RELATÓRIO DO LEAMAT

DIFERENTES MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

ENSINO E APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA

DAVID DE FREITAS MOREIRA
GUILHERME SIQUEIRA DE CASTRO
ISAÍAS RIBEIRO
JOSÉ RAMON CORRÊA DE ABREU
JULIANA ALVES DO CARMO TAVARES

CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
2017.2

DAVID DE FREITAS MOREIRA
GUILHERME SIQUEIRA DE CASTRO
ISAÍAS RIBEIRO
JOSÉ RAMON CORRÊA DE ABREU
JULIANA ALVES DO CARMO TAVARES

RELATÓRIO DO LEAMAT

DIFERENTES MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

ENSINO E APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA

Trabalho apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, *Campus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão da disciplina Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Profª Me. Lívia Azelman de Faria Abreu

CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
2017.2

SUMÁRIO

1) Relatório do LEAMAT I

1.1) Atividades desenvolvidas

No primeiro dia de aula houve a apresentação da disciplina LEAMAT juntamente com todas as professoras responsáveis pela disciplina.

Na aula seguinte três grupos que já concluíram o LEAMAT III relataram como foi a experiência vivenciada por eles no decorrer de todo o LEAMAT e cada grupo apresentou o seu trabalho em uma linha de pesquisa.

O primeiro grupo apresentou um trabalho sobre estimativas, no qual foi proposto aos alunos que estimassem quantidade de figuras, palavras em uma poesia, volume de um líquido, entre outras coisas. Foi importante perceber que algumas metodologias inicialmente adotadas pelo grupo foram descartadas durante a apresentação do projeto na própria turma durante o LEAMAT II.

O segundo grupo falou sobre ângulos externos nos polígonos. Na aplicação na turma do ensino fundamental foram usadas uma atividade escrita e uma com material concreto (recorte e cola dos ângulos externos) provando que, independente do número de lados, a soma dos ângulos externos possui sempre o mesmo valor (360º). O grupo revelou que os alunos não possuíam pleno conhecimento sobre os conceitos prévios da geometria, necessários para um bom desenvolvimento da atividade, logo, houve uma dificuldade na apresentação do conteúdo e uma necessidade da apresentação desses conceitos.

O terceiro grupo falou sobre a simetria para alunos com deficiência. O material didático utilizado foi desde o geoplano, passando por textos impressos em braile até figuras em alto relevo e com texturas diferentes.

O dia 25 de outubro de 2016 foi marcado pela apresentação de trechos do livro "A arte de ser um perfeito mau professor", sendo este um livro que contém 35 dicas para que seja possível tornar-se um perfeito mau professor, de Júlio César de Melo Sousa, autor de outras obras como "O homem que calculava" e "Mil histórias sem fim". Neste dia falamos sobre o Dia da Matemática, comemorado em 06 de maio, de forma a homenagear o já citado escritor, Júlio César de Mello Souza mais conhecido como Malba Tahan, já que a data do seu nascimento é 06 de maio de 1895.

Foi trabalhado em sala de aula o problema 1 proposto na lista "A álgebra em alguns problemas", que consistia em adivinhar os resultados de três jogadas consecutivas de um dado após feitas algumas operações aritméticas com esses valores obtidos. Após organizar os valores em uma expressão algébrica, ficou claro para todos como "descobrir" os valores.

Na aula seguinte concluiu-se a resolução dos problemas 2, 3 e 4 propostos na lista "A álgebra em alguns problemas", as quais eram questões da OBEMEP, em que relacionava equações com uma balança e que propunha a descoberta de uma expressão a partir de alguns passos de um "truque matemático".

No encontro do dia 01 de novembro de 2016 foi realizada a leitura e a discussão sobre o texto "O ensino da álgebra" de Ana Rita Martins e Beatriz Vichessi, onde relata algumas das dificuldades e dos erros presentes nos alunos quanto ao estudo da álgebra e também algumas estratégias didáticas que os professores devem utilizar. Ocorrendo uma discussão sobre um dos erros mais comuns cometidos pelos professores: não contextualizar os exercícios dados em aula e não propor atividades em que os próprios alunos identifiquem o que deve ser feito para resolução da questão proposta em sala de aula pelo professor.

No dia 22 de novembro de 2016 o grupo 1 apresentou o 3º ciclo do PCN de matemática e o grupo 2 o 4º ciclo, ambos deram uma ênfase maior sobre o que o PCN relatava sobre os conteúdos e o ensino da Álgebra, onde chegou-se a conclusão que muitos deles não são trabalhados em sala de aula, sejam por falta de tempo ou por falta de preparo por parte do professor.

O próximo encontro foi marcado pela leitura do Capítulo II – As concepções da Álgebra, do livro "Álgebra: pensar, calcular, comunicar" (TINOCO, 2011), nessa leitura aprendemos que a Álgebra possui quatro concepções distintas, que não são excludentes e nem há hierarquias entre elas, sendo as mesmas: Álgebra como generalizadora da Aritmética, a Álgebra Funcional, a Álgebra das Equações e a Álgebra Estrutural.

A Álgebra como generalizadora da Aritmética consiste na utilização de variáveis para representar números e generalizar expressões algébricas; a Álgebra Funcional é considerada o estudo das relações entre grandezas, onde se encontra, principalmente, o estudo das funções, em que as letras não são incógnitas e sim argumentos ou parâmetros; a Álgebra das Equações é a álgebra como ferramenta para a resolução de problemas, em que as variáveis podem assumir mais de um valor; e a Álgebra Estrutural diferentemente das demais, as letras não são mais incógnitas nem variáveis. Essa concepção consiste no puro cálculo algébrico ("conta com letras") utilizado na fatoração e na simplificação de expressões, por exemplo.

No dia 20 de dezembro de 2016 o grupo 1 apresentou a turma o Capítulo III – O Sinal de Igualdade, a partir desta apresentação debatemos a dificuldade de entendimento do aluno com o verdadeiro significado do sinal de igualdade e também sobre a importância deste sinal em todo entendimento da Matemática. Também foi mencionada a importância da utilização da balança em situações problemas que envolvam equações. O grupo 2 ficou responsável pela apresentação do Capítulo IV – A Propriedade Distributiva, onde foi realizada a discussão do quanto alguns alunos ainda não se familiarizaram com essa propriedade e para que isso aconteça é muito importante a contextualização da propriedade distributiva em situações reais, onde o professor consiga levar o aluno a uma sistematização do ponto de vista numérico e simbólico.

O encontro seguinte foi marcado pela apresentação de um grupo que já concluiu o LEAMAT III, onde o tema abordado por eles foi a utilização da balança na explicação de equações do primeiro grau.

Os encontros seguintes foram dedicados à pesquisa do tema escolhido por cada grupo.

1.2) Elaboração da sequência didática

1.2.1) Tema

Diferentes métodos de resolução de equações do segundo grau.

1.2.2) Justificativa

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) o maior objetivo do Ensino da Matemática não é levar o aluno a resolução de problemas matemáticos de forma mecânica sem a compreensão de cada um deles, mas sim desenvolver no aluno o raciocínio matemático, fazendo com que ele saiba "incorporar soluções alternativas, reestruturar e ampliar a compreensão acerca dos conceitos envolvidos nas situações e, desse modo, aprender" (BRASIL, 1998, p. 39). E esse raciocínio não será desenvolvido por uma simples memorização de conceitos ou regras matemáticas (PONTE, 2012, p. 356), o que leva o desinteresse por parte dos alunos ao estudarem Matemática, pois não compreendem o que estão fazendo e nem as suas aplicações (BRASIL, 1998. p. 79). Ressaltando que "ser capaz de raciocinar é essencial para a compreensão da Matemática" (NCTM, 2007 apud PEREIRA e PONTE, 2008).

Sabemos que estudo da Álgebra é muito relevante, já que assume um papel importante na formação do aluno (NABAIS, 2010, p. 1), e também muito complicado de certa forma para eles, devido ao fato de não estarem acostumados com as variáveis, nem com as novas combinações de símbolos e regras de manipulação (NABAIS, 2010, p. 4).

A equação do segundo grau é um conteúdo importante da Álgebra escolar (PONTE, 2007, p. 2) e a sua resolução normalmente é feita através da fórmula resolutiva da equação do 2º grau, mas na maioria das vezes o aluno sequer a compreende.

> [...] olha, muitas (das equações) aí eu já olhei e pensei em Bhaskara, eu não sei por que. Pode tá até errado, eu não sei, né, mas eu olhei e pensei. Porque, assim, a outra professora que eu tive, ela colocava muito assim, fórmulas, que nem Bhaskara, né. Eu olhava e ela falava assim, 'ó, você olhou para isso daqui, você já tem que pensar na fórmula de Bhaskara'. [...] eu lembro que a professora disse que Bhaskara precisava ter um (a incógnita) ao quadrado, aqui o a, aí aqui o b, que seria o número com o t (a incógnita), no caso, e o número sozinho (o coeficiente independente) (LIMA, 2011, p. 63-64).

Visto isso decidimos propor aos alunos outras maneiras de resoluções de equações do 2º grau, não somente com a utilização da fórmula já citada anteriormente, desenvolvendo assim o raciocínio matemático de cada um deles e o senso crítico, fazendo com que eles escolham qual o melhor caminho para a resolução da equação proposta.

Conforme afirma LIMA (2011, p. 64) em "Equações quadráticas e a fórmula de Bhaskara: Sucesso garantido?":

> Ter conhecimento de apenas um tipo de já-encontrado, por exemplo a fórmula de Bhaskara, pode impedir que os alunos tenham flexibilidade para escolher o melhor método para resolver um problema ou uma situação com a qual se deparam, o que poderia ter possibilitado que eles fossem bem-sucedidos na tarefa que apresentamos (LIMA, 2011, p. 64).

O aluno não deve saber só um método de resolução de uma equação do segundo grau ou qualquer outro problema matemático, ele deve saber vários métodos e a partir daí escolher o método mais adequado para cada situação proposta.

O próprio PCN orienta os professores a se utilizarem de situações-problemas que possam ser resolvidas por uma equação do segundo grau de forma que suas raízes sejam obtidas pela fatoração (BRASIL, 1998) e não pela fórmula resolutiva da equação do segundo grau.

Sendo assim, decidimos por apresentar o conteúdo utilizando diferentes métodos de resolução de equações do segundo grau, para que os alunos estejam aptos a identificar esses diferentes métodos. O conteúdo será aplicado em uma turma da 1ª série do Ensino Médio, tendo como pré-requisitos que os mesmos saibam o conceito de equação do segundo grau e a fórmula resolutiva da equação do segundo grau.

1.2.3) Objetivo Geral

Elaborar uma sequência didática que permita ao aluno avaliar qual o método mais adequado para a resolução de equações do segundo grau.

1.2.4) Público Alvo

Alunos da 1ª série do Ensino Médio.

2) RELATÓRIO DO LEAMAT II

2.1) Atividades desenvolvidas

No primeiro encontro, dia 09 de maio de 2017, foi exposto pelas orientadoras de que forma o trabalho deveria ser conduzido nesse segundo momento, e como deveríamos elaborar a sequência didática. Foi ressaltado que a elaboração e a organização da sequência devem levar em consideração os objetivos que se pretende alcançar, e o público alvo. Além disso, conversamos sobre a importância de se considerar os recursos oferecidos, e as limitações existentes, de acordo com a escola escolhida para a aplicação da sequência didática no Leamat III.

O período de 16 de maio a 13 de junho foi dedicado ao aprofundamento do aporte teórico, as aulas do dia 20 junho a 04 de julho foram destinadas à elaboração da sequência didática e do dia 11 de julho a 29 de agosto à aplicação da sequência didática na turma do Leamat II e elaboração do relatório. A finalização dos relatórios ocorreu no dia 12 de setembro.

2.2) Elaboração da sequência didática

2.2.1) Planejamento da sequência didática

Iniciaremos a aula indagando os alunos sobre quais métodos de resolução de equações do segundo grau eles conhecem e utilizam, comentando com eles que o método mais utilizado e conhecido é a fórmula resolutiva da equação do segundo grau, também chamada de "fórmula de Bhaskara". Logo após, entregaremos a primeira apostila com o problema 1, no qual os alunos serão desafiados a resolver uma equação do segundo grau em 3 minutos (tempo médio que um aluno tem para resolver uma questão de vestibular) utilizando a fórmula resolutiva sem o auxílio de uma calculadora. Durante a resolução desta equação o aluno irá deparar-se com um valor muito alto para Δ (delta), e ao tentar extrair a sua raiz quadrada é bem provável que não consiga sem o auxílio da calculadora (Figura 1). É provável que apenas três minutos também não seja tempo suficiente para a resolução utilizando esse método.

Figura 1 – Problema 1

$$V = x^2 + 51737x - 51000$$

Após quantas horas poderá ser iniciada a aula de natação?

$$x^2 + 51377x - 51000 = 738$$

$$x^2 + 51377x - 51738 = 0$$

$$x = \frac{-51737 \pm \sqrt{51737^2 + 4 \cdot 51738}}{2}$$

Fonte: Elaboração própria.

Após esgotar-se o tempo dado para a resolução deste problema, perguntaremos aos alunos se alguém conseguiu resolver a equação, e encontrar a resposta do problema. Imagina-se que os alunos encontrem dificuldades nessa resolução, caso optem pela fórmula resolutiva, que é o método mais comumente utilizado, e a partir daí começaremos a mostrar para os alunos outros métodos de resolução de equações do segundo grau.

O primeiro método a ser estudado será o método por Fatoração, no entanto antes de explicá-lo iremos relembrar um conceito da multiplicação: se um produto tem por resultado zero, um dos fatores é zero (Figura 2).

Figura 2 – Fatoração I

$$(x + 2) \cdot (x - 5) = 0$$

Se um dos fatores, necessariamente, é igual a zero, temos:

$$x + 2 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 5 = 0$$

$$x = -2 \quad \text{ou} \quad x = 5$$

Fonte: Elaboração própria.

Após ter sido relembrado este conceito, trataremos de equações que não estão escritas na forma fatorada, como por exemplo, $7x^2 - 3x = 0$ (Figura 3). Lembrando que fatorar é reescrever uma expressão sob a forma de multiplicação.

Figura 3 – Fatoração II

O primeiro passo consiste em encontrarmos um fator comum, e colocá-lo em evidência: $$x \cdot (7x - 3) = 0$$ Agora, é só resolvermos conforme foi feito no exemplo anterior: $$x = 0 \quad \text{ou} \quad 7x - 3 = 0$$ $$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{3}{7}$$

Fonte: Elaboração própria.

Depois da explicação desses conceitos, os alunos irão pôr em prática o que aprenderam, resolvendo o exercício 1 (Figura 4).

Figura 4 – Fatoração, exercício 1

1. Resolva as equações abaixo, utilizando o método da fatoração:
a) $(x + 7) \cdot (x - 4) = 0$ b) $x^2 - 3x = 0$

Fonte: Elaboração própria.

Após a correção do exercício 1, iremos relembrar o que é um trinômio quadrado perfeito e relatar aos alunos que quando houver um trinômio quadrado perfeito poderemos utilizar o método da fatoração para resolver uma equação do segundo grau.

A seguir, os alunos irão resolver o exercício 2, no qual, primeiramente, eles terão que identificar o trinômio quadrado perfeito, para a partir daí resolver as equações propostas pelo método da fatoração (Figura 5).

Figura 5 – Fatoração, exercício 2

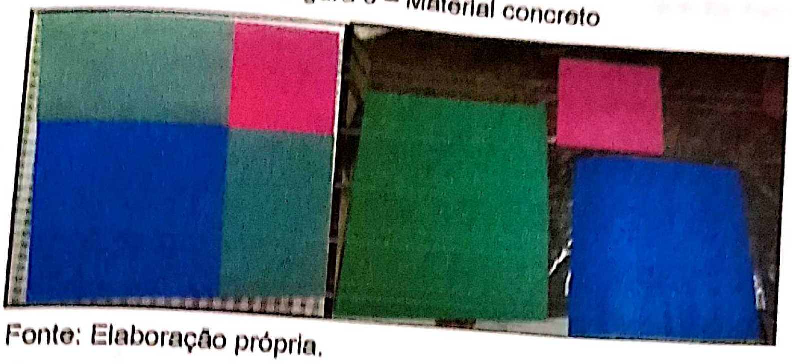
2. Resolva as equações abaixo, utilizando o método da fatoração:
a) $x^2 - 8x + 16 = 0$ b) $x^2 + 6x + 9 = 16$

Fonte: Elaboração própria.

Finalizada a explicação do método da Fatoração, começaremos a tratar de outro método, o Método Geométrico: Completamento de quadrado.

Iniciaremos a explicação deste método comentando que o matemático árabe, Al-Khowarizmi, utilizava a geometria para completar quadrados e resolver problemas que hoje conhecemos como equações do segundo grau. Para explicarmos como ele resolvia estas equações, utilizaremos material concreto feito de cartolina e colaremos no quadro (Figura 6).

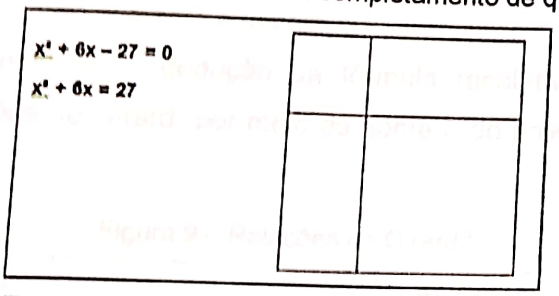
Figura 6 – Material concreto



Fonte: Elaboração própria.

A apostila entregue aos alunos possui um quadrado dividido em dois retângulos congruentes (logo, possuem áreas também congruentes) e dois quadrados distintos que consequentemente possuem áreas também distintas. O intuito aqui é que os alunos completem esse quadrado com as suas respectivas medidas, de acordo com a equação dada (Figura 7).

Figura 7 – Método geométrico: completamento de quadrado



Fonte: Elaboração própria.

Depois da compreensão dos alunos quanto à resolução da equação pelo método geométrico, comentaremos uma desvantagem desse método que é a de não encontramos a raiz negativa, já que estamos tratando de medidas de lados e de áreas, mas também reforçaremos que nada os impede de utilizar essas figuras geométricas para ilustrar os passos que são feitos no completamento de quadrado, pois sabemos que o x da equação dada, por exemplo, é um número real e por isso ele pode assumir tanto valores positivos quanto negativos.

Nesse momento, espera-se que os alunos tenham compreendido o que é o completamento de quadrado. Então será possível enunciar quais são os passos utilizados para resolver uma equação do segundo grau pelo método completamento de quadrado (sempre comparando com o que foi feito no método geométrico e percebendo se os alunos conseguem identificar alguma semelhança entre eles); depois disso é o momento em que os alunos poderão colocar em prática o que aprenderam sobre este método. Será proposto o exercício de número 3 (Figura 8) e depois faremos a correção no quadro.

Figura 8 – Completamento de quadrado, exercício 3

3. Resolva as equações, utilizando o método completamento de quadrado.

a) $x^2 + 6x - 7 = 0$

b) $2x^2 + 4x - 16 = 0$

Fonte: Elaboração própria.

Concluída a primeira apostila, será entregue a segunda apostila, na qual será feita a dedução da fórmula resolutiva da equação do segundo grau por meio do completamento de quadrado, utilizando o material concreto (Figura 6), pois queremos que saibam fazer a sua dedução, já que o nosso objetivo é levá-los a compreendê-la e não somente a decorá-la.

Complementando a dedução da fórmula resolutiva, serão também deduzidas as Relações de Girard, por meio da soma e do produto das raízes da equação (Figura 9).

Figura 9 – Relações de Girard I

Soma:

$$x' + x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x' + x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x' + x'' = \frac{-b-b}{2a}$$

$$x' + x'' = \frac{-2b}{2a}$$

$$x' + x'' = \frac{-b}{a}$$

Produto:

$$x' . x'' = \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) . \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$x' . x'' = \frac{(-b)^2 - b\sqrt{\Delta} + b\sqrt{\Delta} - (\sqrt{\Delta})^2}{(2a)^2}$$

$$x' . x'' = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2}$$

$$x' . x'' = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2}$$

$$x' . x'' = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2}$$

$$x' . x'' = \frac{+4ac}{4a^2}$$

$$x' . x'' = \frac{c}{a}$$

Fonte: Elaboração própria.

Antes que os alunos façam a atividade 1 dessa apostila, foi dado o exemplo de uma equação em que a soma e o produto de suas raízes são respectivamente -9 e 14. Logo abaixo deste exemplo há um quadro para que os alunos testem os possíveis valores para as raízes desta equação (Figura 10).

Figura 10 – Relações de Girard II

A equação $x^2 + 9x + 14 = 0$ possui as seguintes raízes de acordo com as expressões da soma e do produto:

Soma

$$x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{-9}{1} = -9$$

Produto

$$x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = \frac{14}{1} = 14$$

	x		=	14
	+		=	- 9

Fonte: Elaboração própria.

Para resolução de uma equação do segundo grau utilizando esse método, utilizamos o cálculo mental e o raciocínio lógico, por isso o enunciado da atividade 1 da segunda apostila pede para que se resolva as equações mentalmente (Figura 11).

Figura 11 – Relações de Girard, exercício 1

1. Resolva mentalmente.

a) $x^2 - 8x + 15 = 0$ b) $x^2 - 12x + 36 = 0$ c) $x^2 - 14x - 32 = 0$

Fonte: Elaboração própria.

Após a conclusão da segunda apostila, será entregue a atividade final, na qual a primeira questão tem como objetivo levar o aluno a ter o senso crítico pra saber qual será o método mais adequado para resolver cada equação (Figura 12).

Figura 12 – Atividade final, exercício 1

1. Resolva as equações a seguir utilizando os métodos estudados anteriormente, sabendo que cada equação deve ser resolvida por um método diferente:

a) $x^2 - 21387x + 21386 = 0$ b) $x^2 + 5x + 5 = 0$

c) $(x + 3)(x - 4) = 0$ d) $x^2 + 10x - 39 = 0$

Fonte: Elaboração própria.

Por se tratar de um problema contextualizado, a atividade 2 (Figura 13) exige um pouco mais de raciocínio do aluno, tanto na compreensão do enunciado, quanto para encontrar a equação que corresponde às informações fornecidas na questão. Após reescrever o enunciado da questão na forma de equação do segundo grau, o aluno decidirá qual método de resolução deve utilizar, e encontrar a solução.

Figura 13 – Atividade final, exercício 2

2. Pai e filho têm hoje 45 e 15 anos, respectivamente. Há quantos anos a idade do pai era igual ao quadrado da idade do filho?

Fonte: Elaboração própria.

Após as correções das questões da atividade final, pediremos que os alunos voltem no problema 1 e tentem resolvê-lo novamente, mas dessa vez o nosso desafio é que este problema seja resolvido em 2 minutos. Dentre os métodos estudados, o mais adequado para a resolução deste problema é utilizar as Relações de Girard.

A intenção do trabalho é que ao fim da aula, os alunos possam perceber a importância de conhecer diferentes métodos de resolução de equações do segundo grau, uma vez que alguns problemas podem apresentar dificuldades para serem resolvidos utilizando um dos métodos, como foi o caso do problema 1.

2.2.2) Aplicação da sequência didática na turma do LEAMAT II

Visando submeter o material elaborado à avaliação dos alunos e professores do Leamat, bem como mensurar qual o tempo necessário para a aplicação da sequência didática na turma regular, foi realizada a aplicação na turma do Leamat II, no dia 22 de agosto de 2017.

Logo no problema 1 (Figura 1) ficou claro para os alunos que o uso da fórmula resolutiva nem sempre é o melhor caminho para se resolver uma equação do segundo grau. Conforme já era esperado, nenhum deles conseguiu efetuar os cálculos necessários para a resolução da equação utilizando esse método, no tempo proposto.

Um aspecto positivo, destacado pela turma após a aplicação da sequência, diz respeito à utilização do material concreto (figura 6), tanto na exposição do método geométrico (completamento de quadrado), quanto na dedução da fórmula resolutiva. O recurso visual que o material proporciona facilita a compreensão por parte dos alunos, e permite que conhecimentos geométricos sejam utilizados para o entendimento da álgebra.

Uma das observações feitas pela turma foi o uso repetido do trinômio quadrado perfeito $x^2 + 6x + 9$, que é igual a $(x + 3)^2$, na parte da apostila referente ao método da fatoração, presente tanto no exemplo, quanto no exercício 2.

Além disso, foi observada a utilização repetida do 2 como número que multiplica o termo x^2, nos exemplos de equações a serem resolvidas pelo método geométrico. Uma vez que o primeiro passo da resolução utilizando o método consiste na divisão de ambos os membros da equação por esse número, foi sugerido que uma das equações tenha x^2 multiplicado por outro número.

As alterações sugeridas serão realizadas antes da aplicação da sequência em uma turma regular, durante o Leamat III.

Foi possível observar também que serão necessários pelo menos três tempos de aula para a aplicação na turma regular.

3) Relatório do LEAMAT III

3.1) Atividades desenvolvidas

As aulas iniciais foram destinadas a finalização da sequência didática e modificações da apostila.

3.2) Elaboração da sequência didática

3.2.1) Versão final da sequência didática

A versão final da sequência didática não sofreu grandes alterações, o que foi modificado foram duas questões (Figura 14).

Figura 14 – Mudanças realizadas na apostila

a) $x^2 + 6x - 7 = 0$	a) $x^2 + 16x - 17 = 0$
b) $2x^2 + 4x - 16 = 0$	b) $3x^2 + 12x - 36 = 0$

Fonte: Elaboração própria.

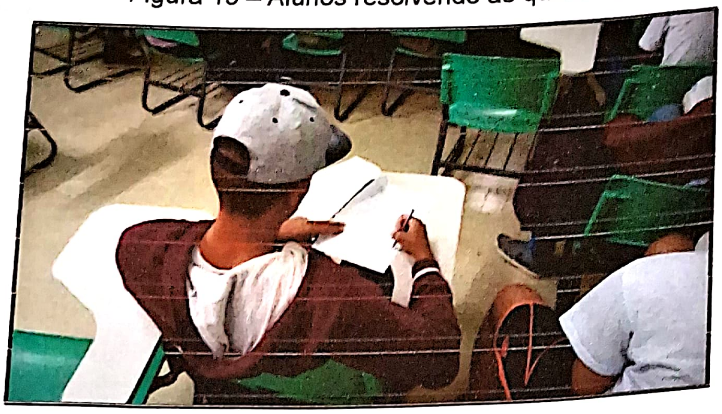
3.2.2) Experimentação da sequência didática na turma regular

A experimentação da sequência didática na turma regular foi realizada no dia 08 de novembro de 2017, no IFFluminense, *Campus* Campos Centro, na turma integrada de Mecânica, do primeiro ano do Ensino Médio, com a presença de 24 alunos.

Iniciamos a aula fazendo a leitura do problema 1 e logo após pedimos aos alunos que tentassem resolver sem o auxílio da calculadora. Conforme esperado, todos os alunos tentaram resolver utilizando a fórmula resolutiva da equação do segundo grau e nenhum deles conseguiu encontrar o resultado no tempo proposto. Explicamos aos alunos que apresentaríamos diferentes métodos de resolução de equações do segundo grau e então retornaríamos ao problema 1, no fim da aula, para tentarmos encontrar a solução.

Logo após, perguntamos aos alunos quais métodos de resolução de equação do segundo grau eles já haviam estudado anteriormente. A grande maioria respondeu, quase de imediato: "fórmula de Bhaskara", se referindo a fórmula resolutiva da equação do segundo grau. Ao insistirmos um pouco mais e questioná-los se esse era, realmente, o único método conhecido por eles, alguns responderam que conheciam também "soma e produto", referindo-se as relações de Girard. Porém, esses foram os dois únicos métodos citados por eles.

Figura 15 – Alunos resolvendo as questões



Fonte: Protocolo de pesquisa.

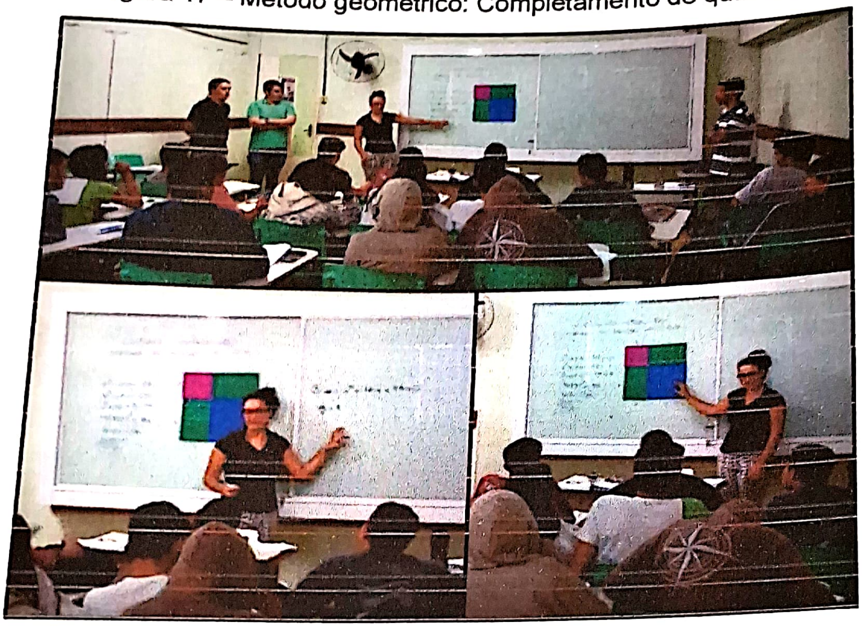
Dando prosseguimento a sequência didática, apresentamos o primeiro método de resolução das equações: o método da fatoração. Alguns alunos relataram que já haviam estudado o método anteriormente e mesmo os que ainda não o conheciam, não apresentaram quaisquer dificuldades no entendimento ou na resolução dos exercícios propostos.

Figura 16 – Explicação: método da Fatoração

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Seguimos então para a explicação sobre o método geométrico (completamento de quadrado), no qual pudemos observar que os alunos ficaram bastante interessados, tanto no breve contexto histórico que foi relatado, como no método em si. O material concreto utilizado foi de extrema importância para a compreensão desse método de resolução por parte dos alunos, facilitando o entendimento e possibilitando uma melhor visualização da relação existente entre a geometria e a álgebra.

Figura 17 – Método geométrico: Completamento de quadrado



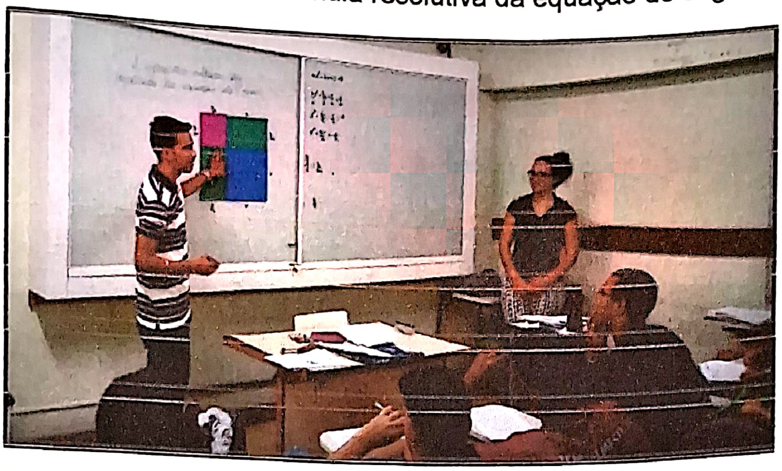
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Ao terminarmos a correção dos exercícios que deveriam ser resolvidos utilizando o método geométrico (nos quais os alunos também não apresentaram dificuldades), percebemos que os estudantes retornavam ao problema 1 após a explicação de cada método, na tentativa de resolvê-lo utilizando um método que fosse menos trabalhoso, uma vez que não obtiveram êxito utilizando a fórmula resolutiva.

A seguir, perguntamos aos alunos se eles conheciam a origem da fórmula resolutiva da equação do segundo grau e a sua dedução. Nenhum dos estudantes relatou já ter conhecimento sobre ambas. Mais uma vez, vale destacar como os alunos demonstraram interesse pelo contexto histórico presente na origem da fórmula.

Logo que iniciamos a dedução da fórmula resolutiva, vários alunos começaram a identificar alguns elementos que lhes eram familiares. Na primeira vez que foi "encontrado" o polinômio "$b^2 - 4ac$", durante a dedução, um deles exclamou: "olha o delta aí!". A dedução da fórmula despertou bastante curiosidade e interesse nos alunos como um todo e algumas das frases ditas por eles foram: "A matemática faz sentido!"; "Agora, tudo se encaixa!".

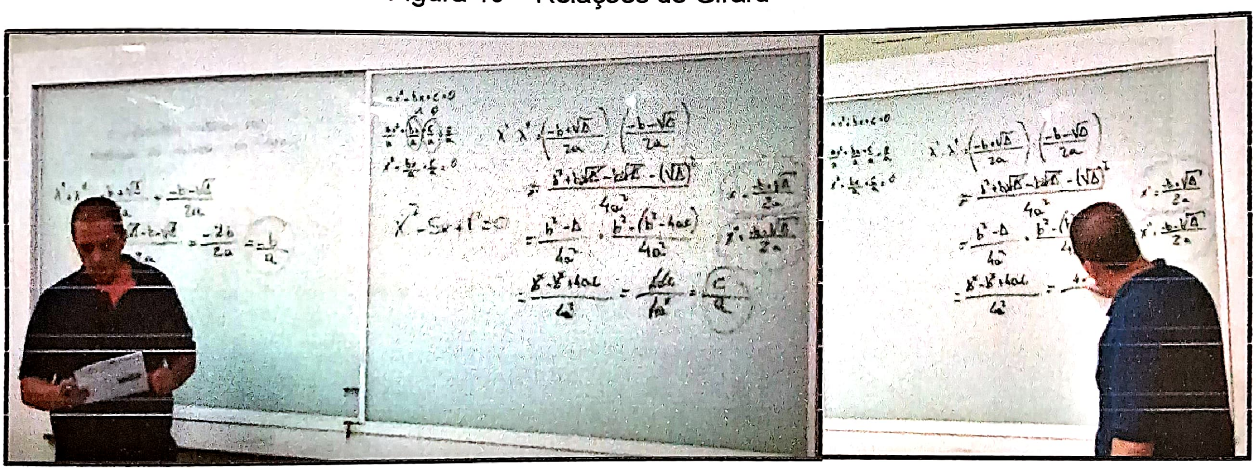
Figura 18 – Dedução da fórmula resolutiva da equação do segundo grau



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Por fim, falamos um pouco sobre o último dos métodos que pretendíamos abordar na sequência: As Relações de Girard (Figura 19). Os alunos mantiveram o interesse pela dedução das expressões e mais uma vez, não apresentaram dificuldades na resolução dos exercícios propostos, tendo alguns deles resolvido os exercícios antes mesmo de termos solicitado.

Figura 19 – Relações de Girard



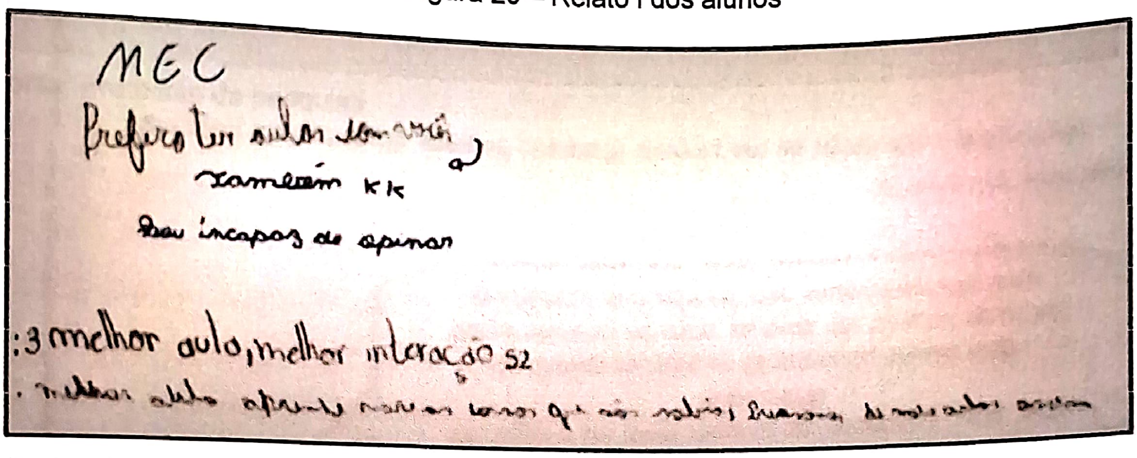
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Ao final da explicação desse método, a maioria dos alunos retornou ao problema 1 por conta própria. Foi nítida a satisfação dos estudantes ao encontrarem a solução do problema de forma simples e rápida, uma vez que, a princípio, parecia algo tão difícil de ser resolvido.

Devido ao fato de termos apenas dois tempos de aula disponíveis para a experimentação da sequência, não houve tempo hábil para a aplicação das últimas atividades.

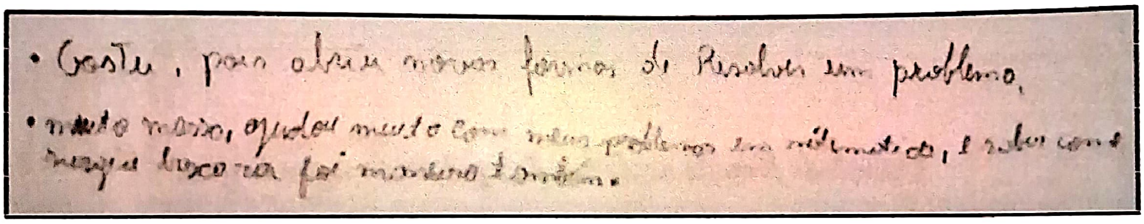
Ao fim da aplicação da sequência didática foi solicitado que os alunos registrassem as suas impressões sobre a aula, o conteúdo e os métodos utilizados (Figuras 20, 21 e 22).

Figura 20 – Relato I dos alunos



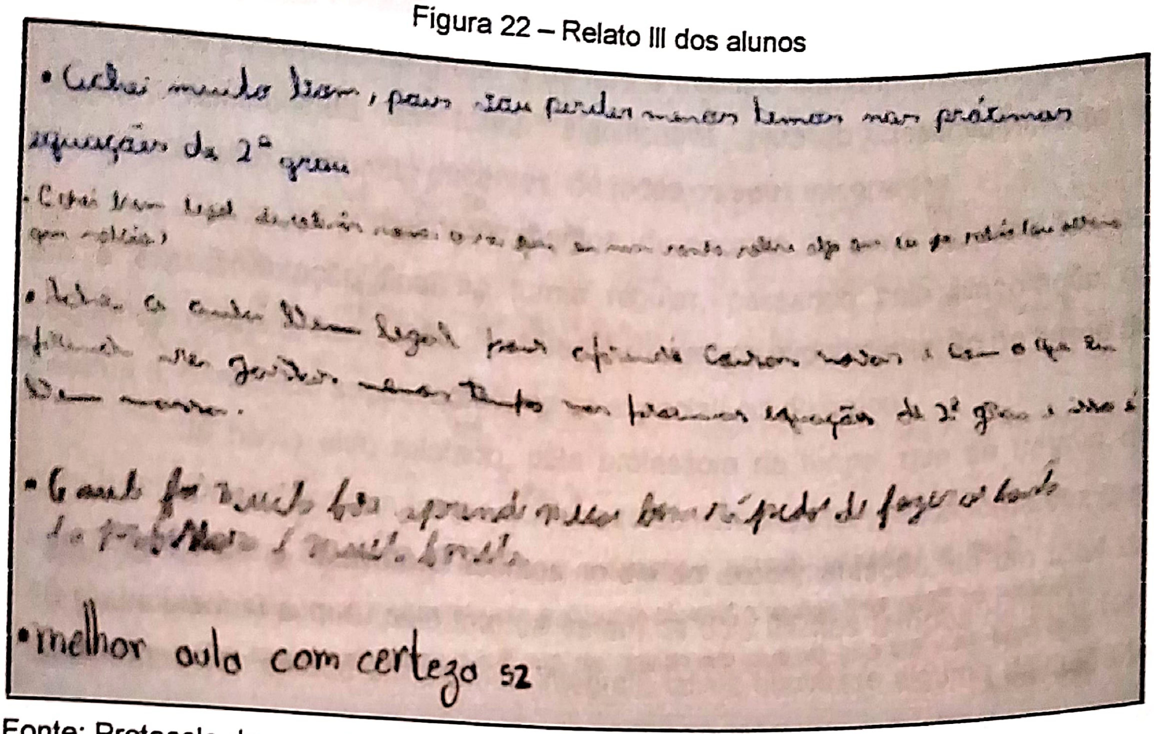
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Figura 21 – Relato II dos alunos



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Figura 22 – Relato III dos alunos



Fonte: Protocolo de pesquisa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A percepção do grupo é de que o trabalho cumpriu plenamente o seu objetivo, contribuindo de forma significativa para o desenvolvimento e amadurecimento, enquanto docentes, de todos os seus integrantes.

Desde os primeiros momentos, de escolha do tema e aporte teórico, até a experimentação final na turma regular, passando pela elaboração da sequência didática, confecção do material concreto e experimentação na turma do Leamat II, o trabalho seguiu conforme as expectativas do grupo.

Já havia sido relatado, pela professora da turma, que se tratava de uma turma pouco assídua (o que acabou se confirmando na prática, uma vez que apenas 24 alunos estavam presentes no dia da experimentação, de um total de 40 matriculados) e que, pelo fato de serem os dois últimos tempos de aula (em uma turma que estuda em período integral), talvez houvesse alguma dificuldade para manter a atenção dos alunos no conteúdo a ser ministrado. Porém, a turma se mostrou bastante participativa, demonstrando interesse desde o início até os últimos minutos de aula. Alguns alunos precisaram sair um pouco antes do fim, mas o fizeram se lamentando e nos dizendo que depois iriam consultar os colegas para verificar o que foi visto após a sua saída.

Além dessa participação massiva por parte dos estudantes, é importante destacar o auxílio do material concreto elaborado para a sequência, na compreensão do conteúdo por parte deles. Já era esperado que a utilização desse material ajudasse nessa compreensão, por conta do aspecto visual e que fizesse com que os alunos mantivessem o interesse no conteúdo, porém algo que nos surpreendeu positivamente foi a atenção e a curiosidade demonstrada pela maioria deles nas deduções das fórmulas.

Todos os alunos relataram terem gostado bastante da aula e foi nítida a facilidade encontrada por eles na compreensão dos métodos de resolução e também na sua aplicação durante a resolução dos exercícios. O fato de termos tido apenas dois tempos de aula fez com que não conseguíssemos aplicar o último bloco de atividades previstas, mas isso não chegou a comprometer o trabalho.

Outros grupos que desejem futuramente abordar o tema podem trabalhar com outros métodos de resolução de equações do segundo grau, utilizando recursos tecnológicos e material concreto. Vale também como sugestão a contextualização histórica das descobertas e desenvolvimento dos métodos, uma vez que os alunos se interessam por esses aspectos.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática. Brasília: MEC, 1998.

LIMA. Rosana Nogueira. Equações quadráticas e a fórmula de Bhaskara: Sucesso garantido? **UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educacación Matemática**, v. 25, n. 25, Mar., 2011. Disponível em: <http://www.fisem.org/www/union/revistas/2011/25/Union_025_010.pdf>. Acesso em: 16 fev. 2017.

NABAIS, Margarida Maria Saraiva. **Equações do 2.º grau:** um estudo sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 9º ano. 389 f. Dissertação (Mestrado) – Área de especialização em Didáctica da Matemática, Universidade de Lisboa Instituto de Educação, 2010. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10451/2567>. Acesso em: 14 fev. 2017.

PEREIRA, Joana Mata; PONTE, João Pedro da. **Raciocínio matemático em contexto algébrico:** Uma análise com alunos de 9º ano. Disponível em: <http://www.ie.ulisboa.pt/pls/portal/docs/1/334313.PDF>. Acesso em: 14 fev. 2017.

PONTE, João Pedro da; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. **Álgebra no ensino básico.** Lisboa: DGIDC, 2009. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10451/7105>. Acesso em: 13 fev. 2017.

PONTE, João Pedro da; PEREIRA, Joana Mata; HENRIQUES, Ana. **O raciocínio matemático nos alunos do Ensino Básico e do Ensino Superior.** Lisboa: UFPG, 2012. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10451/22606>. Acesso em: 18 fev. 2017.

PONTE, João Pedro da, et al. **Equações do 2.º grau do fim do século XIX ao início do século XXI:** Uma análise de sete manuais escolares. Lisboa: Associação dos Professores de Matemática, 2007. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10451/3410>. Acesso em: 16 fev. 2017.

PRADO, Elza Maria Dos Santos do. **Um novo olhar sobre o ensino de equação e função do segundo grau.** 101 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, 2014. Disponível em: <http://media.wix.com/ugd/6e055b_7f9548c31eef412cbe937d1de40e7c47.pdf>. Acesso em: 07 fev. 2017.

Campos dos Goytacazes (RJ), 28 de março de 2017.

David de Freitas Moreira

David de Freitas Moreira

Guilherme Siqueira de Castro

Isaías Ribeiro

José Ramon Corrêa de Abreu

Juliana Alves do Carmo Tavares

APÊNDICES

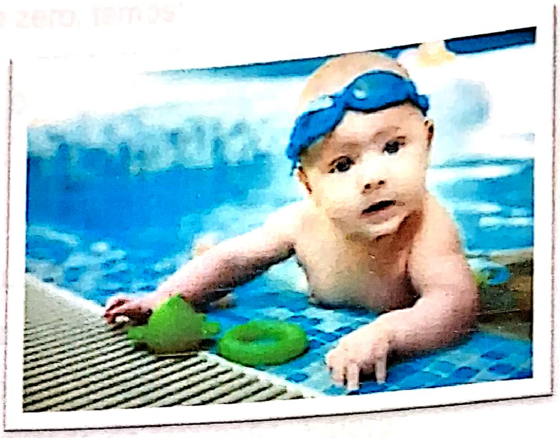
Apêndice A: Material didático aplicado na turma do LEAMAT II

Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática
Linha de Pesquisa: Ensino e Aprendizagem de Álgebra
Licenciandos: David de Freitas, Guilherme de Castro, Isaías Ribeiro, José Ramon e Juliana Alves.
Orientadora: Profª Me. Lívia Azelman de Faria Abreu
Nome: ______________________________ Data: ___/___/ 2017

Diferentes métodos de resolução de equações do segundo grau

Problema 1:

Uma piscina com capacidade de 1000 litros foi esvaziada para limpeza. Nesta piscina é realizada aula de natação infantil. Para que a aula aconteça, é necessário que a piscina esteja com 738 litros de água.



Após a limpeza ter sido concluída, iniciou-se a reposição de água na piscina.

A quantidade de água na piscina, em litros, **x** horas após ter começado a reposição é dada por:

$$V = x^2 + 51737x - 51000$$

Após quantas horas poderá ser iniciada a aula de natação?

I. *Método de resolução de equações do segundo grau por Fatoração*

O método da fatoração é um dos mais utilizados para a resolução de problemas que envolvem equações, por ser um método simples e prático.

Antes de falarmos sobre o método em si, é importante que relembremos um conceito da multiplicação, que diz que: se um produto tem por resultado zero, um dos fatores é zero. Por exemplo:

$$(x + 2) \cdot (x - 5) = 0$$

Se um dos fatores, necessariamente, é igual a zero, temos:

$$x + 2 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 5 = 0$$

$$x = -2 \quad \text{ou} \quad x = 5$$

Logo, podemos afirmar que as soluções da equação acima são $\mathbf{x = -2}$ e $\mathbf{x = 5}$. O exemplo apresenta acima uma equação na forma fatorada, mas nem todas as equações nos serão apresentadas nessa forma. Para resolver essas equações, escritas de outras formas utilizaremos o método da fatoração. Fatorar é reescrever uma expressão sob a forma de multiplicação.

Tomemos como exemplo a equação $\mathbf{7x^2 - 3x = 0}$.

O primeiro passo consiste em encontrarmos um fator comum, e colocá-lo em evidência:

$$x \cdot (7x - 3) = 0$$

Agora, é só resolvermos conforme foi feito no exemplo anterior:

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad 7x - 3 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{3}{7}$$

1. Resolva as equações abaixo, utilizando o método da fatoração:

a) $(x + 7) \cdot (x - 4) = 0$

b) $x^2 - 3x = 0$

Sempre que a expressão for um trinômio quadrado perfeito, o método da fatoração também pode ser muito útil.

> Para que um trinômio seja considerado um trinômio quadrado perfeito, ele deve ter algumas características:
> • Dois termos (monômios) do trinômio devem ser quadrados;
> • Um termo (monômio) do trinômio deve ser o dobro da multiplicação das raízes quadradas dos dois outros termos.

Vejamos o exemplo a seguir:

$$\mathbf{x^2 + 6x + 9 = 0}$$

Podemos afirmar que $\mathbf{x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2}$.

$$(x + 3)^2 = 0$$

$$x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

2. Resolva as equações abaixo, utilizando o método da fatoração:

a) $x^2 - 8x + 16 = 0$

b) $x^2 + 6x + 9 = 16$

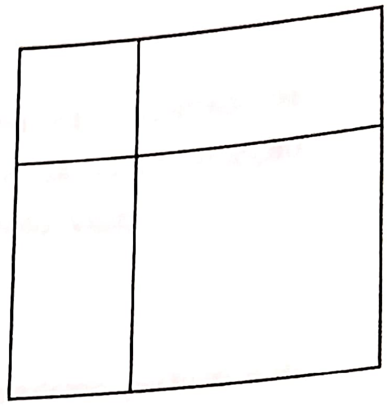
II. *Método geométrico: completamento de quadrado*

Al-Khowarizmi, matemático árabe, completava quadrados utilizando a geometria para resolver problemas que hoje se conhecem como equações do segundo grau.

Vamos resolver a equação abaixo como ele resolvia?

$\mathbf{x^2 + 6x - 27 = 0}$

$\mathbf{x^2 + 6x = 27}$



Dada a equação $\mathbf{2x^2 + 12x - 54 = 0}$, por exemplo, seguiremos os seguintes passos:

O primeiro passo é analisar o número que está multiplicando o termo x^2.

- Se o número for diferente de 1 dividiremos ambos os membros da equação por este número;
- Se o número for igual a 1 não precisamos fazer nenhuma modificação na equação e passamos para o próximo passo.

No nosso caso o número que está multiplicando o x^2 é igual a 2 então devemos dividir os dois membros da equação por este número, veja:

$$\frac{2x^2 + 12x - 54}{2} = \frac{0}{2} \longrightarrow x^2 + 6x - 27 = 0$$

O segundo passo consiste em adicionar a ambos os membros da equação o quadrado da metade do número que está multiplicando o termo "x" da equação. O número que está multiplicando o termo "x" da equação é igual a 6. Para acharmos o quadrado da metade desse número basta dividirmos ele por 2 e depois elevar o resultado ao quadrado. Nada muito difícil de se fazer, veja:

$$\frac{6}{2} = 3 \quad \text{e} \quad 3^2 = 9$$

Descobrimos que o quadrado da metade de 6 vale 9, então iremos adicionar este número a ambos os lados da nossa equação como determina o segundo passo. Veja como nossa equação vai ficar:

$$x^2 + 6x - 27 + 9 = 0 + 9$$

A parte mais interessante vem agora. Quando adicionamos o quadrado da metade do termo que multiplica o "x" a ambos os membros da nossa equação encontramos no primeiro membro um trinômio quadrado perfeito. Veja:

$$(x^2 + 6x + 9) - 27 = 9$$

O termo que está entre parênteses é um trinômio quadrado perfeito que pode ser expresso da seguinte maneira:

$$(x^2 + 6x + 9) = (x + 3)^2$$

Substituindo isso na equação temos que:

$$(x + 3)^2 - 27 = 9$$

$$(x + 3)^2 - 27 + 27 = 9 + 27$$

$$(x + 3)^2 + 0 = 36$$

$$(x + 3)^2 = 36$$

$(x + 3) = + \sqrt{36}$ ou $(x + 3) = - \sqrt{36}$

$(x + 3) = + 6$ ou $(x + 3) = - 6$

$x + 3 = + 6$ ou $x + 3 = - 6$

$x + 3 - 3 = 6 - 3$ ou $x + 3 - 3 = - 6 - 3$

$x = 3$ ou $x = - 9$

3. Resolva as equações, utilizando o método completamento de quadrado.

a) $x^2 + 6x - 7 = 0$ b) $2x^2 + 4x - 16 = 0$

Diretoria de Ensino Superior

Licenciatura em Matemática

Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática

Linha de Pesquisa: Ensino e Aprendizagem de Álgebra

Licenciandos: David de Freitas, Guilherme de Castro, Isaías Ribeiro, José Ramon e Juliana Alves.

Orientadora: Profª Me. Lívia Azelman de Faria Abreu

Nome: ______________________________ Data: ___ / ___ / 2017

Diferentes métodos de resolução de equações do segundo grau

III. Fórmula resolutiva da equação do segundo grau

No século XII d.C., Bhaskara (1114-1185), em duas das suas obras, apresenta e resolve diversos problemas envolvendo equações do segundo grau. Antes de Bhaskara, no princípio do século IX d.C., o matemático árabe Al-Kowarizmi, influenciado pela álgebra geométrica dos gregos, resolveu, metodicamente, as equações do segundo grau.

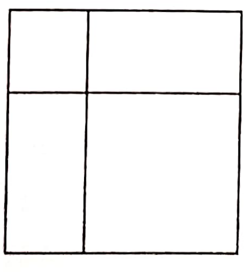
Em um dos seus livros, Al-Kowarizmi apresentou exemplos de como resolver equações do segundo grau. O interessante é que ele não usava fórmulas nem símbolos algébricos; trabalhava apenas com palavras e figuras.

Vejamos um exemplo comum naquela época, porém escrito em uma linguagem mais atual.

Qual é o número cujo quadrado somado com seu décuplo resulta em 39?

Veja como Al-Kowarizmi representava a situação:

- O quadrado de um número seria a área de um quadrado cuja medida de seu lado é desconhecida;
- O décuplo do número corresponderia à área de dois retângulos com um lado medindo 5 e o outro tendo a mesma medida do lado do quadrado.



Dedução da fórmula resolutiva da equação do segundo grau

Entre os séculos XVI e XVII, quando os matemáticos já sabiam calcular com letras, somar monômios e polinômios e fatorar, eles obtiveram a fórmula resolutiva da equação do segundo grau seguindo as ideias de Al-Khowarizmi.

Para chegar a fórmula, buscamos resolver a equação: $ax^2 + bx + c = 0$

IV. *Relações de Girard: Soma e Produto das raízes da equação do segundo grau*

Soma das raízes de uma equação do segundo grau: *(x' + x")*

Produto das raízes de uma equação do segundo grau: *(x' . x")*

As raízes de uma equação do 2º grau são determinadas a partir das seguintes expressões:

$$x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \text{em que } \Delta = b^2 - 4ac$$

Com base nessas informações, vamos determinar as expressões matemáticas responsáveis pela soma e produto das raízes.

Soma:

$$x' + x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x' + x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Produto:

$$x' \cdot x'' = \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$x' \cdot x'' = \frac{(-b)^2 - b\sqrt{\Delta} + b\sqrt{\Delta} - (\sqrt{\Delta})^2}{(2a)^2}$$

$$x' + x'' = \frac{-b-b}{2a}$$

$$x' + x'' = \frac{-2b}{2a}$$

$$x' + x'' = \frac{-b}{a}$$

$$x' \cdot x'' = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2}$$

$$x' \cdot x'' = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2}$$

$$x' \cdot x'' = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2}$$

$$x' \cdot x'' = \frac{+4ac}{4a^2}$$

$$x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$$

Com a utilização dessas expressões podemos determinar as raízes de uma equação do 2º grau sem aplicar a fórmula resolutiva, respeitando a formação dessa equação com base na soma e no produto das raízes, em que **S** é a soma das raízes e **P** é o produto das raízes.

Formação da equação do segundo grau com base na soma e no produto das raízes: $x^2 - Sx + P = 0$.

A equação $x^2 + 9x + 14 = 0$ possui as seguintes raízes de acordo com as expressões da soma e do produto:

Soma

$$x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{-9}{1} = -9$$

Produto

$$x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = \frac{14}{1} = 14$$

$$\boxed{} \times \boxed{} = \boxed{14}$$

$$\boxed{} + \boxed{} = \boxed{-9}$$

1. Resolva mentalmente.

a) $x^2 - 8x + 15 = 0$ b) $x^2 - 12x + 36 = 0$ c) $x^2 - 14x - 32 = 0$

Diretoria de Ensino Superior

Licenciatura em Matemática

Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática

Linha de Pesquisa: Ensino e Aprendizagem de Álgebra

Licenciandos: David de Freitas, Guilherme de Castro, Isaías Ribeiro, José Ramon e Juliana Alves.

Orientadora: Profª Me. Lívia Azelman de Faria Abreu

Nome: ______________________________ Data: ___/___/2017

Diferentes métodos de resolução de equações do segundo grau

ATIVIDADES

1. Resolva as equações a seguir utilizando os métodos estudados anteriormente, sabendo que cada equação deve ser resolvida por um método diferente:

a) $x^2 - 21387x + 21386 = 0$

c) $x^2 + 5x + 5 = 0$

b) $(x + 3)(x - 4) = 0$

d) $x^2 + 10x - 39 = 0$

2. Pai e filho têm hoje 45 e 15 anos, respectivamente. Há quantos anos a idade do pai era igual ao quadrado da idade do filho?

Apêndice B: Material didático experimentado na turma regular

Diretoria do Ensino Superior
Licenciatura em Matemática
Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática
Linha de Pesquisa: Ensino e Aprendizagem de Álgebra
Licenciandos: David de Freitas, Guilherme de Castro, Isaías Ribeiro, José Ramon e Juliana Alves.
Orientadora: Profª Me. Lívia Azelman de Faria Abreu
Nome: ____ Data: ___ / ___ / 2017

Diferentes métodos de resolução de equações do segundo grau

Problema 1:

Uma piscina com capacidade de 1000 litros foi esvaziada para limpeza. Nesta piscina é realizada aula de natação infantil. Para que a aula aconteça, é necessário que a piscina esteja com 738 litros de água.

Após a limpeza ter sido concluída, iniciou-se a reposição de água na piscina.

A quantidade de água na piscina, em litros, **x** horas após ter começado a reposição é dada por:

$$V = x^2 + 51737x - 51000$$

Após quantas horas poderá ser iniciada a aula de natação?

I. Método de resolução de equações do segundo grau por Fatoração

O método da fatoração é um dos mais utilizados para a resolução de problemas que envolvem equações, por ser um método simples e prático.

Antes de falarmos sobre o método em si, é importante que relembremos um conceito da multiplicação, que diz que: se um produto tem por resultado zero, um dos fatores é zero. Por exemplo:

$$(x + 2) \cdot (x - 5) = 0$$

Se um dos fatores, necessariamente, é igual a zero, temos:

$$x + 2 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 5 = 0$$

$$x = -2 \quad \text{ou} \quad x = 5$$

Logo, podemos afirmar que as soluções da equação acima são **x = -2** e **x = 5**. O exemplo apresenta acima uma equação na forma fatorada, mas nem todas as equações nos serão apresentadas nessa forma. Para resolver essas equações, escritas de outras formas utilizaremos o método da fatoração. Fatorar é reescrever uma expressão sob a forma de multiplicação.

Tomemos como exemplo a equação $\mathbf{7x^2 - 3x = 0}$.

O primeiro passo consiste em encontrarmos um fator comum, e colocá-lo em evidência:

$$x \cdot (7x - 3) = 0$$

Agora, é só resolvermos conforme foi feito no exemplo anterior:

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad 7x - 3 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{3}{7}$$

1. Resolva as equações abaixo, utilizando o método da fatoração:

a) $(x + 7) \cdot (x - 4) = 0$

b) $x^2 - 3x = 0$

Sempre que a expressão for um trinômio quadrado perfeito, o método da fatoração também pode ser muito útil.

Para que um trinômio seja considerado um trinômio quadrado perfeito, ele deve ter algumas características:
• Dois termos (monômios) do trinômio devem ser quadrados;
• Um termo (monômio) do trinômio deve ser o dobro da multiplicação das raízes quadradas dos dois outros termos.

Vejamos o exemplo a seguir:

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

Podemos afirmar que $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$.

$$(x + 3)^2 = 0$$

$$x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

2. Resolva as equações abaixo, utilizando o método da fatoração:

a) $x^2 - 8x + 16 = 0$

b) $x^2 + 10x + 25 = 16$

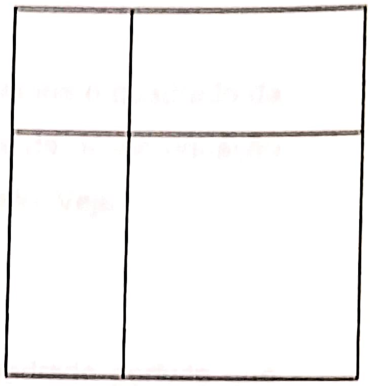
II. *Método geométrico: completamento de quadrado*

Al-Khowarizmi, matemático árabe, completava quadrados utilizando a geometria para resolver problemas que hoje se conhecem como equações do segundo grau.

Vamos resolver a equação abaixo como ele resolvia?

$x^2 + 6x - 27 = 0$

$x^2 + 6x = 27$



Dada a equação $2x^2 + 12x - 54 = 0$, por exemplo, seguiremos os seguintes passos:

O primeiro passo é analisar o número que está multiplicando o termo x^2.

- Se o número for diferente de 1 dividiremos ambos os membros da equação por este número;
- Se o número for igual a 1 não precisamos fazer nenhuma modificação na equação e passamos para o próximo passo.

No nosso caso o número que está multiplicando o x^2 é igual a 2 então devemos dividir os dois membros da equação por este número, veja:

$$\frac{2x^2 + 12x - 54}{2} = \frac{0}{2} \longrightarrow x^2 + 6x - 27 = 0$$

O segundo passo consiste em adicionar a ambos os membros da equação o quadrado da metade do número que está multiplicando o termo "x" da equação. O número que está multiplicando o termo "x" da equação é igual a 6. Para acharmos o quadrado da metade desse número basta dividirmos ele por 2 e depois elevar o resultado ao quadrado. Nada muito difícil de se fazer, veja:

$$\frac{6}{2} = 3 \quad \text{e} \quad 3^2 = 9$$

Descobrimos que o quadrado da metade de 6 vale 9, então iremos adicionar este número a ambos os lados da nossa equação como determina o segundo passo. Veja como nossa equação vai ficar:

$$x^2 + 6x - 27 + 9 = 0 + 9$$

A parte mais interessante vem agora. Quando adicionamos o quadrado da metade do termo que multiplica o "x" a ambos os membros da nossa equação encontramos no primeiro membro um trinômio quadrado perfeito. Veja:

$$(x^2 + 6x + 9) - 27 = 9$$

O termo que está entre parênteses é um trinômio quadrado perfeito que pode ser expresso da seguinte maneira:

$$(x^2 + 6x + 9) = (x + 3)^2$$

Substituindo isso na equação temos que:

$$(x + 3)^2 - 27 = 9$$

$$(x + 3)^2 - 27 + 27 = 9 + 27$$

$$(x + 3)^2 + 0 = 36$$

$$(x + 3)^2 = 36$$

$$(x + 3) = +\sqrt{36} \quad \text{ou} \quad (x + 3) = -\sqrt{36}$$

$$(x + 3) = +6 \quad \text{ou} \quad (x + 3) = -6$$

$$x + 3 = +6 \quad \text{ou} \quad x + 3 = -6$$

$$x + 3 - 3 = 6 - 3 \quad \text{ou} \quad x + 3 - 3 = -6 - 3$$

$$x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -9$$

3. Resolva as equações, utilizando o método completamento de quadrado.

a) $x^2 + 16x - 17 = 0$

b) $3x^2 + 12x - 36 = 0$

Diretoria de Ensino Superior
Licenciatura em Matemática
Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática
Linha de Pesquisa: Ensino e Aprendizagem de Álgebra
Licenciandos: David de Freitas, Guilherme de Castro, Isaías Ribeiro, José Ramon e Juliana Alves.
Orientadora: Profª Me. Lívia Azelman de Faria Abreu
Nome: ______________________________ Data: ___ / ___ / 2017

Diferentes métodos de resolução de equações do segundo grau

III. Fórmula resolutiva da equação do segundo grau

No século XII d.C., Bhaskara (1114-1185), em duas das suas obras, apresenta e resolve diversos problemas envolvendo equações do segundo grau. Antes de Bhaskara, no princípio do século IX d.C., o matemático árabe Al-Kowarizmi, influenciado pela álgebra geométrica dos gregos, resolveu, metodicamente, as equações do segundo grau.

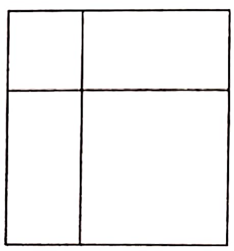
Em um dos seus livros, Al-Kowarizmi apresentou exemplos de como resolver equações do segundo grau. O interessante é que ele não usava fórmulas nem símbolos algébricos; trabalhava apenas com palavras e figuras.

Vejamos um exemplo comum naquela época, porém escrito em uma linguagem mais atual.

Qual é o número cujo quadrado somado com seu décuplo resulta em 39?

Veja como Al-Kowarizmi representava a situação:

- O quadrado de um número seria a área de um quadrado cuja medida de seu lado é desconhecida;
- O décuplo do número corresponderia à área de dois retângulos com um lado medindo 5 e o outro tendo a mesma medida do lado do quadrado.



Dedução da fórmula resolutiva da equação do segundo grau

Entre os séculos XVI e XVII, quando os matemáticos já sabiam calcular com letras, somar monômios e polinômios e fatorar, eles obtiveram a fórmula resolutiva da equação do segundo grau seguindo as ideias de Al-Khowarizmi.

Para chegar a fórmula, buscamos resolver a equação: $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$

IV. Relações de Girard: Soma e Produto das raízes da equação do segundo grau

Soma das raízes de uma equação do segundo grau: (x' + x")

Produto das raízes de uma equação do segundo grau: (x' . x")

As raízes de uma equação do 2º grau são determinadas a partir das seguintes expressões:

$$x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \text{em que } \Delta = b^2 - 4ac$$

Com base nessas informações, vamos determinar as expressões matemáticas responsáveis pela soma e produto das raízes.

Soma:

$$x' + x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x' + x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Produto:

$$x' . x'' = \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) . \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$x' . x'' = \frac{(-b)^2 - b\sqrt{\Delta} + b\sqrt{\Delta} - (\sqrt{\Delta})^2}{(2a)^2}$$

$$x' + x'' = \frac{-b-b}{2a}$$

$$x' + x'' = \frac{-2b}{2a}$$

$$x' + x'' = \frac{-b}{a}$$

$$x' \cdot x'' = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2}$$

$$x' \cdot x'' = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2}$$

$$x' \cdot x'' = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2}$$

$$x' \cdot x'' = \frac{+4ac}{4a^2}$$

$$x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$$

Com a utilização dessas expressões podemos determinar as raízes de uma equação do 2º grau sem aplicar a fórmula resolutiva, respeitando a formação dessa equação com base na soma e no produto das raízes, em que **S** é a soma das raízes e **P** é o produto das raízes.

Formação da equação do segundo grau com base na soma e no produto das raízes: ***$x^2 - Sx + P = 0$.***

A equação $x^2 + 9x + 14 = 0$ possui as seguintes raízes de acordo com as expressões da soma e do produto:

Soma

$$x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{-9}{1} = -9$$

Produto

$$x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = \frac{14}{1} = 14$$

	x		=	14
	+		=	- 9

1. Resolva mentalmente.

a) $x^2 - 8x + 15 = 0$ b) $x^2 - 12x + 36 = 0$ c) $x^2 - 14x - 32 = 0$

Diretoria de Ensino Superior
Licenciatura em Matemática
Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática
Linha de Pesquisa: Ensino e Aprendizagem de Álgebra
Licenciandos: David de Freitas, Guilherme de Castro, Isaías Ribeiro, José Ramon e Juliana Alves.
Orientadora: Profª Me. Lívia Azelman de Faria Abreu

Nome: ______________________________ Data: ___ / ___ / 2017

Diferentes métodos de resolução de equações do segundo grau

ATIVIDADES

1. Resolva as equações a seguir utilizando os métodos estudados anteriormente, sabendo que cada equação deve ser resolvida por um método diferente:

a) $x^2 - 21387x + 21386 = 0$

c) $x^2 + 5x + 5 = 0$

b) $(x + 3)(x - 4) = 0$

d) $x^2 + 10x - 39 = 0$

2. Pai e filho têm hoje 45 e 15 anos, respectivamente. Há quantos anos a idade do pai era igual ao quadrado da idade do filho?