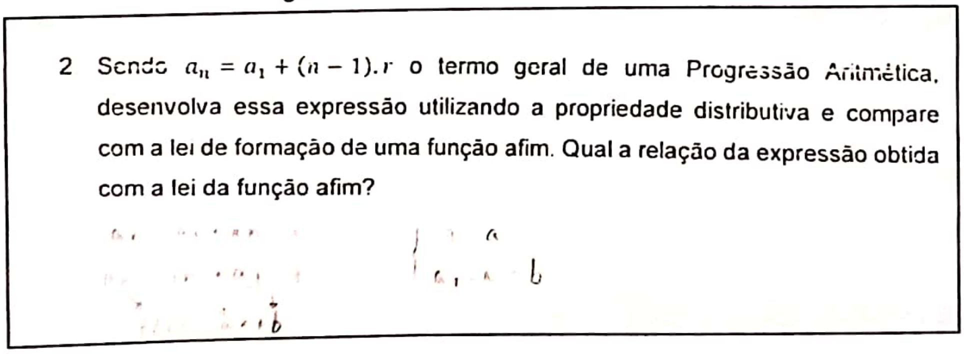
Fonte: Protocolo de Pesquisa

No exercício 3, por ser contextualizado e faltar pouco tempo para o término da aula, o integrante do grupo responsável pela resolução desta questão optou por resolvê-la junto com os estudantes. A situação presente na questão contextualizada poderia ser interpretada segundo uma P.A., o que foi alcançado pelos alunos. Assim foi possível analisar sua aplicabilidade no cotidiano. No item a, portanto, os alunos conseguiram associar os elementos do termo geral da P.A. com parâmetros reais presentes na situação em questão. No item b, os alunos usaram esse termo geral para obter previamente informações que seriam relevantes na realidade, como a previsão dos meses em que o gasto superaria o lucro.

Por fim, os alunos começaram a resolver os exercícios da Atividade Final. O exercício 1 foi resolvido junto com os alunos, pois o tempo da aula estava acabando. A princípio, eles tiveram dificuldade em descrever o padrão existente nos números encontrados, mas com o auxílio da licencianda, eles conseguiram verificar o padrão e o descreveram corretamente.

O exercício 2 também foi feito junto com os estudantes, uma vez que após ser lida a questão muitos alunos ficaram em dúvidas sobre como aplicar a propriedade distributiva da multiplicação. Assim que a licencianda aplicou a distributiva, ela evidenciou que o *n* nesta questão é a variável, o a_n representaria o f(x), com isso alguns alunos conseguiram relacionar os conteúdos abordados, tanto que um aluno fez um comentário após a explicação, dizendo que o r que acompanha a variável *n* é o mesmo que o *a* (coeficiente angular) numa função afim, já $a_1 - r$ seria o *b* (coeficiente linear). Outros alunos escreveram na própria apostila à relação existente entre função afim e progressão aritmética (figura 5). Os resultados apresentados pelos alunos nessa questão foram compatíveis com os esperados pelos licenciandos, uma vez que foram estimulados a percorrer o caminho que levava a tal conclusão.

Figura 5: Resolução de Atividade Final

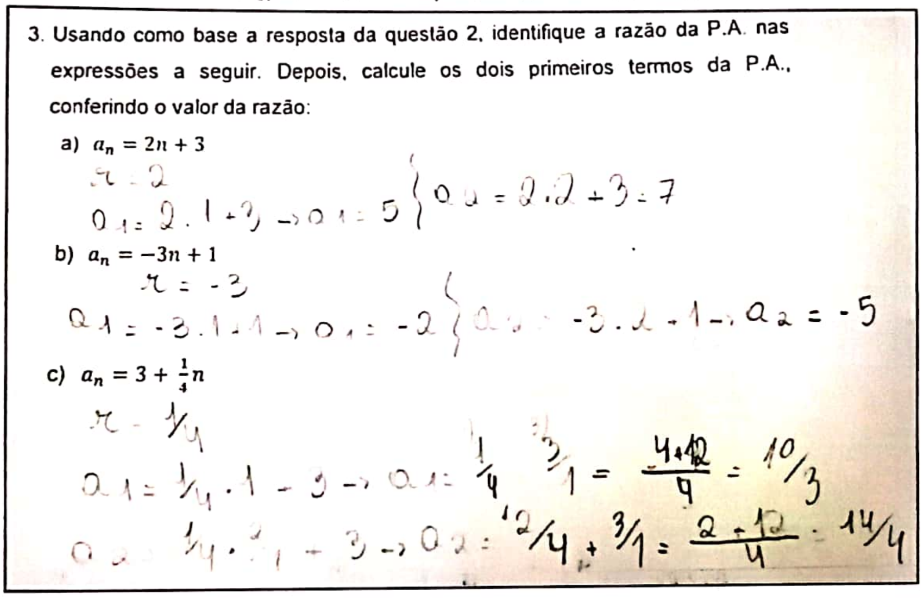

2 Sendo $a_n = a_1 + (n - 1).r$ o termo geral de uma Progressão Aritmética, desenvolva essa expressão utilizando a propriedade distributiva e compare com a lei de formação de uma função afim. Qual a relação da expressão obtida com a lei da função afim?

Fonte: Protocolo de Pesquisa

O exercício 3 foi uma ferramenta para identificar se os alunos realmente entenderam a analogia do exercício anterior. A professora em formação resolveu junto à turma o item "a", evidenciando que o coeficiente angular da função afim é a razão da P.A e que o primeiro termo é calculado igualando o coeficiente linear a a_1-r. Com isso, a licencianda pediu que os alunos fizessem o item "b" e "c", conferindo posteriormente os resultados encontrados.

No item “b” a maioria dos alunos respondeu corretamente, já no item “c” alguns confundiram a razão, pois os termos não estavam na ordem que normalmente é apresentado. (Figura 6)

Figura 6: Resolução de Atividade Final



3. Usando como base a resposta da questão 2, identifique a razão da P.A. nas expressões a seguir. Depois, calcule os dois primeiros termos da P.A., conferindo o valor da razão:

a) $a_n = 2n + 3$

r = 2
a1 = 2.1+3 → a1 = 5 { a2 = 2.2+3 = 7

b) $a_n = -3n + 1$

r = -3
a1 = -3.1+1 → a1 = -2 { a2 = -3.2+1 → a2 = -5

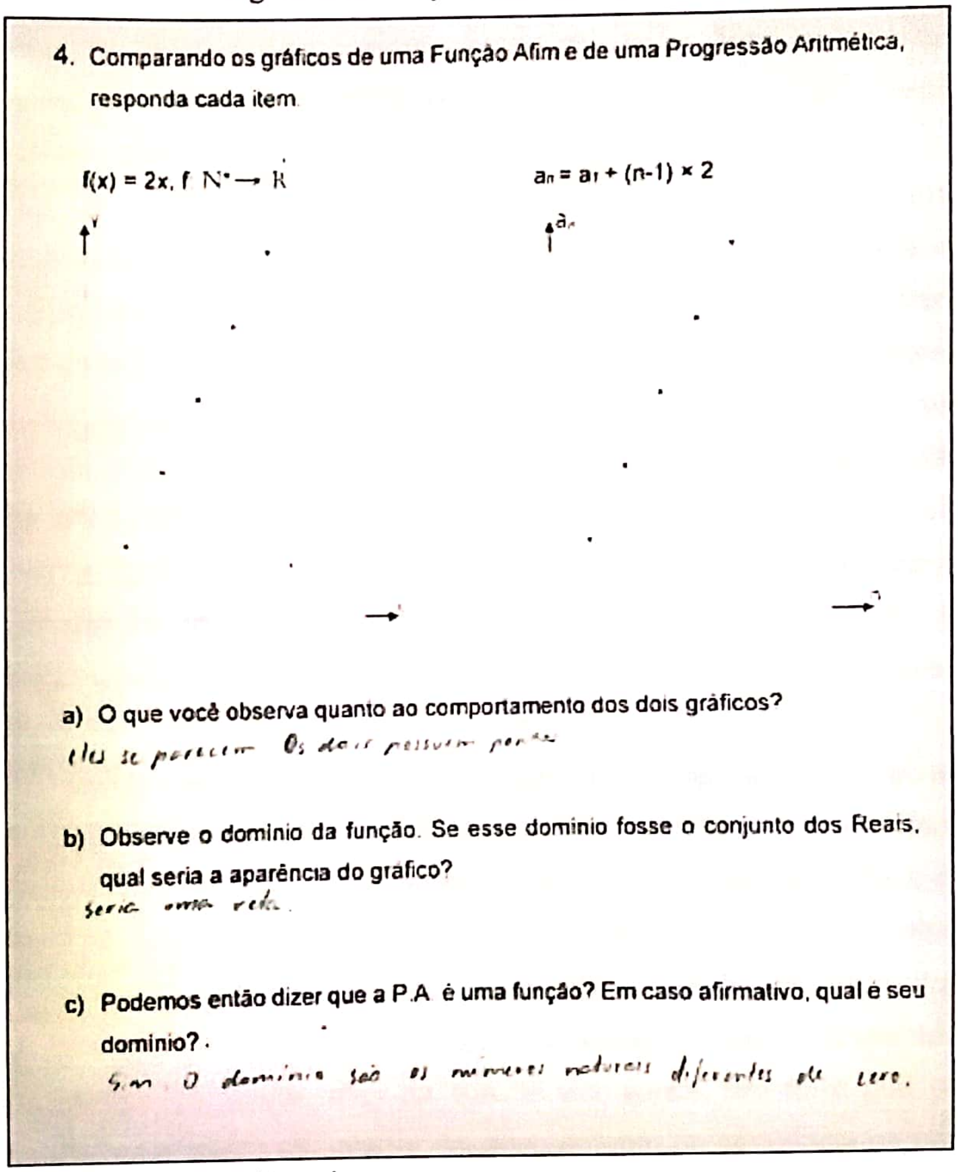
c) $a_n = 3 + \frac{1}{4}n$

r = 1/4
a1 = 1/4.1 + 3 → a1 = 1/4 + 3/1 = (4+12)/4 = 10/3
a2 = 1/4.2/1 + 3 → a2 = 2/4 + 3/1 = (2+12)/4 = 14/4

Fonte: Protocolo de Pesquisa

No último exercício dessa sequência, os alunos demonstraram a compreensão desejada pelo grupo acerca da relação existente entre P.A. e função afim. Com as respostas obtidas nos itens “a”, “b” e “c” dessa questão – principalmente nas respostas do item “c” – torna-se claro que a relação entre os assuntos abordados foi feita corretamente (figura 7).

Figura 7: Resolução de Atividade Final



4. Comparando os gráficos de uma Função Afim e de uma Progressão Aritmética, responda cada item.

$f(x) = 2x, f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$

$a_n = a_1 + (n-1) \times 2$

a) O que você observa quanto ao comportamento dos dois gráficos?

Eles se parecem. Os dois possuem pontos

b) Observe o domínio da função. Se esse domínio fosse o conjunto dos Reais, qual seria a aparência do gráfico?

Seria uma reta.

c) Podemos então dizer que a P.A é uma função? Em caso afirmativo, qual é seu domínio?

Sim. O domínio são os números naturais diferentes de zero.

Fonte: Protocolo de Pesquisa

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A aplicação desta sequência didática, que tinha como propósito possibilitar ao aluno a compreensão da relação entre Progressão Aritmética e Função Afim, para que o aluno reconheça que a P.A. é um caso particular da Função Afim cumpriu o objetivo.

Da experiência obtida na aplicação do trabalho, o grupo observou que é importantíssimo considerar o contexto em que o público alvo está inserido. Percebeu-se que por se tratar de alunos do segundo ano do Ensino Médio e os discentes já terem visto os conteúdos (separados) anteriormente no primeiro ano, não ficaram tão interessados. A novidade seria a relação entre tais conteúdos, no entanto não havia um compromisso acadêmico direto (a matéria não seria cobrada em nenhuma atividade avaliativa para obtenção de nota parcial no bimestre), e dessa forma os alunos também não se sentiram tão atraídos. O interesse poderia vir com o uso dos *tablets*, o que aconteceu, porém em uma escala menor que a esperada, visto que o manuseio desses dispositivos é mais comum no IFF, onde a sequência foi aplicada.

O uso dos *tablets* ajudou diretamente na percepção de que ao restringir o domínio de uma função afim, o gráfico obtido era semelhante ao gráfico de uma P.A.. Portanto, a interpretação geométrica com o uso de tecnologia foi o caminho de entrada para que os alunos compreendessem a relação entre os conteúdos. O passo seguinte foi onde houve maior resistência: a relação expressa através da álgebra. Porém grande parte dos alunos conseguiu encontrar a representatividade dos coeficientes da função afim na P.A. e vice-versa. Um fator que pode ter atrapalhado ligeiramente um melhor desenvolvimento da sequência na parte final da aula foi a falta de pontualidade da turma, o que obrigou o grupo a ser mais rápido e direto nesta parte da aplicação.

Ao fim da aplicação, acredita-se que tenha ficado clara para a turma a importância da relação feita, pois além de contextualizar e tornar os assuntos mais dinâmicos, a turma percebeu que podem recorrer às funções afins para resolver problemas de P.A., e que uma P.A. não necessariamente é um assunto "novo" e possivelmente "complicado", mas que pode ser interpretada como um caso particular de funções afins. Assim, os alunos que se simpatizam com funções terão maior interesse pelas Progressões Aritméticas.

Para o grupo a aplicação desta sequência foi um fator direcionador da maneira na qual o uso da tecnologia deve ser feito, e mais que isso, reafirmou para cada componente do grupo a importância da intradisciplinalidade, de que a matemática é uma união de conteúdos e que eles estão correlacionados. Que a matemática tem que ser trabalhada de forma homogenia.

A conclusão foi de que o uso da tecnologia como auxiliadora no processo de ensino-aprendizagem pode e deve ser feita, aliás, essa ferramenta foi fundamental. Mas também, é importantíssima a utilização do registro de representação semiótica, isto é, que haja relação entre campos da Matemática e que seja feita ainda na série onde os assuntos são abordados, até mesmo como parte da matéria. Assim, o interesse por parte dos alunos tende a ser maior.

Como sugestão para trabalhos futuros o grupo sugere que se trabalhe a Correlação de Função Exponencial e Progressão Geométrica.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN+) - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Brasília: MEC, 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 28 abr. 2016.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio).** Brasília: MEC, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Acesso em: 02 maio 2016.

FONSECA, N. P. D. da. Uma proposta alternativa para o ensino progressões relacionadas a funções. 2013. 41 f. Dissertação (Mestrado em Álgebra; Análise matemática; Ensino de matemática; Geometria e topologia; Matemática aplicada) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2013. Disponível em: <https://repositorio.ufrn.br/jspui/handle/123456789/18658>. Acesso em: 20 mar. 2017.

PONTE, J. P. da. **Números e Álgebra no Currículo Escolar**, Lisboa, s.d. Disponível em: <http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/4525/1/06-Ponte(Caminha).pdf>. Acesso em: 02 de fev de 2016.

SOUTO, M. S. D. et. al. **Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática: espaço para formação do professor-pesquisador.** In: Encontro Nacional de Educação matemática, X, 2010, Salvador. Disponível em: <http://www.lematec.net/CDS/ENEM10/artigos/RE/T18_RE1277.pdf.>. Acesso em: 18 de abr de 2016.

WAGNER, E.; ELON, L. L. Matemática, Contexto e Aplicações - volume 1. In: LIMA, E. L. (Ed.). **Exame de Textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio**, 2001. p.279-280.

WAGNER, E.; MORGADO, A. C. Matemática - volume 2. In: LIMA, E. L. (Ed.). **Exame de Textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio**, 2001. p.118

APÊNDICES

Apêndice A: Material didático aplicado na turma do LEAMAT II

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

LABORATÓRIO DE ENSINO E APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA
LEAMAT/ 2016.1

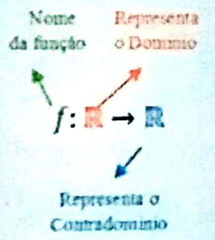
Linha de pesquisa: Ensino e Aprendizagem de Álgebra
Orientadora: Profª. Me. Lívia Azelman de Faria Abreu
Co-orientadora: Profª. Me. Ana Mary Fonseca Barreto de Almeida.
Professores em formação: Letícia Carvalho Maciel, Letícia Viveiros de Souza, Lucas Franco Belém de Freitas e Ranna de Jesus Ambrosio.
Aluno (a): ____ Data: ____/____/____

Função Afim

- **Definição**

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada função afim quando existem dois números reais *a* e *b* tais que $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Na representação $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ temos que:



Lembrando que $\mathbb{R}$ representa o conjunto dos números reais.

Existe definição de função afim que exige que a seja diferente de zero. Nesta apostila, estamos adotando a definição acima, que é baseada em Lima et al. (2012).

1

[2] Definição retirada do livro: LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. A Matemática do Ensino Médio. 10. ed., v.1. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática: Rio de Janeiro, 2012.

Exemplos:

a) y = 3x + 1, a = 3 e b = 1

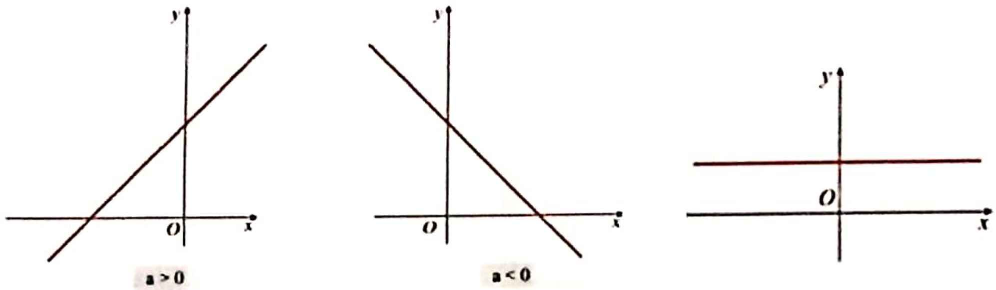
b) y = -x + 5, a = -1 e b = 5

c) y = 4x, a = 4 e b = 0

d) y = 6, a= 0 e b= 6

- **Gráfico**

O gráfico de uma função afim f é uma reta não perpendicular ao eixo das abscissas. Esse gráfico é obtido representando-se dois pontos distintos de f e traçando-se a reta que passa por eles.

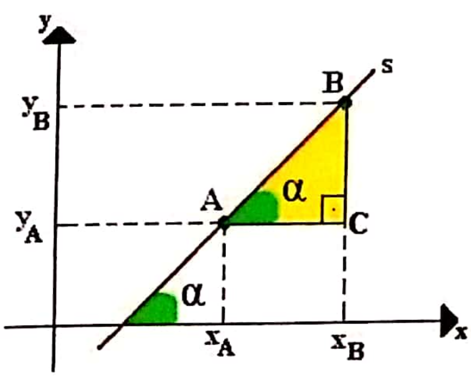


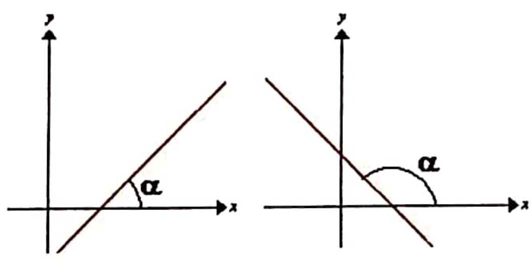
a≠0 **a≠0** **a=0**

- **Lei de formação da função afim:**

$$f(x) = \overbrace{a}^{\text{Coeficiente angular}}x + \underbrace{b}_{\text{Coeficiente linear}}$$

➢ Coeficiente angular:

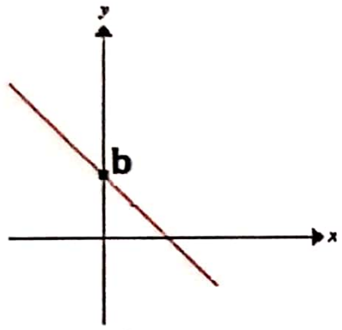




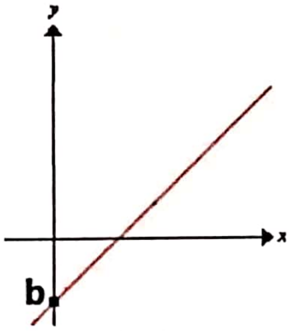
$$a = \frac{yB - yA}{xB - xA} = tg\ \alpha$$

- **Coeficiente linear:**

A ordenada do ponto em que a reta intersecta o eixo Oy.



b>0



b<0

- Encontrando a Lei de formação de uma função afim dado um ponto do gráfico e o coeficiente angular:

Exemplo: A lei de formação da função cujo gráfico passa pelo ponto (1,4) com coeficiente angular a = -2, é dada por: f(x) = -2x + 6.

De fato:
Dada a lei da função afim: y = ax + b,
substituindo as variáveis *x* e *y* por 1 e 4, respectivamente, e o coeficiente angular *a* por -2, temos:

$$4 = (-2).1 + b$$

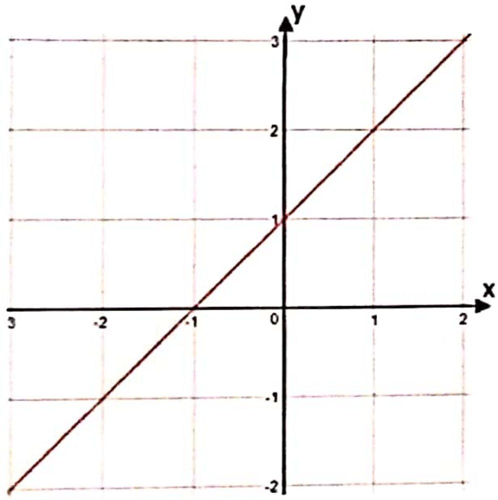
O que resulta em b = 6.

Logo, a lei que expressa a função afim é: y = -2x + 6.

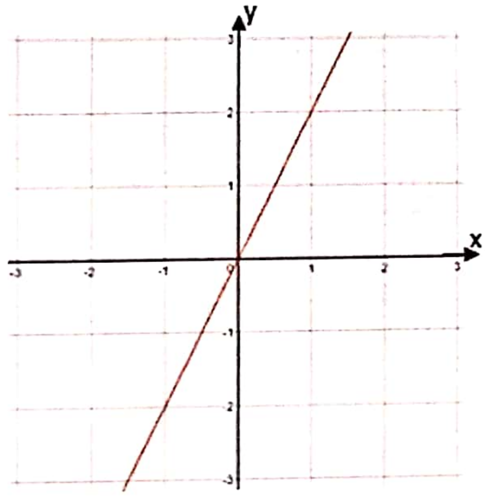
Exercícios

1- Determine a lei de formação e o domínio das seguintes funções:

a)



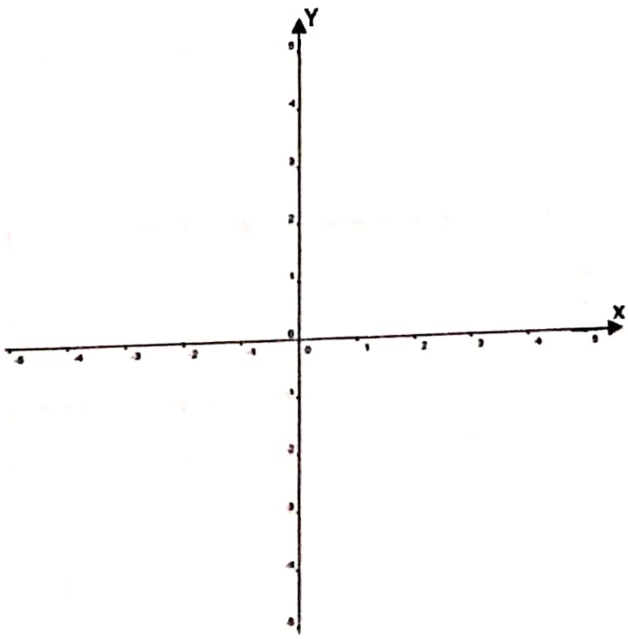
b)



2- Esboce o gráfico das funções e compare a resposta utilizando o software Geogebra:

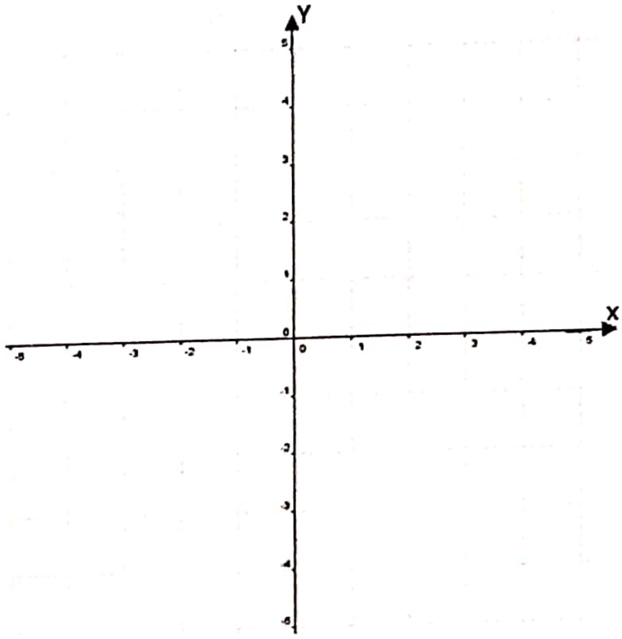
a) $f(x) = 2x - \frac{1}{2}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

x	$f(x)$

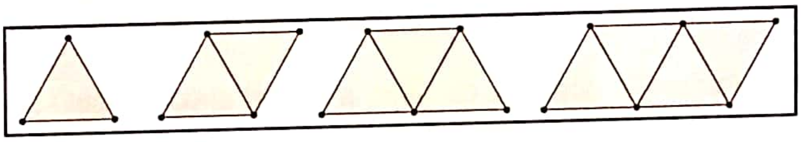


b) f(x) = -x+1, f: $\mathbb{N}^* \rightarrow$

x	$f(x)$



3) Observe a sequência de triângulos formados por palitos:



a) Complete a tabela:

Número de triângulos	Número de palitos
1	3
2	
3	
4	
5	
6	
n	

b) Qual a lei que expressa o número de palitos em função do número de triângulos?

____

d) Quantos palitos são necessários para formar 21 triângulos?

Progressão Aritmética

- **Definição**

Progressão Aritmética (PA) é toda sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior com uma constante denominada razão r.

Exemplos:

a) (4, 9, 14, 19, 24, 29) é uma PA finita de razão r = 5.

b) (18, 10, 2, -6, -14, ...) é uma PA infinita de razão r = -8.

c) (4, 4, 4, 4, ...) é uma PA infinita de razão r = 0.

- **Classificação**

Podemos classificar as progressões aritméticas em crescente, decrescente ou constante.

- <u>Crescente</u>: Quando cada termo, a partir do segundo, é maior que o anterior. Isso só ocorre quando a razão é positiva.

Exemplo: (6, 10, 14, 18, ...)

- <u>Decrescente</u>: Quando cada termo, a partir do segundo, é menor que o anterior. Isso só ocorre quando a razão é negativa.

Exemplo: (13, 8, 3, -2, -7, ...)

- <u>Constante</u>: Quando todos os seus termos são iguais. Isso só ocorre quando a razão é nula.

Exemplo: $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, ...)$

- **Termo Geral**

Considere uma PA finita qualquer $(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n)$ de razão r. Sabemos que:

$\rightarrow a_2 = a_1 + r$

$\rightarrow a_3 = a_2 + r \rightarrow a_3 = a_1 + r + r \rightarrow a_3 = a_1 + 2r$

$\rightarrow a_4 = a_3 + r \rightarrow a_4 = a_1 + 2r + r \rightarrow a_4 = a_1 + 3r$

...

→ $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

Logo, o termo geral de uma PA pode ser calculado a partir desta fórmula.

Exemplo: Calcule o 16º termo de uma PA, sabendo que $a_1 = -10$ e $r = 3$.

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

$a_{16} = -10 + (16 - 1) \cdot 3$

$a_{16} = -10 + 15 \cdot 3$

$a_{16} = 35$

R: O 16º termo desta PA é 35.

Exercícios:

1) Analise se cada uma das sucessões numéricas a seguir é uma progressão aritmética. Em caso afirmativo, indique o primeiro termo e a razão.

a) (-1, 2, 5, 8, 11)

c) (2, 2, 2, 2, 2)

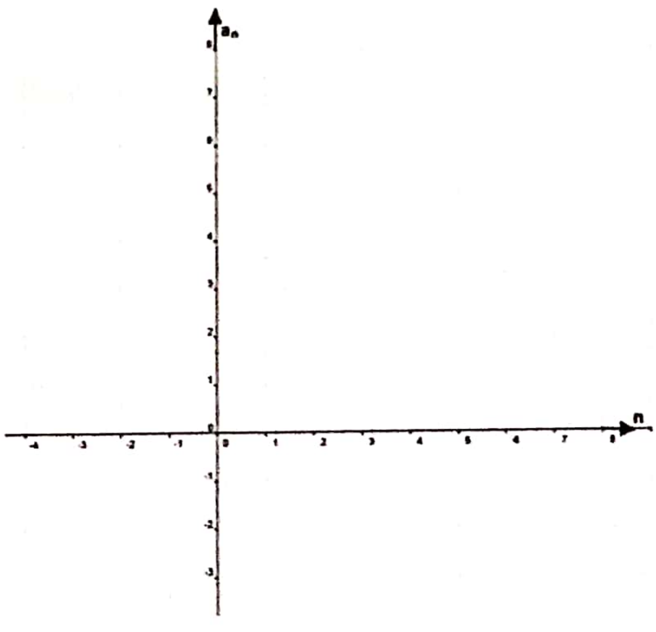
b) (2, 10, 12, 20)

d) (1, 4, 9, 16, 25)

2) Marque os pontos definidos pelos termos dados, onde o primeiro termo é 1.

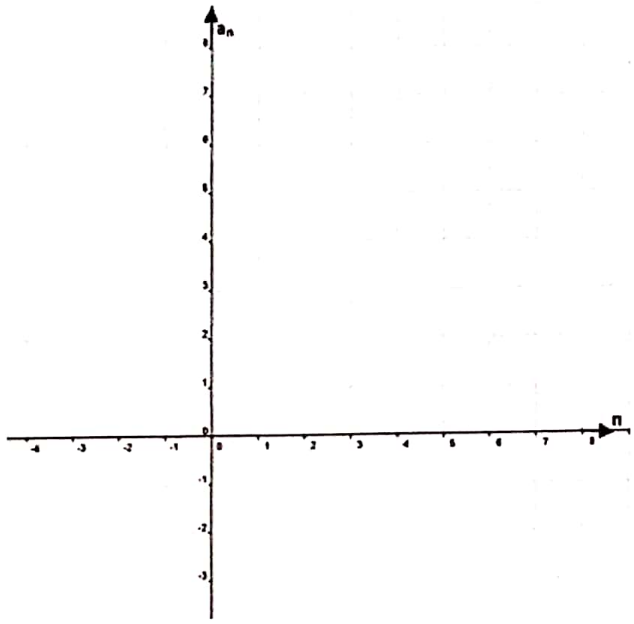
a) $a_n = a_1 + (n-1) \times 2$

n	a_n



b) $a_n = a_1 + (n-1)\times(-3)$

n	a_n



3) Uma fábrica gasta R$15000,00 mensais entre salários e custo de produção, independente da quantidade de blusas produzidas. O valor de venda de cada blusa é de 10 reais. Se essa fábrica vende 2 blusas no primeiro dia, 5 no segundo, 8 no terceiro e assim sucessivamente, responda:

a) A produção cresce em Progressão Aritmética? Se sim, qual é o termo geral dessa PA?

b) A partir de qual dia essa fábrica passa a lucrar?

Atividade Final

1. Considere a sequência: (1, 4, 7, 10) e a função definida por f(x)= 2x+1. Encontre o valor de:
   a) f(1)= ______________________________
   b) f(4)= ______________________________
   c) f(7)=______________________________
   d) f(10)=______________________________

Escreva os resultados encontrados nas letras **a, b, c** e **d** respectivamente: _____, _____, _____, _____.

O que você observa nos resultados encontrados? ____
____
____.

2. Sendo o termo geral da Progressão Aritmética, $an = a_1 + (n-1).r$, desenvolva a expressão pela propriedade distributiva e descreva o comportamento obtido.

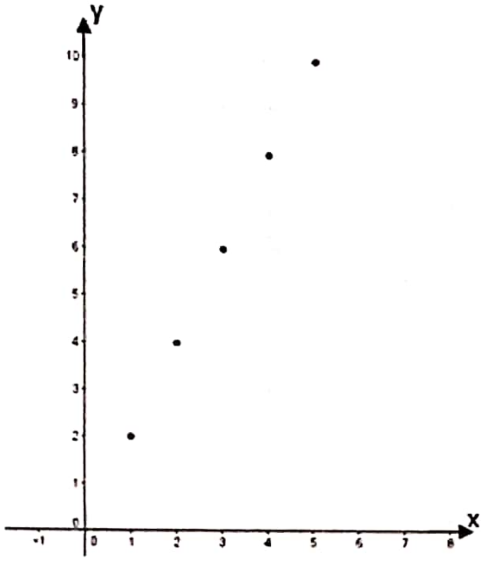
3. Usando como base a resposta da questão 2, identifique a razão nas expressões a seguir, depois calcule os dois primeiros termos, conferindo o valor da razão:
   a) $an = 2n + 3$

   b) $an = -3n + 1$

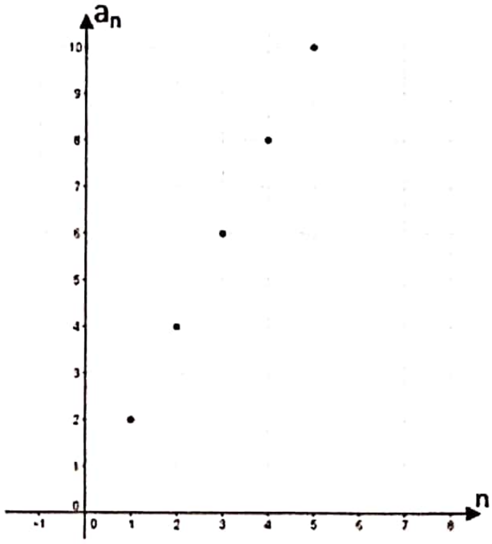
   c) $an = 3 + \frac{1}{4}n$

4. Comparando os gráficos de uma Função Afim e de uma Progressão Aritmética, responda cada item.

$f(x) = 2x$, $f: \mathbb{N}^* \to$



$a_n = a_1 + (n-1) \times 2$



a) Quais as semelhanças entre os dois gráficos? Ao desenvolver o termo geral da PA, aplicando a propriedade distributiva, qual a relação da expressão obtida com a lei da função do primeiro gráfico?

b) Observe o domínio da função. Se esse domínio fosse o conjunto dos Reais, qual seria a aparência do gráfico?

c) Podemos então dizer que a PA é uma função? Se sim, qual seria seu domínio?

Apêndice B: Material didático experimentado na turma regular

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Fluminense campus Campos Centro
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

LABORATÓRIO DE ENSINO E APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA
LEAMAT/ 2016

Orientadora: Profª. Me. Lívia Azelman de Faria Abreu
Co-orientadora: Profª. Me. Ana Mary Fonseca Barreto de Almeida.
Professores em formação: Letícia Carvalho Maciel, Letícia Viveiros de Souza, Lucas Franco Belém de Freitas e Ranna de Jesus Ambrosio.
Aluno (a): ____ Data: ____/____/____

Função Afim

- **Definição**

> **Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada função afim quando existem dois números reais *a* e *b* tais que $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$.**[1]

> Na representação $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ temos que:
>
> Nome da função
>
> Representa o Domínio
>
> $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
>
> Representa o Contradomínio
>
> Lembrando que $\mathbb{R}$ representa o conjunto dos números reais.

> Existe definição de função afim que exige que *a* seja diferente de zero. Nesta apostila, estamos adotando a definição acima, que é baseada em Lima et al. (2012).

[3] Definição retirada do livro: LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. A Matemática do Ensino Médio. 10. ed., v.1. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática: Rio de Janeiro, 2012.

Exemplos:

a) y = 3x + 1, a = 3 e b = 1

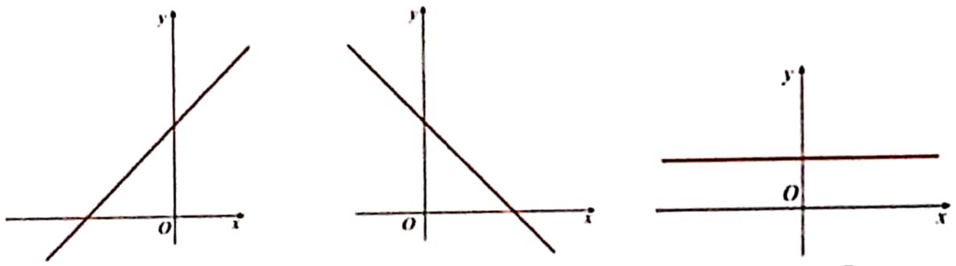
b) y = -x + 5, a = -1 e b = 5

c) y = 4x, a = 4 e b = 0

d) y = 6, a= 0 e b= 6

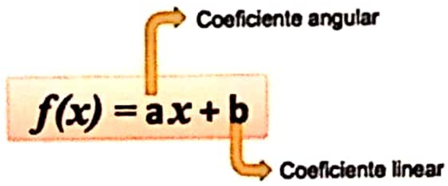
- **Gráfico**

O gráfico de uma função afim f é uma reta não perpendicular ao eixo das abscissas. Esse gráfico é obtido representando-se dois pontos distintos de f e traçando-se a reta que passa por eles.

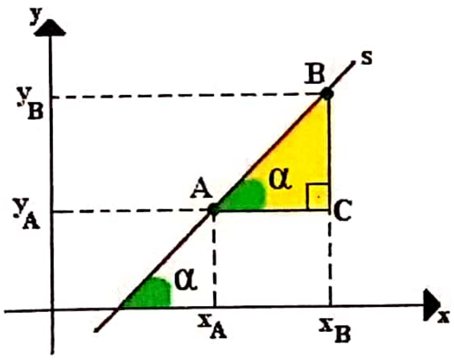


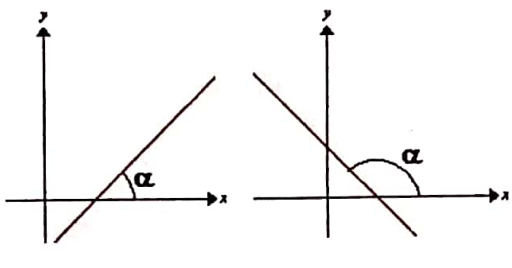
$a > 0$ $a < 0$ $a = 0$

- **Lei de formação da função afim:**



➢ Coeficiente angular:

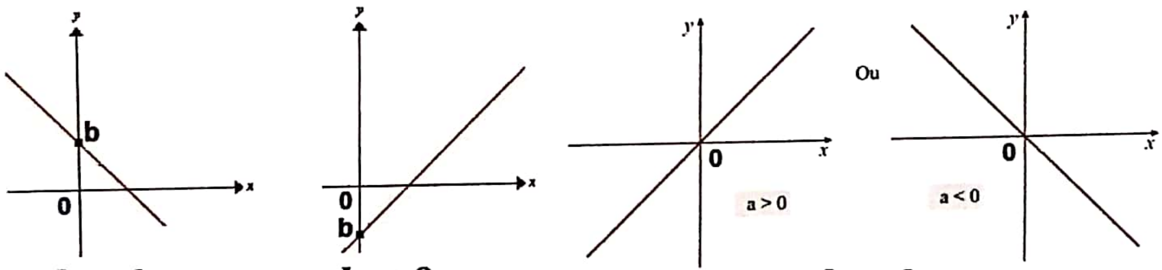




$$a = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = tg\ \alpha$$

- Coeficiente linear:

A ordenada do ponto em que a reta intersecta o eixo Oy.



$b > 0$ $b < 0$ $b = 0$

- Encontrando a Lei de formação de uma função afim dado um ponto do gráfico e o coeficiente angular:

Exemplo: A lei de formação da função cujo gráfico passa pelo ponto (1,4) com coeficiente angular a = -2, é dada por: f(x) = -2x + 6.

De fato:
Dada a lei da função afim: y = ax + b, substituindo as variáveis *x* e *y* por 1 e 4, respectivamente, e o coeficiente angular *a* por -2, temos:

$$4 = (-2).1 + b$$

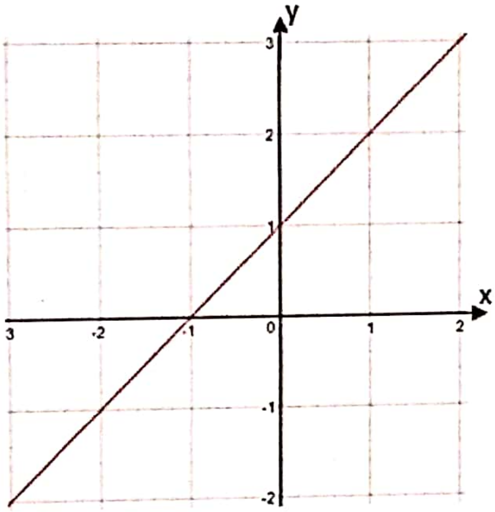
O que resulta em b = 6.

Logo, a lei que expressa a função afim é: y = -2x + 6.

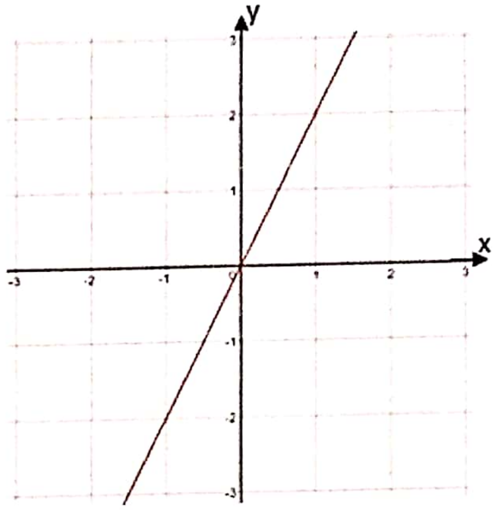
Exercícios

1- Determine a lei de formação e o domínio das seguintes funções:

a)



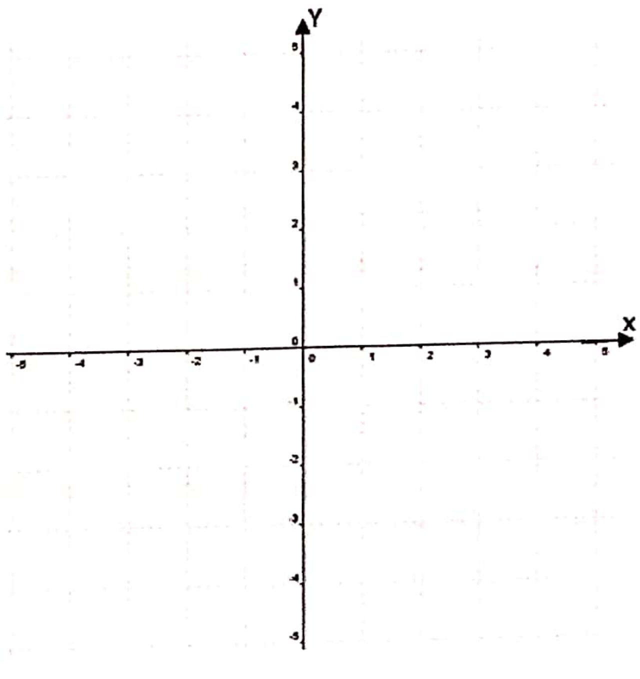
b)



2- Esboce o gráfico das funções e compare a resposta utilizando o *software* Geogebra:

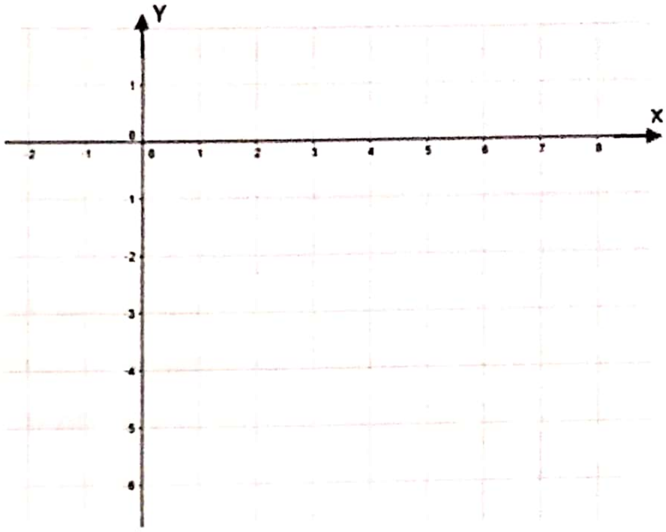
a) $f(x) = 2x - \frac{1}{2}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

x	$f(x)$

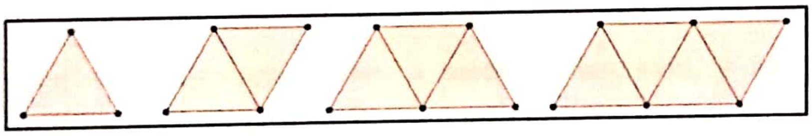


b) $f(x) = -x+1$, $f: \mathbb{N}^{*} \rightarrow \mathbb{R}$

x	$f(x)$



3- Na figura a seguir, os lados dos triângulos são formados por palitos, observe a sequência e preencha a tabela.



Número de triângulos	Número de palitos
1	3
2	
3	
4	
5	
6	
⋮	⋮
n	

a) Qual a lei que expressa o número de palitos em função do número de triângulos?

____

b) Quantos palitos são necessários para formar 21 triângulos?

Progressão Aritmética

- **Definição**

Progressão Aritmética (P.A.) é toda sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior com uma constante denominada razão r.

Exemplos:

a) (4, 9, 14, 19, 24, 29) é uma P.A. finita de razão r = 5.

b) (18, 10, 2, -6, -14, ...) é uma P.A. infinita de razão r = -8.

c) (4, 4, 4, 4, ...) é uma P.A. infinita de razão r = 0.

- **Classificação**

Podemos classificar as progressões aritméticas em crescente, decrescente ou constante.

- Crescente: Quando cada termo, a partir do segundo, é maior que o anterior. Isso só ocorre quando a razão é positiva.

Exemplo: (6, 10, 14, 18, ...)

- Decrescente: Quando cada termo, a partir do segundo, é menor que o anterior. Isso só ocorre quando a razão é negativa.

Exemplo: (13, 8, 3, -2, -7, ...)

- Constante: Quando todos os seus termos são iguais. Isso só ocorre quando a razão é nula.

Exemplo: $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \ldots)$

- **Termo Geral**

Considere uma P.A. finita qualquer $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n)$ de razão r. Sabemos que:

$\rightarrow a_2 = a_1 + r$

$\rightarrow a_3 = a_2 + r \rightarrow a_3 = a_1 + r + r \rightarrow a_3 = a_1 + 2r$

$\rightarrow a_4 = a_3 + r \rightarrow a_4 = a_1 + 2r + r \rightarrow a_4 = a_1 + 3r$

$\vdots$

$\rightarrow a_n = a_1 + (n-1) \,.\, r$

Logo, o termo geral de uma P.A. pode ser calculado a partir desta fórmula.

Exemplo: Calcule o 16º. termo de uma P.A., sabendo que $a_1 = -10$ e $r = 3$.

$a_n = a_1 + (n - 1) . r$

$a_{16} = -10 + (16 - 1) . 3$

$a_{16} = -10 + 15 . 3$

$a_{16} = 35$

R: O 16º. termo desta P.A. é 35.

Exercícios:

1) Analise se cada uma das sucessões numéricas a seguir é uma progressão aritmética. Em caso afirmativo, indique o primeiro termo e a razão.

a) (-1, 2, 5, 8, 11)

c) (2, 2, 2, 2, 2)

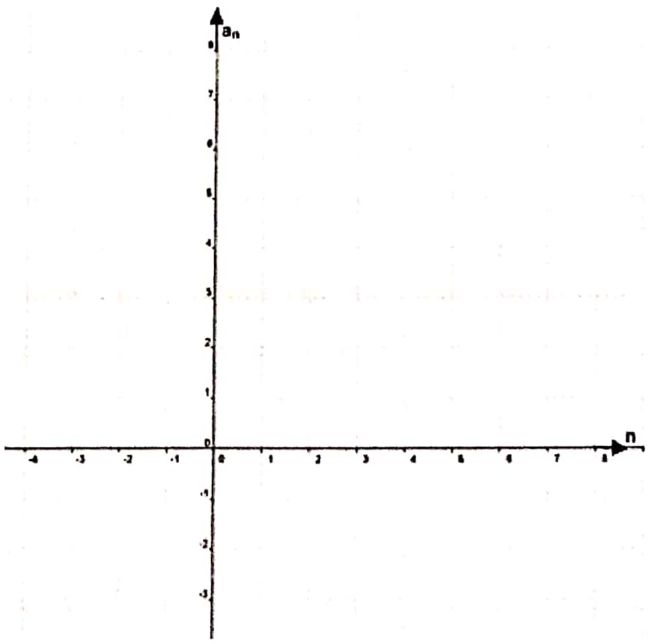
b) (2, 10, 12, 20)

d) (1, 4, 9, 16, 25)

2) Preencha a tabela determinando os termos da sequência segundo sua lei de formação, considerando o primeiro termo igual à 1. Em seguida, marque os pontos que apresentam (n, a_n) no sistema cartesiano de eixos.

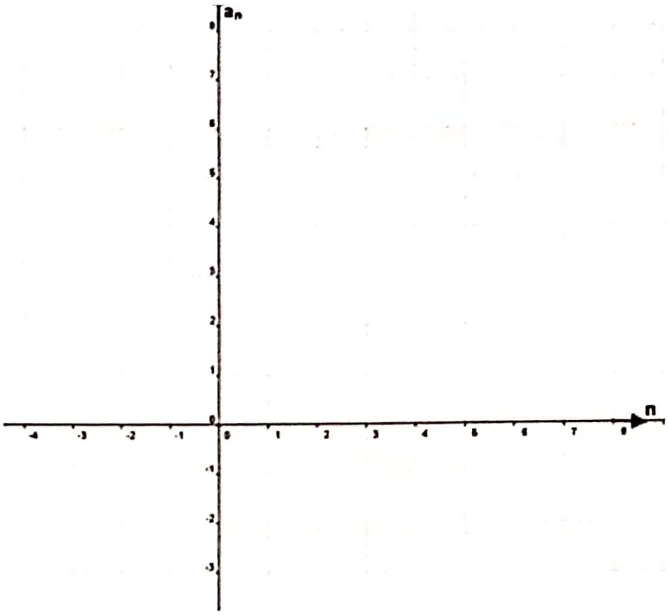
a) $a_n = a_1 + (n-1)\times 2$

n	a_n



b) $a_n = a_1 + (n-1) \times (-3)$

n	a_n



3) Para fazer um investimento, um comerciante precisa fazer um empréstimo que pagará durante dez anos da seguinte forma: para cada ano, as 12 prestações terão o mesmo valor e as prestações de um ano será R$40,00 a mais que as prestações do ano anterior. Sabendo que no primeiro ano a prestação foi de R$150,00, responda:

a) A forma de pagamento pode ser expressa por uma Progressão Aritmética? Se sim, qual é o termo geral dessa P.A.?

b) Sabendo que esse comerciante lucra R$800 por mês, no último ano do pagamento ele ainda vai conseguir lucrar?

Atividade Final

1. Considere a sequência (1, 4, 7, 10) e a função real de variável real definida por f(x)= 2x+1. Encontre o valor de

e) f(1)= ______________________________

f) f(4)= ______________________________

g) f(7)=______________________________

h) f(10)=______________________________

Escreva os resultados encontrados nas letras **a, b, c** e **d** respectivamente:

_____, _____, _____, _____.

Compare os números encontrados e verifique se existe algum padrão entre eles, se existir, descreva tal padrão.

____

____

____.

2. Sendo o termo geral da Progressão Aritmética, $a_n = a_1 + (n-1).r$, desenvolva a expressão pela propriedade distributiva e associe com a lei de formação de uma função afim.

3. Usando como base a resposta da questão 2, identifique a razão da P.A. nas expressões a seguir, depois calcule os dois primeiros termos da P.A., conferindo o valor da razão:

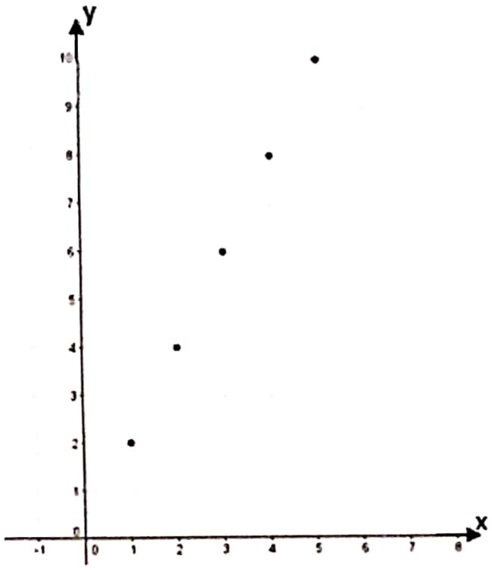
a) $a_n = 2n + 3$

b) $a_n = -3n + 1$

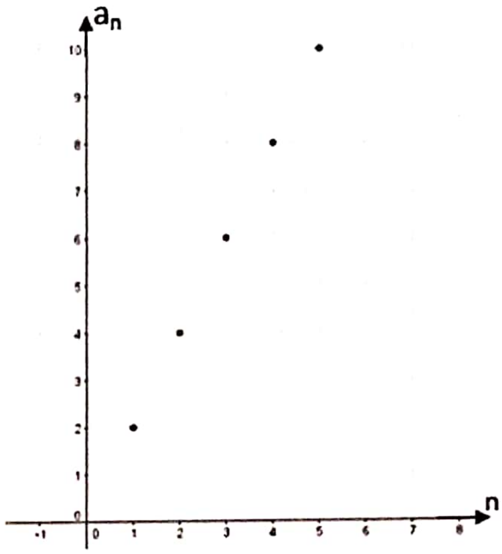
c) $a_n = 3 + \frac{1}{4}n$

4. Comparando os gráficos de uma Função Afim e de uma Progressão Aritmética, responda cada item.

$f(x) = 2x$, $f: N^* \to$



$a_n = a_1 + (n-1) \times 2$



a) Quais as semelhanças entre os dois gráficos? Ao desenvolver o termo geral da P.A., aplicando a propriedade distributiva, qual a relação da expressão obtida com a lei da função afim?

b) Observe o domínio da função. Se esse domínio fosse o conjunto dos Reais, qual seria a aparência do gráfico?

c) Podemos então dizer que a P.A. é uma função? Se sim, qual seria seu domínio?

Campos dos Goytacazes (RJ), 28 de março de 2017.

Letícia Carvalho maciel

Letícia Carvalho Maciel

Letícia Viveiros de Souza

Letícia Viveiros de Souza

Lucas Franco Belém de Freitas

Lucas Franco Belém de Freitas

Ranna de Jesus Ambrosio

Ranna de Jesus Ambrosio