RELATÓRIO DO LEAMAT

ABORDAGEM DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NO ESTUDO DE FUNÇÕES INVERSAS

ENSINO E APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA

CALILI CARDOZO DOS SANTOS PARAVIDINI

HALLEF JULIA MACABU

Recebido em 21/08/18

CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

2018.1

CALILI CARDOZO DOS SANTOS PARAVIDINI

HALLEF JULIA MACABU

RELATÓRIO DO LEAMAT

ABORDAGEM DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NO ESTUDO DE FUNÇÕES INVERSAS

ENSINO E APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA

Trabalho apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, *Campus* Campos-Centro, como requisito parcial para conclusão da disciplina Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Profª. Lívia Azelman de Faria Abreu

CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

2018.1

SUMÁRIO

p.

1) Relatório do LEAMAT I 3
 1.1) Atividades desenvolvidas 3
 1.2) Elaboração da sequência didática.................... 5
  1.2.1) Tema 5
  1.2.2) Justificativa 5
  1.2.3) Objetivo Geral 9
   1.2.3) Objetivos Específicos 9
  1.2.4) Público Alvo 9

2) Relatório do LEAMAT II 10
 2.1) Atividades desenvolvidas 10
 2.2) Elaboração da sequência didática 10
  2.2.1) Planejamento da sequência didática 10
  2.2.2) Aplicação da sequência didática na turma do LEAMAT II . 13

3) Relatório do LEAMAT III 15
 3.1) Atividades desenvolvidas 15
 3.2) Elaboração da sequência didática 15
  3.2.1) Versão final da sequência didática 15
  3.2.2) Experimentação da sequência didática na turma regular .. 16

Considerações Finais 21
Referências 23
Apêndices 25
 Apêndice A - Material didático aplicado na turma do LEAMAT II 26
 Apêndice B - Material didático experimentado na turma regular 38

1) Relatório do LEAMAT I

1.1) Atividades desenvolvidas

No primeiro encontro, foi realizada a aula inaugural da disciplina Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática (LEAMAT) com a presença das professoras de três linhas de pesquisa, em que foi exposto os objetivos da disciplina laboratório de ensino, o calendário de aulas, método de avaliação dos alunos por meio de apresentação de slides.

No segundo encontro, foi apresentado o vídeo "A beleza da álgebra"[1] e a partir do vídeo a orientadora propôs uma conversa sobre a álgebra no ensino básico, sua importância para formação do aluno, além das dificuldades do ensino dessa área principalmente para o aluno do ensino fundamental que tem o primeiro contato com este ramo da Matemática. Ainda foi proposta a realização de algumas atividades da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas OBMEP, onde a orientadora foi apontando as principais dificuldades dos alunos, além de observar as resoluções diferenciadas dos integrantes dos grupos.

No terceiro encontro, conforme solicitado previamente pela professora, foi realizada apresentação, onde os dois grupos falaram sobre a Álgebra nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), nos 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental, bem como no Ensino Médio. Nesta ocasião, foram apresentados os objetivos do ensino da Matemática em cada ciclo, quais propostas para a Álgebra são trazidas nos PCN e quais outros temas da Matemática podem ser articulados com a Álgebra.

No quarto encontro, realizado junto com a orientadora de Geometria e com todos grupos do LEAMAT I, foi apresentado um trabalho já concluído da linha de pesquisa do ensino de Álgebra, onde o grupo fez importantes apontamentos que puderam contribuir para uma visão do funcionamento da disciplina laboratório e da experiência engrandecedora que é sua realização, além de apontarem pontos que merecem atenção na realização dos relatórios, justificativa e sequência didática. A apresentação do trabalho contribuiu para uma maior compreensão do LEAMAT,

[1] Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=tWJ4x8G92nY

por ser possível visualizar a construção do trabalho após as três etapas do laboratório.

No quinto encontro, realizado junto com a orientadora de Geometria e com todos os grupos do LEAMAT I, foi apresentado um trabalho já concluído da linha de pesquisa de ensino da Geometria, em que os licenciandos tiveram a oportunidade de participar da aplicação da sequência didática deste grupo.

Na aula seguinte, sexto encontro, a professora trabalhou o segundo capítulo do livro "Álgebra: pensar, calcular, comunicar...", de Lucia A. de A. Tinoco, fazendo leitura, debate e reflexão. O tema abordado foram as quatro concepções da Álgebra: Álgebra como Generalizadora da Aritmética, Álgebra Funcional, Álgebra Estrutural e Álgebra das Equações. Além dos assuntos trabalhados em sala, a turma foi dividida em dois grupos, a fim de preparar uma apresentação sobre os capítulos terceiro e quarto do livro. Ao final da aula, a professora ainda aplicou uma atividade sobre o Teorema de Pitágoras, com o uso de quatro triângulos retângulos em papel recortado (material concreto), onde pode-se perceber a articulação da Álgebra com a Geometria.

No sétimo encontro, conforme solicitado pela professora, foram apresentados dois trabalhos embasados em capítulos do livro "Álgebra: Pensar, Calcular, Comunicar" tratando do sinal da igualdade e da propriedade distributiva. O trabalho foi apresentado e contribuiu para o contato do grupo com a experiência de ministrar aula, o que não é comumente solicitado nas outras disciplinas.

A partir do oitavo encontro, deu-se início à pesquisa do aporte teórico referente ao tema escolhido, verificação da existência de outros trabalhos já realizados na disciplina LEAMAT para que não houvessem trabalhos com a mesma proposta já realizados. O grupo pode ainda consultar os livros do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) para conhecer a abordagem do tema no ensino básico. Nesses encontros, a orientadora sempre esteve em contato com as pesquisas do grupo, orientando para escolha do aporte teórico conveniente a cada tópico a ser trabalhado além de dar auxilio na parte técnica da redação do relatório. Todas as aulas da disciplina LEAMAT foram de grande aproveitamento, por se tratarem de aulas mais práticas, onde o grupo pode ter mais autonomia para o debate de temas, além de propiciar o contato com a preparação de trabalho acadêmico e ainda permitir conhecimento mais aprofundado do que é a prática docente.

1.2) Elaboração da sequência didática

1.2.1) Tema

Abordagem de representações semióticas no estudo de funções inversas.

1.2.2) Justificativa

Temos no amplo campo da Matemática a Álgebra, uma das principais áreas de estudo e de fundamental importância para formação do estudante de ensino básico. Conforme afirma Ponte (2006) é importante que o aluno tenha uma capacidade mínima de trabalhar com os números e suas operações e entender a linguagem algébrica para que não se torne limitado nas opções escolares e profissionais. Em vários países a Álgebra é um tema fundamental do conteúdo da matemática escolar. A Álgebra também é apontada nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) como tema fundamental no ensino da Matemática:

> O primeiro tema ou eixo estruturador, Álgebra, na vivência cotidiana se apresenta com **enorme importância** enquanto linguagem, como na variedade de gráficos presentes diariamente nos noticiários e jornais, e também enquanto instrumento de cálculos de natureza financeira e prática, em geral (BRASIL, 2002, p. 120, grifo nosso).

No que tange o ensino da Álgebra, vemos que o ensino de funções pode ser considerado um dos temas de grande dificuldade dos alunos, devido a introdução das relações entre variáveis. Até o momento em que a Álgebra é introduzida, os alunos têm o contato apenas com a resolução de equações. Nesse sentido, Lima (2008) em suas pesquisas aponta que as dificuldades no entendimento das funções são amplas e não se limitam à apenas alunos do ensino básico, mas sim até os níveis mais avançados de formação. Devido a todos esses pontos o PCN do Ensino Médio, apresenta a necessidade do estudo das funções de variados tipos:

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria

> matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções (BRASIL, 2002, p.121).

Por se tratar de uma linguagem simbólica, os alunos do Ensino Médio a consideram muito formal e tem dificuldade em sua compreensão, porém o não entendimento do estudo de funções acarreta em dificuldades em todos conteúdos posteriores, principalmente aqueles que dependem diretamente desse conceito. Segundo Oliveira (1997 apud BATISTA, 2013) os alunos em geral confundem os diferentes conceitos de funções, funções definidas por mais de expressão.

No âmbito das funções, temos um conteúdo pouco abordado que é o estudo das Funções Inversas. Nos seis livros do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD), triênio 2015-2017, que foram analisados percebe-se que o conteúdo é tratado de forma sucinta, não havendo incentivo a diferentes abordagens do tema. Alguns livros relacionam as Funções Inversas apenas as funções exponenciais e logarítmicas. Pesquisas já apontam para as dificuldades relacionadas a esse conteúdo. De acordo com Gonçalves (2014),

> O levantamento de pesquisas que trataram do processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de funções compostas e inversas revelou uma reduzida exploração do tema, sendo este abordado com maior ênfase no ensino superior. [...]. Ao realizar a análise de uma amostra de livros didáticos, a autora observou que há um destaque para o registro algébrico e que parte das ideias principais desse objeto matemático não é apresentada (GONÇALVES, 2014, p.2).

Devido a não abordagem ampla do conteúdo e a dificuldade dos alunos em seu entendimento é importante abordar de forma diferenciada o tema. Duval (1981), aponta a necessidade de uma abordagem de representações semióticas para a compreensão dos temas matemáticos, a transição entres os diferentes registros possibilita o entendimento mais profundo do tema.

Seguindo a proposta do uso da representação semiótica, um dos importantes registros no estudo das funções é o algébrico que, segundo Passos (2012), não deve ser tratado de forma massiva sem correlação com a realidade do aluno. Ainda relatando que os livros didáticos, em sua maioria, abordam o ensino da Matemática de forma estritamente algébrica, não trazendo as diferentes abordagens do tema. É muito importante esse registro seja explorado em consonância com outros.

Sendo assim, o uso do registro geométrico a partir de um estudo gráfico das funções e suas inversas, possibilita ao aluno a percepção que o gráfico da função inversa é a reflexão do gráfico da função original em torno da bissetriz dos quadrantes impares. Considera-se esse estudo importante por se tratar de uma abordagem de registro distinto do algébrico.

> Uma abordagem gráfica contribuiria para a interpretação de algumas características importantes da composição de duas funções, como por exemplo, a análise das restrições dos domínios, permitindo, assim, que os estudantes elaborassem conjecturas referentes a este objeto matemático (BARBOSA, 2009 apud GONÇALVES, 2014, p.2).

Uma das possíveis formas de se abordar o registro geométrico é por meio de *softwares* de geometria dinâmica. Nos últimos tempos, o uso de tecnologias em salas de aula vem aumentando e autores defendem sua utilização, além de apontarem os benefícios que seu uso pode trazer para a construção do conhecimento do aluno.

> Não tenho dúvidas de que as tecnologias ampliam as possibilidades de se ensinar e aprender, oferecendo novas e variadas formas para que esses processos ocorram, de forma que idéias para trabalhos pedagógicos que antes eram inviáveis (por limitações de custo, tempo, recursos físicos, etc.) tornam-se factíveis com o uso de tecnologias. Essa é uma das formas pelas quais as tecnologias desafiam a educação e a desestabilizam, pois oferecem a oportunidade de uma prática que potencialmente pode ser melhor que a praticada, considerando a sociedade em que vivemos (MALTEMPI, 2008, p.2).

Gonçalves (2014), em seu trabalho "Funções Inversas e Compostas: *uma* proposta de exploração de registros de representações semióticas com o auxílio do *software GeoGebra",* destaca ainda que é importante notar que os livros didáticos não propõem qualquer tipo de atividade que envolva a utilização de *softwares*, e que sua utilização propicia o aluno uma visualização do objeto matemático estudado.

O *software* educacional pode ser utilizado como ferramenta apenas de demonstração, quando o professor no decorrer de sua aula o utiliza e o aluno apenas observa a construção. Outra forma de utilização, é propiciar ao aluno o contato com o *software*, de forma que ele tenha a possibilidade de realizar a construção. Esse trabalho pode-se dar em um laboratório de informática ou ainda com o uso de tecnologias móveis, umas dessas são os *tablets*. Quanto ao seu uso para realização de atividades em sala de aula, temos que vários autores destacam as diversas possibilidades de exploração dessa ferramenta para construção do conhecimento. Como destacam Batista, Moreira e Peixoto (2013),

> [...]. Além disso, pode contribuir para aprendizagens mais personalizadas e para a melhoria de resultados educacionais. Os professores atribuíram esses ganhos a vários fatores: i) portabilidade do aparelho; ii) habilidade dos professores para lidar com necessidades e preferências pessoais; iii) facilidade com que os alunos utilizavam aplicativos e ferramentas; iv) adoção da concepção de que o *tablet* era uma ferramenta de aprendizagem. (PEIXOTO; MOREIRA; BATISTA, 2013, p.3).

Outra ferramenta para exploração do registro geométrico, é a utilização de jogos pedagógicos, que vem sendo defendido por muitos autores, sendo uma ferramenta que pode possibilitar ao aluno adquirir confiança sobre o conteúdo abordado. Ainda se tratando da utilização de jogos pedagógicos, temos que mesmo em turmas de ensino médio, uma atividade desse gênero pode ser de grande auxilio na construção do conhecimento, já que estimula no aluno a aplicação do conhecimento obtido. Silveira (1998 apud FIALHO 2008) afirma

> [...] os jogos podem ser empregados em uma variedade de propósitos dentro do contexto de aprendizado. Um dos usos básicos e muito importantes é a possibilidade de construir-se a autoconfiança. Outro é o incremento da motivação. [...] um método eficaz que possibilita uma prática significativa daquilo que está sendo aprendido. Até mesmo o mais simplório dos jogos pode ser empregado para proporcionar informações factuais e praticar habilidades, conferindo destreza e competência (SILVEIRA, 1998, apud FIALHO, 2008, p.3).

Ainda em seu trabalho, Fialho (2008) afirma

> É importante que os jogos pedagógicos sejam utilizados como instrumentos de apoio, constituindo elementos úteis no reforço de conteúdos já apreendidos anteriormente. Em contrapartida, essa ferramenta de ensino deve ser instrutiva, transformada numa disputa divertida, e, que consiga, de forma sutil, desenvolver um caminho correto ao aluno. O fator competição, durante os jogos, será evidente, porém não há motivos para preocupação, pois o professor precisa estar preparado para evidenciar que esse tipo de competição ocorre apenas no jogo e não, na vida (FIALHO, 2008, p.4).

A partir do exposto o conteúdo de funções inversas abordado de forma diferenciada pode ser uma importante ferramenta para o entendimento das diversas funções estudadas na primeira série do Ensino Médio. Sendo assim, surge o interesse em uma abordagem dos registros semióticos das funções inversas.

1.2.3) Objetivo Geral

Promover, por meio de diferentes registros, um estudo sobre o conceito de invertibilidade de funções.

1.2.3.1) Objetivos específicos:

- Apresentar o conceito de função inversa;
- Realizar a invertibilidade em diferentes funções pelo registro algébrico e geométrico;
- Possibilitar por meio de *software* de geometria dinâmica a construção dos gráficos das funções e sua inversa;
- Aplicar jogo pedagógico envolvendo os gráficos das funções inversas;

1.2.4) Público Alvo

Alunos do segundo ano do Ensino Médio.

2) RELATÓRIO DO LEAMAT II

2.1) Atividades desenvolvidas

No primeiro momento, foram apresentados os objetivos do LEAMAT II, as atividades a serem desenvolvidas e a organização do calendário no decorrer do semestre. Foi exposto que a disciplina continua tendo uma avaliação qualitativa dos grupos.

As orientadoras fizeram a apresentação do conceito de uma sequência didática, distribuíram o artigo de Fassarella sobre o tema, afim de nortear quanto a execução do planejamento da sequência didática.

As aulas seguintes foram dedicadas as pesquisas quanto a melhor forma de se expor o conteúdo proposto, idealização das apostilas, escolha dos exercícios e desenvolvimento das atividades a serem realizadas e confecção do jogo.

Em todas as aulas, eram apresentados os avanços na elaboração da sequência didática a orientadora que fazia sugestões e apontamentos quanto a cada material que seria utilizado.

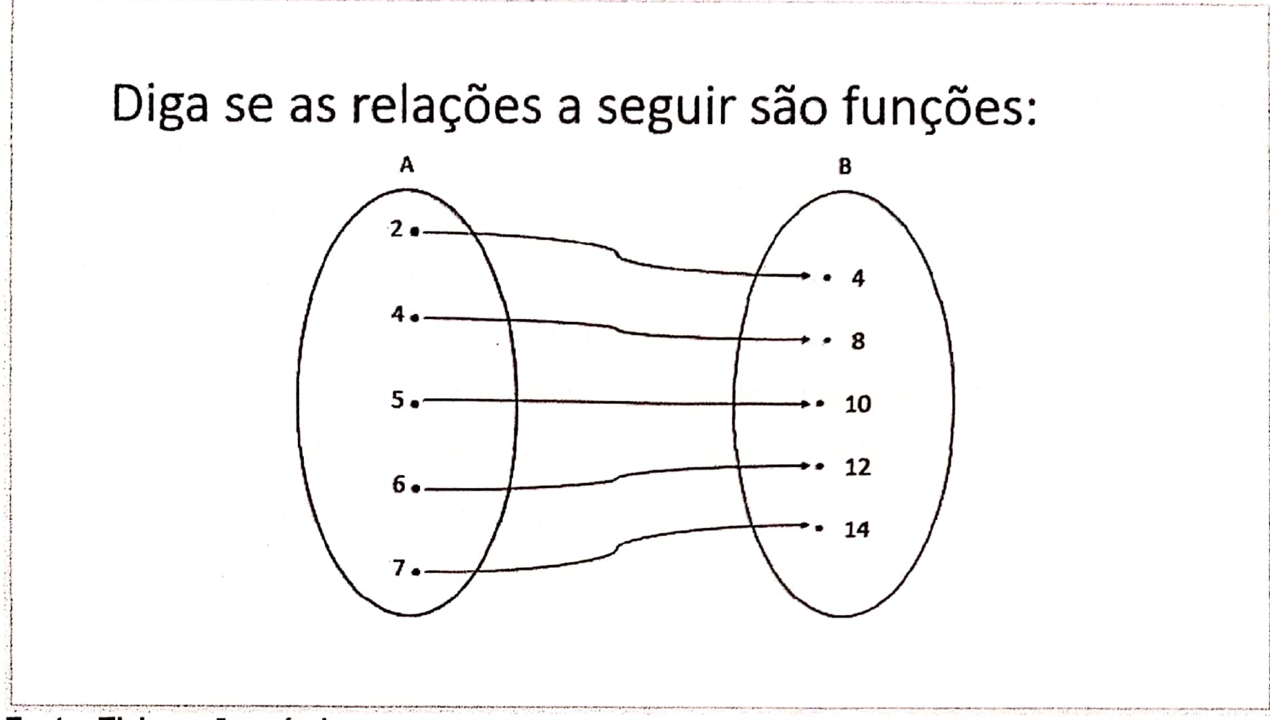
2.2) Elaboração da sequência didática

2.2.1) Planejamento da sequência didática

A proposta da sequência didática é possibilitar que o aluno transite entre o registro algébrico e geométrico da invertibilidade de funções e que, a partir desse estudo, possa se aprofundar na compreensão das funções estudadas durante o primeiro ano do ensino médio.

A aula se iniciará com a apresentação do grupo e com um resumo oral das atividades a serem desenvolvidas. Após esse momento, será entregue a primeira apostila (Apêndice A), introduzindo o conteúdo de funções e a classificação das funções em injetoras, sobrejetoras e bijetoras. Nesse momento, o intuito é de propor a interação da turma e alguns diagramas serão apresentados em slides (Figura 1), que deverão ser classificados oralmente pelos alunos. Após esse momento, os alunos serão instruídos a resolverem duas questões uma de registro algébrico e outra geométrico, afim de verificar se os conceitos ficaram claros. Essa introdução visa revisar esse conteúdo, devido a sua importância para compreensão do conceito de função inversa.

Figura 1 – Slides utilizados na definição de função



Fonte: Elaboração própria

Na segunda apostila (Apêndice A), será apresentado o conceito de função inversa e explorado o registro algébrico, expondo a relação entre os conjuntos domínio, contradomínio e imagem das funções e de suas inversas. A apostila compreenderá o conceito de invertibilidade das funções polinomiais do primeiro e segundo graus, exponencial e logarítmica, sendo apresentado o registro algébrico para encontrar a função inversa. Ao final da apresentação do registro algébrico, serão propostas questões de vestibular, por se tratar de uma turma de Ensino Médio, abordando o assunto para desenvolver a compreensão e prática desse registro.

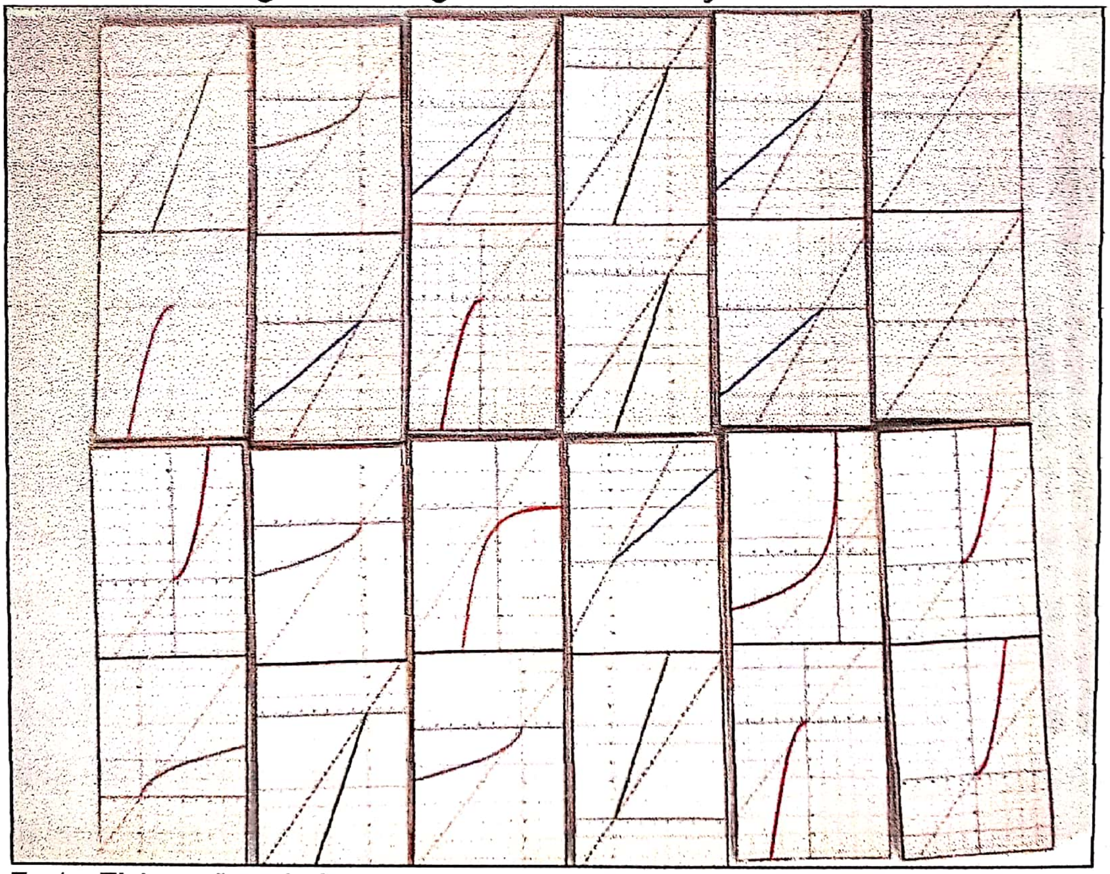
Na terceira apostila (Apêndice A), será apresentado o *software* de geometria dinâmica GeoGebra e um breve resumo de suas ferramentas e funcionalidades. O *software* será utilizado para exploração do registro geométrico das inversas das funções a partir do estudo dos seus gráficos. Nesse momento, será utilizada a tecnologia móvel (*tablet*). Serão propostas questões utilizando o GeoGebra, que têm como objetivo possibilitar a construção dos gráficos pelo aluno e sua análise, registrando suas observações.

Nesse bloco de atividades, o aluno irá trabalhar com o registro algébrico afim de encontrar as inversas das funções solicitadas e poderá analisar o registro geométrico a partir do estudo dos gráficos plotados no *software* de geometria dinâmica.

Ao final das atividades do registro geométrico, os alunos serão instruídos a formarem grupos de quatro alunos afim de iniciarem o jogo de dominó (Figura 2) envolvendo as funções inversa. A proposta do jogo é verificar se o conceito de invertibilidade, pela análise gráfica, foi bem compreendido pelos alunos.

O jogo é composto de vinte e oito peças, cada uma delas com dois gráficos, o objetivo do jogo é encaixar as peças utilizando o conceito de invertibilidade. O aluno sempre deverá encaixar a peça que contiver o gráfico da inversa da peça que está na mesa, dessa forma será possível verificar se o aluno conseguiu compreender a reflexão do gráfico em relação ao eixo de simetria.

Figura 2 – Jogo dominó de função inversa



Fonte: Elaboração própria.

2.2.2) Aplicação da sequência didática na turma do LEAMAT II

A aplicação da sequência didática deu-se no dia 28 de novembro de 2017 na turma do LEAMAT II. Por se tratar da turma de Licenciatura em Matemática, foi previsto facilidade em realizar as atividades e compreender os conceitos em relação a aplicação em turma regular, já que são conceitos já estudados pelos licenciandos. Devido a disponibilidade de dois horários algumas atividades não foram realizadas, pois a sequência foi pensada para três horários.

A aula iniciou-se com a entrega da primeira apostila (Apêndice A). Essa, por se tratar de uma revisão, foi concluída rapidamente, assim como as atividades realizadas com uso dos slides, onde os licenciados tiveram facilidade em identificar as respostas a partir dos diagramas expostos.

No segundo momento, foi distribuída a segunda apostila (Apêndice A), foi utilizado, nesse momento, a lousa para explicação dos conceitos e resolução dos exemplos propostos e disponibilizado tempo para os licenciados realizarem as atividades que posteriormente foram corrigidas no quadro.

No terceiro momento, foram distribuídos os *tablet*s e a terceira apostila (Apêndice A), com intuito de explorar o registro geométrico. As atividades com utilização dos *tablet*s apresentaram algumas dificuldades devido ao *software* utilizado não estar atualizado ou pela lentidão do próprio aparelho. Esse problema fez com que alguns alunos ficassem em dupla para facilitar o andamento da resolução das atividades.

As atividades da terceira apostila foram concluídas e corrigidas com a utilização do Datashow, para que os licenciandos pudessem acompanhar a resolução das atividades no GeoGebra.

Foi proposto, então, que fossem formados grupos de quatro alunos e foi entregue um jogo de dominó para cada grupo e explicado a regras. O jogo correu como esperado, sendo uma atividade diferenciada que instigou a competividade e aplicação do conceito geométrico da invertibilidade das funções. Após os término da partida pelos três grupos, foi concluída a aplicação e aberto para sugestões dos licenciandos e orientadoras.

Devido à dificuldade de se plotar os gráficos em alguns *tablet*s foi sugerido que a exploração do registro geométrico, utilizando o Geogebra, fosse reallizada a partir de um *applet* previamente desenvolvido pelo grupo, para que o desenvolvimento do estudo geométrico se desse de forma mais simplificada.

No jogo, foi apontado a necessidade de expor nas peças os quadrantes do gráfico, para que assim fosse facilitado a orientação dos gráficos impressos nas peças.

Foi apontado que os *tablet*es deveriam ser entregues ligados e com o *software* já aberto. Foram feitas algumas sugestões quanto às correções gramaticais em alguns pontos das apostilas. Devido a um problema na impressão das apostilas utilizadas na aplicação, as imagens ficaram borradas dificultado algumas interpretações, devido a isso foi apontado a necessidade de ser impresso com qualidade devido às imagens utilizadas.

Nas questões que trabalhavam gráficos, na primeira apostila, foi sugerido o uso de slides para realizar a correção. Foram feitos apontamentos quanto a algumas definições e enunciados de questões que não ficaram completos.

3) Relatório do LEAMAT III

3.1) Atividades desenvolvidas

No primeiro momento, foram apresentados os objetivos do LEAMAT III e apresentado o calendário das atividades a serem desenvolvidas no decorrer do semestre. Foi apresentado pela orientadora o relato da experiência do contato de alguns alunos, que já haviam concluído o LEAMAT, com a turma regular. Foram feitos apontamentos quanto à postura a ser adotada em sala e apresentados fragmentos do trabalho de Felipo Bellini "Como enfrentar a sala de aula pela primeira vez", que tem como base Antonio Nóvoa "Os professores e sua formação".

As aulas seguintes foram dedicadas a ajustes na sequência didática, seguindo as sugestões feitas pelas orientadoras e licenciandos após aplicação realizada no LEAMAT II, além da confecção da quantidade de material necessária para aplicação na turma regular. Após a aplicação, em turma regular, a aulas foram destinadas à escrita, às correções do relatório e à apresentação final.

3.2) Elaboração da sequência didática

3.2.1) Versão final da sequência didática

Seguindo sugestão, para diminuir problemas na utilização do *tablet*, foi criado um *applet* para facilitar a análise dos gráficos e evitar problemas que foram encontrados durante a plotagem dos gráficos no *software* de geometria dinâmica na aplicação do LEAMAT II. No jogo de dominó, foi incluída uma seta na parte superior para facilitar a identificação da posição em que o gráfico deveria ser analisado.

Foram feitas algumas correções gramaticais em alguns itens das apostilas. Nas questões que trabalhavam gráficos na primeira apostila, foram preparados slides para auxiliar a correção e feitas alterações em definições e enunciados de questões que não ficaram completos.

3.2.2) Experimentação da sequência didática na turma regular

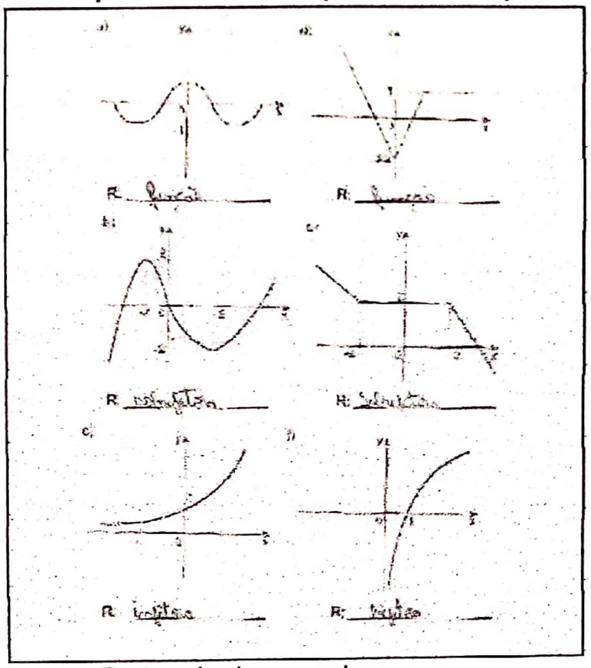
A aplicação em turma regular foi realizada no dia 18 de maio de 2018 no Instituto Federal Fluminense em Campos dos Goytacazes, na turma do segundo ano do ensino médio. No dia da aplicação, havia vinte e quatro alunos e foram disponibilizados dois tempos de cinquenta minutos para a aplicação.

A aula iniciou-se com a apresentação do grupo de professores em formação e foi informado que seriam tiradas fotos da aplicação, mas havendo o cuidado para não se fotografar o rosto dos alunos. Em seguida, foi distribuída a primeira apostila (Apêndice B) com o objetivo de revisar o conteúdo de funções visto no primeiro ano do ensino médio.

Foi iniciada a leitura da apostila junto com os alunos, utilizando também slides para apresentar, com diagramas, as definições presentes na apostila. Os alunos, nessa etapa, não apresentaram dificuldade na compreensão das definições e responderam às perguntas expostas nos slides facilmente.

Depois desse momento, foi disponibilizado tempo para que os alunos resolvessem a questão na apostila que envolvia classificação das funções. Em seguida, foi realizada a correção com utilização de slides. Em sua maioria os alunos responderam corretamente (Figura 3).

Figura 3 – Resposta correta apresentada por um dos alunos.



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Em seguida, foi distribuída a segunda apostila (Apêndice B) que introduz o conteúdo de funções inversas explorando o registro algébrico. Foi realizada a leitura da apostila junto com os alunos, utilizando o quadro para expor algumas observações e exemplos. Após a apresentação do conceito de invertibilidade e a explicação do método para se obter a função inversa da função polinomial do primeiro grau algebricamente, foi disponibilizado um momento para resolução do primeiro exemplo da apostila. A correção foi realizada no quadro. Nessa primeira resolução de exemplos, os alunos resolveram rapidamente por se tratar da função polinomial do primeiro grau.

Ao iniciar a invertibilidade da função polinomial do segundo grau, foi indagado aos alunos se havia possibilidade de realizar a invertibilidade dessa função. Como houve dificuldade dos alunos apresentarem a resposta, foi utilizado o *software* Geogebra para plotar o gráfico da função com intuito de facilitar o entendimento dos alunos. Essa utilização do *software* não estava prevista na sequência didática, mas contribuiu para a formulação de respostas dos alunos.

Após o entendimento sobre a possibilidade da invertibilidade da função polinomial do segundo grau, delimitando o seu domínio, os alunos foram instruídos a resolver os exemplos da apostila. Para isso, deveriam calcular também as coordenadas do vértice das parábolas das funções. Durante a correção realizada no quadro, foi perguntado aos alunos como resolveram o exemplo e, pelas respostas apresentadas, os alunos compreenderam bem a necessidade de delimitação do domínio e imagem da função.

Para concluir a apostila, foi realizado o estudo da função logarítmica como inversa da função exponencial, prosseguindo com a leitura da apostila para compreensão dessa definição. Após esse momento, foi disponibilizado novamente tempo para os alunos resolverem os exemplos da apostila. A correção foi feita também com a participação dos alunos.

Após a conclusão da parte algébrica, foi dado tempo para os alunos resolverem uma das três questões no final da segunda apostila. Devido ao tempo disponível para aplicação, foi realizada somente a resolução e correção dessa primeira questão.

Em seguida, foi distribuída a terceira apostila (Apêndice B), que apresenta o estudo do registro geométrico da invertibilidade das funções. Depois das apostilas distribuídas, foram entregues os *tablets* que já encontravam-se ligados e com o *applet* aberto. Nesse momento, houve alguma agitação por parte dos alunos e alguns chegaram a fechar o *applet* e abrir outras funções do *tablet*. Ao perceber essa movimentação, foi solicitado aos alunos que utilizassem apenas o *applet*.

Para facilitar o acompanhamento dos alunos, o *applet* foi exibido na televisão e sua apresentação feita com a leitura da apostila e simultaneamente na tela. Os alunos não apresentaram dificuldade na utilização do *applet*. Após terem exibido o eixo de simetria, como solicitado na apostila, foram instruídos a realizar a primeira atividade, que trabalhava a invertibilidade das funções polinomiais do primeiro grau. Foi solicitado aos alunos que registrassem sua observação quanto aos gráficos das funções e de suas inversas.

Alguns alunos, já nesse momento inicial, perceberam a relação de simetria em relação a bissetriz dos quadrantes ímpares, outros fizeram observações diferentes, como as retas serem paralelas ou concorrentes (Figura 4).

Figura 4 – Exemplo de respostas de alunos

a) O que você observou nos gráficos dessas duas funções?

[illegible]

b) É possível identificar visualmente, em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, alguma semelhança entre os gráficos, ou alguma relação entre eles?

[illegible]

a) O que você observou nos gráficos dessas duas funções?

Uma é paralela a outra, e a outra se cruza no mesmo ponto.

b) É possível identificar visualmente, em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, alguma semelhança entre os gráficos, ou alguma relação entre eles?

São simétricas em relação a bissetriz

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Essa atividade foi corrigida junto com os alunos e, em seguida, foi solicitado que os alunos resolvessem a atividade 2. Nessa apostila, já era necessário que o aluno relacionasse o registro algébrico com o geométrico. Na atividade 2, foi necessário resgatar o conceito de delimitação de domínio por se tratar da função polinomial de segundo grau.

Nesse momento, boa parte dos alunos já havia compreendido bem a relação entre os gráficos das funções e de suas inversas em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares. Alguns chegaram a relatar que a bissetriz funcionava como um espelho (Figura 5).

Figura 5 – Resposta da atividade 2

a) Observando o gráfico das função e sua inversa, em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, já é possível verificar alguma regularidade?

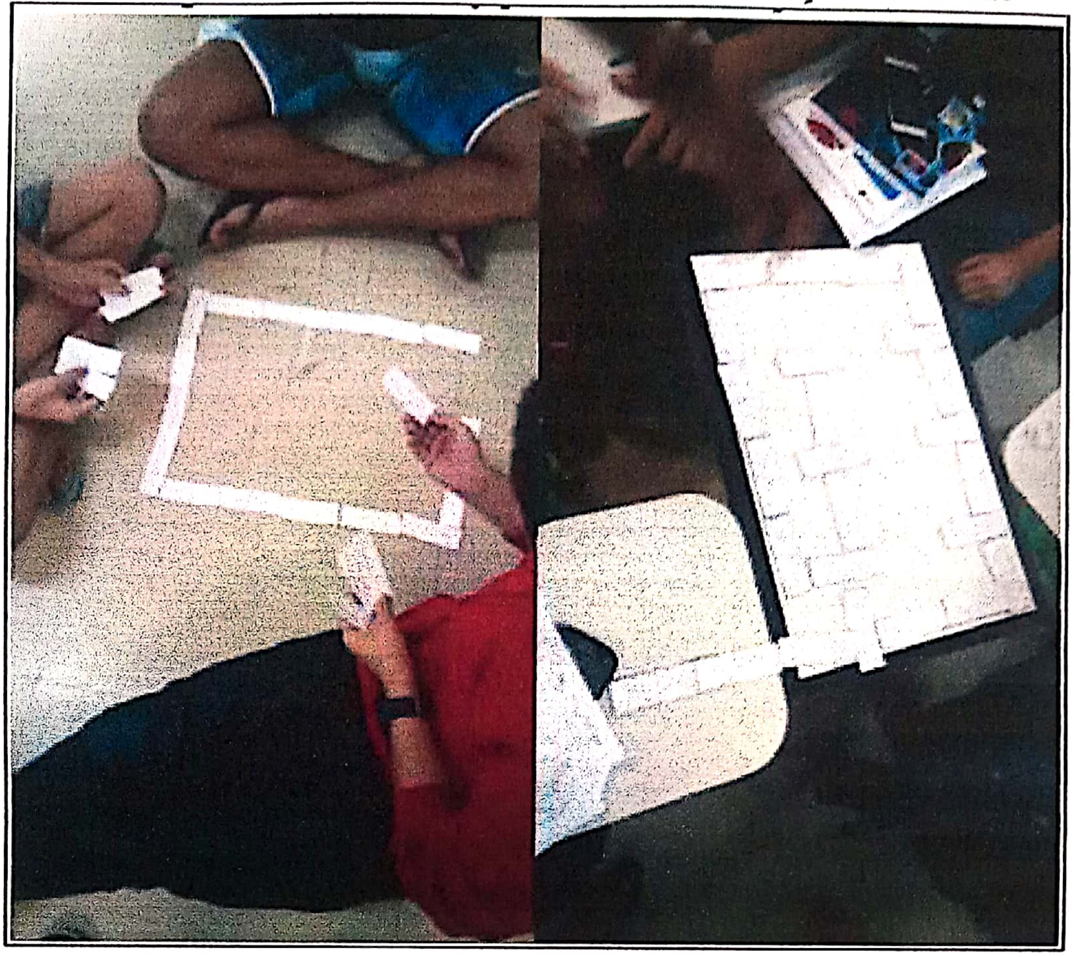
A bissetriz é como [illegible]
das funções

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Foi então realizada a correção da atividade 2 e apresentada para a turma essa relação, já identificada por alguns alunos. Foi proposta, então, a realização da atividade 3 para concluir o estudo da relação entre o registro algébrico e geométrico.

Após a correção, foi solicitado que os alunos formassem grupos de quatro alunos para poderem realizar a última atividade, que é o jogo de dominó de funções inversas (Figura 6).

Figura 6 – Momento do jogo de dominó de funções inversas



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Esse foi o momento da aula em que houve maior animação dos alunos, cada grupo se organizou para que conseguisse espaço para jogar. Alguns optaram por jogar no chão, outros juntaram carteiras.

Em alguns casos, foi preciso alguma intervenção no jogo, devido a algumas peças jogadas de forma equivocada. Alguns grupos tiveram maior dificuldade em realizar o jogo e pediram ajuda mais vezes. Já outros grupos realizaram a partida até o final sem dificuldade.

Após a finalização do jogo pela maior parte dos grupos, a aplicação foi encerrada.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após a aplicação em turma regular, é possível apontar que o trabalho atingiu seu objetivo geral de explorar, por diferentes registros, a invertibilidade de algumas funções. Dentre os objetivos específicos traçados, foi possível apresentar o conceito de função inversa e realizar a invertibilidade de funções por meio do registro algébrico e geométrico.

A princípio, era esperado trabalhar as funções polinomiais do primeiro e segundo grau, exponencial, logarítmica e modular. Essa foi retirada devido ao tempo que seria necessário para aplicação da sequência.

O objetivo específico de plotar os gráficos das funções e de suas inversas não foi alcançando, devido a constatação, na aplicação do LEAMAT II, que os *tablets,* durante a tentativa de plotagem, apresentavam problemas. Dessa forma, em uma aplicação futura, poderia ser utilizado um laboratório de Informática para possibilitar aos alunos a experiência com a plotagem de gráficos. Essa opção não foi utilizada devido a aplicação do jogo no final da sequência, que não seria possível na sala de Informática.

Vale destacar que o resultado da aplicação do jogo, ao final da aula, foi um diferencial da sequência. Foi possível constatar que os alunos são muito receptivos a tal tipo de atividade. Além do jogo propiciar a interação entre os alunos, possibilita uma aplicação do conteúdo estudado e é possível perceber nos alunos, devido a competitividade, um interesse grande em acertar sua resposta e ainda em verificar as respostas dadas pelos colegas.

O tempo também é um fator a se destacar. Em aplicações futuras, seria interessante a utilização de três tempos de aula. A aplicação em dois tempos faz com que as atividades sejam realizadas com muita celeridade, o que, em alguns momentos, não é o ideal.

A partir dos comentários redigidos pelos alunos sobre a aula, é possível perceber a importância de se trabalhar de forma diversificada, seja utilizando Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC's), material concreto ou ambos. Os alunos sentem-se motivados a participar da aula e ainda relatam que o uso de tais recursos facilita a aprendizagem (Figura 7).

Figura 7 – Relato de aluno quanto a aplicação.

8- Gostei muito do modo em que o uso do aplicativo facilitou o aprendizado do conteúdo, é bem mais prático e dinâmico do que desenhar os gráficos no caderno. Pudemos comparar gráficos de diversas funções rapidamente. Agradeço por nos proporcionar essa experiência e parabenizo os professores pela iniciativa.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

A respeito do comentário acima, é possível perceber que os alunos, na atualidade, preferem que sejam utilizadas ferramentas que facilitem e agilizem o processo de aprendizagem, como relatado pelo aluno(a) que achou mais prático e dinâmico o estudo dos gráficos através do *applet* desenvolvido.

O professor, na atualidade, deve buscar formas de motivar o aluno, tornando a aula atrativa. Percebemos que tanto o uso da tecnologia quanto o jogo são ferramentas que possibilitam a elaboração de uma aula atrativa e dinâmica.

O grupo ficou realizado com o resultado da aplicação da sequência e percebeu a importância de dedicar-se à busca de novas formas de se trabalhar em sala de aula, não somente a Álgebra, mas todo conteúdo matemático.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN+) - Ciências da Natureza e suas Tecnologias*. Brasília: MEC, 2002.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revemat,** Florianópolis, v. 7, n. 2, p.266-297, jan. 2012. Semestral. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266>. Acesso em: 10 ago. 2017.

FIALHO, Neusa Nogueira. **Os jogos pedagógicos como ferramentas de ensino.** 2008. Disponível em: <http://www.pucpr.br/eventos/educere/educere2008/anais/posteres2.html>. Acesso em: 15 ago. 2017.

GONÇALVES, Jeferson da Silva. **Funções Inversas e Compostas:** uma proposta de exploração de registros de representações semióticas com o auxílio do *software* GeoGebra. 2014. Disponível em: <http://www.lematec.net.br/CDS/XVIIIEBRAPEM/index_menu.html?page=publications&subpage=search&language=br>. Acesso em: 29 jul. 2017.

MALTEMPI, Marcus Vinicius. Educação matemática e tecnologias digitais: reflexões sobre prática e formação docente. **Acta Scientiae,** Canoas, v. 1, n. 10, p.59-67,Jan/Jun 2008. Semestral. Disponível em: <https://www.google.com.br/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=2&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwj9qJTws_vVAhWm0FQKHT_DCWsQFggtMAE&url=http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/download/78/70&usg=AFQjCNHZ5c5apODypx97Z7tUptDe4AVxsQ>. Acesso em: 25 ago. 2017.

MOREIRA, Larissa de Sousa; PEIXOTO, Gilmara Teixeira Barcelos; BATISTA, Silvia Cristina Freitas. Geometria dinâmica em *tablets*: estudo de caso com o aplicativo Geogebra. **Revista Novas Tecnologias na Educação,** Rio Grande do Sul, v. 3, n. 11, p.1-10, dez. 2013. Bimestral. Disponível em: <http://seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/view/44715/28449>. Acesso em: 06 ago. 2017.

PONTE, J. P. (2006). **Números e álgebra no currículo escolar.** In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Eds.), Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores – Actas do XIV EIEM (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.

Campos dos Goytacazes (RJ), 08 de agosto de 2018.

[illegible]

[illegible]

APÊNDICES

Apêndice A: Material didático aplicado na turma do LEAMAT II

Diretoria de Ensino Superior
Licenciatura em Matemática
Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática
Linha de Pesquisa: Álgebra
Licenciandos: Calili Cardozo dos Santos Paravidini e Hallef Julia Macabu
Orientadora: Profª. Me. **Lívia Azelman**

Introdução à Função

Função é uma relação com propriedades especiais. Uma relação R do conjunto A no conjunto B é uma função se:

I) o domínio da relação $R, D\ (R)\ =\ A$;

II) para cada elemento x ∈ D (R) existe um único y ∈ B tal que (x, y) ∈ R

III) a imagem da relação R, $Im\ (R)\ \subset\ B$.

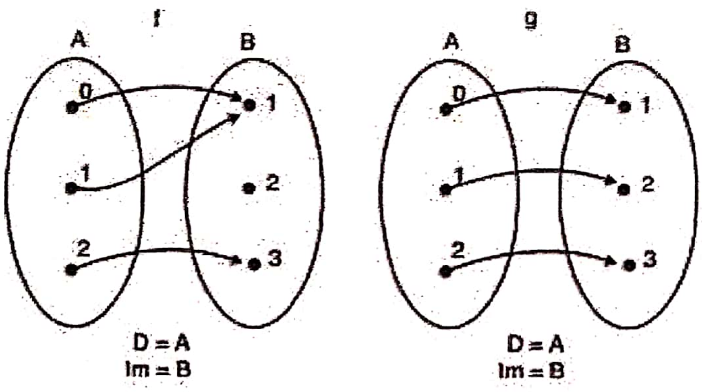
Uma relação R de A e B que é uma função é mais comumente representada pela letra f e do seguinte modo: $f: A\ \rightarrow\ B$, onde, $x\ \rightarrow\ y\ =\ f\ (x)$. Isto significa que, dados os conjuntos A e B, a função tem a lei de correspondência $y\ =\ f\ (x)$.

Funções sobrejetoras, injetoras e bijetoras

Uma função $f: A\ \rightarrow\ B$ é **sobrejetora** quando todo elemento de B (contradomínio) for imagem de pelo menos um elemento de A, ou seja, a função é sobrejetora quando o conjunto imagem é o próprio contradomínio.

Definição: Uma função $f: A\ \rightarrow\ B$ é **injetora** se elementos distintos do domínio tiverem imagens distintas, ou seja, dois elementos não podem ter a mesma imagem. Portanto, não pode ter nenhum elemento do conjunto B que receba duas flechas.

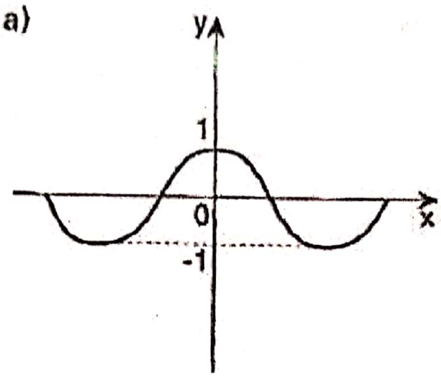
Definição: Se a função **f** for simultaneamente sobrejetora e injetora, então será chamada de **bijetora.**



Atividades

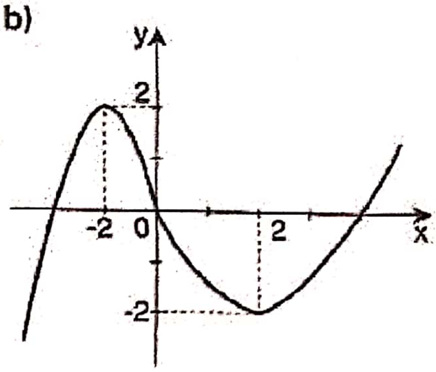
1 – Classifique a partir dos gráficos as funções abaixo em injetora, sobrejetora, bijetora:

a)



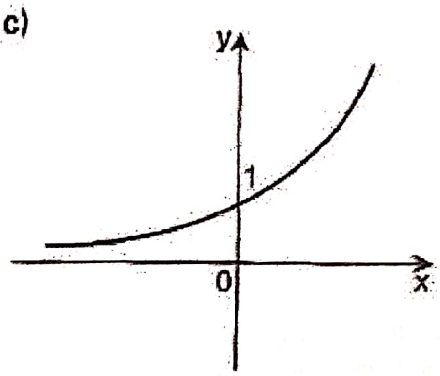
R:____________________________

b)



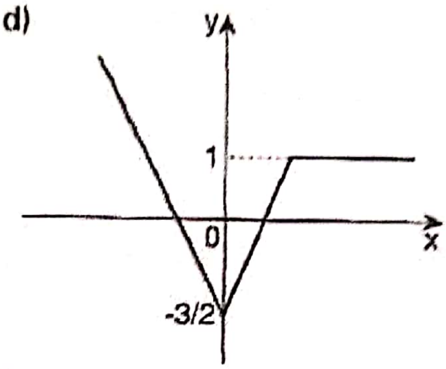
R:____________________________

c)



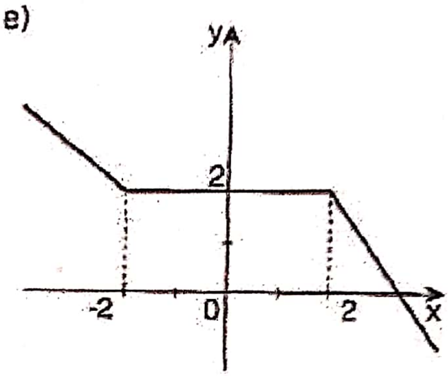
____

d)



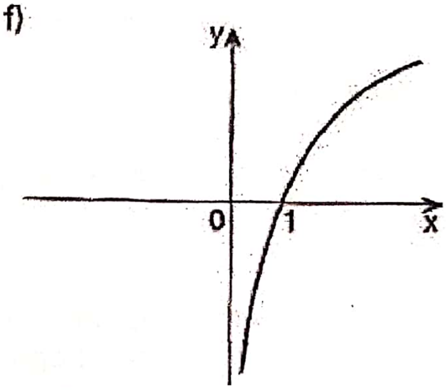
R: ____________________________

e)



R: ____________________________

f)



R:

R: ____________________________

Ministério da Educação Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica DIRLIC matemática LICENCIATURA

Diretoria de Ensino Superior
Licenciatura em Matemática
Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática
Linha de Pesquisa: Álgebra
Licenciandos: Calili Cardozo dos Santos Paravidini e Hallef Julia Macabu
Orientadora: Profª. Me. **Lívia Azelman**

Função inversa

Uma função f: A→B é uma relação entre os conjuntos A e B com propriedades especiais. A função f como relação é um subconjunto de A x B. Os pares ordenados (x, y) deste conjunto são tais que $y = f(x)$.

Por exemplo, se A = {−1, 1, 2}, B = {−1, 0, 1, 4} e $f(x) = x^2$. Enquanto relação, f se escreve como f = {(−1,1), (1,1), (2,4)}. Suponha que as coordenadas são trocadas para obter uma nova relação g.

$$g = \{(1,-1),(1,1),(4,2)\}$$

Em que condições podemos garantir que, após a inversão, g é ainda uma função (e não meramente uma relação)? Nos casos afirmativos, g é chamada função inversa de f e geralmente denotada por f^{-1}. Podemos chegar à conclusão que g é uma nova função apenas no caso em que a função f for bijetora. Em outras palavras, somente as funções f bijetoras possuem uma inversa f^{-1}.

Isso se deve a relação que há entre o domínio e imagem da função e sua inversa, quando ocorre a invertibilidade da função o domínio passa ser a imagem e a imagem, o domínio.

Agora podemos dar início a aplicação da invertibilidade em algumas funções.

Dada uma função bijetora f de A em B definida pela sentença $y = f(x)$ para obtermos a sentença $f^{-1}(x)$, procedemos da seguinte maneira:

1- Na sentença $y = f(x)$ fazemos uma mudança de variável, isto é, trocamos x por y e y por x, obtendo $x = f(y)$
2- Transformamos algebricamente a expressão $x = f(y)$, expressando y em função de x para obtermos $y = f^{-1}(x)$.

Vamos trabalhar um pouco com a invertibilidade das funções polinomiais do primeiro e segundo grau, exponencial e logarítmica.

Função polinomial do primeiro grau: Uma função f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por f(x) = a.x + b, onde **a** e **b** são números reais e a ≠ 0 é chamada de função polinomial do 1º grau (ou função linear afim). O número **a** é chamado coeficiente angular e **b** coeficiente linear da função.

1- Função polinomial do primeiro grau:

Acharemos agora a inversa das funções abaixo:

1.1) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\ f(x) = 3x + 4$

Resolução algébrica:

1.2) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\ f(x) = \frac{2x}{5} + 3$

Resolução algébrica:

2- Função polinomial do segundo grau:

É possível realizar a invertibilidade da função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ por exemplo? Por quê?

___

Dica: Pense nas condições apresentadas para que uma função seja invertível.

Vamos agora resgatar o conceito de coordenadas do vértice da função quadrática.

Vamos denotar por (x_v, y_v) as coordenadas do ponto máximo ($a < 0$) ou ponto mínimo ($a > 0$) da parábola.

Identificação do x_v.

Devido a simetria da parábola, no caso em que $\Delta \geq 0$, o ponto médio x_v do segmento cujos extremos são os valores x_1 *e* x_2 (raízes da equação) é onde ocorre o valor mínimo ou máximo da função. Como $x_v = \frac{x_1+x_2}{2}$, encontramos que $x_v = -\frac{b}{2a}$.

Em resumo a função quadrática é invertível se o domínio for delimitado do $]-\infty, x_v]$ *ou* $[x_v, +\infty[$, ou nos subconjuntos de um desses intervalos.

Função polinomial do segundo grau: Dados os números reais a, b e c (com a $\neq$ 0), a função f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = ax^2 + bx + c$ é chamada função quadrática ou função polinomial de grau dois.

Ache a inversa da função $f: [x_v, +\infty[\rightarrow [y_v, +\infty[$, $f(x) = x^2 + 3$.

Resolução algébrica:

Ache a inversa da função $f:]-\infty, x_v] \rightarrow [y_v, +\infty[$, $f(x) = x^2 - 3$.

Resolução algébrica:

3- Função exponencial e logarítmica:

Uma função exponencial é uma função f : $\mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ definida por $f(x) = a^x$, onde a é um número real fixo, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Para a função exponencial temos os seguintes conjuntos para domínio e contradomínio ou imagem, $Dom(f) = R$ e $Im(f) = (0, \infty)$. Também a função exponencial é injetiva. Isto é, se $x_1 \neq x_2 \Rightarrow a^{x_1} \neq a^{x_2}$. Logo podemos pensar na função inversa de $f(x) = a^x$, definida no domínio $(0, \infty) = R+$. Note que este domínio para a função inversa é a imagem ou contradomínio da função exponencial.

O objetivo deste item é estudar a função logarítmica como função inversa da exponencial.

Sejam a um número real positivo (a > 0) e y um número real tal que $y > 0$ e $y \neq 1$. Denominamos o logaritmo de y na base a como sendo o número real x tal que $a^x = y$. Usamos a notação:

$$x = \log_a y,$$

e lemos "x é o logaritmo de y na base a".

Portanto,

$$x = \log_a y \Leftrightarrow a^x = y$$

Em resumo, a expressão $x = \log_a y$ define a função log_a como uma função da variável y e inversa da função exponencial.

Ache a inversa das funções abaixo:

a) $f: \mathbb{R} \to]0, +\infty[\,, f(x) = 4^x$

b) $f: \mathbb{R} \to]0, +\infty[\,, f(x) = 3^{(x+1)}$

Exercícios:

1) (Uel - adaptada) Sendo $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ a função definida por $f(x) = 2^x$, então a expressão que define a função inversa de f é:

a) x^2
b) $\frac{2}{x}$
c) $\log_2 x$
d) $\sqrt{x}$
e) 2^{-x}

2) (Ufsm - adaptada) Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = mx + p$. Se f passa pelos pontos $A(0,4)$ e $B(3,0)$, então f^{-1} passa pelo ponto:

$a)$ $(8,-2)$
$b)$ $(8,3)$
$c)$ $(8,-3)$
$d)$ $(8,2)$
$e)$ $(8,1)$

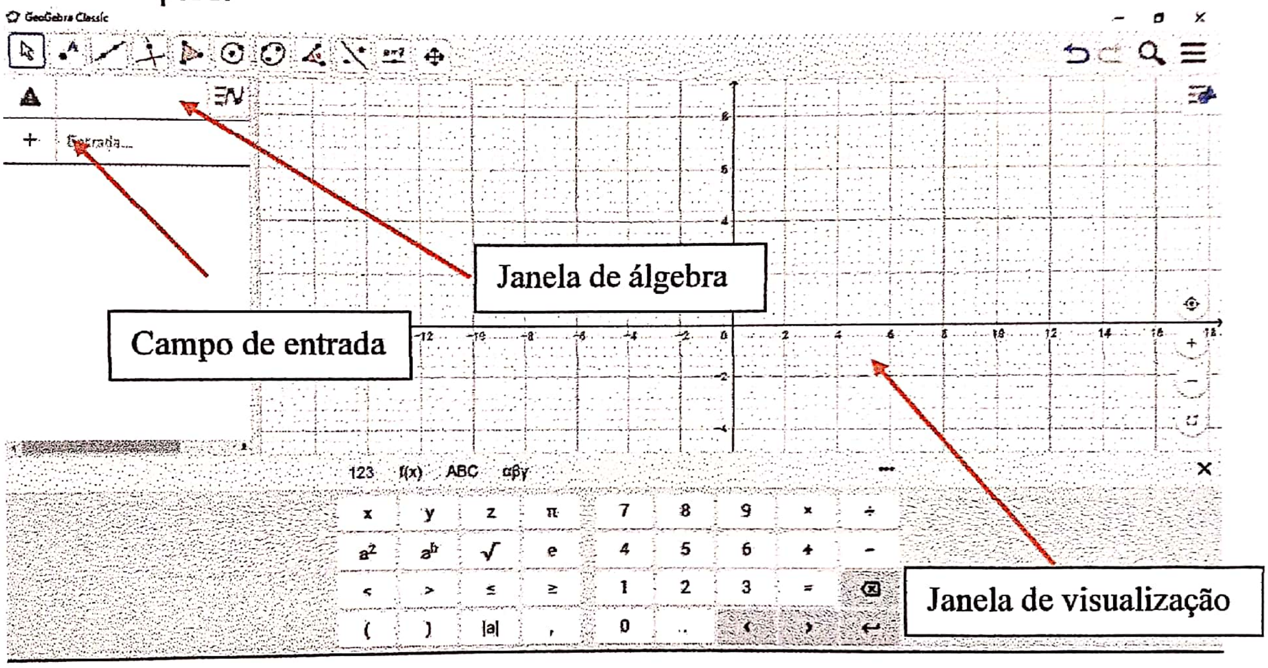
3) (Unirio - adaptada) A função inversa da função bijetora $f: \mathbb{R} - \{-4\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{2\}$ definida por $f(x) = \frac{(2x-3)}{(x+4)}$ é:

a) $f^{-1}(x) = \frac{(x+4)}{(2x+3)}$
b) $f^{-1}(x) = \frac{(x-4)}{(2x-3)}$
c) $f^{-1}(x) = \frac{(4x+3)}{(2-x)}$
d) $f^{-1}(x) = \frac{(4x+3)}{(x-2)}$
e) $f^{-1}(x) = \frac{(4x+3)}{(x+2)}$

Diretoria de Ensino Superior
Licenciatura em Matemática
Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática
Linha de Pesquisa: Álgebra
Licenciandos: Calili Cardozo dos Santos Paravidini e Hallef Julia Macabu
Orientadora: Profª. Me. **Lívia Azelman**

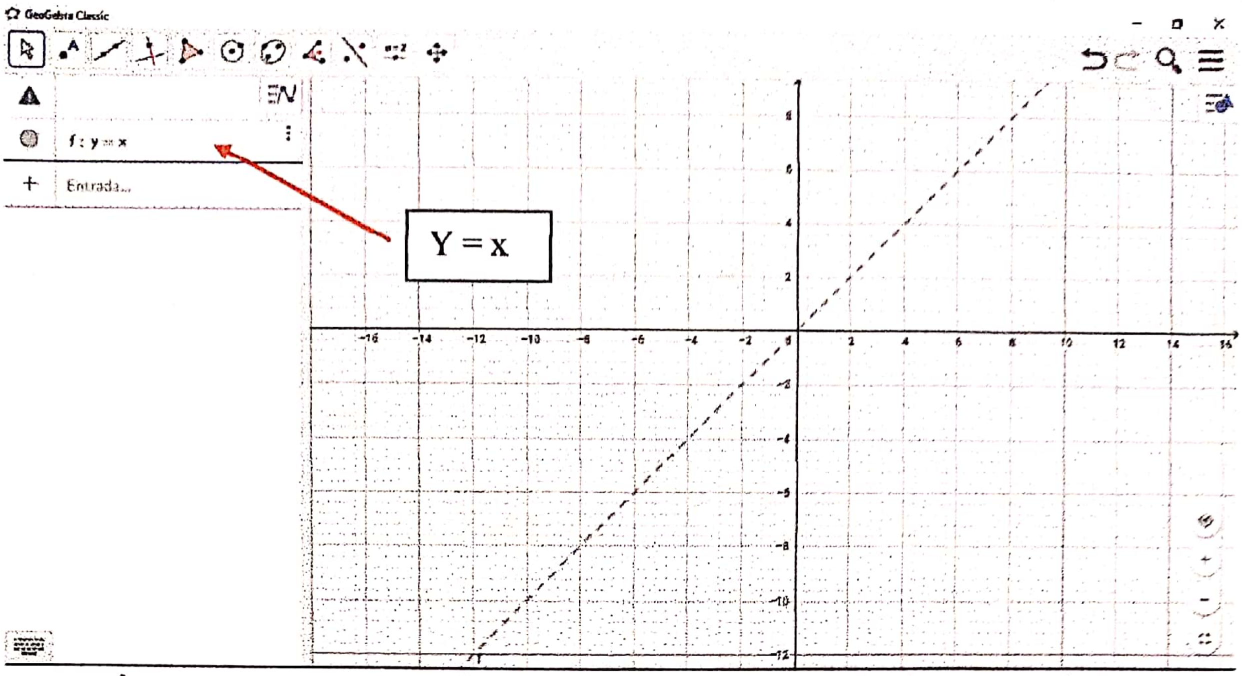
Interpretação geométrica da função inversa

A interpretação geométrica da função inversa se dá a partir do estudo do gráfico das funções e suas inversas. A janela abaixo é a tela inicial do *software* de geometria dinâmica GeoGebra onde é possível fazer a plotagem dos gráficos de forma simples.

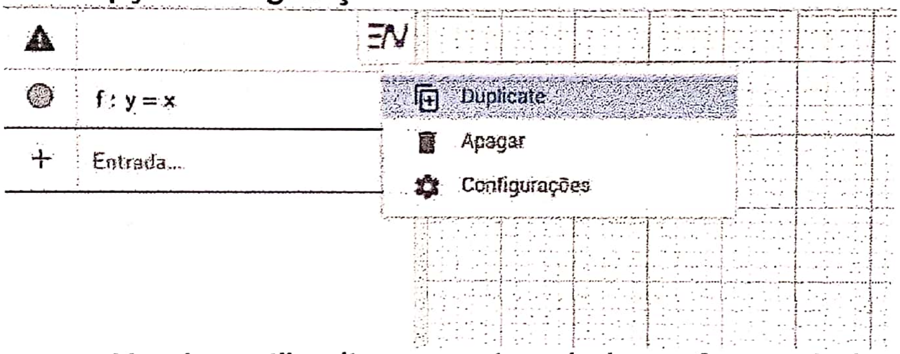


No canto superior esquerdo fica o campo de entrada, onde é feita a digitação das funções a serem plotadas. Após esse passo a função aparecerá listada na janela de Álgebra e seu gráfico na Janela de visualização.

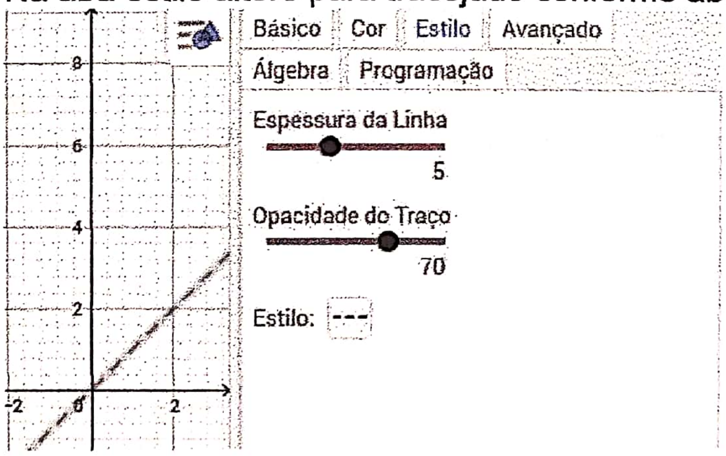
Para iniciar, devemos inserir no campo de entrada a função y = x, também chamada de bissetriz dos quadrantes ímpares, que dividirá o plano cartesiano em duas partes como a figura abaixo:



Agora vamos personalizar essa reta para que ela fique tracejada e não se confunda com os gráficos das funções. Para isso, clique sobre o botão ⋮ e selecione a opção configuração.



Na aba estilo altere para tracejado conforme abaixo:

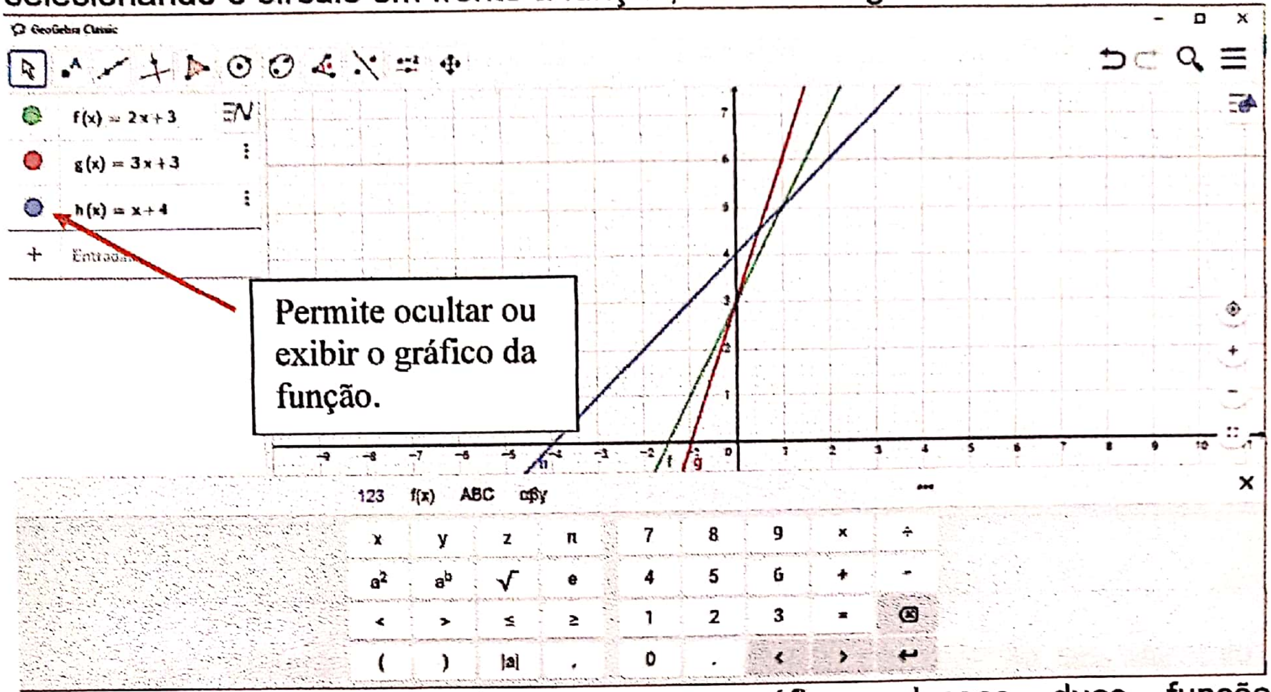


Agora que já realizou estes passos, vamos as atividades:

Atividade 1)

Insira no campo de entrada a função $f(x) = x + 1$ e $g(x) = 2x + 5$, determine algebricamente as suas inversas $f^{-1}(x)$ e $g^{-1}(x)$ e insira também no campo de entrada.

Para melhor vizualizar você poderá ocultar ou exibir os gráficos plotados selecionando o círculo em frente a função, conforme figura:



a) O que você observou nos gráficos dessas duas funções?

____

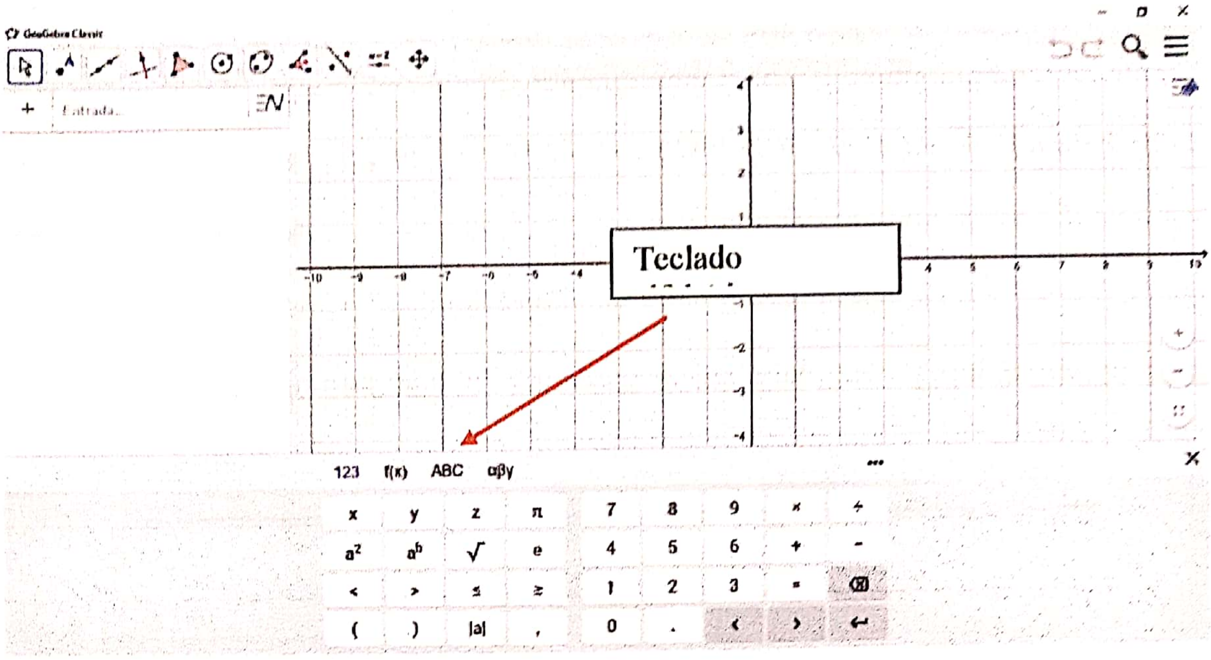
____

b) É possível identificar visualmente, em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, alguma semelhança entre os gráficos, ou alguma relação entre eles?

____

____

Atividade 2) Agora oculte os gráficos utilizados na questão anterior, deixando apenas a bissetriz dos quadrantes ímpares. Utilizando o teclado alfabético, conforme a figura abaixo, insira o comando “função” que irá liberar a seguinte linha para preenchimento: Função (<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>):



Você deverá inserir a função $f(x) = x^2 + 2$, delimitando seu domínio no intervalo $[x_v, +\infty[$, para isso deverá calcular o x_v que será o <Valor de x Inicial> e no <Valor de x Final>, utilizando o teclado alfabético, digitar "infinity".

Resolução algébrica:

Agora encontre a função inversa de $f(x)$, da mesma forma utilizando o comando "função" delimite também o domínio da função de forma que seja igual a imagem de $f(x)$.

Resolução algébrica:

Faça o mesmo procedimento para a função $g(x) = x^2 + 4x + 16$

Resolução algébrica:

Agora que já fez a plotagem dos dois gráficos responda a pergunta abaixo:

a) Observando o gráfico das função e sua inversa em relação, em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, já é possível verificar alguma regularidade?

____

____

Já podemos perceber que o gráfico da função inversa é simétrico em relação a em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares. Podemos dizer que a bissetriz funciona como um espelho, o gráfico da inversa é a reflexão do gráfico da função.

Agora para concluirmos o estudo geométrico das funções, faremos a plotagem dos gráficos das funções modular, exponencial e logarítmica.

Atividade 3) Insira a função $f(x) = 2^x + 3$, ache sua inversa e faça a plotagem do gráfico.
Resolução algébrica:

A partir do que já estudamos, sabemos que o gráfico $f^{-1}(x)$ é o gráfico de qual função?

___

___

Apêndice B: Material didático experimentado na turma regular

Diretoria de Ensino Superior
Licenciatura em Matemática
Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática
Linha de Pesquisa: Álgebra
Licenciandos: Calili Cardozo dos Santos Paravidini e Hallef Julia Macabu
Orientadora: Profª. Me. **Lívia Azelman**

Introdução à Função

Função é uma relação com propriedades especiais. Uma relação R do conjunto A no conjunto B é uma função se:

I) o domínio da relação $R, D\,(R) = A$;

II) para cada elemento x ∈ D (R) existe um único y ∈ B tal que (x, y) ∈ R

III) a imagem da relação R, $Im\,(R) \subset B$.

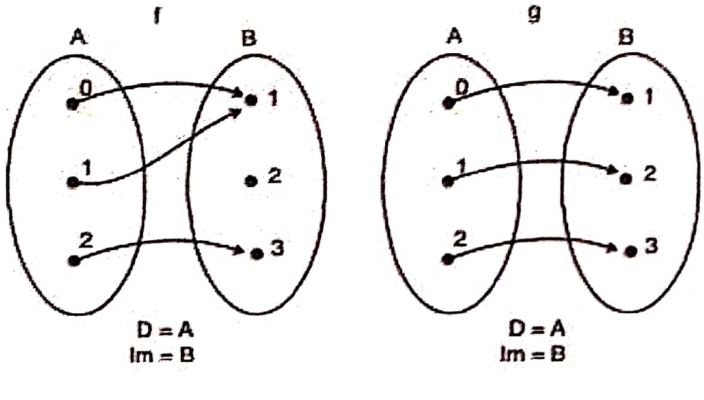
Uma relação R de A em B, que é uma função, mais comumente representada pela letra f e do seguinte modo: $f\colon A \to B$, onde, $x \to y = f\,(x)$. Isto significa que, dados os conjuntos A e B, a função tem a lei de correspondência $y = f\,(x)$.

Funções sobrejetoras, injetoras e bijetoras

Definição: Uma função $f\colon A \to B$ é **sobrejetora** quando todo elemento de B (contradomínio) for imagem de pelo menos um elemento de A, ou seja, a função é sobrejetora quando o conjunto imagem é o próprio contradomínio.

Definição: Uma função $f\colon A \to B$ é **injetora** se elementos distintos do domínio tiverem imagens distintas, ou seja, dois elementos não podem ter a mesma imagem. Portanto, não pode ter nenhum elemento do conjunto B que receba duas flechas.

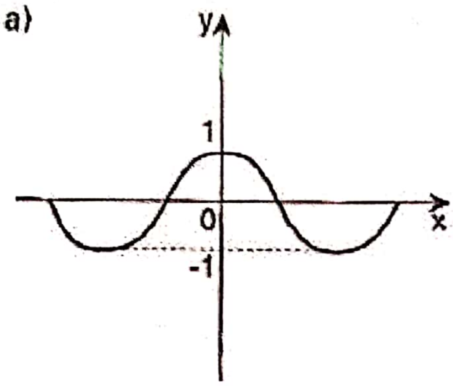
Definição: Se a função f for simultaneamente sobrejetora e injetora, então será chamada de **bijetora.**



Atividades

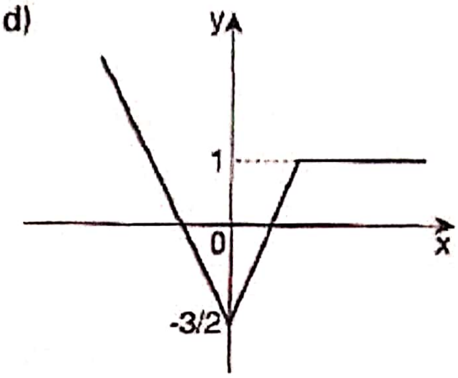
1 – Classifique, a partir dos gráficos, as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ abaixo em injetora, sobrejetora, bijetora:

a)



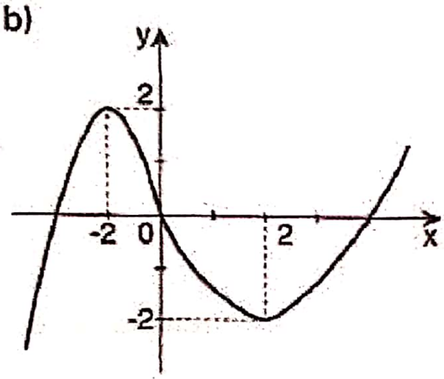
R: ____________________

d)



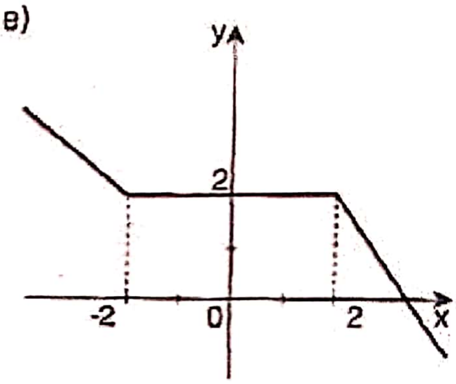
R: ____________________

b)



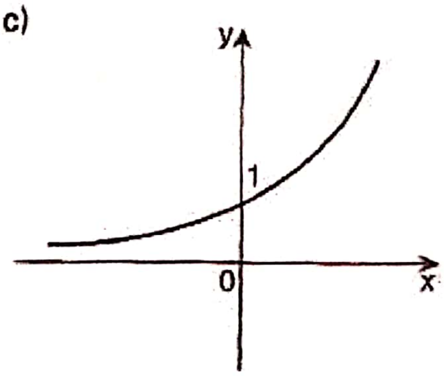
R: ____________________

e)



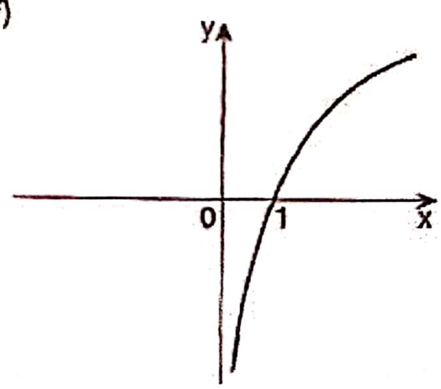
R: ____________________

c)



R: ____________________

f)



R: ____________________

Diretoria de Ensino Superior
Licenciatura em Matemática
Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática
Linha de Pesquisa: Álgebra
Licenciandos: Calili Cardozo dos Santos Paravidini e Hallef Julia Macabu
Orientadora: Profª. Me. Lívia Azelman

Função inversa

Uma função f: A→B é uma relação entre os conjuntos A e B com propriedades especiais. A função f como relação é um subconjunto de A x B. Os pares ordenados (x, y) deste conjunto são tais que $y = f(x)$.

Por exemplo, se A = {−1, 1, 2}, B = {−1, 0, 1, 4} e $f(x) = x^2$. Enquanto relação, f se escreve como f = {(−1,1), (1,1), (2,4)}. Suponha que as coordenadas são trocadas para obter uma nova relação g.

$$g = \{(1,-1),(1,1),(4,2)\}$$

Em que condições podemos garantir que, após a inversão, g é ainda uma função (e não meramente uma relação)? Nos casos afirmativos, g é chamada função inversa de f e geralmente denotada por f^{-1}. Podemos chegar à conclusão que g é uma nova função apenas no caso em que a função f for bijetora. Em outras palavras, somente as funções f bijetoras possuem uma inversa f^{-1}.

Isso se deve a relação que há entre o domínio e imagem da função e sua inversa, quando ocorre a invertibilidade da função o domínio passa ser a imagem e a imagem, o domínio.

Agora podemos dar início a aplicação da invertibilidade em algumas funções.

Dada uma função bijetora f de A em B definida pela sentença $y = f(x)$ para obtermos a sentença $f^{-1}(x)$, procedemos da seguinte maneira:

3- Na sentença $y = f(x)$ fazemos uma mudança de variável, isto é, trocamos x por y e y por x, obtendo $x = f(y)$
4- Transformamos algebricamente a expressão $x = f(y)$, expressando y em função de x para obtermos $y = f^{-1}(x)$.

Vamos trabalhar um pouco com a invertibilidade das funções polinomiais do primeiro e segundo grau, exponencial e logarítmica.

4- Função polinomial do primeiro grau:

Acharemos agora a inversa das funções abaixo:

1.1) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\ f(x) = 3x + 4$

Resolução algébrica:

1.2) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\ f\ (x) = \frac{2x}{5} + 3$

Resolução algébrica:

Função polinomial do primeiro grau: Uma função f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por f(x) = a.x + b, onde **a** e **b** são números reais e a $\neq$ 0 é chamada de função polinomial do 1º grau (ou função linear afim). O número **a** é chamado coeficiente angular e **b** coeficiente linear da função.

5- Função polinomial do segundo grau:

É possível realizar a invertibilidade da função $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ por exemplo? Por quê?

____

Dica: Pense nas condições apresentadas para que uma função seja invertível.

Vamos agora resgatar o conceito de coordenadas do vértice da função quadrática.

Vamos denotar por (x_v, y_v) as coordenadas do ponto máximo $(a < 0)$ ou ponto mínimo $(a > 0)$ da parábola.

Identificação do x_v.

Devido a simetria da parábola, no caso em que $\Delta \geq 0$, o ponto médio x_v do segmento cujos extremos são os valores $x_1\ e\ x_2$ (raízes da equação) é onde ocorre o valor mínimo ou máximo da função. Como $x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$, encontramos que $x_v = -\frac{b}{2a}$.

Em resumo a função quadrática é invertível se o domínio for delimitado do $]-\infty, x_v]\ ou\ [x_v, +\infty[$, ou nos subconjuntos de um desses intervalos.

Função polinomial do segundo grau: Dados os números reais a, b e c (com a $\neq$ 0), a função f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = ax^2 + bx + c$ é chamada função quadrática ou função polinomial de grau dois.

Ache a inversa da função $f: [x_v, +\infty[\to [y_v, +\infty[, f(x) = x^2 + 3$.

Resolução algébrica:

Ache a inversa da função $f:]-\infty, x_v] \to [y_v, +\infty[, f(x) = x^2 - 3$.

Resolução algébrica:

6- Função exponencial e logarítmica:

Uma função exponencial é uma função $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ definida por $f(x) = a^x$, onde a é um número real fixo, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Para a função exponencial temos os seguintes conjuntos para domínio e contradomínio ou imagem, $Dom(f) = R$ e $Im(f) = (0, \infty)$. Também a função exponencial é injetiva. Isto é, se $x_1 \neq x_2 \Rightarrow a^{x_1} \neq a^{x_2}$. Logo podemos pensar na função inversa de $f(x) = a^x$, definida no domínio $(0, \infty) = R+$. Note que este domínio para a função inversa é a imagem ou contradomínio da função exponencial.

O objetivo deste item é estudar a função logarítmica como função inversa da exponencial.

Sejam a um número real positivo (a > 0) e y um número real tal que $y > 0$ e $y \neq 1$. Denominamos o logaritmo de y na base a como sendo o número real x tal que $a^x = y$. Usamos a notação:

$$x = \log_a y,$$

e lemos "x é o logaritmo de y na base a".

Portanto,

$$x = \log_a y \Leftrightarrow a^x = y$$

Em resumo, a expressão $x = \log_a y$ define a função log_a como uma função da variável y e inversa da função exponencial.

Ache a inversa das funções abaixo:

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$, $f(x) = 4^x$

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$, $f(x) = 3^{(x+1)}$

Exercícios:

4) (Uel - adaptada) Sendo $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ a função definida por $f(x) = 2^x$, então a expressão que define a função inversa de f é:

a) x^2
b) $\frac{2}{x}$
c) $\log_2 x$
d) $\sqrt{x}$
e) 2^{-x}

5) (Ufsm - adaptada) Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = mx + p$. Se f passa pelos pontos $A(0,4)$ e $B(3,0)$, então f^{-1} passa pelo ponto:

$a)$ $(8, -2)$
$b)$ $(8, 3)$
$c)$ $(8, -3)$
$d)$ $(8, 2)$
$e)$ $(8, 1)$

6) (Unirio - adaptada) A função inversa da função bijetora $f: \mathbb{R} - \{-4\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{2\}$ definida por $f(x) = \frac{(2x-3)}{(x+4)}$ é:

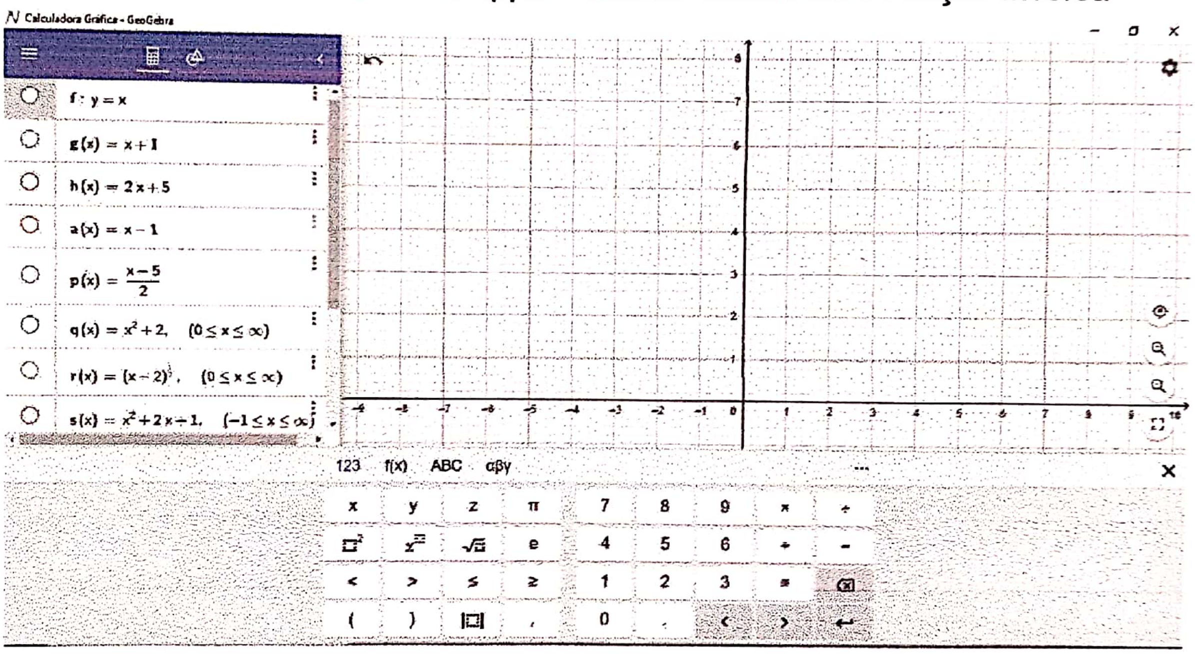
a) $f^{-1}(x) = \frac{(x+4)}{(2x+3)}$
b) $f^{-1}(x) = \frac{(x-4)}{(2x-3)}$
c) $f^{-1}(x) = \frac{(4x+3)}{(2-x)}$
d) $f^{-1}(x) = \frac{(4x+3)}{(x-2)}$
e) $f^{-1}(x) = \frac{(4x+3)}{(x+2)}$

Diretoria de Ensino Superior
Licenciatura em Matemática
Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática
Linha de Pesquisa: Álgebra
Licenciandos: Calili Cardozo dos Santos Paravidini e Hallef Julia Macabu
Orientadora: Profª. Me. Lívia Azelman

Interpretação geométrica da função inversa

A interpretação geométrica da função inversa se dá a partir do estudo do gráfico das funções e suas inversas. A janela abaixo é a tela inicial do *applet* desenvolvido no *software* de geometria dinâmica Calculadora Gráfica GeoGebra onde é possível fazer o estudo dos gráficos de forma simples.

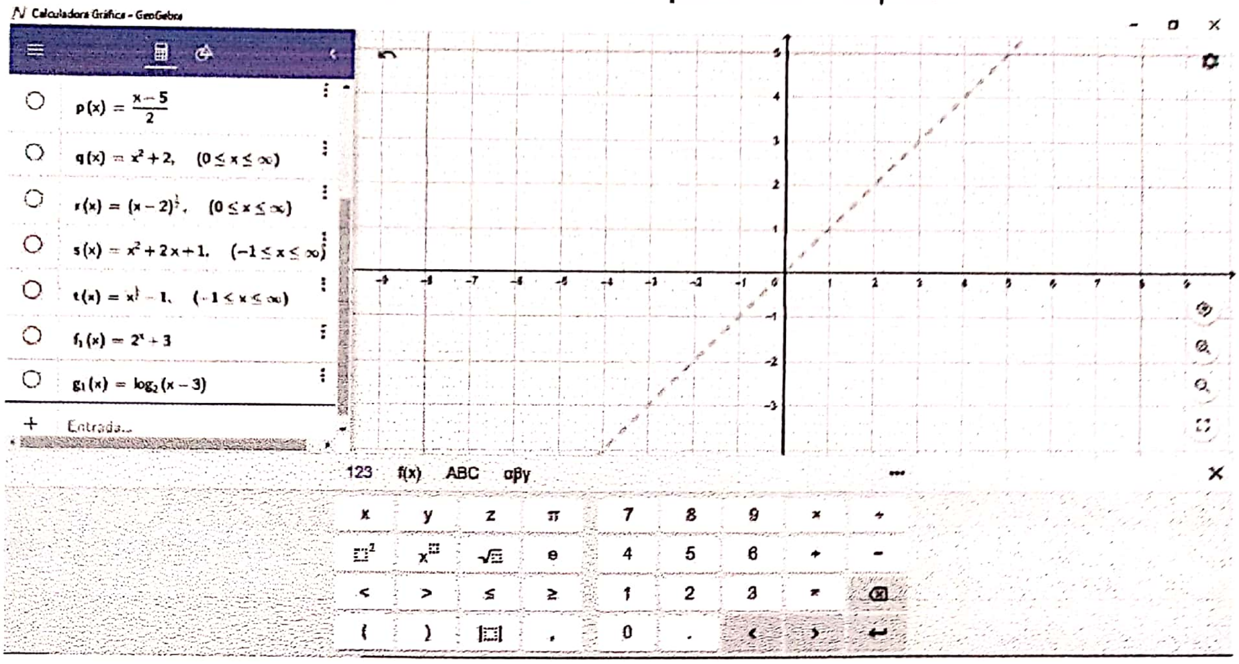
Figura 1 – Tela inicial *applet* “Estudo Geométrico Função Inversa”



No canto esquerdo ficam as funções que utilizaremos nas atividades, e o círculo na frente de cada função permite exibir/esconder as funções da tela de exibição.

Para iniciar, devemos exibir a primeira função plotada no *software* marcando o círculo na frente da função $y = x$, também chamada de bissetriz dos quadrantes ímpares, que dividirá o plano cartesiano em duas partes como a figura abaixo:

Figura 2 – Bissetriz quadrantes ímpares



Essa reta está personalioazada para ser tracejada e cinza claro para que não se confunda com os gráficos que serão exibidos posteriormente.

Agora que já realizou este passo, vamos as atividades:

Atividade 1) Exiba as funções $g(x) = x + 1$ e $h(x) = 2x + 5$, determine algebricamente as suas inversas $g^{-1}(x)$ e $h^{-1}(x)$ e também as exiba utilizando o circulo na frente de cada uma delas no *applet*.

Resolução algébrica:

c) O que você observou nos gráficos dessas duas funções?

____

____

d) É possível identificar visualmente, em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, alguma semelhança entre os gráficos, ou alguma relação entre eles?

____

____

Atividade 2) Agora oculte os gráficos utilizados na questão anterior, deixando apenas a bissetriz dos quadrantes ímpares.

Você deverá exibir a função $q(x) = x^2 + 2$, deverá ainda calcular o valor do x_v, para poder observar a delimitação de domínio que a função tem no *applet*.

Resolução algébrica:

Agora encontre a função inversa de $q(x)$, da mesma forma utilizando o comando “exibir” compare os gráfico da função e sua inversa.

Resolução algébrica:

Faça o mesmo procedimento para a função $s(x) = x^2 + 2x + 1$

Resolução algébrica:

Agora que já fez a análise dos dois gráficos responda:

b) Observando o gráfico das função e sua inversa, em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, já é possível verificar alguma regularidade? ____ ____

Já podemos perceber que o gráfico da função inversa é simétrico em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares. Podemos dizer que a bissetriz funciona como um espelho, o gráfico da inversa é a reflexão do gráfico da função.

Agora para concluirmos o estudo geométrico das funções, faremos o estudo dos gráficos das funções exponencial e logarítmica.

Atividade 3) Exiba a função $j(x) = 2^x + 3$, ache sua inversa e faça a comparação dos gráficos.

Resolução algébrica:

A partir do que já estudamos, sabemos que o gráfico $j^{-1}(x)$ é o gráfico de qual função?____