

RELATÓRIO DO LEAMAT

Lei dos Cossenos: conceitos e aplicações

ENSINO E APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA

Ana Julia de Almeida Magalhães Santos
Cristiano Higino de Sampaio
Mariana de Gusmão Barreto
Quezia Dias Pagy de Sousa

Recebido em 21/02/2020
elpeu

CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
2019.2

Ana Julia de Almeida Magalhães Santos
Cristiano Higino de Sampaio
Mariana de Gusmão Barreto
Quezia Dias Pagy de Sousa

RELATÓRIO DO LEAMAT

Lei dos Cossenos: conceitos e aplicações

ENSINO E APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA

Trabalho apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, *campus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão da disciplina Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof^ª. Me. Livia Azelman de Faria Abreu e Prof. Me. Ramon Chagas Santos

**CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
2019.2**

SUMÁRIO

1) Relatório do LEAMAT I	3
1.1) Atividades desenvolvidas	3
1.2) Elaboração da sequência didática.....	5
1.2.1) Tema	5
1.2.2) Justificativa	5
1.2.3) Objetivo Geral	7
1.2.4) Público-alvo	7
2) Relatório do LEAMAT II	8
2.1) Atividades desenvolvidas	8
2.2) Elaboração da sequência didática	8
2.2.1) Planejamento da sequência didática	8
2.2.2) Experimentação da sequência didática na turma do LEAMAT II	10
3) Relatório do LEAMAT III	13
3.1) Atividades desenvolvidas	13
3.2) Elaboração da sequência didática	13
3.2.1) Versão final da sequência didática	13
3.2.2) Experimentação da sequência didática na turma regular ..	15
Considerações Finais	25
Referências	26
Apêndices	28
Apêndice A - Material didático aplicado na turma do LEAMAT II	29
Apêndice B - Material didático experimentado na turma regular	37
Apêndice C - Slides do <i>Power Point</i> utilizados na Sequência Didática	45

1) RELATÓRIO DO LEAMAT I

1.1) Atividades desenvolvidas

Na aula inicial, ocorrida em 26 de setembro de 2018 foi apresentada a disciplina e as etapas a serem desenvolvidas no decorrer do LEAMAT I. Em seguida foi entregue o texto “O ensino da álgebra” de Ana Rita Martins e Beatriz Vichessi. Tal texto foi discutido na aula do dia 10 de outubro de 2018. O mesmo tem por objetivo apresentar uma forma de se ensinar/apresentar a álgebra para turmas compostas por alunos familiarizados, até o dado momento, apenas com a aritmética. Trata-se de uma fase delicada, onde é necessária uma boa didática composta por uma sequência pedagógica, em que embora o aluno apresente estranhamento, possa compreender o que de fato é a álgebra.

Para Martins e Vichessi (2009), outra maneira de pensar a forma que o conteúdo está sendo apresentado é partir do particular e, depois, para o geral. Assim os alunos terão a chance de, através da observação, chegar aos teoremas, fórmulas, padrões de comportamento, entre outros intuitivamente. Também é de extrema importância que se possa relacionar a álgebra às outras áreas do conhecimento, bem como a geometria.

Nesta mesma aula, foi proposta uma atividade envolvendo problemas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), com uma abordagem da álgebra em seu sentido extenso, explorando a tradução da linguagem natural para a linguagem algébrica.

Ainda no dia 10 de outubro de 2018, foi entregue o texto “A Álgebra, seu ensino e sua aprendizagem” de Alessandro Ribeiro e Helena Noronha. Este texto apresenta a importância da abordagem da álgebra nos anos iniciais a partir de habilidades com números, padrões e análises de dados, para uma boa compreensão algébrica do aluno futuramente e a necessidade de uma reformulação na forma de ensinar.

Hoje parte-se do formalismo para depois generalizar, entretanto tal estratégia não tem sido exitosa. Sendo assim, os autores defendem a mudança de ordem de apresentar os conteúdos, primeiro os atos de generalização e formalização gradual para depois, fazer uso do formalismo; assim como a ressignificação das variáveis e das incógnitas. Além disso, evidenciam a relevância de exemplos cotidianos para

compreender a álgebra, apresentando significado a mesma. (RIBEIRO; NORONHA, 2015).

No dia 31 de outubro de 2018 foram apresentados alguns trabalhos do LEAMAT III nas linhas de pesquisa de Geometria e Álgebra, sendo apresentados os seguintes temas:

- “Práticas investigativas de proporcionalidade entre grandezas”;
- “Interdisciplinaridade entre matemática e biologia no ensino de sequências”.

No dia 14 de novembro de 2018 foi discutido o texto “Primeiros passos na Álgebra: conceitos elementares e atividades pedagógicas” de Janaína Poffo e Tania Baier. A partir da leitura do texto foi possível observar a defasagem na compreensão do significado de variáveis e das operações com as mesmas, sendo perceptível que o vínculo e costume com a aritmética podem trazer conceitos equivocados perante a álgebra. Vale destacar que, de acordo com os autores, os alunos possuem uma grande deficiência em conceitos, principalmente quando se trata de incógnitas, variáveis e o valor matemático do “=”. Além disso, faz-se notória a dificuldade quanto à tradução da linguagem usual para a linguagem algébrica, representando um marco de grande significância quanto à falha no entendimento algébrico.

Ademais, o texto traz destaque para as possibilidades de superação das dificuldades, ressaltando a importância de evitar a simbolização precoce, de remeter o conceito de variável a questões cotidianas, assim como dedicar atenção especial para transcrição da linguagem usual para algébrica. Diante disso, é importante que seja feita uma transição da aritmética para a álgebra de uma forma suave. Como também, uma atenção maior para a formação de professores, uma vez que eles próprios também podem apresentar deficiências de tal natureza.

No mesmo dia foi entregue a atividade intitulada “Teorema de Pitágoras”, que utiliza de conceitos geométricos como área de triângulos e quadrados para demonstração deste teorema.

Nas aulas do dia 28 de novembro e 05 de dezembro de 2018 os grupos se reuniram no LEAMAT para desenvolvimento e discussão quanto às apresentações.

No dia 12 de dezembro de 2018 foi realizada a apresentação deste trabalho com o seguinte tema: “Lei dos Cossenos: conceitos e aplicações”; os demais trabalhos foram apresentados no dia 30 de janeiro de 2019, com os temas:

- Grupo A₁: “Transformações gráficas na função modular”;

o cálculo algébrico e as funções.” (PONTE, 2006, p. 7). Ponte (2006) destaca a importância do desenvolvimento da capacidade de manipulação do símbolo para sua utilização na resolução de problemas de outros campos da matemática. Desta forma, “no pensamento algébrico dá-se atenção não só aos objetos, mas também às relações existentes entre eles, representando e raciocinando sobre essas relações tanto quanto possível de modo geral e abstracto” (PONTE, 2006, p.8).

Diante disto, a contextualização dos conteúdos é de suma importância para a aprendizagem do aluno, principalmente para que este entenda o uso de determinado conteúdo no contexto social. Para mais, faz-se necessária a contextualização dentro da própria ciência, mostrando ao aluno diferentes formas de resolução dentro da própria matemática e ainda o contexto em que tal fórmula foi criada, visando atender a determinado anseio social. Isto também é defendido pelo PCN para os alunos do Ensino Médio:

O currículo do Ensino Médio deve garantir também espaço para que os alunos possam estender e aprofundar seus conhecimentos sobre números e álgebra, mas não isoladamente de outros conceitos, nem em separado dos problemas e da perspectiva sócio-histórica que está na origem desses temas (BRASIL, 2002, p. 44).

Neste trabalho será abordada a Lei dos Cossenos, “a qual permite calcular as medidas dos lados e dos ângulos de triângulos quaisquer.” (REIS, 2016, p. 36) e suas aplicações no cotidiano dos alunos, uma vez que em seu histórico a trigonometria era empregue em resoluções de problemas da sociedade. A demonstração da fórmula da Lei dos Cossenos será realizada com o intermédio de elementos geométricos, permitindo a visualização e significação para o aluno.

O ensino de Matemática deve demonstrar a finalidade para a qual a mesma foi criada, ratificando a aplicabilidade de tais conceitos. Sabe-se que tal ferramenta, a Lei dos Cossenos, é aplicada em diversas esferas, assim como exemplifica Maia (2015):

A lei dos senos e dos cossenos é uma ferramenta muito utilizada pelos engenheiros, para a construção de um mapa topográfico, no cálculo de distâncias inacessíveis, áreas de terreno, perímetro, mas para que sejam realizados esses cálculos é necessário que se conheça algumas medidas de lados e ângulos, algumas dessas medidas são encontradas usando equipamentos chamados de teodolito, fita métrica e trena. (MAIA, 2015, p. 19).

Portanto, faz-se necessária a busca pelo ensino da álgebra de maneira contextualizada e interdisciplinar, buscando desenvolver no aluno um pensamento algébrico que deverá ser aplicado ao longo de sua vida mediante as circunstâncias, e mostrando a presença da mesma em seu cotidiano.

1.2.3) Objetivo Geral

Apresentar a Lei dos Cossenos por meio de contextualização, demonstração e aplicações.

1.2.4) Público-alvo

2º. ano do Ensino Médio.

2) RELATÓRIO DO LEAMAT II

2.1) Atividades desenvolvidas

O período entre os dias 25 de abril e 27 de junho de 2019 foi destinado à discussão e elaboração da sequência didática. Neste momento foi desenvolvida cada etapa visando os objetivos a serem alcançados, como também a confecção dos materiais concretos utilizados em aula. Do dia 27 de junho ao dia 01 de agosto de 2019 ocorreram as aplicações das sequências didáticas na turma do LEAMAT II.

2.2) Elaboração da sequência didática

2.2.1) Planejamento da sequência didática

Para a aplicação da sequência didática foi escolhida uma turma de segundo ano do Ensino Médio Integrado ao curso de Edificações, visto que o conteúdo a ser trabalhado dispõe de aplicações que relacionam esta área técnica aos conhecimentos matemáticos.

A fim de trabalhar a Lei dos Cossenos foi elaborada uma situação problema envolvendo as casas de Frida Kahlo e seu marido Diego Rivera. Para introduzir a sequência, será apresentado um breve histórico sobre a vida de Frida Kahlo e sua casa, contido na apostila 1.

Para melhor visualização das características da casa, será exposto um slide com fotos da mesma. Além disso, uma maquete será utilizada para representar um problema envolvendo as casas de Frida Karlo e seu marido, que possuem uma ponte entre as mesmas (Figura 1). Como introdução ao conteúdo, será feita uma revisão sobre as razões trigonométricas no triângulo retângulo e Teorema de Pitágoras, a fim de induzir o aluno a utilizar tais conceitos na resolução da situação problema. Para tal será utilizado um applet testificando a permanência das razões trigonométricas para triângulos retângulos, onde as medidas dos lados podem ser alteradas mantendo conservados seus ângulos (Figura 2).

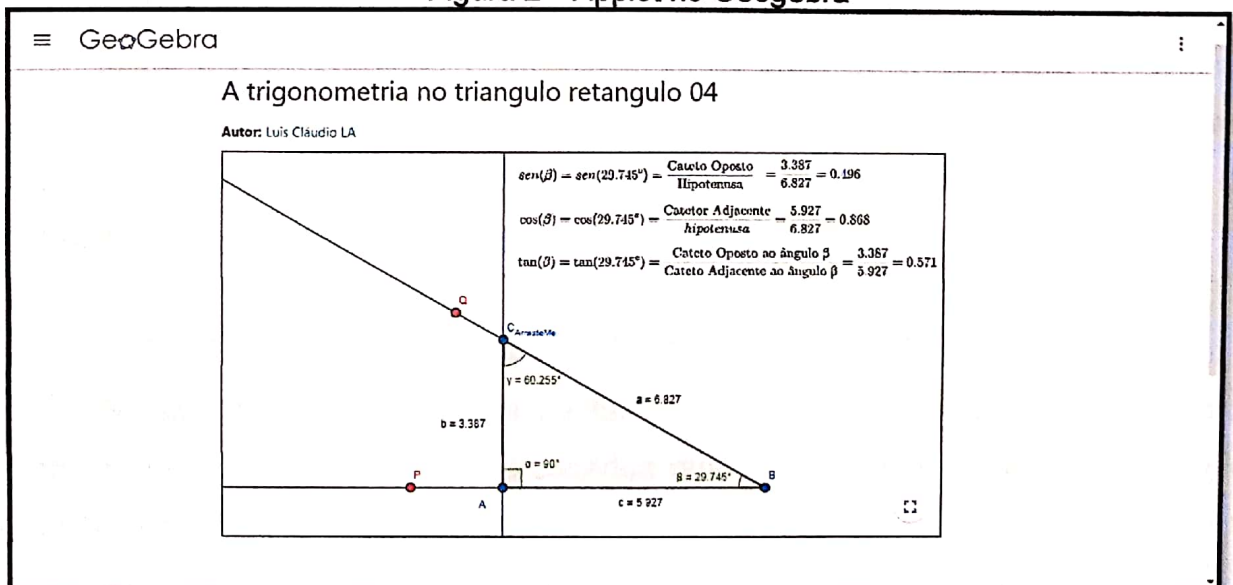
Figura 1 - Representação da situação problema na maquete



Fonte: Elaboração própria.

Neste cenário, estarão dispostas as duas casas com uma distância entre elas a ser descoberta pelos alunos, além disso, será determinado um ponto não colinear em relação à extremidade direita da casa vermelha e esquerda da casa azul de modo a formar um ângulo, conforme representado na imagem a seguir:

Figura 2 – Applet no Geogebra



Fonte: <https://www.geogebra.org/m/kcJhvj6s>.

Os pontos A e B serão pré-determinados pelos professores em formação, representando, respectivamente, a extremidade direita da casa vermelha e esquerda da casa azul, como também o ponto C não colinear aos outros dois; a medida do ângulo \widehat{ABC} também será definida pelos professores em formação; as respectivas medidas dos segmentos AC e BC poderão ser encontradas pelos alunos através do uso de régua; a medida do segmento AB estará inacessível para medição devido ao isolamento do local por conta de um acidente ocorrido.

O objetivo da situação proposta será a utilização da Lei dos Cossenos para a descoberta da medida BC, possibilitando a reconstrução da ponte entre as casas. Inicialmente, a maquete ficará disposta para observação de toda a turma. Em seguida, serão selecionados dois alunos para realizar as medições que a turma julgar necessárias para a resolução do problema, valorizando a iniciativa dos mesmos. As medidas por eles encontradas ficarão dispostas no quadro para que todos tenham acesso a tais informações.

Mediante as ideias propostas pelos discentes, os professores em formação agirão de forma a mediá-los com a intenção de encontrar os elementos necessários para a posterior resolução do problema. As tentativas de resolução serão registradas na apostila 1.

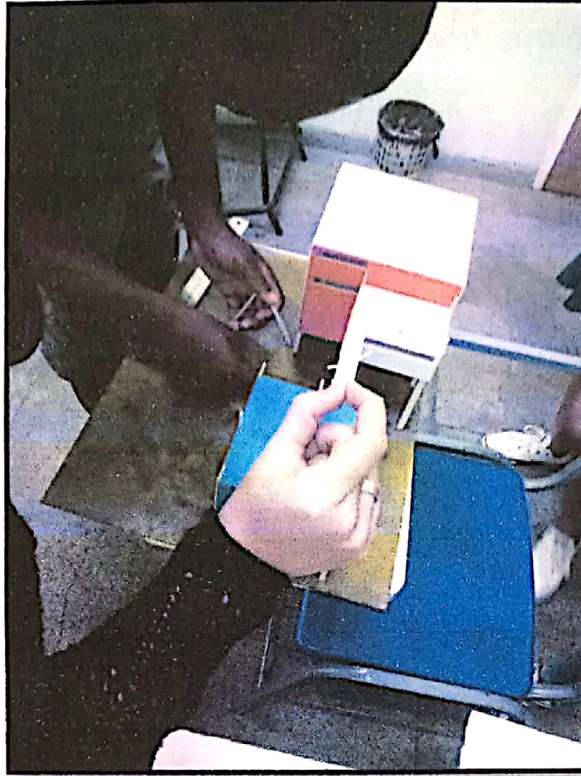
À vista da dificuldade de resolução, será proposta uma nova maneira para encontrar a resposta desejada, usando a Lei dos Cossenos. Esta lei será demonstrada junto aos alunos utilizando de material concreto (E.V.A.) para representar no quadro os triângulos envolvidos no processo. Logo após, será entregue a apostila 2 onde tal demonstração estará de forma detalhada.

Após a demonstração o problema inicial será retomado para a resolução aplicando as informações presentes na Lei dos Cossenos. Em seguida, será entregue a apostila 3 com alguns exercícios onde se deve utilizar da Lei dos Cossenos em situações do cotidiano.

2.2.2) Experimentação da sequência didática na turma do LEAMAT II

Na aplicação da sequência na turma do Leamat II, os demais licenciandos mostraram-se participativos e interessados quanto à contextualização do conteúdo em relação à Frida Kahlo (Figura 3).

Figura 3 – Participação dos licenciandos durante a sequência



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Algumas alterações foram sugeridas pelos demais grupos. Inicialmente foi proposto que a maquete fosse exposta para os alunos imediatamente após a introdução dada sobre a vida da Frida Kahlo. Além disso, percebeu-se que a revisão das relações trigonométricas no triângulo retângulo acabou por ocupar um tempo excessivo da aula, impedindo a aplicação dos exercícios ao final. No momento da leitura da situação problema, os alunos sentiram a necessidade da indicação na maquete dos pontos citados.

Relativo à demonstração, achou-se pertinente não enunciar a Lei dos Cossenos antes de demonstrá-la, além da entrega da apostila 2 para acompanhamento do processo, sempre sinalizando a numeração da página. Ademais, foi atestada a necessidade de um melhor planejamento do quadro, a fim de facilitar a compreensão dos alunos.

Após a demonstração, os professores em formação perceberam que seria enriquecedor se o aluno fosse instigado a questionar a validade do uso da Lei dos Cossenos para a situação apresentada, ao invés de já apresentar a mesma como ferramenta de solução do problema.

Em relação às apostilas, foi proposto que a situação problema estivesse descrita apenas na apostila 1. Na apostila 2, foi percebido um erro de digitação na página 2, obtendo "AB" no lugar de "segmento AB".

3) RELATÓRIO DO LEAMAT III

3.1) Atividades desenvolvidas

As primeiras aulas do LEAMAT III foram direcionadas para as modificações propostas durante a aplicação no LEAMAT II, assim como para o ensaio da experimentação tendo como objetivo aperfeiçoar a aplicação da sequência didática. As demais foram destinadas a elaboração do relatório final juntamente a da apresentação, mostrando o resultado obtido com o trabalho confeccionado ao longo do três semestres.

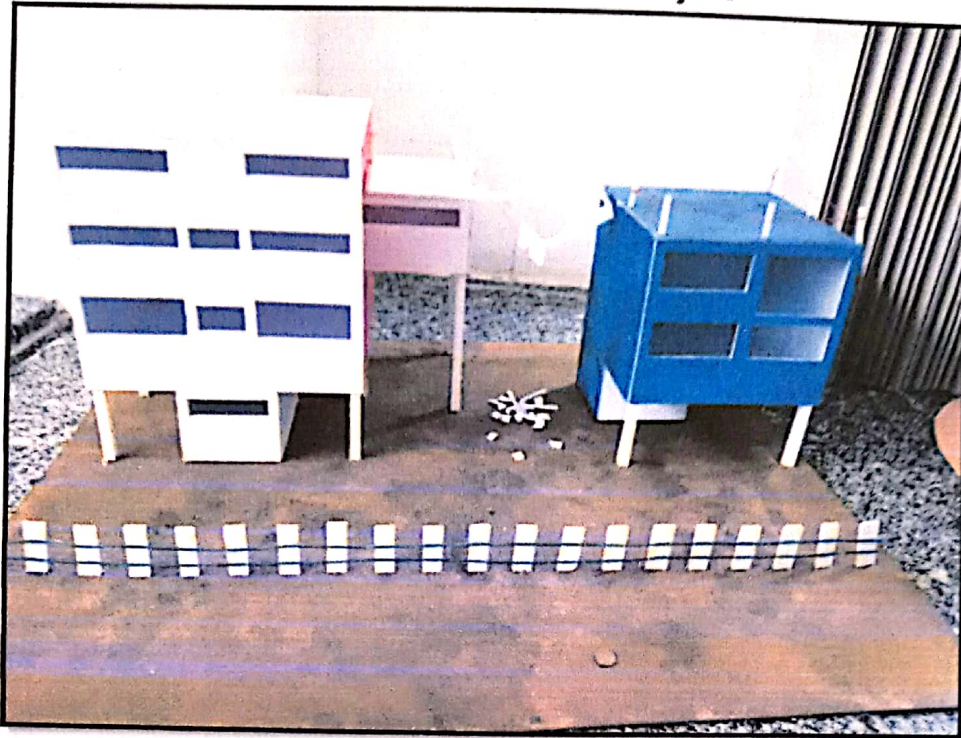
3.2) Elaboração da sequência didática

3.2.1) Versão final da sequência didática

Como sugerido pelos licenciandos, foi acrescentada à apresentação de slides, fotografias da Frida Khalo e seu marido Diego Rivera, e de obras da mesma, facilitando a contextualização do assunto tratado. Para mais, a maquete foi exposta logo após a introdução dada, como maneira de ilustrar a casa de Frida Khalo.

Ainda em relação à maquete, houve uma alteração na mesma (Figura 4), tornando-a mais condizente com o que era solicitado na situação problema, uma vez que anteriormente era possível descobrir o valor desejado através da medição e não pelos cálculos. O enunciado da situação problema também sofreu alterações.

Figura 4 – Maquete após alterações



Fonte: Elaboração própria.

Visando uma melhor compreensão dos alunos, paralelamente à leitura da situação problema foram apontados na maquete os pontos citados. Além disso, o instrumento usado para a medição da maquete foi alterado para uma melhor precisão, sendo utilizada uma Trena a laser. Procurando facilitar a visualização do triângulo subentendido na situação problema, a figura geométrica foi confeccionada em E.V.A. apresentando as medidas localizadas na maquete.

Quanto à revisão das relações trigonométricas no triângulo retângulo, ficou definida sua síntese e uso de um applet tratando do Teorema de Pitágoras (Figura 5), tomando um menor tempo da aula e possibilitando a resolução dos exercícios junto à turma.

Figura 5 – Applet no Geogebra

TEOREMA DE PITÁGORAS

(a) é a hipotenusa, é o lado do triângulo retângulo oposto ao ângulo reto.

(b) é um dos catetos, um dos lados adjacente ao ângulo reto

(c) é um dos catetos, um dos lados adjacente ao ângulo reto

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$5^2 = 3^2 + 4^2$$

$$25 = 9 + 16$$

Mostrar o quadrado de área a^2

Mostrar o quadrado de área b^2

Mostrar o quadrado de área c^2

Altere o comprimento do cateto (b) deslizando o botão verde: 3

Altere o comprimento do cateto (c) deslizando o botão azul: 4

Fonte: <https://www.geogebra.org/m/X7PhzPEp>.

Em relação à Apostila II, determinou-se a não enunciação da Lei dos Cossenos de modo anterior à sua demonstração, bem como retirada da descrição das mesmas e da situação problema, já presente na Apostila I.

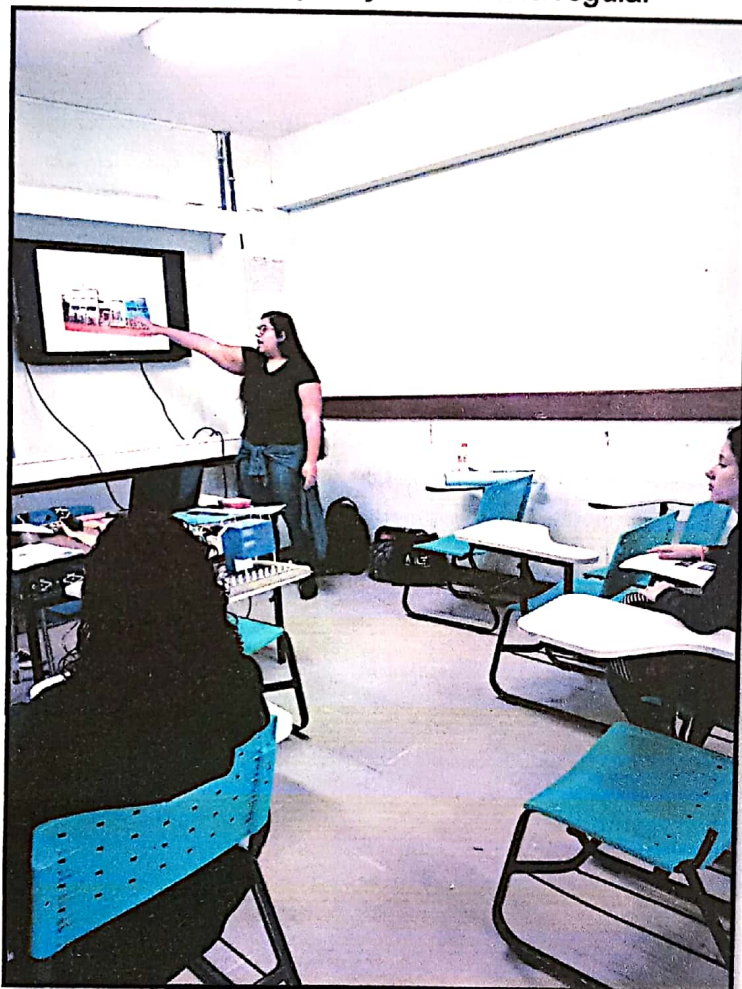
3.2.2) Experimentação da sequência didática na turma regular

A aplicação ocorreu no Instituto Federal Fluminense - *Campus Campos Centro*, no dia 19 de novembro de 2019, em uma turma com dez (10) alunos do segundo ano do ensino médio integrado ao curso técnico de edificações, utilizando dois tempos de aula com 50 minutos cada. Apesar de ter sido esperado um número maior de alunos, devido à chuva, se tratar de um horário vago e por posteriormente haver uma avaliação, apenas dez (10) compareceram. Isso somada à quantidade significativa de atrasos pode ter contribuído para a apatia dos alunos e participação comedida.

A aula foi introduzida pela professora orientadora com a apresentação dos professores em formação, assim como o objetivo do trabalho. Também foi informada aos alunos a realização de fotografias de modo que fosse mantida em sigilo sua identidade. Para aplicação da sequência, a sala foi organizada em duplas, facilitando a interação entre os alunos, embora no decorrer da aula os mesmos tenham formados grupos.

Iniciando a sequência didática, fez-se uma breve introdução sobre a vida de Frida Khalo (Figura 6) exibindo uma apresentação de slides com fotografias da mesma, suas obras e sua casa (Apêndice C). Vale ressaltar, que os alunos já haviam ouvido falar sobre a Frida Khalo, porém nem todos tinham conhecimento de sua história.

Figura 6 – Aplicação na turma regular



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Em seguida, foi apresentada a maquete e feita à leitura da situação problema, expondo os pontos demarcados. Para realizar a medição na maquete, foi solicitada a participação de dois alunos, um fazendo uso da trena a laser e outro aferindo o ângulo do triângulo em E.V.A. com o uso do transferidor.

A decisão do uso da trena a laser se mostrou acertada (Figura 7), uma vez que se observou o encantamento da turma em relação a este instrumento, sendo destacada por um dos alunos a possível utilização em disciplinas específicas do curso. Também foi percebida certa dificuldade no uso do transferidor (Figura 8),

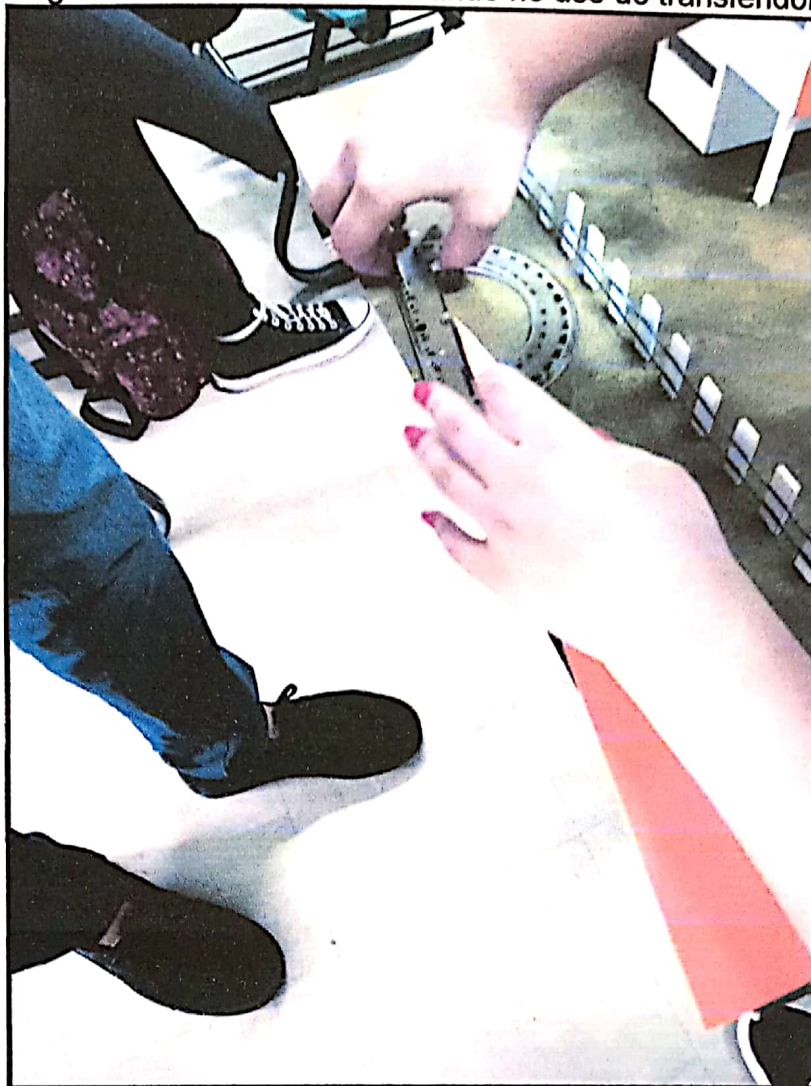
além do equivoco entre as unidades de medidas no momento do uso da trena, grau e metro, sendo necessária a intervenção dos professores em formação.

Figura 7 - Aluno realizando as medições na maquete



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Figura 8 – Licenciando auxiliando no uso do transferidor



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Diferente do que era idealizado no momento da elaboração da sequência didática, a turma já tinha conhecimento do conteúdo abordado. Portanto, quando questionados sobre a resolução da situação problema, logo tiveram como resposta que se faria uso da Lei dos Cossenos, o que já era esperado, uma vez que, houve um encontro prévio com o professor da turma.

Diante desta resposta, os professores em formação elucidaram que seria realizada a demonstração da Lei dos Cossenos posteriormente a uma revisão dos conceitos necessários para tal. Para a revisão foram utilizados dois applets do Geogebra, inicialmente ilustrando o Teorema de Pitágoras e sua validade, em seguida ratificando a permanência das razões trigonométricas para triângulos retângulos, onde as medidas dos lados podem ser alteradas mantendo conservados seus ângulos.

Dando seguimento à sequência, foi demonstrada a Lei dos Cossenos nos triângulos acutângulo, obtusângulo e retângulo. A turma se mostrou atenta, entretanto, a maioria dos alunos não transcreveu para a apostila a demonstração exposta no quadro, mostrando que não foi conveniente a retirada da descrição da mesma.

Para a demonstração da Lei dos Cossenos no triângulo acutângulo (Figura 9), foi utilizada uma ampliação do triângulo representado na maquete, mostrando a validade da Lei para tal situação.

Figura 9 – Demonstração no triângulo acutângulo



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na demonstração no triângulo obtusângulo (Figura 10), a maior dificuldade encontrou-se nos conceitos que envolviam o círculo trigonométrico, sendo contornado com o uso de um material em E.V.A. representando o mesmo, o que tornou mais fácil a visualização da simetria existente. Já no triângulo retângulo, os alunos entenderam prontamente a redução da Lei dos Cossenos no teorema de Pitágoras.

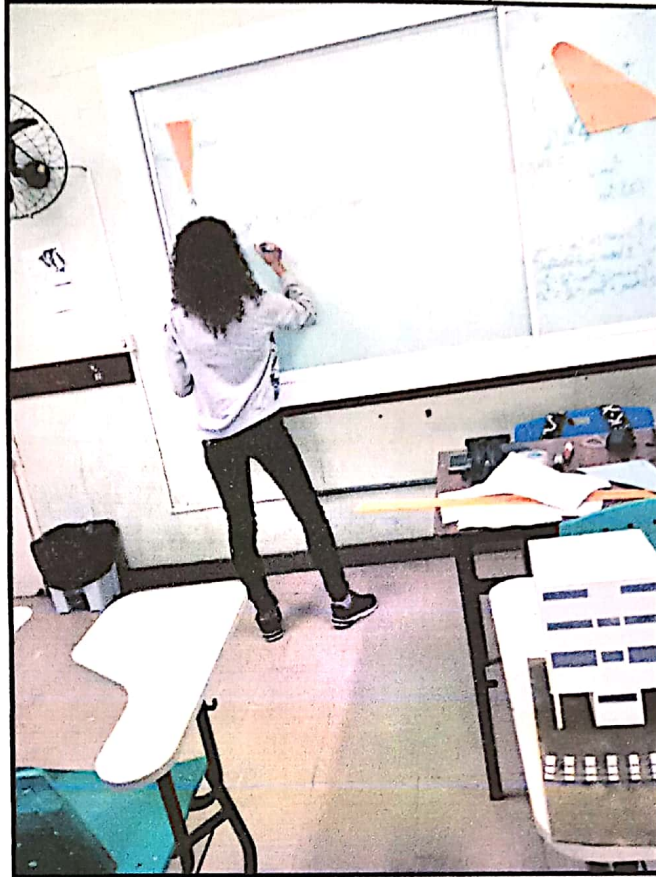
Figura 10 – Demonstração no triângulo obtusângulo



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Para resolução da situação problema no quadro foi solicitada a participação de um aluno, havendo interação da turma com este (Figura 11)

Figura 11 – Aluna respondendo situação problema no quadro



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Posteriormente, foi realizada a conversão das medidas encontradas (Figura 12), lembrando, juntamente com os alunos, a fórmula utilizada para tal, visto que se trata de uma matéria recorrente no curso.

Figura 12 – Resposta do aluno para situação problema

$x^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$
 $x^2 = 30^2 + 30^2 - 2 \cdot 30 \cdot 30 \cdot \cos 20^\circ$
 $x^2 = 108,56$
 $x = 10,42 \text{ cm} \Rightarrow 10 \text{ cm}$
 \downarrow
 $0,10 \text{ m}$

TRANSFORMAÇÃO DE ESCALA:

$$\frac{1}{50} = \frac{d_{\text{desenho}}}{D_{\text{real}}}$$
$$\frac{1}{50} = \frac{0,1024}{D}$$
$$D = 0,1024 \cdot 50 = 5,12 \text{ cm}$$

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Para efeito de fixação, foram realizados exercícios trabalhando aplicações da Lei dos Cossenos. A primeira questão contou com a participação do aluno (Figura 13) para a resolução no quadro, o qual apresentou dificuldades provenientes do mau uso da calculadora, fato contornado pelos professores em formação.

Figura 13 – Aluno respondendo a primeira questão dos exercícios



Fonte: Protocolo de pesquisa.

As demais questões foram realizadas em sala sob auxílio dos licenciandos, não havendo correção no quadro para uma verificação posterior das resoluções. A partir delas, percebeu-se uma dificuldade em geometria plana, assim como na relação entre os cossenos de ângulos suplementares.

É interessante destacar, as diferentes maneiras de desenvolvimento da questão 3, considerando o triângulo ECD, fazendo o uso do cosseno do ângulo de 135° , ou o triângulo EAD, utilizando o cosseno do ângulo de 45° (Figura 14 e 15).

Figura 14 – Resposta do aluno na terceira questão dos exercícios

3. (UNICAMP-2018) Considere que o quadrado ABCD, representado na figura abaixo, tem lados de comprimento 1 cm, e que C é o ponto médio do segmento AE. A distância entre os pontos D e E será igual a:

Handwritten calculations:

$$x^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cos 135^\circ$$

$$x^2 = 5$$

$$x = \sqrt{5} \text{ em } \sqrt{2}$$

Handwritten notes on the diagram:

- $d = \sqrt{2}$ (length of CE)
- $d = 2\sqrt{2}$ (length of AE)
- 135° (angle DCE)
- 45° (angle DAC)

Options:

- a) $\sqrt{3}$ cm
- b) 2 cm
- c) $\sqrt{5}$ cm
- d) $\sqrt{6}$ cm

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Figura 15 – Resposta do aluno na terceira questão dos exercícios

3. (UNICAMP-2018) Considere que o quadrado ABCD, representado na figura abaixo, tem lados de comprimento 1 cm, e que C é o ponto médio do segmento AE. A distância entre os pontos D e E será igual a:

Handwritten calculations:

$$x^2 = 1^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2\sqrt{2} \cos 45^\circ$$

$$x^2 = 1 + 4 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x^2 = 9 - 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x^2 = 9 - \frac{4 \cdot 2}{2}$$

$$x^2 = 9 - 4$$

$$x^2 = 5$$

$$x = \sqrt{5}$$

Handwritten notes on the diagram:

- 1 cm (side length)
- $\sqrt{2}$ (length of diagonal AC)
- 45° (angle DAC)
- 45° (angle DCE)
- $2\sqrt{2}$ (length of AE)

Options:

- a) $\sqrt{3}$ cm
- b) 2 cm
- c) $\sqrt{5}$ cm
- d) $\sqrt{6}$ cm

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Considerações Finais

A disciplina desempenhou um papel fundamental como ente de amadurecimento para os professores em formação, tanto na relação interpessoal quanto na qualidade dos trabalhos produzidos. O resultado final se mostrou satisfatório, uma vez que recebeu-se uma resposta deveras positiva da turma na qual ele foi aplicado e dos demais licenciandos que também cursam a disciplina.

Apesar de não ter sido um assunto nunca visto antes pela amostra, acredita-se que a contribuição tenha sido positiva e esclarecedora.

Para futuras aplicações fica sugerido a conservação da separação dos alunos em grupos, assim como a organização prévia da disposição das cadeiras, se possível, a fim de otimizar o tempo, visto que a decisão se mostrou assertiva. Quanto às descrições das demonstrações presentes na apostila II (Apêndice A), sugere-se que as mesmas sejam mantidas, uma vez que os alunos não fizeram a transcrição no momento da aula. Com relação à demonstração da Lei dos Cossenos no triângulo obtusângulo, recomenda-se o uso do esquadro para maior precisão no traçado da altura.

Para mais propõe-se o cuidado quanto ao fluxo de alunos no momento da aplicação, principalmente em casos de uso de horários vagos.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 2002. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>> Acesso em: 28 nov. de 2018

MAIA, Rayanne Dantas. **Um estudo sobre lei dos senos, leis dos cossenos e suas aplicações**. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Caicó, 2015. Disponível em: <https://monografias.ufrn.br/jspui/bitstream/123456789/1976/6/Um%20estudo%20sobre_Monografia_Maia.pdf> Acesso em: 06 dez. de 2018

REIS, Fabiana dos. **Uma visão geral da trigonometria: história, conceitos e aplicações**. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2016. Disponível em: <<http://tede2.uepg.br/jspui/bitstream/prefix/1506/1/Fabiana%20Reis.pdf>> Acesso em 07 dez. de 2018

Campos dos Goytacazes (RJ), ____ de _____ de 2020.

APÊNDICES

APÊNDICE A: MATERIAL DIDÁTICO APLICADO NA TURMA DO LEAMAT II

Diretoria do Ensino Superior das Licenciaturas

Licenciatura em Matemática

Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática

Linha de Pesquisa: Álgebra

Licenciandos: Ana Julia Magalhães, Cristiano Higino, Mariana Gusmão, Quezia Pagy.

Orientadora: Lívia Azelman

Nome: _____ Data: ___ / ___ / 2019

Apostila I

- *Quem foi Frida Kahlo?*

¹Frida Kahlo foi umas das mais importantes pintoras mexicanas do século XX. Embora tenha tido uma vida muito conturbada, desde saúde e relacionamentos, destacou-se por ser uma artista singular. Dona de um espírito revolucionário militou no partido comunista mexicano e lutou pelos direitos das mulheres, tornando-se um símbolo do feminismo.



- *Museu Casa-Estúdio de Diego Rivera (marido da Frida) e Frida Kahlo:*

²O museu se encontra no bairro San Ángel, na Cidade do México. As três casas que compõem o museu foram projetadas pelo arquiteto funcionalista Juan O’Gorman, em 1931. As casas parecem ser da escola modernista, feitas em concreto e bastante funcionais, mas



¹ Retirado do site: <https://www.todamateria.com.br/frida-kahlo/>

² Retirado do site: <https://eusouatoa.com/2016/03/28/museus-de-frida-kahlo-e-diego-rivera/>

O'Gorman é muito anterior ao movimento que teve como maior exemplo o brasileiro Oscar Niemeyer.

Encomendadas pelo casal Frida e Diego, as casas dos dois são conectadas por uma ponte no terraço e uma escada – a terceira edificação do complexo era a morada do arquiteto, não se conecta com as outras duas e fica no fundo do terreno.

Situação Problema

Com base nas informações acima, considerando que as casas de Frida e Diego são distintas e conectadas por uma ponte, adotemos os pontos B e C que representam, respectivamente, a extremidade direita da casa vermelha e esquerda da casa azul, assim como um ponto A não colinear as demais extremidades, como ilustrado na maquete. Após um acidente na ponte, faz-se necessária uma reforma na mesma. Por medida de segurança, as proximidades foram interditadas, então não é possível medir a ponte diretamente. De acordo com as informações dadas e as medidas encontradas na maquete, determine a medida da ponte.

Diretoria do Ensino Superior das Licenciaturas

Licenciatura em Matemática

Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática

Linha de Pesquisa: Álgebra

Licenciandos: Ana Julia Magalhães, Cristiano Higino, Mariana Gusmão, Quezia Pagy.

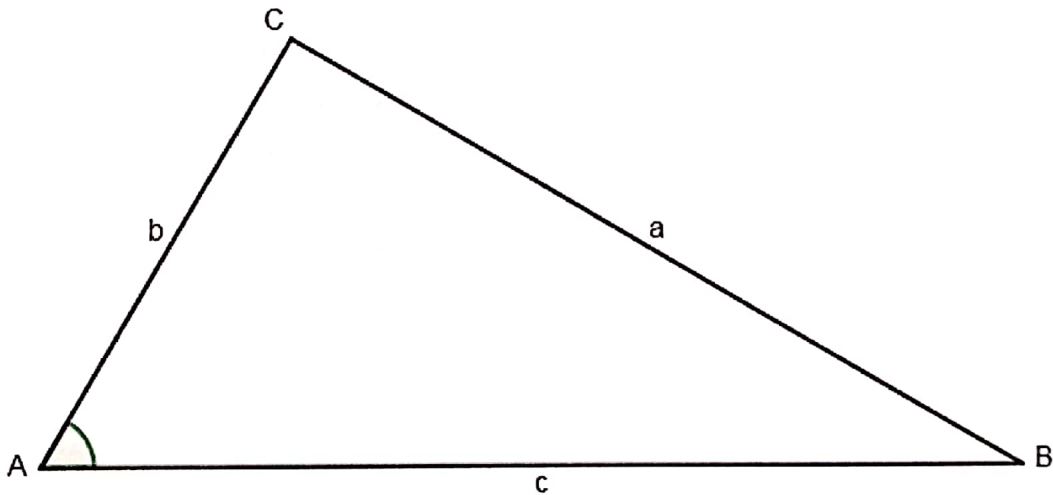
Orientadora: Lívia Azelman

Nome: _____ Data: ___ / ___ / 2019

Lei dos Cossenos: Conceitos e Aplicações**Apostila II**

“Em todo triângulo, o quadrado da medida de qualquer lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois, diminuída do dobro do produto da medida desses lados pelo cosseno do ângulo por eles formados.” (IEZZI, 2013, p. 43).

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$



* **Demonstração:**

- Seja o triângulo acutângulo ABC e $CH = h$, a medida da altura relativa ao lado AB.

$$\left. \begin{array}{l} \Delta BCH: a^2 = h^2 + (c - m)^2 \\ \Delta ACH: h^2 = b^2 - m^2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 - m^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot m + m^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot m \quad (I)$$

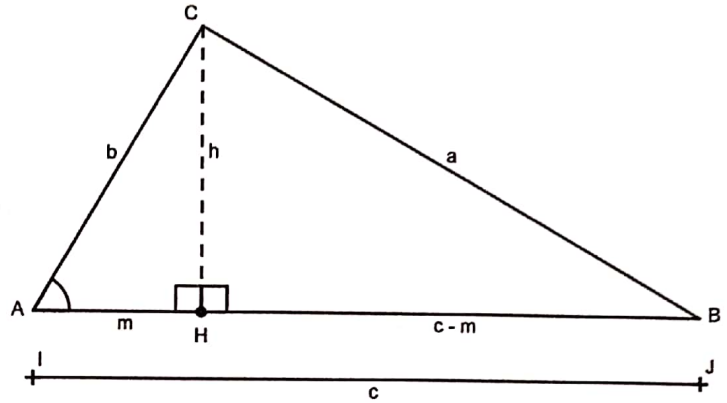
$$\Delta ACH: \cos \hat{A} = \frac{m}{b} \Rightarrow m = b \cdot \cos \hat{A} \quad (II)$$

Substituindo de II em I, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$

Analogamente, podemos obter:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$



- Seja o triângulo ABC obtusângulo, em \hat{A} , e $CH = h$, a medida da altura relativa ao lado AB.

$$\left. \begin{array}{l} \Delta BCH: a^2 = h^2 + (c + m)^2 \\ \Delta ACH: h^2 = b^2 - m^2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 - m^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot m + m^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot m \quad (I)$$

$$\Delta CHA: \cos(180^\circ - \hat{A}) = \frac{m}{b}, \text{ isto é,}$$

$$m = b \cdot \cos(180^\circ - \hat{A}) = b \cdot (-\cos \hat{A}) = -b \cdot \cos \hat{A}$$

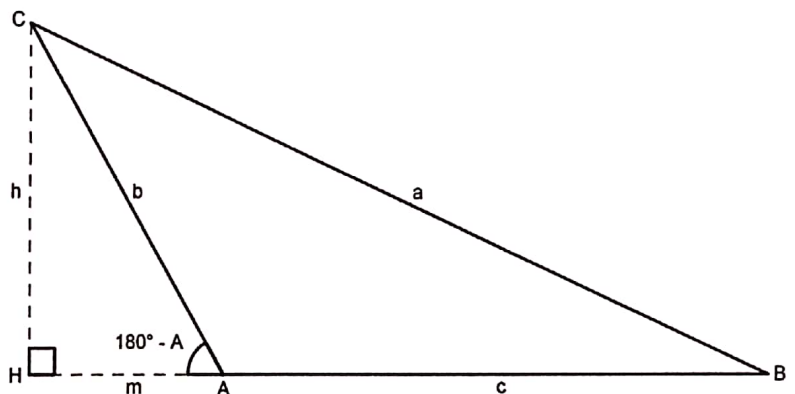
$$m = -b \cdot \cos \hat{A} \quad (II)$$

Substituindo de (II) em (I), temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$

Analogamente, podemos obter:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$



- No caso de o triângulo ABC ser retângulo (em \hat{A} , por exemplo), como $\cos 90^\circ = 0$ verifica-se a igualdade $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 90^\circ$, que se reduz a expressão do teorema de Pitágoras. Para cada um dos dois ângulos agudos do triângulo (\hat{B} e \hat{C}), a igualdade decorre também do teorema de Pitágoras.

Resolução da situação problema utilizando a Lei dos cossenos:

Com base nas informações acima, considerando que as casas de Frida e Diego são distintas e conectadas por uma ponte, adotemos os pontos B e C que representam, respectivamente, a extremidade direita da casa vermelha e esquerda da casa azul, assim como um ponto A não colinear as demais extremidades, como ilustrado na maquete. Após um acidente na ponte, faz-se necessária uma reforma na mesma. Por medida de segurança, as proximidades foram interditadas, então não é possível medir a ponte diretamente. De acordo com as informações dadas e as medidas encontradas na maquete, determine a medida da ponte.

Diretoria do Ensino Superior das Licenciaturas

Licenciatura em Matemática

Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática

Linha de Pesquisa: Álgebra

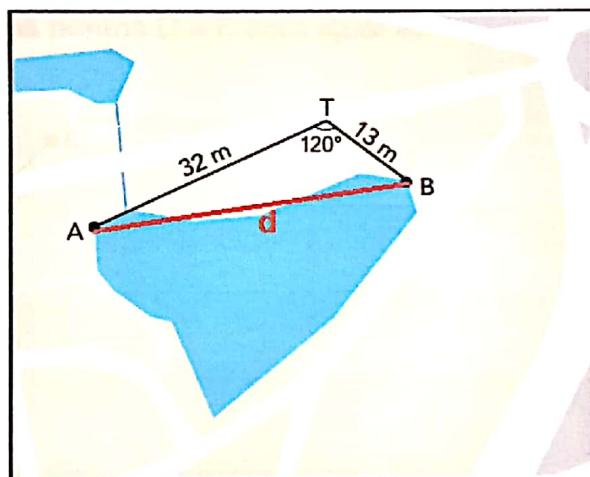
Licenciandos: Ana Julia Magalhães, Cristiano Higino, Mariana Gusmão, Quezia Pagy.

Orientadora: Lívia Azelman

Nome: _____ Data: ____ / ____ / 2019

Lei dos Cossenos: Conceitos e Aplicações**Apostila III: Exercícios**

1. (UERJ-2017) Ao coletar os dados para um estudo topográfico da margem de um lago a partir dos pontos A, B e T, um técnico determinou as medidas $AT = 32$ m; $BT = 13$ m e $\widehat{ATB} = 120^\circ$, representadas no esquema abaixo.

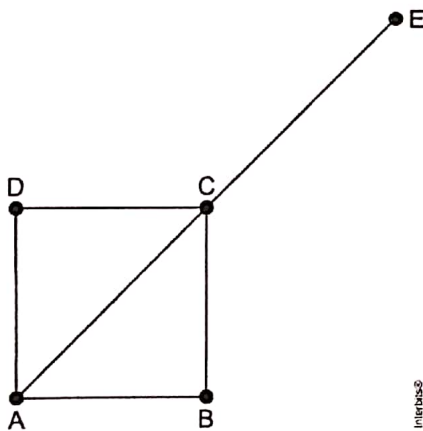


Calcule a distância, em metros, entre os pontos A e B, definidos pelo técnico nas margens desse lago.

2. (UECE-2018) Se as medidas de dois dos lados de um triângulo são respectivamente 7 m e $5\sqrt{2}\text{ m}$ e se a medida do ângulo entre esses lados é 135 graus, então, a medida, em metros, do terceiro lado é:

- a) 12
- b) 15
- c) 13
- d) 14

3. (UNICAMP-2018) Considere que o quadrado ABCD, representado na figura abaixo, tem lados de comprimento 1 cm , e que C é o ponto médio do segmento AE. A distância entre os pontos D e E será igual a:



- a) $\sqrt{3}\text{ cm}$
- b) 2 cm
- c) $\sqrt{5}\text{ cm}$
- d) $\sqrt{6}\text{ cm}$

APÊNDICE B: MATERIAL DIDÁTICO EXPERIMENTADO NA TURMA REGULAR

Diretoria de Ensino Superior das Licenciaturas

Licenciatura em Matemática

Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática

Linha de Pesquisa: Álgebra

Licenciandos: Ana Julia Magalhães, Cristiano Higino, Mariana Gusmão, Quezia Pagy.

Orientadora: Prof.^a Me. Livia Azelman de Faria Abreu.

Nome: _____ Data: ____ / ____ / 2019

Apostila I

- *Quem foi Frida Kahlo?*

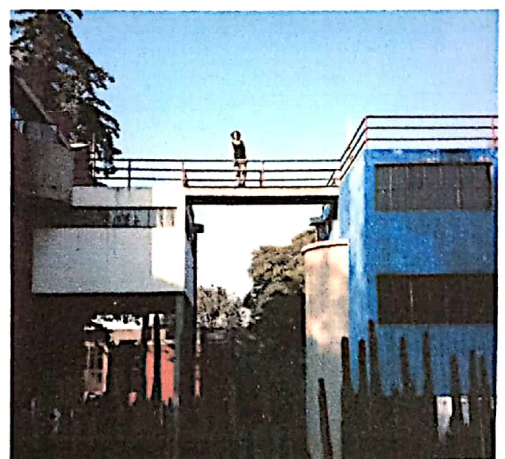
³Frida Kahlo foi umas das mais importantes pintoras mexicanas do século XX.

Embora tenha tido uma vida muito conturbada, desde saúde e relacionamentos, destacou-se por ser uma artista singular. Dona de um espírito revolucionário militou no partido comunista mexicano e lutou pelos direitos das mulheres, tornando-se um símbolo do feminismo.



- *Museu Casa-Estúdio de Diego Rivera (marido da Frida) e Frida Kahlo:*

⁴O museu se encontra no bairro San Ángel, na Cidade do México. As três casas que compõem o museu foram projetadas pelo arquiteto funcionalista Juan O'Gorman, em 1931. As casas parecem ser da escola modernista, feitas em concreto e bastante funcionais, mas



³ Retirado do site: <https://www.todamateria.com.br/frida-kahlo/>

⁴ Retirado do site: <https://eusouatoa.com/2016/03/28/museus-de-frida-kahlo-e-diego-rivera/>

O'Gorman é muito anterior ao movimento que teve como maior exemplo o brasileiro Oscar Niemeyer.

Encomendadas pelo casal Frida e Diego, as casas dos dois são conectadas por uma ponte no terraço e uma escada – a terceira edificação do complexo era a morada do arquiteto, não se conecta com as outras duas e fica no fundo do terreno.

Situação Problema

Com base nas informações acima, sabendo que as casas de Frida e Diego são distintas e conectadas por uma ponte, adotemos os pontos B e C que representam, respectivamente, a extremidade direita da casa vermelha e esquerda da casa azul, assim como um ponto A não colinear as demais extremidades, como ilustrado na maquete.

Considerando um acidente na ponte e sendo necessária uma reforma na mesma, de que modo é possível calcular o comprimento da ponte, visto que, por medida de segurança, as proximidades foram interditadas?

Diretoria de Ensino Superior das Licenciaturas

Licenciatura em Matemática

Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática

Linha de Pesquisa: Álgebra

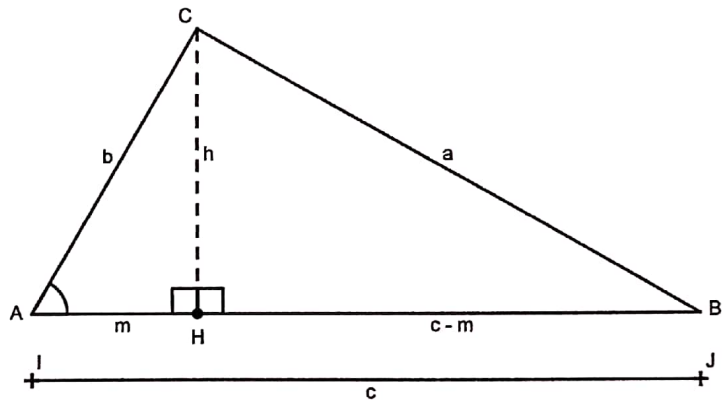
Licenciandos: Ana Julia Magalhães, Cristiano Higino, Mariana Gusmão, Quezia Pagy.

Orientadora: Prof^a Me. Livia Azelman de Faria Abreu.

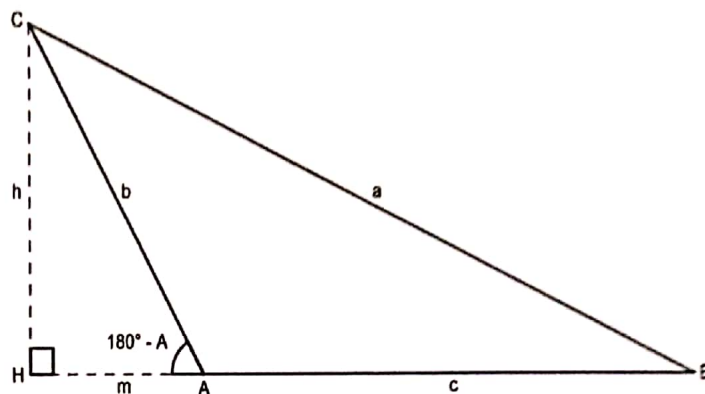
Nome: _____ Data: ___ / ___ / 2019

Apostila II*** Relações métricas em um triângulo qualquer:**

- Seja o triângulo acutângulo ABC e $CH = h$, a medida da altura relativa ao lado \overline{AB} .



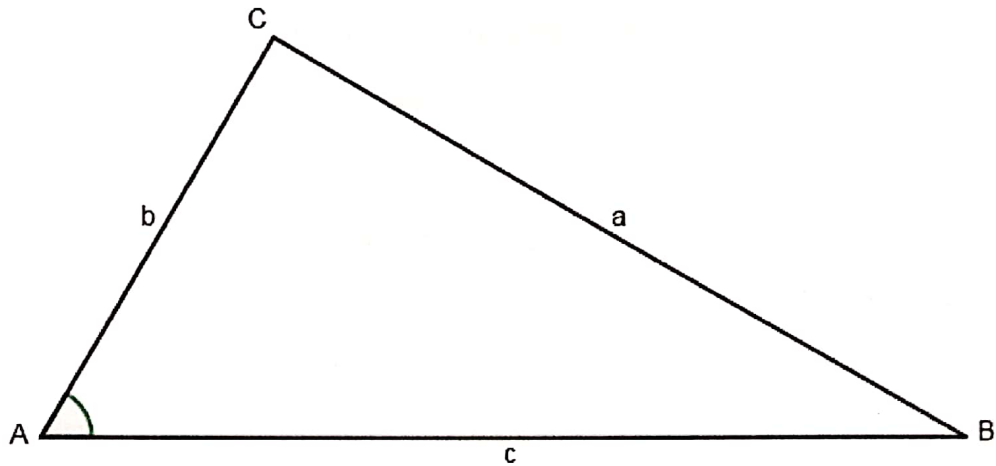
- Seja o triângulo ABC **obtusângulo**, em \hat{A} , e $CH = h$, a medida da altura relativa ao lado \overline{AB} .



No caso de o triângulo ABC ser **retângulo** (em \hat{A} , por exemplo), como $\cos 90^\circ = 0$ verifica-se a igualdade $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos 90^\circ$, que se reduz a expressão do teorema de Pitágoras.

“Em todo triângulo, o quadrado da medida de qualquer lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois, diminuída do dobro do produto da medida desses lados pelo cosseno do ângulo por eles formados.” (IEZZI, 2013, p. 43).

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$



Diretoria de Ensino Superior das Licenciaturas

Licenciatura em Matemática

Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática

Linha de Pesquisa: Álgebra

Licenciandos: Ana Julia Magalhães, Cristiano Higino, Mariana Gusmão, Quezia

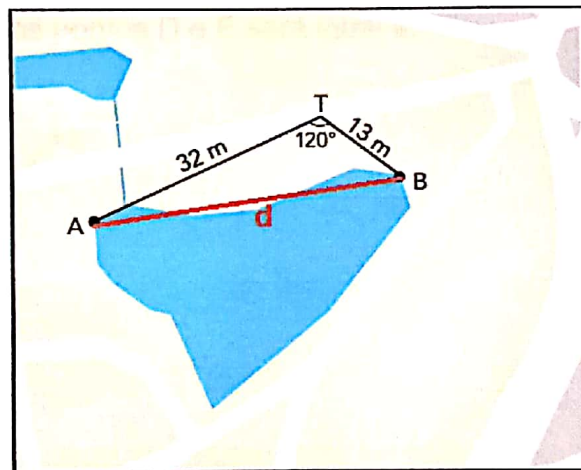
Pagy.

Orientadora: Prof.^a Me. Lívia Azelman de Faria Abreu.

Nome: _____ Data: ___ / ___ / 2019

Lei dos Cossenos: Conceitos e Aplicações**Exercícios**

1. (UERJ-2017) Ao coletar os dados para um estudo topográfico da margem de um lago a partir dos pontos A, B e T, um técnico determinou as medidas $AT = 32$ m; $BT = 13$ m e $\widehat{ATB} = 120^\circ$, representadas no esquema abaixo.

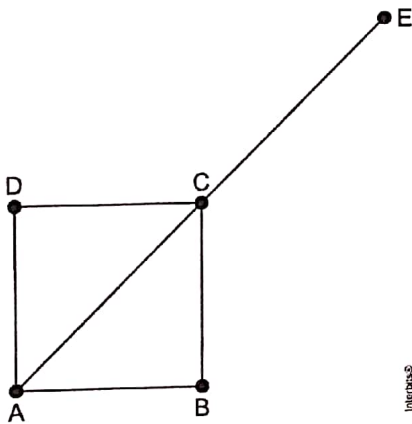


Calcule a distância, em metros, entre os pontos A e B, definidos pelo técnico nas margens desse lago.

2. (UECE-2018) Se as medidas de dois dos lados de um triângulo são respectivamente 7 m e $5\sqrt{2}\text{ m}$ e se a medida do ângulo entre esses lados é 135 graus, então, a medida, em metros, do terceiro lado é:

- a) 12
- b) 15
- c) 13
- d) 14

3. (UNICAMP-2018) Considere que o quadrado ABCD, representado na figura abaixo, tem lados de comprimento 1 cm , e que C é o ponto médio do segmento AE. A distância entre os pontos D e E será igual a:



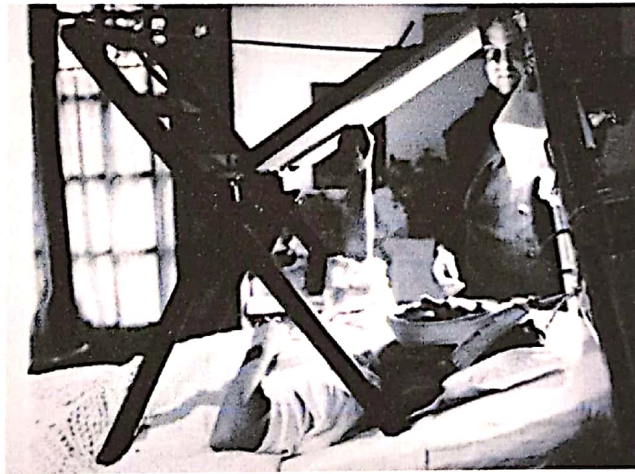
- a) $\sqrt{3}\text{ cm}$
- b) 2 cm
- c) $\sqrt{5}\text{ cm}$
- d) $\sqrt{6}\text{ cm}$

Apêndice C: Slides do *Power Point* utilizados na Sequência Didática



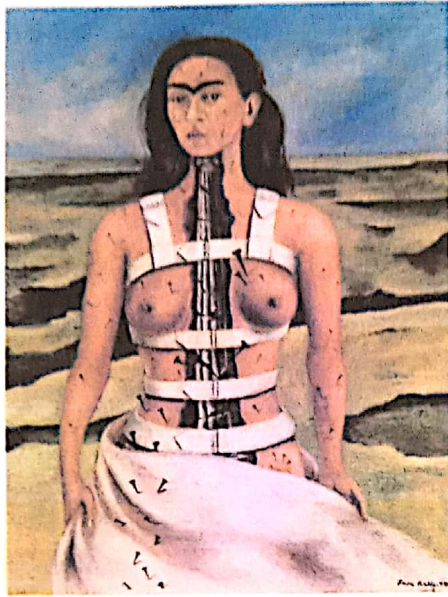
Diego Rivera e
Frida Kahlo

▶ 1



Frida Kahlo

▶ 2



Obras de Frida
Kahlo
A Columna Partida (1944)

▶ 3



Obras de Frida
Kahlo (cont.)
Hospital Henry
Ford (1932)

▶ 4

Museu Casa-Estúdio de Diego Rivera e Frida Kahlo



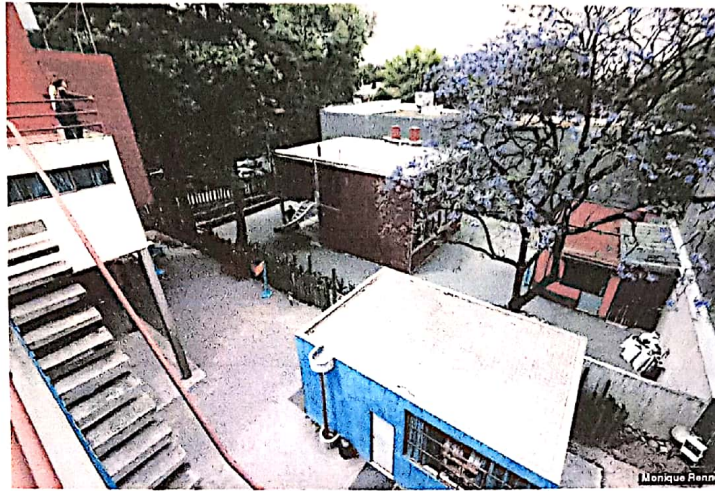
▶ 5

Museu Casa-Estúdio de Diego Rivera e Frida Kahlo (cont.)



▶ 6

Museu Casa-Estúdio de Diego Rivera e Frida Kahlo (cont.)



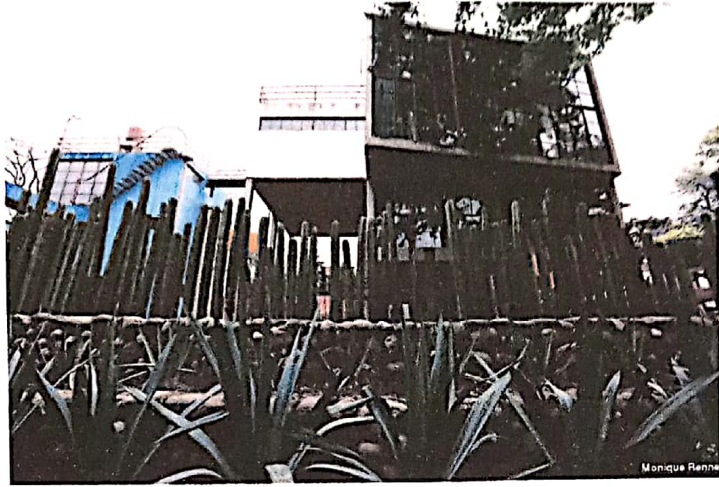
▶ 7

Museu Casa-Estúdio de Diego Rivera e Frida Kahlo (cont.)



▶ 8

Museu Casa-Estúdio de Diego Rivera e Frida Kahlo (cont.)



▶ 9