Recebido em
06/09/2019

RELATÓRIO DO LEAMAT

RELAÇÃO ENTRE FUNÇÃO EXPONENCIAL E PROGRESSÃO GEOMÉTRICA NO CONTEXTO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

ENSINO E APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA

BRUNA MACHADO DE SÁ
GIULLIA GOMES FAES
IGOR PESSANHA MENEZES
IGOR RODRIGUES BATISTA
LETHÍCIA EMILY CARDOSO FERNANDES
LETÍCIA CABRAL DRUMOND

CAMPOS DOS GOYTACAZES – RJ
2019.1

BRUNA MACHADO DE SÁ
GIULLIA GOMES FAES
IGOR PESSANHA MENEZES
IGOR RODRIGUES BATISTA
LETHÍCIA EMILY CARDOSO FERNANDES
LETÍCIA CABRAL DRUMOND

RELATÓRIO DO LEAMAT

RELAÇÃO ENTRE FUNÇÃO EXPONENCIAL E PROGRESSÃO GEOMÉTRICA NO CONTEXTO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

ENSINO E APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA

Trabalho apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, *campus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão da disciplina Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Profª. Me. Lívia Azelman de Faria Abreu

CAMPOS DOS GOYTACAZES – RJ
2019.1

SUMÁRIO

1) Relatório do LEAMAT I

1.1) Atividades desenvolvidas

No dia 27 de abril de 2018 foi apresentada a disciplina LEAMAT I pela professora e, logo em seguida, a turma foi dividida em quatro grupos: A1, A2, B1 e B2. Também foi entregue a atividade "Álgebra na resolução de problemas" na qual tentamos resolver problemas usando o pensamento algébrico. Logo após, a professora fez uma apresentação intitulada "O perfeito mau professor" baseada no livro "A Arte de Ser um Perfeito Mau Professor" escrito por Malba Tahan.

No dia 4 de maio de 2018, foi discutido o texto "Primeiros passos na Álgebra: conceitos elementares e atividades pedagógicas", escrito por Janaína Poffo Possamai e Tania Baier. O texto apresenta as concepções da álgebra, apontando as dificuldades dos alunos no estudo da Álgebra por meio dos resultados de uma pesquisa feita com atividades exploratórias para alunos de Licenciatura. Após o debate do texto, foram feitas algumas orientações quanto aos fichamentos que foram entregues às professoras.

No terceiro encontro, realizado em 11 de maio de 2018, foi feita a leitura e resumo do texto "O ensino da álgebra" de Ana Rita Martins e Beatriz Vichessi. Também foi feita uma atividade sobre o Teorema de Pitágoras, em que, através de manipulações com triângulos retângulos congruentes sobre um quadrado, consegue-se deduzir o Teorema de Pitágoras, mostrando a relação entre a hipotenusa e os dois catetos de um triângulo retângulo.

No dia 18 de maio de 2018, foi discutido o artigo "Números e álgebra no currículo escolar", escrito por João Pedro da Ponte. O artigo apresenta um pouco da álgebra no currículo escolar de Portugal, destacando o conceito de número, a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico e uma investigação sobre a aprendizagem dos alunos.

No dia 8 de junho de 2018, foi realizada uma folha de atividades sobre produtos notáveis, a qual foi resolvida por meio do Algeplan, que é um material manipulável utilizado para o ensino de soma, subtração, multiplicação e divisão de polinômios de grau no máximo dois.

No dia 22 de junho de 2018, ocorreram as apresentações de todos os grupos sobre os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

No dia 29 de junho de 2018, foram realizados os resumos de capítulos do livro "Álgebra: pensar, calcular, comunicar" do Projeto Fundão, sendo eles: "As Concepções da Álgebra" – Capítulo II, "O Sinal de Igualdade" – Capítulo III, "A Propriedade Distributiva" – Capítulo IV, "Simbologia e Linguagem Algébrica" – Capítulo V.

Nos dias 3 de maio e 27 de julho de 2018 ocorreram as apresentações da linha de pesquisa de álgebra de todos os grupos do LEAMAT I.

As aulas seguintes foram destinadas à elaboração do relatório.

1.2) Elaboração da sequência didática

1.2.1) Tema

Relação entre função exponencial e progressão geométrica no contexto da resolução de problemas.

1.2.2) Justificativa

De acordo com Possamai e Baier (2013, p. 74), as dificuldades na compreensão de conceitos básicos da álgebra podem resultar em futuros obstáculos mesmo que o aluno não escolha sua trajetória na área das ciências exatas.

Neste sentido, as autoras baseadas em Matos (2007) ressaltam que uma das competências da álgebra deriva da utilização de símbolos, muitos deles literais. Afirmam ainda que estes possibilitam a expressão de ideias matemáticas de forma rigorosa e consistente, além de serem ferramentas significativas na resolução de problemas.

Baseando-se nas ideias de Allevato e Onuchic (2004) e Van de Walle (2001) é possível afirmar que o ensino da álgebra, no que tange o uso de símbolos, é de essencial importância para o método de resolução de problemas. Esse método é abordado por diversos autores, que destacam a resolução de problemas como centralizadora da atenção dos alunos; desenvolve a capacidade de pensar matematicamente e utilizar diferentes e convenientes estratégias em diferentes problemas, possibilitando o aumento da compreensão dos conteúdos e conceitos matemáticos; gera a crença de que os alunos são capazes de fazer matemática e que ela faz sentido; a confiança e a autoestima dos alunos aumentam e possibilitam a formalização dos conceitos e teorias matemáticas, que passam a fazer mais sentido para os alunos.

Além disso, ensinar matemática através da resolução de problemas, segundo Allevato e Onuchic (2001), leva os alunos a pensarem e trocarem ideias com os colegas utilizando seus conhecimentos já estabelecidos:

> O professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias já conhecidas necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor atenda os alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador [...] (ALLEVATO; ONUCHIC, 2011, p.84).

Sendo a resolução de problemas uma ferramenta para compreensão dos conteúdos da matemática e para a formalização desses, como evidenciado pelos autores, é importante relacioná-la aos conceitos que devem ser abordados na álgebra no Ensino Médio.

Nesse contexto, o uso da tecnologia, se inserida em aula de acordo com um planejamento, pode ser um grande aliado à resolução de problemas. Com o auxílio de *softwares* como o GeoGebra, é possível verificar como os conteúdos se associam, pois "as aplicações de geometria dinâmica favorecem a compreensão dos conceitos algébricos e de relações geométricas" (COLAÇO et al., 2008, p. 1). Além disso,

> O uso da tecnologia computacional como ferramenta de apoio no ensino de álgebra elementar pode trazer uma contribuição importante na área da educação na sociedade contemporânea (COSTA, 2004 apud COSTA; SOARES; LIMA, 2006, p. 82).

Alves e Morais (2006, p.337) afirmam que "as situações matemáticas nem sempre são identificadas com clareza nas situações do quotidiano" por parte dos alunos. Sarmento (2010) evidencia que a utilização de materiais didáticos, justamente por possibilitar a manipulação e o entendimento do aluno sobre determinado conteúdo, faz com que ele seja capaz de atribuir significação ao novo saber aprendido. Almiro (2004) também destaca que o material didático manipulável é um importante recurso no contexto da resolução de problemas, visto que

> Para o aluno não é suficiente observar uma demonstração de um material pelo professor. O aluno tem que mexer nos materiais, interpretando as suas características, resolvendo os problemas com a sua ajuda (ALMIRO, 2004, p.7).

Portanto, o uso de materiais didáticos na sala de aula pode possibilitar maior compreensão por parte dos alunos dos conteúdos a serem ministrados.

Quanto aos assuntos matemáticos escolhidos como tema, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) destacam a importância de se relacionar conteúdos atuais com os que já foram vistos anteriormente, como é o caso da Progressão Geométrica que representa a Função Exponencial cujo domínio é o conjunto dos números naturais não nulos. As Progressões Geométricas "não devem ser tratadas como um tópico independente em que o aluno não as reconhece como a função já estudada" (BRASIL, 2006, p. 75). No ensino da Progressão Geométrica, as OCEM também evidenciam que: "Devem-se evitar as exaustivas coletâneas de cálculos que fazem simples uso de fórmulas ("determine a soma...", "calcule o quinto termo")" (BRASIL, 2006, p.75). E já no caso das equações exponenciais, as OCEM destacam que:

> O trabalho de resolver equações exponenciais é pertinente quando associado a algum problema de aplicação em outras áreas de conhecimento [...]. Procedimentos de resolução de equações sem

> que haja um propósito maior devem ser evitados (BRASIL, 2006, p. 75).

Ao comparar a Função Exponencial e a Progressão Geométrica (P.G.), o professor Elon Lages Lima às relaciona da seguinte maneira:

> Uma progressão geométrica se obtém quando se toma uma função de tipo exponencial, *f(x)=b.*a^x*,* se consideram apenas valores *f(n)=b.*a^n, *n* $\in \mathrm{N}$. Por isso os problemas em que se aplicam funções exponenciais são essencialmente os mesmos em que se usam progressões geométricas (LIMA, 2001 apud SOUSA, 2016, p. 40).

Visando abordar a relação entre a Função Exponencial e a Progressão Geométrica, a motivação pela escolha deste tema está relacionada a pouca presença da relação entre os dois conteúdos no Ensino Médio. Isso se constata nos livros didáticos, que em grande parte não apresentam esta relação.

> Porém um dos vários problemas encontrados nos livros didáticos é que, na sua maioria, não é apresentada explicitamente a relação entre Função Exponencial e Progressão Geométrica, pelo contrário, os conceitos são apresentados de forma fragmentada, como se não possuíssem nenhuma relação. À [sic] ausência da relação entre Função Exponencial e Progressão Geométrica no Ensino Médio, é ratificado pelo Professor Elon Lima (LIMA, 2001), que ressalta que essa conexão não é feita, nem de forma superficial (SOUSA, 2016, p. 16).

O Currículo Mínimo do Estado do Rio de Janeiro (RIO DE JANEIRO, 2012) também não apresenta a relação entre Função Exponencial e Progressão Geométrica. O conteúdo de Função Exponencial é apresentado no 1.º ano do Ensino Médio e o conteúdo de Progressão Geométrica é um assunto abordado no 2.º ano do Ensino Médio.

Considerando as afirmações anteriormente citadas, inclusive das OCEM, evidencia-se a necessidade de relacionar o ensino de Função Exponencial com Progressão Geométrica (P.G.), não deixando de apresentar as definições de cada conteúdo separadamente, porém estabelecendo a relação que existe entre esses dois temas, utilizando um contexto de resolução de problemas com auxílio de tecnologia para representação dos gráficos e do uso de materiais didáticos manipuláveis para induzir as relações.

1.2.3) Objetivo Geral

Relacionar a Função Exponencial com Progressão Geométrica no contexto da resolução de problemas.

1.2.4) Público Alvo

Alunos da 2ª. série do Ensino Médio.

2) Relatório do LEAMAT II

2.1) Atividades desenvolvidas

No dia 03 de outubro de 2018, primeira aula do LEAMAT II, foi exposto que a partir desse momento as aulas seriam destinadas à elaboração da sequência didática. As professoras evidenciaram que os grupos deveriam pautar suas sequências e apresentações no que se pretende alcançar, considerando o público-alvo, a instituição pretendida e as possíveis adversidades que possam surgir no decorrer da aplicação. Nesse sentido, as aulas que antecederam as aplicações foram reservadas para fazer alterações nas sequências, de acordo com as orientações dadas.

Do dia 26 de novembro de 2018 ao dia 13 de fevereiro de 2019, ocorreram todas as aplicações das sequências dos grupos do LEAMAT II. Posteriormente às apresentações, as professoras, bem como os alunos, faziam as devidas considerações a fim de contribuir na melhoria das sequências.

A partir do dia 14 de fevereiro de 2019, as aulas foram utilizadas para a conclusão dos relatórios, com a supervisão das professoras.

2.2) Elaboração da sequência didática

2.2.1) Planejamento da sequência didática

Pretende-se introduzir os temas "Progressão Geométrica" e "Função Exponencial" utilizando problemas geradores. A seguir será detalhada a sequência didática elaborada.

A aula será iniciada com a lenda da origem do jogo de xadrez[1], que conta que o rei hindu Sheram tomou conhecimento do jogo e ficou maravilhado com sua engenhosidade. Por isso, quis recompensar generosamente o sábio Seta por ser o criador. O sábio, então, pediu como recompensa um grão de trigo para a primeira casa do tabuleiro de xadrez, pela segunda casa, dois grãos de trigo, pela terceira, quatro grãos de trigo, pela quarta, oito grãos de trigo e assim sucessivamente. O rei, compreendendo então o desejo do sábio, disse-lhe que os seus servos entregariam a quantidade total de grãos de trigo correspondente às sessenta e quatro casas do tabuleiro. Passado algum tempo, o rei perguntou aos seus servos se Seta já havia recebido sua recompensa, mas estes o responderam que os melhores matemáticos da corte ainda estavam calculando a quantidade a ser entregue. No dia seguinte, o maior matemático da corte solicitou uma reunião com o rei e disse-lhe que o total de grãos pedidos representava um valor descomunal, a ponto de que nem todos os celeiros de todo o mundo seriam suficientes para recompensá-lo.

A partir dessa lenda, os alunos receberão uma apostila contendo duas questões com alguns itens. A primeira questão está relacionada com o número de grãos de trigo e a posição da casa do tabuleiro da lenda contada. No item "a" os alunos serão questionados a fim de tentarem relacionar as informações da história

---

[1] Essa lenda foi adaptada. E está disponível em: <http://www.professoramanuka.com.br/2016/11/lenda-da-origem-do-xadrez-e-dos-graos-de-trigo.html>

com um determinado conteúdo matemático. Identificando que as informações dadas na história representam uma Progressão Geométrica, será solicitada a lei de formação da progressão no item "b" e, neste momento, a definição e a fórmula do termo geral serão revisadas. Caso os alunos não consigam identificá-lo, o grupo construirá com eles, a relação com o conceito de Progressão Geométrica. Em seguida, no item "c" os alunos serão questionados sobre a quantidade de grãos de trigo que deveria ser entregue a Seta e que cálculo deveria ser feito para encontrar o resultado. Para responder essa questão, a fórmula da soma de termos de uma P.G. finita será deduzida por um dos licenciandos. Posteriormente, no item "d" os alunos deverão construir o gráfico que representa a lei da função que relaciona o número de casas com o total de grãos de trigo no material "prancha de gráficos" e que o registrem na malha quadriculada. Dando seguimento à sequência, o conteúdo de Função Exponencial será iniciado pela segunda questão da apostila, que está apresentada abaixo (Figura 1).

Figura 1 – Questão Proposta 2

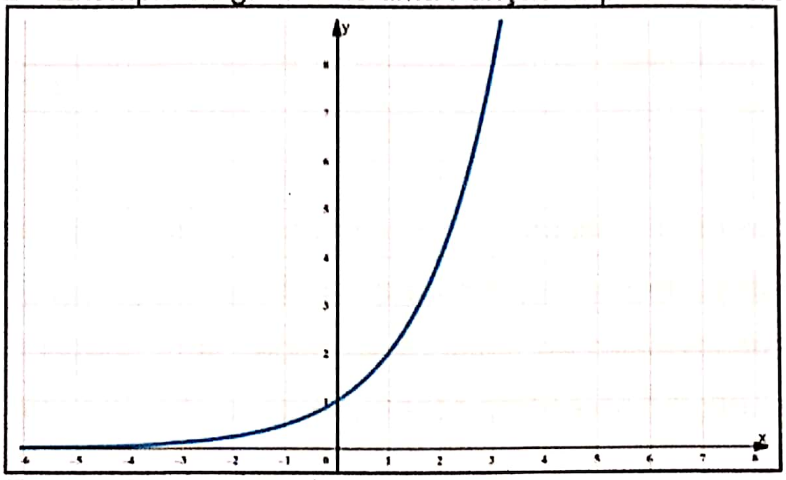
2 - Uma população de bactérias cresce de acordo com a função $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^{*}$ definida por $f(x) = 2^x$, em milhões, a cada hora. Considerando essas informações:

Fonte: Elaboração própria.

Nesse momento, será pedido que a turma identifique qual é o tipo de função abordada no enunciado. A partir disso, a Função Exponencial será definida pelo grupo e os alunos poderão resolver os itens propostos da segunda questão. No item "a" é requerida a quantidade de bactérias após cinco horas. Já no item "b", é perguntada em quantas horas a população de bactérias será de cento e vinte e oito milhões. Por fim, no item "c" os alunos deverão traçar o gráfico no material "prancha de gráficos" e registrá-lo na malha quadriculada.

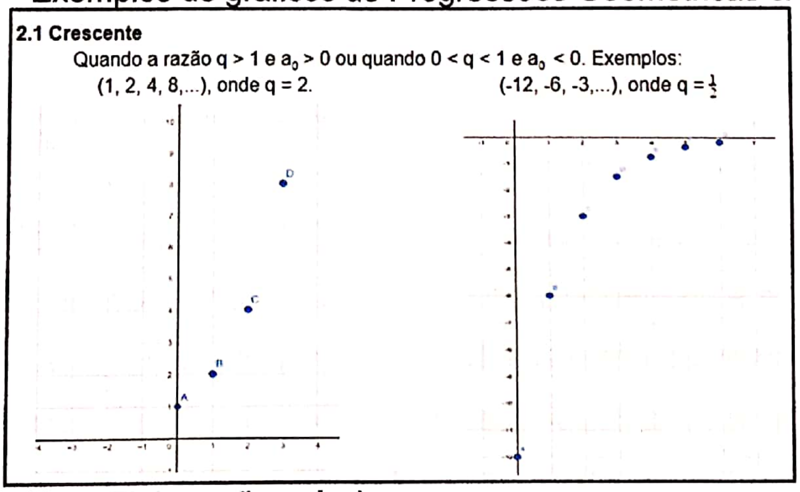
Logo após, a turma deverá analisar os dois gráficos feitos e dizer se observaram alguma relação. Posteriormente, os alunos receberão a segunda apostila que contém as definições, a prova da relação e a comparação do gráfico da Função Exponencial com o da Progressão Geométrica. Em seguida, um dos licenciandos demonstrará a relação algébrica no quadro e outro licenciando fará um estudo gráfico dos dois assuntos (Figura 2 e Figura 3), a fim de relacioná-los identificando juntamente com os alunos que o gráfico da Progressão Geométrica é discreto, ou seja, só apresenta pontos; e o gráfico da Função Exponencial é representado por uma curva contínua.

Figura 2 – Exemplo de gráfico de uma Função Exponencial crescente



Fonte: Elaboração própria.

Figura 3 – Exemplos de gráficos de Progressões Geométricas crescentes



Fonte: Elaboração própria.

Para finalizar a aula, será entregue uma lista com três exercícios que serão resolvidos com auxílio de *software* de geometria dinâmica, *Geogebra*. Nestes exercícios, os dois conteúdos serão trabalhados de forma articulada, visando possibilitar que o aluno consiga resolver as questões percebendo a relação existente, visualizando os pontos comuns e a diferença na construção dos gráficos.

O primeiro exercício, exibido na Figura 4, possui quatro itens. O item "a" pede a lei da função. O item "b" pede os cinco primeiros termos da sequência que representa a massa do elemento. No item "c", é pedida a massa do elemento após quinze minutos. E, no item "d", pede-se a representação gráfica.

Figura 4 – Exercício 1

1. No estudo de radioatividade, o deslocamento radioativo de um elemento segue uma expressão exponencial. Nesse sentido, denomina-se meia-vida ou período de semidesintegração o tempo necessário para que certa massa se reduza à metade. Considere uma substância que tenha uma massa inicial de 100g e meia-vida de 5 minutos, determine:

Fonte: Elaboração própria.

A segunda questão (Figura 5) apresenta três tópicos. O tópico "a" pergunta após quanto tempo a população será de cinquenta e um mil e duzentas bactérias. O tópico "b" pede a quantidade total bactérias do início da observação até passados doze minutos. E, o tópico "c" pede a representação gráfica da função.

Figura 5 – Exercício 2

2. Uma população de bactérias começa com 100 e dobra a cada três minutos. Assim, o número n de bactérias após t minutos é dado pela função n(t) = 100.2^t/3. Nessas condições:

Fonte: Elaboração própria.

O exercício três (Figura 6) contém quatro letras. A letra "a" pergunta se a questão pode ser considerada como uma Progressão Geométrica e se sim, por que. A letra "b" questiona quantas árvores serão plantadas no mês de dezembro de 2001. Na letra "c", pergunta em qual mês o plantio será igual a vinte e quatro mil e trezentas árvores. E, a letra "d" pede o total de árvores plantadas nos cinco primeiros meses do plantio.

Figura 6 – Exercício 3

3. (PUCCAMP – 2003) Adaptado. Curiosamente, observou-se que o número de árvores plantadas em certo município podia ser estimado pela lei N = 100.3^t , em que t corresponde ao respectivo mês de plantio das N árvores. Para t = 0 obtém-se o número de árvores plantadas em maio de 2001.

Fonte: Elaboração própria.

2.2.2) Aplicação da sequência didática na turma do LEAMAT II

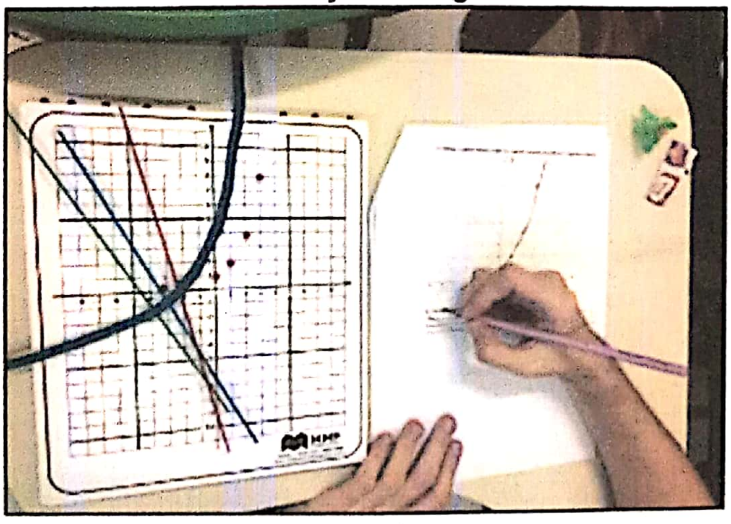
Com o objetivo de verificar todas as atividades e materiais que compõem a sequência elaborada, o tempo necessário para aplicação e de sujeitá-la à avaliação dos alunos e das professoras da disciplina LEAMAT, a sequência foi aplicada na turma do LEAMAT II no dia 06 de fevereiro de 2019.

Visto que os conteúdos foram ministrados em disciplinas que compõem a grade curricular do curso e pelo fato dos alunos já apresentarem certa aptidão com os assuntos, eles não tiveram maiores dificuldades durante a compreensão das definições e da execução das atividades propostas.

Como planejado, a aula foi iniciada com a lenda da origem do jogo de xadrez. Após a leitura da história, a turma foi dividida em duplas, a primeira apostila e as “pranchas de gráfico” (Figura 7) foram entregues.

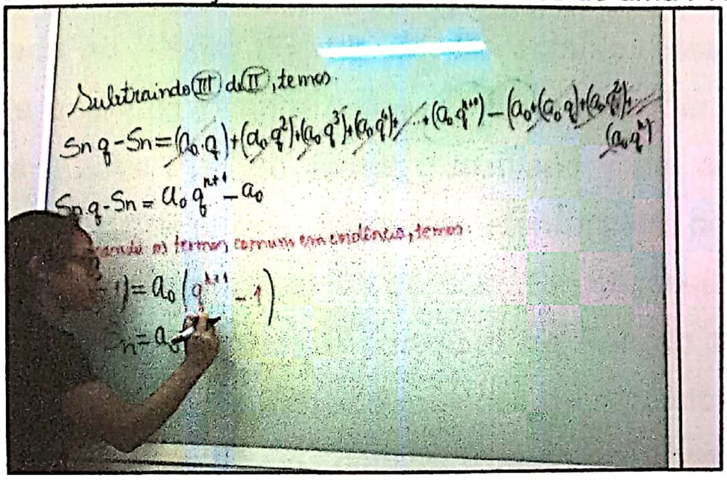
A definição de P.G. foi explicada, os tópicos propostos da primeira questão da apostila foram resolvidos juntamente com os licenciandos, as fórmulas do termo geral e da soma de uma P.G. finita foram deduzidas, como mostra a Figura 8.

Figura 7 – Licenciando esboçando o gráfico com o auxílio da prancha



Fonte: Protocolo de pesquisa.

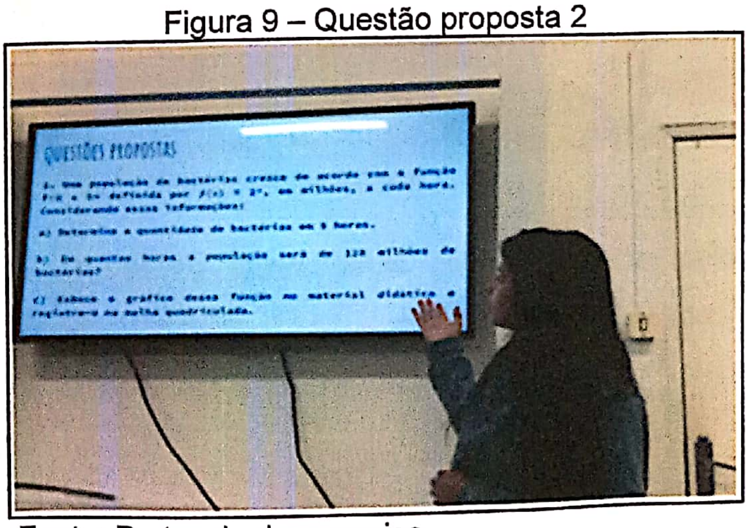
Figura 8 – Demonstração da Soma dos Termos de uma P.G. finita



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Logo após, a definição de Função Exponencial foi explicada e os itens propostos da questão dois da apostila (Figura 9) foram resolvidos. A respeito dessa parte da aula, as professoras atentaram o grupo para evitar o uso de pronomes possessivos ao se referir às incógnitas presentes na demonstração e sugeriram disponibilizar um material para a marcação no tabuleiro dos valores encontrados relativos a cada casa. Também foi solicitado que ao citar que dois termos distintos pertencem ao grupo dos números reais se escreva "a $\in \mathbb{R}$ e b $\in \mathbb{R}$" ao invés de escrever "a, b $\in \mathbb{R}$".

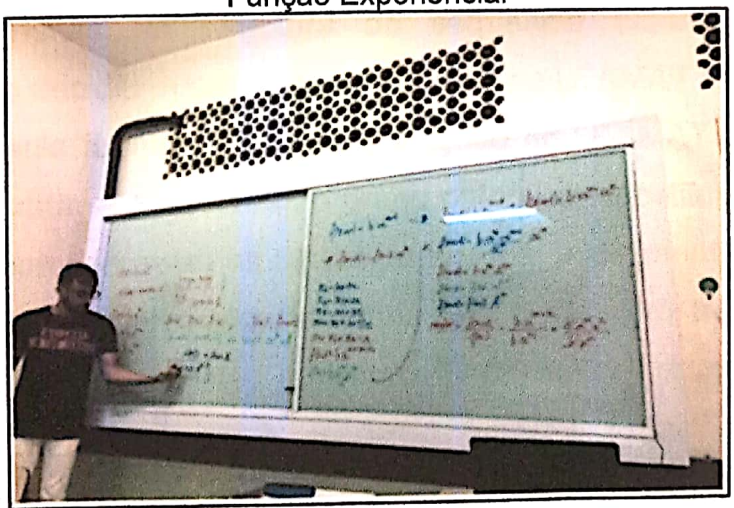
Figura 9 – Questão proposta 2



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Dando prosseguimento à aula, a segunda apostila foi entregue e a relação algébrica foi demonstrada no quadro (Figura 10). No entanto, essa demonstração durou aproximadamente quarenta minutos e o grupo pôde perceber, portanto, certo desinteresse da turma. Como há um tempo reservado para as sugestões e considerações das professoras e alunos, a aula foi interrompida, pois a sequência elaborada extrapolou o limite de dois tempos de aula. Em consequência disso, as professoras sugeriram que retirássemos o conteúdo de Função Exponencial da sequência didática, fundamentando o trabalho apenas no conteúdo de Progressão Geométrica, pois desse modo, não haveria necessidade de se demonstrar a relação algébrica entre os dois conteúdos, o que reduziria o tempo de aula. As professoras expuseram também a importância de se aperfeiçoar a utilização das canetas, de forma a facilitar a visualização de equações equivalentes e da simplificação de termos semelhantes, viabilizando uma melhor compreensão para os alunos.

Figura 10 – Demonstração da relação entre Progressão Geométrica e Função Exponencial



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Após as considerações feitas pelas orientadoras e pelos licenciandos do LEAMAT II, o grupo pretende reestruturar a sequência didática, de modo que seja possível trabalhar os dois temas de forma mais objetiva.

3) Relatório do LEAMAT III

3.1) Atividades desenvolvidas

As aulas do LEAMAT III se iniciaram no dia 29 de abril de 2019. As professoras orientadoras expuseram as atividades que seriam desenvolvidas durante o semestre, dividindo-o em três momentos destinados, respectivamente, às alterações na sequência didática e no material, às aplicações das sequências de todas as linhas de pesquisa em turmas regulares e às apresentações das atividades desenvolvidas durante o LEAMAT para os colegas de sala e professoras. A avaliação final da disciplina ocorreu no dia 03 de setembro de 2019.

3.2) Elaboração da sequência didática

3.2.1) Versão final da sequência didática

Diante das sugestões dadas na aplicação na turma do LEAMAT II, muitas alterações foram feitas na estrutura da sequência didática. Após algumas discussões, o grupo decidiu manter o tema definido no LEAMAT I.

O início da aula foi mantido como planejado no LEAMAT II, com a lenda da origem do jogo de xadrez. Entretanto, o grupo optou por substituir os slides escritos por imagens que representavam as partes da história. Inicialmente, o termo geral da P.G. era deduzido pelo grupo considerando que o primeiro termo da sequência ocupava a posição zero, sendo: $a_n = a_0 . q^n$. Porém, o grupo e a professora orientadora optaram por utilizar o a_1 como primeiro termo, sendo então:$a_n = a_1 . q^{n-1}$, principalmente porque os alunos do Ensino Médio estão mais familiarizados com essa relação.

Com relação à apostila inicial, a primeira modificação se deu pelo acréscimo de um pequeno resumo da lenda. Além disso, as perguntas relacionadas (itens a, b, c, d, e) foram chamadas de "Situação 1" (Figura 11).

Figura 11 – Situação 1: Resumo da lenda

Situação 1: Na Índia, um rei quis presentear o inventor do jogo do xadrez. Como recompensa pela sua genialidade, o sábio inventor pediu "[...] desejo que me entreguem um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro de xadrez que eu inventei. [...] E pela segunda casa, peço que me entregue dois grãos de trigo, pela terceira casa, quatro grãos, pela quarta casa, oito, pela quinta, dezesseis, pela sexta, trinta e dois..." Então os matemáticos da corte comunicaram ao rei que a quantia era exageradamente grande, logo, não haveria como presentear ao sábio com tantos grãos de trigo. Considerando as informações mencionadas na lenda contada, responda:

Fonte: Elaboração própria.

Os itens "a", "b" e "c" foram mantidos como anteriormente. Já o item "d" da Situação 1 sofreu alteração. Como o grupo optou por não utilizar mais as pranchas de gráficos, a pergunta foi alterada para que ficasse coerente com a nova proposta (Figura 12). Além disso, o item também passou a solicitar o conjunto domínio.

Figura 12 – Modificações no item "d"

d) Construa o gráfico da função representada pela lei encontrada no item "b" no material "prancha de gráficos" e registre-o na malha quadriculada abaixo:
d) Construa o gráfico da função representada pela lei encontrada no item "b", determinando o conjunto domínio.

Fonte: Elaboração própria.

Também foi acrescentado um item "e" à Situação 1. Este item questiona quantos grãos de trigo deveriam ser colocados na última casa do tabuleiro, ou seja, na casa 64 (Figura 13).

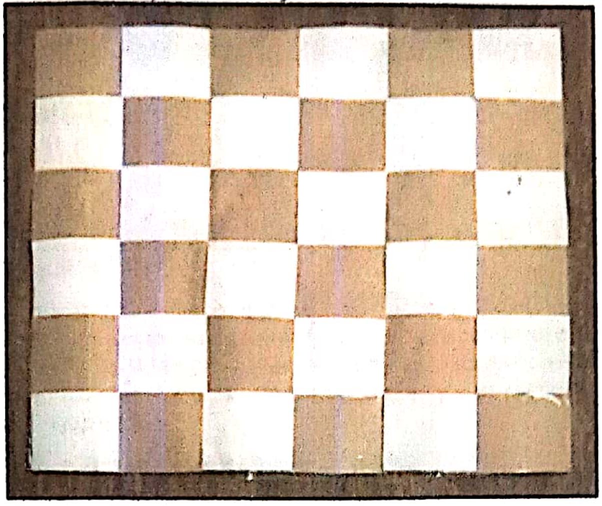
Figura 13 – Item "e"

e) Escreva, na forma de potência, quantos grãos de trigo devem ser colocados na última casa do tabuleiro de xadrez.

Fonte: Elaboração própria.

Outra sugestão relacionada a essa parte da aula, foi a de utilizar um material para quantificar os grãos de trigo por cada casa do tabuleiro de xadrez. Nessa perspectiva, o grupo representou o tabuleiro com papel cartão, no qual as casas foram construídas dispondo quadrados de papel igualmente espaçados (Figura 14).

Figura 14 – Representação do tabuleiro de xadrez.



Fonte: Elaboração própria.

A segunda questão proposta na Atividade 1, que envolve o conteúdo de Função Exponencial passou a ser chamada de Situação 2. A mesma alteração feita no item "d" da "Situação 1" foi feita no item "c", com relação ao esboço do gráfico.

Também houve modificações na apostila de definições que é utilizada na segunda etapa da aula. Na apostila utilizada na aplicação na turma do LEAMAT II, o termo geral da Progressão Geométrica era dado de duas formas distintas, como expresso na Figura 15. O primeiro era dado em função do a_1, ou seja, o a_1 era considerado o primeiro termo da sequência e o segundo era dado em função do a_0, ou seja, o a_0 era considerado o primeiro termo da sequência.

Figura 15 – Termo geral da P.G

Progressão Geométrica (P.G.)

Progressão geométrica é toda sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante q. Essa constante q é chamada de razão da progressão geométrica. Também podemos afirmar que a P.G. é uma sequência de números obtidos através da multiplicação entre o termo anterior e a razão q.[1]

Sendo assim, a fórmula do termo geral da P.G. é:

- $a_n = a_1 . q^{n-1}$

- Se considerarmos que o primeiro termo ocupa a posição zero, ou seja, $n = 0$, temos que:

- $a_n = a_0 . q^n$

em que:

a_n - termo geral;

n - posição do termo na sequência;

a_1/a_0- termo inicial;

q- razão.

Fonte: Elaboração Própria.

Como já dito anteriormente, o grupo optou por utilizar na sequência apenas o termo geral em função do a_1, por isso a apostila foi modificada para que ficasse de acordo, como exibido na Figura 16.

Figura 16 – Modificação de termo geral da P.G

I - Progressão Geométrica (P.G.)

Progressão geométrica é toda sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante q. Essa constante q é chamada de razão da progressão geométrica. Também podemos afirmar que a P.G. é uma sequência de números obtidos através da multiplicação entre o termo anterior e a razão q.[1]

Sendo assim, a fórmula do termo geral da P.G. é:

- $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

em que:

a_n - termo geral;

n - posição do termo na sequência;

a_1 - termo inicial;

q - razão.

Fonte: Elaboração própria.

De forma análoga à alteração feita no termo geral, houve modificação na fórmula da soma dos termos de uma P.G. finita. Na primeira versão da apostila, duas fórmulas eram apresentadas, uma em função do a_0 e a outra em função do a_1 (Figura 17).

Figura 17 – Soma dos termos de uma P.G. finita

Soma dos termos de uma P.G. finita

A soma de uma P.G. finita pode ser definida como a soma de todos os termos da sequência, em que: $Sn = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + ... + a_n$

Sendo assim, a soma Sn de uma P.G. finita pode ser dada por:

- $Sn = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}$

Se considerarmos que o primeiro termo ocupa a posição zero, ou seja, que $n = 0$, temos que:

- $Sn = \frac{a_0 \cdot (q^{n+1} - 1)}{q-1}$

Fonte: Elaboração própria.

Na última versão (Figura 17), o grupo decidiu deixar apenas a fórmula em função do a_1 para que ficasse de acordo com o termo geral utilizado.

A definição de Função Exponencial utilizada, também passou por alteração. Anteriormente, não havia restrição para o número representado pela letra b (Figura 18).

Figura 18 – Definição de Função Exponencial

Função Exponencial

Dado um número real a , tal que $0 < a \neq 1$, chamamos **função exponencial** de base a a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ que associa a cada x real o número $b \cdot a^x$ ($x \to b.a^x$). **Logo,** $f(x) = b \cdot a^x$.

Fonte: Elaboração própria.

E, na versão final da apostila foi acrescentado que $b \neq 0$ (Figura 19). Caso b fosse igual a zero, não haveria uma Função Exponencial.

Figura 19 – Alteração da definição de Função Exponencial

II - Função Exponencial

Dado um número real a e b, tal que $0 < a \neq 1$ e $b \neq 0$, chamamos **função exponencial** de base a a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ que associa a cada x real o número $b \cdot a^x$, ($x \to b.a^x$). Logo, $f(x) = b \cdot a^x$.

Fonte: Elaboração própria.

A alteração mais relevante da sequência didática foi a respeito da demonstração da relação dos dois conteúdos abordados (Figura 20). Ao fazer a modificação, o grupo visou torná-la mais acessível para o público-alvo escolhido, além de considerar certa redução de tempo, já que o tempo gasto com a primeira versão na turma do LEAMAT foi muito além do programado. A versão final desta demonstração reduziu alguns passos algébricos, em que o termo geral da Progressão Aritmética (P.A.), ao ser substituído pelo expoente xn de a na Função Exponencial, foi manipulado de forma diferente, possibilitando a retirada de 5 passos da demonstração.

Figura 20 – Alteração da demonstração da relação

Demonstração da relação entre Função Exponencial e Progressão Geométrica

Em uma função exponencial $f(x) = b.a^x$, os valores atribuídos a x, representados no eixo x variam de acordo com uma P.A. Observe:

Valores para x: $(0, 1, 2, 3, 4, ..., n, n+1)$

Nesse caso, estes valores formam uma P.A. de razão $r = 1$ em que $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_n = n - 1$, $x_{n+1} = n$. Para se obter o valor de $f(x_n)$ basta elevar a base a a x_n. Em outras palavras, $f(x_n) = b.a^{x_n}$. Para se obter o valor seguinte a $f(x_n)$, ou seja, $f(x_{n+1})$, basta elevar a base a a x_{n+1}. Note que x_{n+1} pode ser escrito como seu termo antecessor x_n somado à razão r.

$f(x_{n+1}) = b.a^{x_{n+1}} \Rightarrow f(x_{n+1}) = b.a^{x_n+r}$

Os valores $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, ..., $f(x_n)$, $f(x_{n+1})$ formam uma P.G. de razão $A = a^r$

Observe:

$f(x_{n+1}) = b.a^{x_n+r} \Rightarrow f(x_{n+1}) = b.a^{x_n}.a^r \Rightarrow f(x_{n+1}) = f(x_n).a^r \Rightarrow f(x_{n+1}) = f(x_n).A$

Perceba que o $f(x_{n+1})$ é resultado do $f(x_n)$, seu termo antecessor, multiplicado por a^r. Também podemos escrever o $f(x_{n+1})$ como $f(x_1).A^n$

- $x_n = x_1 + (n-1)r \Rightarrow x_n = x_1 + rn - r$

$f(x_n) = b.a^{x_n} \Rightarrow f(x_n) = b.a^{x_1+rn-r} \Rightarrow f(x_n) = \frac{b.a^{x_1}.a^{rn}}{a^r} \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x_{n+1}) = f(x_n).a^r \Rightarrow f(x_{n+1}) = \frac{b.a^{x_1}.a^{rn}}{a^r}.a^r \Rightarrow f(x_{n+1}) = b.a^{x_1}.a^{rn} \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x_{n+1}) = f(x_1).a^{rn} \Rightarrow f(x_{n+1}) = f(x_1).A^n$

Demonstração da Relação entre Função Exponencial e P.G.

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = b.a^x$ com $b \neq 0$ e $1 \neq a > 0$. Tome uma sequência $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ em P.A. Queremos mostrar que $f(x_n)$ pode ser escrita como $f(x_1).q^{n-1}$, ou seja, $f(x_n) = f(x_1).q^{n-1}$.

De fato:

Usando o termo geral de P.A., temos que $x_n = x_1 + (n-1)r$. Daí

$f(x_n) = b.a^{x_n} \Rightarrow f(x_n) = b.a^{x_1+(n-1)r} \Rightarrow f(x_n) = b.a^{x_1}.a^{(n-1)r} \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x_n) = f(x_1).(a^r)^{n-1}$

Fazendo $a^r = q$, pois a e r são constantes, temos:

$f(x_n) = f(x_1).(a^r)^{n-1} \Rightarrow f(x_n) = f(x_1).q^{n-1}$, C.Q.D.

Dessa forma, podemos concluir que os valores y de uma função exponencial formarão uma P.G. de razão $a^r = q$.

Fonte: Elaboração própria.

Visando ainda melhorar a sequência didática, o grupo decidiu alterar todas as questões da lista de exercícios. A primeira questão relaciona P.G. com a quantidade de pessoas por gerações passadas (Figura 21).

Figura 21 – Questão 1 (Atividade 2)

1. Todo mundo, geralmente, tem dois pais, quatro avós, oito bisavós, dezesseis trisavós, etc. a cada geração, que retrocedemos, temos o dobro de antepassados. Assim, cada um de nós que está vivo hoje, teve desde o ano 400, uns 18,5 quintilhões de ancestrais.
Refletindo sobre o que foi enunciado, responda as questões abaixo:

Fonte: Elaboração própria.

No item "a" é solicitado completar uma tabela com a quantidade de pessoas por cada geração (Figura 22).

Figura 22 – Item "a"

a) Complete a tabela abaixo de acordo com a sua árvore genealógica.
Obs: Considere a sua geração como a geração 0

Geração	Quantidade de pessoas
1.ª	
2.ª	
3.ª	
4.ª	

Fonte: Elaboração própria.

O item "b" pede que se ordenem os valores encontrados no item "a" sequencialmente (Figura 23).

Figura 23 – Item "b"

b) Ordene os valores encontrados no quadro acima na forma de sequência.

(_____,_____,_____,_____,_____)

Fonte: Elaboração própria.

No item "c" é perguntada a geração correspondente a 128 ancestrais (Figura 24).

Figura 24 – Item "c"

c) O número de ancestrais de uma família corresponde a 128. Qual seria a geração dessa família? ____

Fonte: Elaboração própria.

No item "d" é requisitada uma lei de função que expresse a situação exposta na questão (Figura 25).

Figura 25 – Item "d"

d) Para cada geração x que se escolha, há um número f(x) de ascendentes. Sabendo disso, encontre uma lei que expressa f(x) em função de x, ou seja, encontre uma função que indique essa situação. ____

Fonte: Elaboração própria.

A segunda questão relaciona P.G. com a quantidade de bactérias transmitidas por apertos de mão (Figura 26).

Figura 26 – Questão 2 (Atividade 2)

2. Uma das práticas mais comuns da relação humana – o aperto de mão – pode ser, paradoxalmente, um dos maiores meios de transmissão de bactérias. O número de bactérias (N) por número de apertos de mão (x) é determinado pela expressão $N(x) = 5.2^x$.

Fonte: Elaboração própria.

O item “a” pergunta a quantidade de bactérias transmitidas em três apertos de mão (Figura 27).

Figura 27 – Item “a”

a) Se você der 3 apertos de mão, quantas bactérias serão transmitidas? ____________________

Fonte: Elaboração própria.

O item “b” pergunta a quantidade necessária de apertos de mão para que o número de bactérias seja 20480 (Figura 28).

Figura 28 – Item “b”

b) Para que o número de bactérias seja 20480, quantos apertos de mão você terá que dar? ____________________

Fonte: Elaboração própria.

A terceira questão trata do crescimento da folha circular de uma planta aquática, que é dado de acordo com uma Função Exponencial (Figura 29).

Figura 29 – Questão 3 (Atividade 2)

3. Um biólogo acompanhou o crescimento da folha circular de uma planta aquática. Durante suas observações percebeu que a cada mês o diâmetro da folha triplicava. No início de suas observações o biólogo mediu a folha e obteve 1cm de diâmetro. O gráfico abaixo representa a situação descrita. Sabendo que x é o tempo em meses e y o diâmetro em cm, responda as questões a seguir.

Fonte: Elaboração própria.

O item “a” pede para sequenciar os valores dos diâmetros encontrados por cada mês (Figura 30).

Figura 30 – Item “a”

a) Coloque os valores dos diâmetros (y) encontrados no gráfico ao lado em forma de sequência.

(_____,_____,_____,_____,_____)

Fonte: Elaboração própria.

O item "b" pergunta qual função é representada pelo gráfico da situação (Figura 31).

Figura 31 – Item "b"

b) O gráfico ao lado representa que tipo de função?

____

Fonte: Elaboração própria.

O item "c" solicita a lei da função representada pelo gráfico do item "b" (Figura 32).

Figura 32 – Item "c"

c) Qual a lei da função representada no gráfico?

____

Fonte: Elaboração própria.

O item "d" pede o termo geral da sequência expressa no item "a" (Figura 33).

Figura 33 – Item "d"

d) Qual o termo geral da sequência da letra (a)? (Termo geral é quando o tempo for n).

____

Fonte: Elaboração própria.

O item "g" pergunta o que se pode concluir ao observar os itens "a" e "b" (Figura 34).

Figura 34 – Item "g"

g) Observando as letras (c) e (d), o que podemos concluir?

____

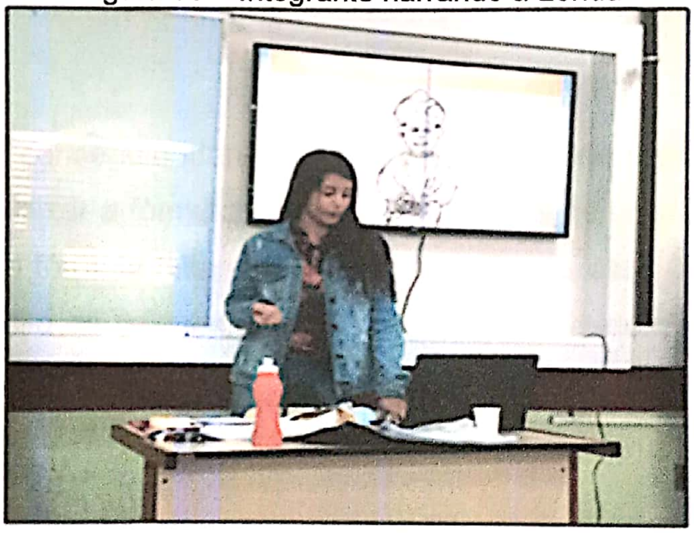
Fonte: Elaboração própria

3.2.2) Experimentação da sequência didática na turma regular

A aplicação da sequência didática aconteceu no dia 11 de julho de 2019, numa Instituição da rede federal de ensino de Campos dos Goytacazes-RJ, no horário de 8h50min às 11h30min, numa turma da 3ª. série do Ensino Médio. Havia 19 alunos presentes, além da orientadora e do professor responsável pela classe.

Como planejado, a aula teve início com a "Lenda do Jogo de Xadrez", narrada por uma integrante do grupo que utilizou slides para mostrar figuras referentes às etapas da estória (Figura 35).

Figura 35 – Integrante narrando a Lenda

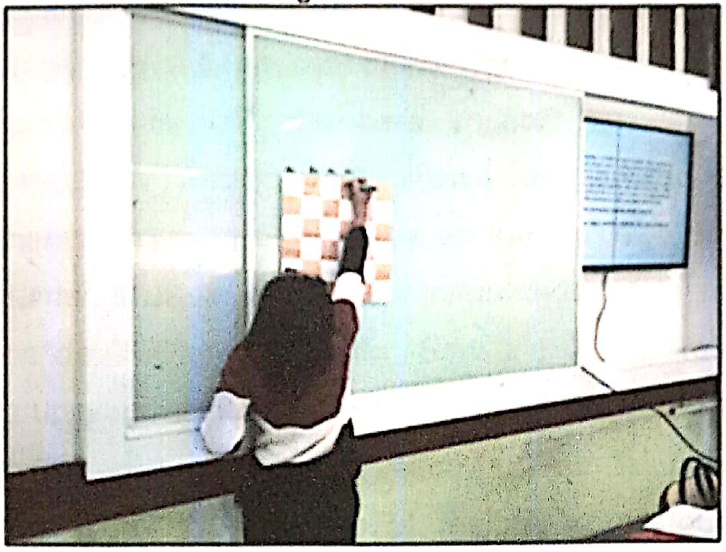


Fonte: Protocolo de pesquisa.

Em seguida, foi entregue uma atividade com duas questões. A primeira questão se relacionava à lenda do jogo de xadrez. Os alunos não tiveram dificuldades para identificar que o conteúdo era o de Progressão Geométrica (item "a").

Para responder o item "b", alguns alunos tiveram dificuldades para obter o termo geral da P.G. em questão. Durante a correção desse primeiro exercício, uma integrante do grupo relembrou e deduziu no quadro a fórmula do termo geral da P.G. (Figura 36). Os alunos compreenderam a explicação e conseguiram concluir o item "b".

Figura 36 – Integrante deduzindo a fórmula do termo geral de uma P.G.



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Nenhum aluno conseguiu identificar de que forma seria resolvido o item "c", pois era necessário utilizar a fórmula da soma dos termos de uma P.G. finita. Com a demonstração desta fórmula feita por uma licencianda, os alunos substituíram os valores e, com o auxílio de calculadoras, obtiveram o resultado. Porém, a maioria constatou um erro na tela da calculadora. Isso ocorreu porque a representação numérica da quantidade total de grãos de trigo era excessivamente extensa (Figura 37).

Figura 37 – Integrante deduzindo a fórmula da soma de termos da P.G. finita

Fonte: Protocolo de pesquisa.

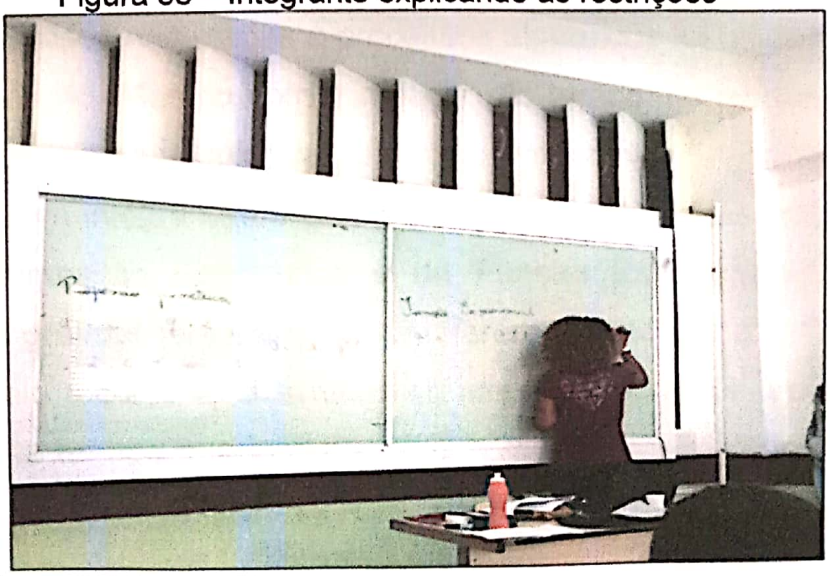
No item "d", todos os alunos esboçaram o gráfico da função corretamente, havendo apenas um aluno que não o construiu, deixando o item em branco.

No item "e", foi solicitado que os alunos escrevessem a quantidade de grãos de trigo referentes à última casa em forma de potência. Com as explicações feitas anteriormente, os alunos responderam sem dificuldades.

A segunda questão foi utilizada para verificar se os alunos de fato compreenderam as explicações sobre P.G.. Nesse momento, o grupo percebeu que todos acompanharam muito bem, visto que os itens "a" e "b" foram analisados e respondidos corretamente. Já no item "c", foi perguntado o que se observa ao se comparar os gráficos da "Situação 1" e da "Situação 2". As respostas obtidas surpreenderam o grupo, pois nenhum aluno observou que os gráficos são semelhantes. Alguns disseram que o gráfico apresenta características de parábolas, por seu esboço ser curvilíneo. A maioria constatou que o gráfico representa uma Função Exponencial. Entretanto, as diferenças entre os gráficos de P.G. e de Função Exponencial foram expostas por um integrante do grupo em um momento posterior da aula.

Após a correção dos exercícios da "Atividade 1", uma integrante do grupo mostrou as restrições do termo geral de P.G. e da lei de formação de Função Exponencial (Figura 38), para que a demonstração da relação entre os dois conteúdos pudesse ser executada.

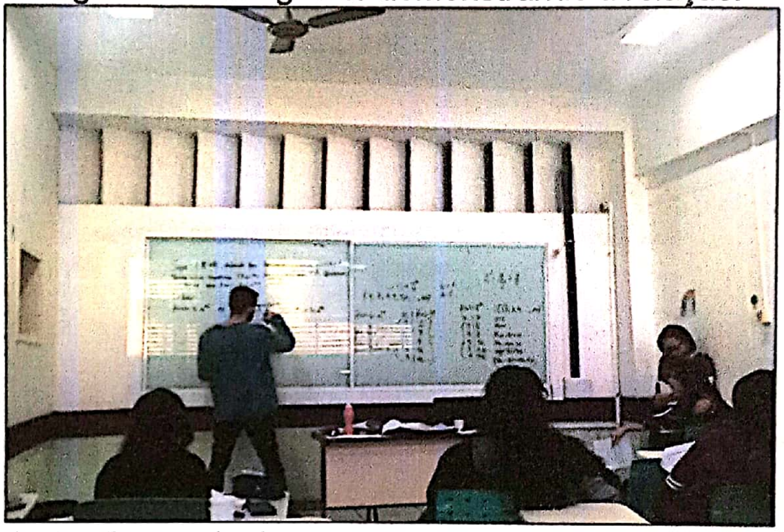
Figura 38 – Integrante explicando as restrições



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na demonstração da relação, o licenciando que a explicou partiu de um exemplo de Função Exponencial, atribuindo valores para x objetivando mostrar que os valores f(x) formariam uma Progressão Geométrica somente se os valores de x estivessem em Progressão Aritmética. Em seguida, este integrante do grupo apresentou a demonstração algébrica da relação, chegando a uma lei de formação de Função Exponencial com as mesmas características de termo geral de P.G. (Figura 39).

Figura 39 – Integrante demonstrando a relação.

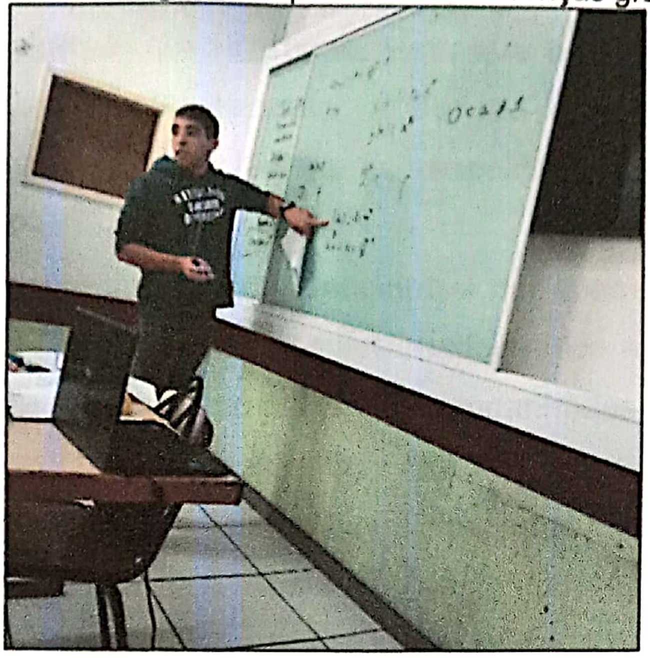


Fonte: Protocolo de pesquisa.

Esse momento da aula durou aproximadamente 20 minutos, levando o grupo a crer que a demonstração cumpriu com seu objetivo, pelos alunos não apresentarem dificuldades nas etapas e processos algébricos foi utilizado um menor tempo para a explicação. Mesmo com a redução do tempo, os alunos ressaltaram que, a partir desse momento, a aula ficou um pouco cansativa.

Em seguida, um integrante do grupo explicou as diferenças existentes entre os gráficos de Progressão Geométrica e de Função Exponencial (Figura 40), destacando que os gráficos têm semelhança. Porém, o gráfico da P.G. é discreto, por ter como domínio o conjunto dos números naturais não nulos, pois o eixo das abscissas representa termos que são dados por valores inteiros e positivos; o da função exponencial é contínuo, pois os valores para x pertencem ao conjunto dos números reais, ou seja, o domínio da função é real.

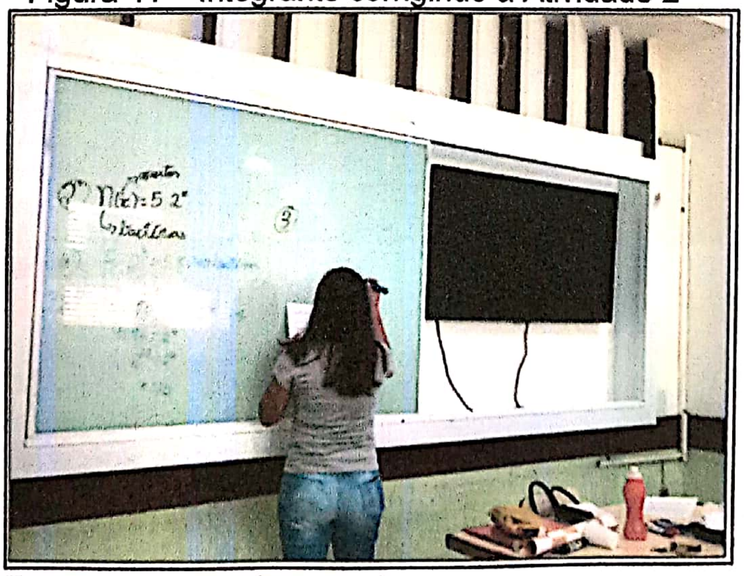
Figura 40 – Integrante explicando as diferenças gráficas



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Para concluir a aula, foi entregue a "Atividade 2", com três exercícios sobre P.G. e Função Exponencial. As questões foram corrigidas por uma integrante do grupo (Figura 41), e não se constatou nenhuma dificuldade dos alunos em compreender suas resoluções.

Figura 41 – Integrante corrigindo a Atividade 2



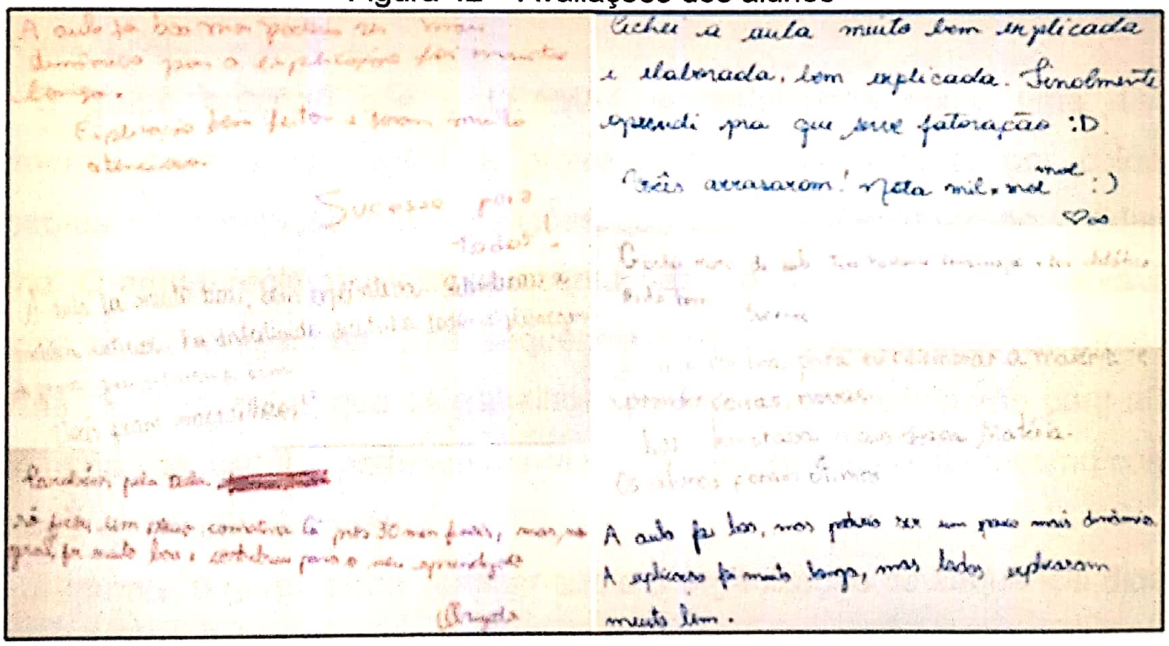
Fonte: Protocolo de pesquisa.

As respostas dadas pelos alunos no item "g" da terceira questão desta última atividade foram parcialmente consideradas, visto que quase todas foram escritas com as mesmas palavras: "Neste caso, a Função Exponencial é uma P.G.". Portanto, o grupo não pôde concluir se as respostas obtidas traduzem o real aprendizado da turma.

No entanto, a turma se mostrou participativa por quase toda a aplicação e a maioria dos exercícios propostos foram solucionados pelos alunos. As explicações dadas pelos integrantes do grupo foram bem acompanhadas pelos alunos, porém, como já destacado anteriormente, nos minutos finais a aula se mostrou cansativa.

Após a resolução da última lista de exercícios, os alunos receberam um papel para avaliar a aula anonimamente e fazer sugestões (Figura 42).

Figura 42 – Avaliações dos alunos



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Algumas considerações sobre a aula surpreenderam o grupo. Em uma das respostas, um aluno expôs que a aula lhe serviu para entender a aplicação de fatorações. Num geral, os alunos comentaram que a aula foi boa, mas que poderia ter sido mais dinâmica, ficando um pouco cansativa nos trinta minutos finais.

Considerações Finais

Diante dos comentários feitos pelos alunos da turma regular, o grupo considera que o trabalho atingiu parcialmente seu objetivo, pois o foco do trabalho, que é relacionar os conteúdos de Função Exponencial e Progressão Geométrica, não foi observado por toda turma. Uma considerável parte das respostas dadas pelos alunos nas questões propostas não atendeu às expectativas do grupo, por não estarem em consonância com tema abordado.

Entretanto, houve alunos que acompanharam muito bem a aula, fazendo perguntas e se interessando verdadeiramente pelas explicações.

Os integrantes do grupo concluem, portanto, que a aula poderia ter sido mais dinâmica, já que boa parte da turma questionou o tempo demandado para as explicações, principalmente das demonstrações. Desse modo, o grupo sugere procurar meios para tornar a aula mais cativante, por meio da utilização de materiais didáticos ou jogo.

O grupo entende que o LEAMAT se estabelece como uma disciplina fundamental para a formação de professores de matemática, por colocar os professores em formação nas condições que serão enfrentadas no cotidiano de trabalho. O amadurecimento nas apresentações e o aperfeiçoamento na escrita de relatórios e elaboração de uma sequência didática são notórios ao final desta disciplina. Vale ressaltar que os trabalhos desenvolvidos contribuirão para além da formação na licenciatura, podendo ser utilizados em eventos e até mesmo como um tema para conclusão de curso.

Ademais, o grupo pôde verificar como a organização da sequência didática e domínio do conteúdo que será abordado em aula são totalmente necessários para que se tenha segurança ao se explicar e, em consequência, bom rendimento e produtividade.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, Norma Suely Gomes; ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. **Pesquisa em Resoluções de Problemas**: caminhos, avanços e novas perspectivas. Rio Claro – SP, v.25, n41, p. 82, 2011. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/72994/2-s2.0-84873689803.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 31 jul. 2018.

ALMIRO, João Pedro. **Materiais manipuláveis e tecnologia na aula de matemática.** In GTI (Ed.), O professor e o desenvolvimento curricular. 48 p. Lisboa: APM. Disponível em: < http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/sd/textos/gti-joao-almiro.pdf> . Acesso em 27 fev. 2019.

ALVES, Carla; MORAIS, Carlos Mesquita. **Recursos de apoio ao processo de ensino e aprendizagem da matemática**. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 2006. p 335-349. Disponível em: <https://bibliotecadigital.ipb.pt/bitstream/10198/1087/1/CL03_2006Recursos_Ensino_Aprendizagem_Matematica.pdf>. Acesso em: 26 fev. 2019.

BAIER, Tania; POSSAMAI, Janaína Poffo. Primeiros Passos na Álgebra: Conceitos Elementares e Atividades Pedagógicas. **DYNAMIS:** Blumenau- SC, v. 19, n. 2, p. 72-86, 2013. Disponível em: <http://proxy.furb.br/ojs/index.php/dynamis/article/viewFile/4177/2627> . Acesso em: 27 jul. 2018.

BRASIL. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio:** Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica, v.2, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 24 jul. 2018.

COLAÇO, Susana et al. **A utilização do *GEOGEBRA* em contexto de sala de aula.** Disponível em: <http://www.apm.pt/files/_SP_Colaco_Branco_Brito_Rebelo_4a413f0bcd4ee.pdf>. Acesso em: 26 fev. 2019.

COSTA, Raimundo José Macário; SOARES, Adriana Benevides Soares; LIMA, Cabral. **Jogar e Aprender**: a Informática no Ensino de Álgebra Elementar. 2006. p. 81-90. Disponível em: <http://www.br-ie.org/pub/index.php/sbie/article/view/468/454>. Acesso em: 26 fev. 2019.

DOLCE, Oswaldo; IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar** - Vol. 2: Logaritmos. 10ª ed. - São Paulo: Atual, 2013.

RIO DE JANEIRO. **Currículo Mínimo de Matemática**. Governo do Estado do Rio de Janeiro, Secretaria de Estado de Educação. Rio de Janeiro -RJ. 2012. Disponível em: <http://www.rj.gov.br/web/seeduc/exibeconteudo?article-id=5776111>. Acesso em: 8 ago. 2018.

SARMENTO, Alan Kardec Carvalho. **A Utilização de Materiais Manipulativos nas aulas de Matemática.** Piauí: UFPI, 2010. 12p. Disponível em: <

http://leg.ufpi.br/subsiteFiles/ppged/arquivos/files/VI.encontro.2010/GT_02_18_2010.pdf >. Acesso em: 17 jul. 2018.

SOUSA, Isabela Ramos da Silva de. **Relação entre função exponencial e progressão geométrica**: Dissertação (Mestrado em Matemática) -- Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro: Campos dos Goytacazes-RJ. 2016. Disponível em: <http://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/24112016Isabela-Ramos-da-Silva-de-Sousa.pdf> Acesso em: 8 ago. 2018.

Campos dos Goytacazes (RJ), 06 de setembro de 2019.

Bruna Machado de Sá

Bruna Machado de Sá

Giullia Gomes Faes

Giullia Gomes Faes

Igor P. Menezes

Igor Pessanha Menezes

Igor Rodrigues Batista

Igor Rodrigues Batista

Lethícia Emily Cardoso Fernandes

Lethícia Emily Cardoso Fernandes

Letícia Cabral Drumond

Letícia Cabral Drumond

APÊNDICES

Apêndice A: Material didático aplicado na turma do LEAMAT II

INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Fluminense

MINISTÉRIO DA
EDUCAÇÃO

PÁTRIA AMADA
BRASIL
GOVERNO FEDERAL

Diretoria de Ensino Superior Licenciatura em Matemática Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática Linha de Pesquisa: Álgebra Licenciandos: Bruna Machado, Giullia Faes, Lethícia Fernandes, Letícia Drumond, Igor Menezes e Igor Rodrigues Orientadora: Profª. Me. Lívia Azelman

Nome: ______________________________________ Data: ____/____/_____

Atividade 1

Situação 1: Na Índia, um rei quis presentear o inventor do jogo do xadrez. Como recompensa pela sua genialidade, o sábio inventor pediu "[...] desejo que me entreguem um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro de xadrez que eu inventei. [...] E pela segunda casa, peço que me entregue dois grãos de trigo, pela terceira casa, quatro grãos, pela quarta casa, oito, pela quinta, dezesseis, pela sexta, trinta e dois..." Então os matemáticos da corte comunicaram ao rei que a quantia era exageradamente grande, logo, não haveria como presentear ao sábio com tantos grãos de trigo. Considerando as informações mencionadas na lenda contada, responda:

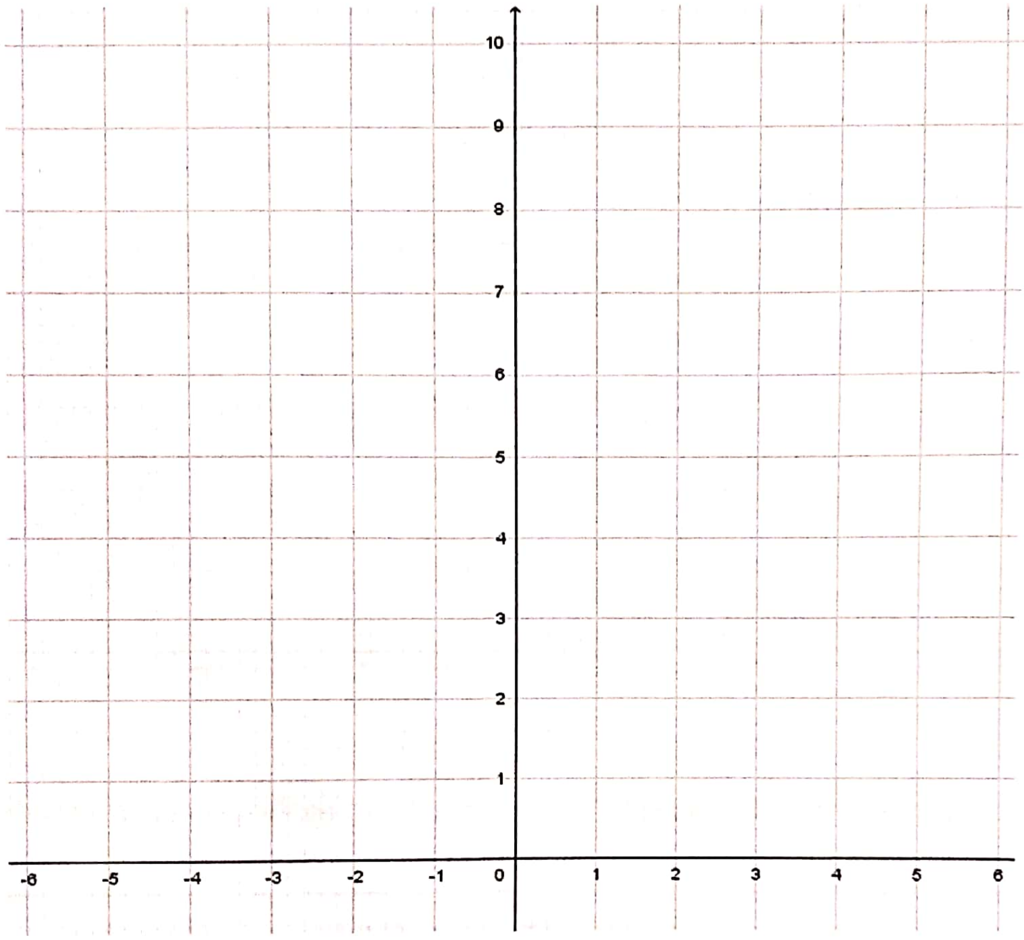
a) Você consegue identificar algum conteúdo matemático que você já estudou? Qual?

____

b) Elabore uma lei que expresse a relação entre a posição da casa e o número de grãos de trigo.

c) Para encontrar a quantidade total de grãos de trigo que o rei deveria entregar a Seta, que cálculo deve ser feito? Qual seria essa quantidade?

d) Construa o gráfico da função representada pela lei encontrada no item “b” no material “prancha de gráficos” e registre-o na malha quadriculada abaixo:

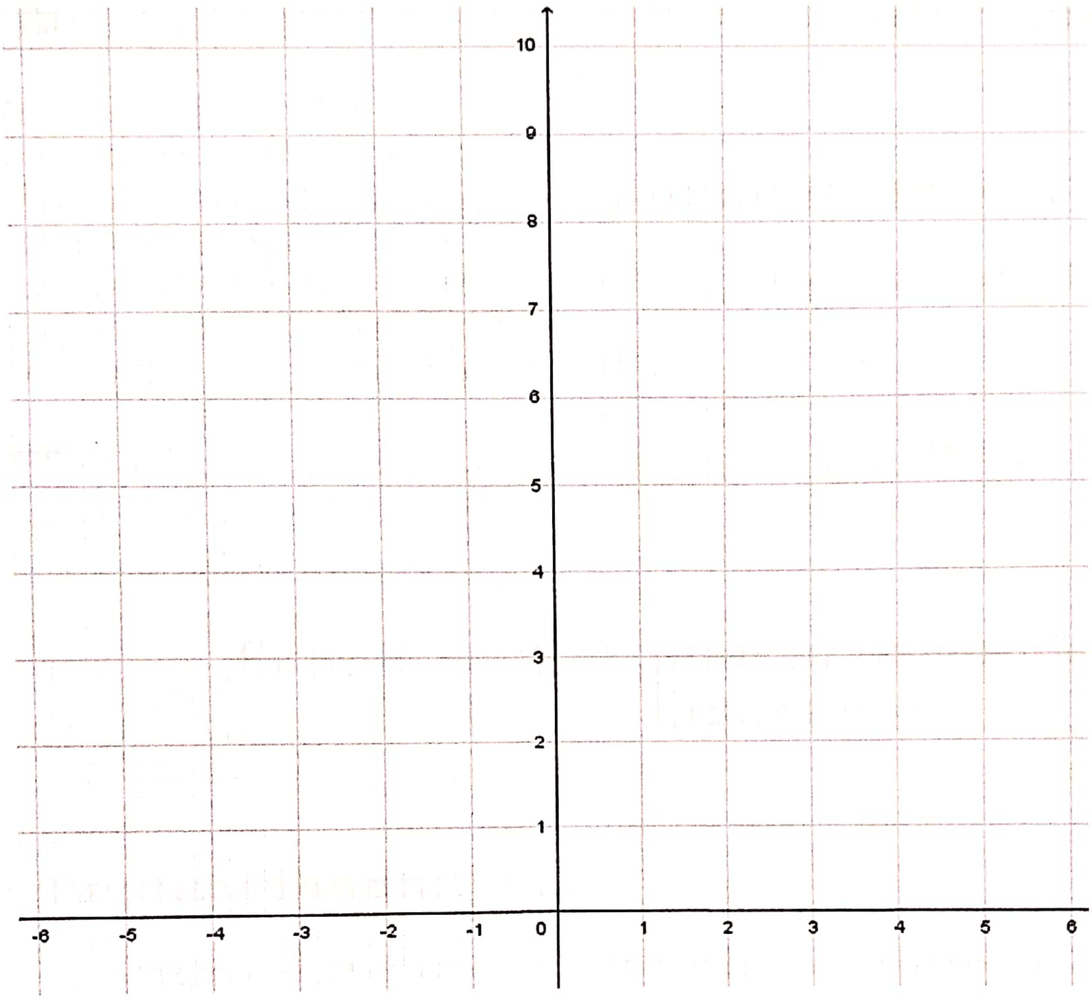


Situação 2: Uma população de bactérias cresce de acordo com a função $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}+$ definida por $f(x) = 2^x$, em milhões, a cada hora. Considerando essas informações:

a) Determine a quantidade de bactérias em 5 horas.

b) Em quanto tempo a população de bactérias será de 128 milhões?

c) Esboce o gráfico da função na malha quadriculada abaixo.



Comparando os gráficos da situação 1 e da situação 2, o que você observa?

INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Fluminense

MINISTÉRIO DA
EDUCAÇÃO

PÁTRIA AMADA
BRASIL
GOVERNO FEDERAL

Diretoria de Ensino Superior
Licenciatura em Matemática
Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática
Linha de Pesquisa: Álgebra
Licenciandos: Bruna Machado, Giullia Faes, Lethícia Fernandes, Letícia Drumond, Igor Menezes e Igor Rodrigues
Orientadora: Profª. Me. Lívia Azelman

Nome: ______________________________________ Data: ____/____/_____

Relação entre Progressão Geométrica e Função Exponencial

I - Progressão Geométrica (P.G.)

Progressão geométrica é toda sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante q. Essa constante q é chamada de razão da progressão geométrica. Também podemos afirmar que a P.G. é uma sequência de números obtidos através da multiplicação entre o termo anterior e a razão q.[2]

Sendo assim, a fórmula do termo geral da P.G. é:

- $a_n = a_1 \,.\, q^{n-1}$

em que:

a_n - termo geral;
n - posição do termo na sequência;
a_1- termo inicial;
q- razão.

---

[2] As definições foram retiradas de:
DOLCE, Oswaldo; IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar** - Vol. 2 - Logaritmos - 10ª Ed. 2013
SOUSA, Isabela Ramos da Silva de. **Relação entre Função Exponencial e Progressão Geométrica.** Dissertação (Mestrado em matemática)- Universidade Federal Fluminense -UENF. Campos dos Goytacazes - RJ. 2016.

Soma dos termos de uma P.G. finita

A soma de uma P.G. finita pode ser definida como a soma de todos os termos da sequência, em que: $Sn = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots + a_n$

Sendo assim, a soma Sn de uma P.G. finita pode ser dada por:

- $Sn = \frac{a_{1}.(q^{n}-1)}{q-1}$

II - Função Exponencial

Dado um número real a e b, tal que $0 < a \neq 1$ e $b \neq 0$, chamamos **função exponencial** de base a a função $f: R \rightarrow R^{+}$ que associa a cada x real o número $b\,.\,a^{x}$, $(x \rightarrow b.\,a^{x})$. Logo, $f(x) = b\,.\,a^{x}$.

- Observações:

Se a base fosse igual a 1, essa função seria constante, pois 1 elevado a qualquer número resulta em 1.

Se a base fosse um valor menor que zero, ou a função não estaria definida no conjunto dos reais ou a função apresentaria saltos entre valores positivos e negativos, o que descaracteriza o gráfico de uma função exponencial. Exemplo:

Se $a = -2$, temos:

x	f(x)
$\frac{1}{2}$	$(-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}\ \nexists R$
1	$(-2)^{1} = -2$
2	$(-2)^{2} = 4$
3	$(-2)^{3} = -8$

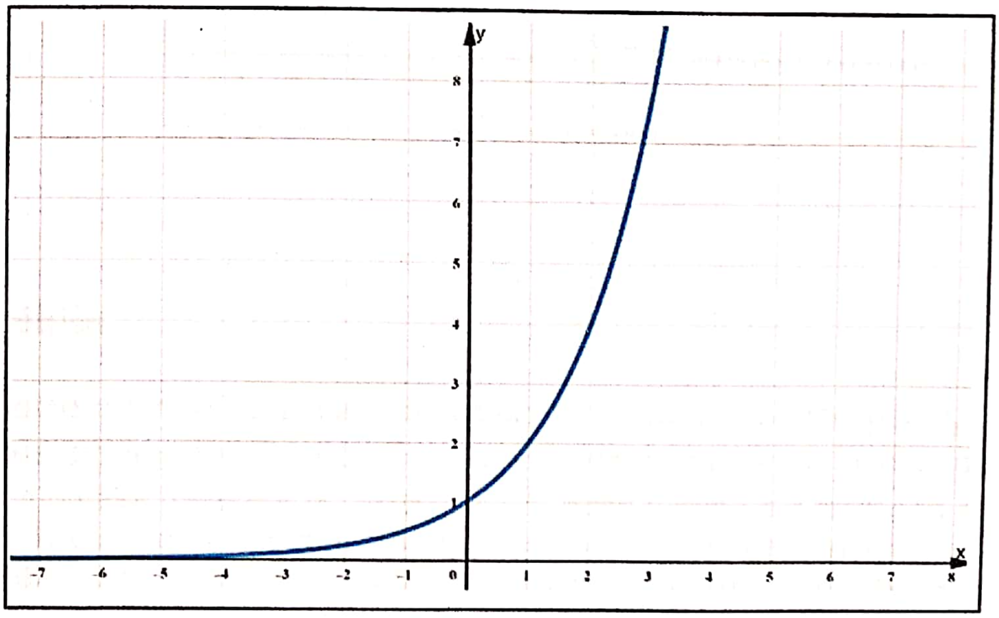
E assim sucessivamente. Nesse caso, o gráfico apresentaria saltos entre imagens positivas e negativas.

Comparação dos gráficos da Função Exponencial e da Progressão Geométrica

Gráfico da Função Exponencial
Em relação ao gráfico da função exponencial podemos fazer as seguintes observações:
1) A curva representativa do gráfico da função exponencial está toda acima do eixo das abscissas, pois $y = a^x > 0$ para todo x ∈ □.
2) Intersecta o eixo das ordenadas no ponto de ordenada 1, pois $a^0 = 1$
3) Se $a > 1$, o gráfico é de uma função crescente e se $0 < a < 1$, o gráfico é de uma função decrescente.

Exemplo 1: Vejamos como podemos esboçar o gráfico da função definida por $f: R \rightarrow R^+$, $f(x) = 2^x$

x	f(x)
0	$2^0 = 1$
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$
3	$2^3 = 8$
4	$2^4 = 16$



Exemplo 2: Vejamos como podemos esboçar o gráfico da função definida por $f: R \to R^+$, $f(x) = \frac{1^x}{2}$

x	f(x)
0	$\frac{1^0}{2} = 1$
1	$\frac{1^1}{2} = \frac{1}{2}$
2	$\frac{1^2}{2} = \frac{1}{4}$
3	$\frac{1^3}{2} = \frac{1}{8}$
4	$\frac{1^4}{2} = \frac{1}{16}$

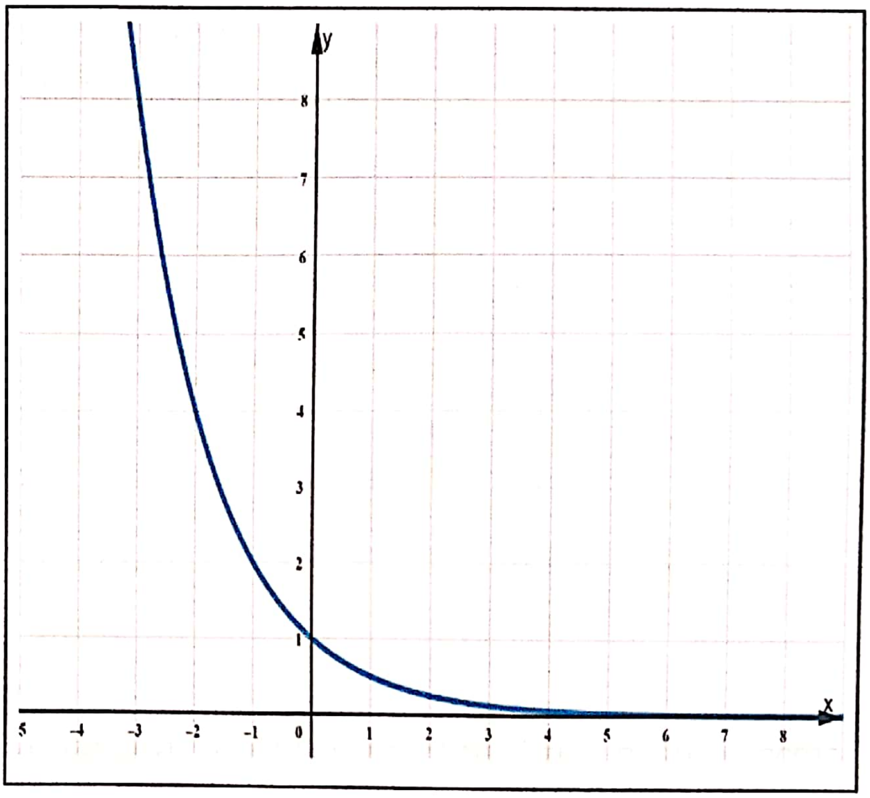
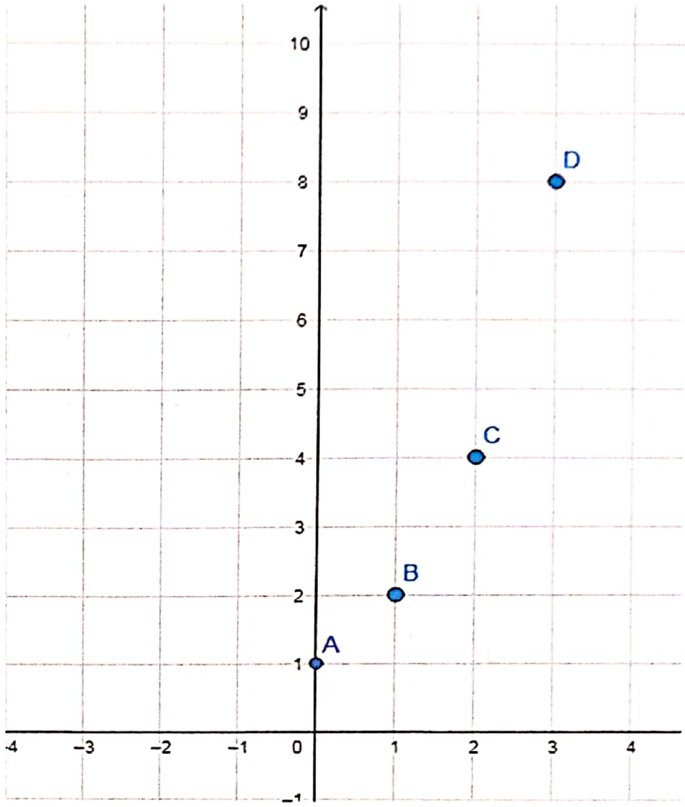


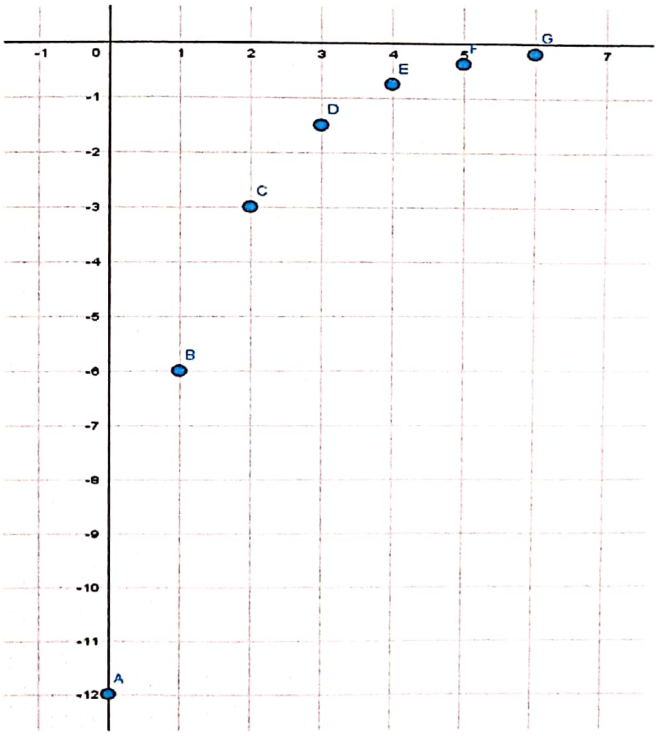
Gráfico da Progressão Geométrica

Como já vimos anteriormente o termo geral da Progressão Geométrica é dado por $a_n = a\square \, . \, q^n$. Nesse caso, podemos pensar na Progressão Geométrica como uma função que associa a cada número natural n o valor dado por $a_n = a_1 \, . \, q^{n-1}$. Essa função é a restrição aos números naturais da função do tipo exponencial f(x) = b.a^x . Portanto, podemos concluir que a progressão geométrica é função do tipo exponencial pode ser escrita com f(n) = b.a^n , onde n = 0, 1, 2, ..., .

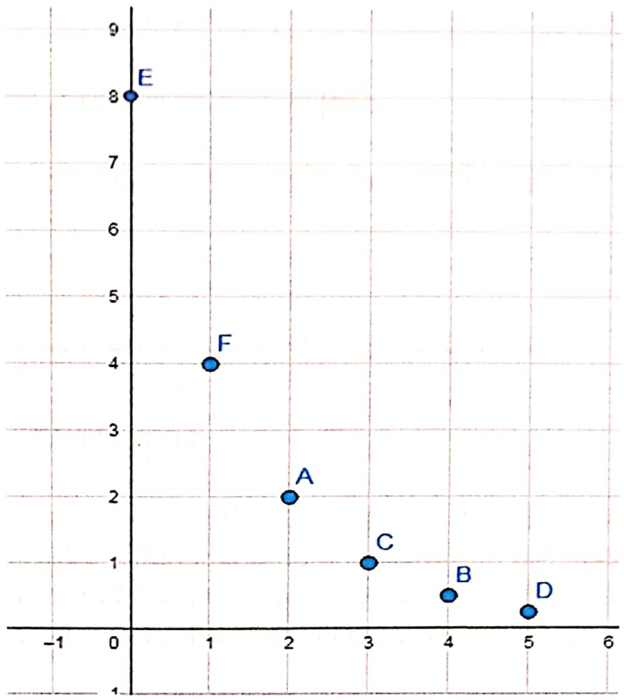
Exemplo 3: Vejamos como podemos esboçar o gráfico da progressão definida como $f: N \rightarrow N$, (1, 2, 4, 8, 16, ...), onde q = 2.



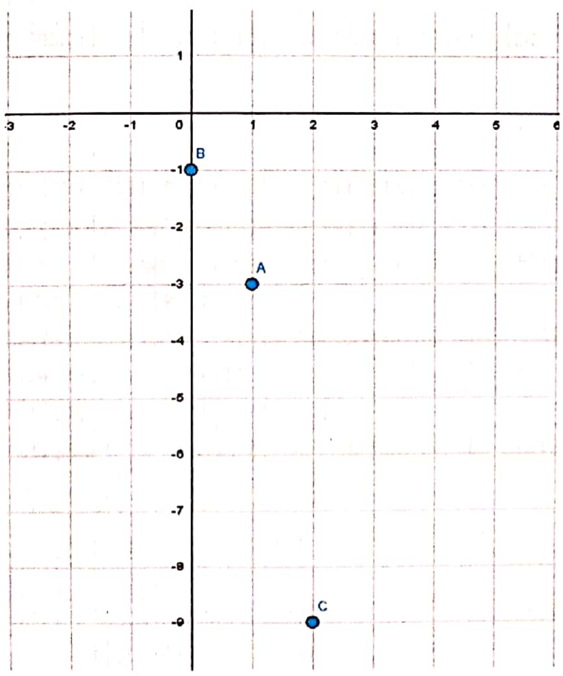
Exemplo 4: Vejamos como podemos esboçar o gráfico da progressão definida como $f: Z \rightarrow Z$, (..., -12, -6, -3), onde q = $\frac{1}{2}$



Exemplo 5: Vejamos como podemos esboçar o gráfico da progressão definida como $f: Z \rightarrow Z$, (..., 8, 4, 2, ...), onde q = $\frac{1}{2}$



Exemplo 6: Vejamos como podemos esboçar o gráfico da progressão definida como $f: Z \rightarrow Z$, (-1, -3, -9,...), onde q = 3



INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Fluminense

MINISTÉRIO DA
EDUCAÇÃO

PÁTRIA AMADA
BRASIL
GOVERNO FEDERAL

Diretoria de Ensino Superior
Licenciatura em Matemática
Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática
Linha de Pesquisa: Álgebra
Licenciandos: Bruna Machado, Giullia Faes, Letícia Drumond, Lethícia Fernandes, Igor Menezes e Igor Rodrigues
Orientadora: Profª. Me. Livia Azelman

Nome: ____________________________________ Data: ____/____/_____

Exercícios

1. No estudo de radioatividade, o deslocamento radioativo de um elemento segue uma expressão exponencial. Nesse sentido, denomina-se meia-vida ou período de semidesintegração o tempo necessário para que certa massa se reduza à metade. Considere uma substância que tenha uma massa inicial de 200g e meia-vida de 5 minutos, determine:

a) A sua massa em 15 minutos.
b) Os cinco primeiros termos da sequência que representa a massa do elemento.
c) A lei da função.
b) A representação gráfica da PG e da função.

2. Uma população de bactérias começa com 100 e dobra a cada três minutos. Assim, o número $N(t)$ de bactérias após t minutos é dado pela função $N(t) = 10 . 2^{t/3}$. Nessas condições:

a) O gráfico da função.
b) Após quanto tempo a população será de 5120 bactérias?
c) Qual a quantidade total de bactérias do início da observação das mesmas até passados 12 minutos?

3. (PUCCAMP – 2003) Adaptado. Curiosamente, observou-se que o número de árvores plantadas em certo município podia ser estimado pela lei $N(m) = 100 . 3^m$ em que $m =$ corresponde ao respectivo mês de plantio das $N(m)$ árvores. Para $m = 0$, obtém-se o número de árvores plantadas em maio de 2001.

a) Essa questão pode ser considerada como uma progressão geométrica? Por que?
b) Quantas árvores serão plantadas no mês de dezembro de 2001?
c) Em qual mês o plantio será igual a 24300 árvores?
d) Qual o total de árvores plantadas nos 5 primeiros meses deste plantio?
e) Trace o gráfico da função.

Apêndice B: Material didático experimentado na turma regular

INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Fluminense

MINISTÉRIO DA
EDUCAÇÃO

PÁTRIA AMADA
BRASIL
GOVERNO FEDERAL

Diretoria de Ensino Superior
Licenciatura em Matemática
Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática
Linha de Pesquisa: Álgebra
Licenciandos: Bruna Machado, Giullia Faes, Lethícia Fernandes, Letícia Drumond, Igor Menezes e Igor Rodrigues
Orientadora: Profª. Me. Lívia Azelman

Nome: ____ Data: ____/____/_____

Relação entre Progressão Geométrica e Função Exponencial

I - Progressão Geométrica (P.G.)

Progressão geométrica é toda sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante q. Essa constante q é chamada de razão da progressão geométrica. Também podemos afirmar que a P.G. é uma sequência de números obtidos através da multiplicação entre o termo anterior e a razão q.[3]

Sendo assim, a fórmula do termo geral da P.G. é:

$$\boxed{\phantom{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}}$$

em que:

a_n - termo geral;

n - posição do termo na sequência;

a_1- termo inicial;

q- razão.

---

[3] As definições foram retiradas de:
DOLCE, Oswaldo; IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar** - Vol. 2 - Logaritmos - 10ª Ed. 2013
SOUSA, Isabela Ramos da Silva de. **Relação entre Função Exponencial e Progressão Geométrica.** Dissertação (Mestrado em matemática)- Universidade Federal Fluminense -UENF. Campos dos Goytacazes - RJ. 2016.

Soma dos termos de uma P.G. finita

A soma de uma P.G. finita pode ser definida como a soma de todos os termos da sequência, em que: $Sn = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots + a_n$

Sendo assim, a soma Sn de uma P.G. finita pode ser dada por:

II - Função Exponencial

Dado os números reais a e b, tal que $0 < a \neq 1$ e $b \neq 0$, chamamos **função exponencial** de base a a função $f: R \rightarrow R^+$ que associa a cada x real o número $b \cdot a^x$, $(x \rightarrow b \cdot a^x)$. Logo, $f(x) = b \cdot a^x$.

- Observações:

Se a base fosse igual a 1, essa função seria constante, pois 1 elevado a qualquer número resulta em 1.

Se a base fosse um valor menor que zero, ou a função não estaria definida no conjunto dos reais ou a função apresentaria saltos entre valores positivos e negativos, o que descaracteriza o gráfico de uma função exponencial. Exemplo:

Se $a = -2$, temos:

x	f(x)
$\frac{1}{2}$	$(-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2} \notin R$
1	$(-2)^1 = -2$
2	$(-2)^2 = 4$
3	$(-2)^3 = -8$

E assim sucessivamente. Nesse caso, o gráfico apresentaria saltos entre imagens positivas e negativas.

Demonstração da Relação entre Função Exponencial e P.G.

Seja $f: □ \rightarrow □$ definida por $f(x) = b.a^x$ com $b \neq 0$ e $1 \neq a > 0$. Tome uma sequência $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ em P.A. Queremos mostrar que $f(x_n)$ pode ser escrita como $f(x_1).q^{n-1}$, ou seja, $f(x_n) = f(x_1).q^{n-1}$.

De fato:

Usando o termo geral de P.A., temos que $x_n = x_1 + (n-1)r$. Daí:

$f(x_n) = b.a^{x_n} \Rightarrow f(x_n) = b.a^{x_1+(n-1)r} \Rightarrow f(x_n) = b.a^{x_1}.a^{(n-1)r} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x_n) = f(x_1).(a^r)^{n-1}$

Fazendo $a^r = q$, pois a e r são constantes, temos:

$f(x_n) = f(x_1).(a^r)^{n-1} \Rightarrow f(x_n) = f(x_1).q^{n-1}$, C.Q.D.

Dessa forma, podemos concluir que os valores y de uma função exponencial formarão uma P.G. de razão $a^r = q$.

Comparação dos gráficos da Função Exponencial e da Progressão Geométrica

Gráfico da Função Exponencial

Em relação ao gráfico da função exponencial podemos fazer as seguintes observações:

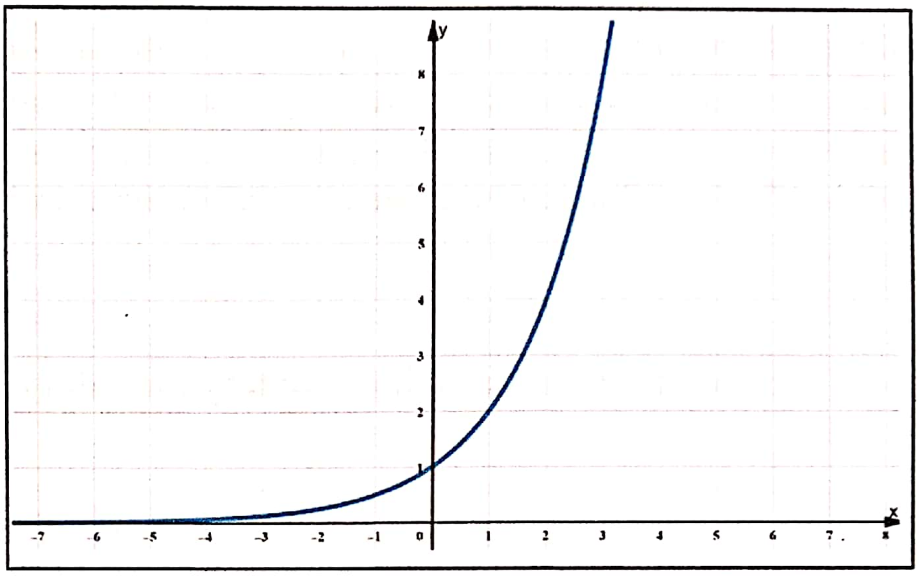
1) A curva representativa do gráfico da função exponencial está toda acima do eixo das abscissas, pois $y = a^x > 0$ para todo $x \in □$.

2) Intersecta o eixo das ordenadas no ponto de ordenada 1, pois $a^0 = 1$

3) Se $a > 1$, o gráfico é de uma função crescente e se $0 < a < 1$, o gráfico é de uma função decrescente.

Exemplo 1: Vejamos como podemos esboçar o gráfico da função definida por $f: R \to R^{+}$, $f(x) = 2^{x}$]

x	f(x)
0	$2^0 = 1$
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$
3	$2^3 = 8$
4	$2^4 = 16$



Exemplo 2: Vejamos como podemos esboçar o gráfico da função definida por $f: R \to R^{+}$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

x	f(x)
0	$\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$
1	$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$
2	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
3	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$
4	$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

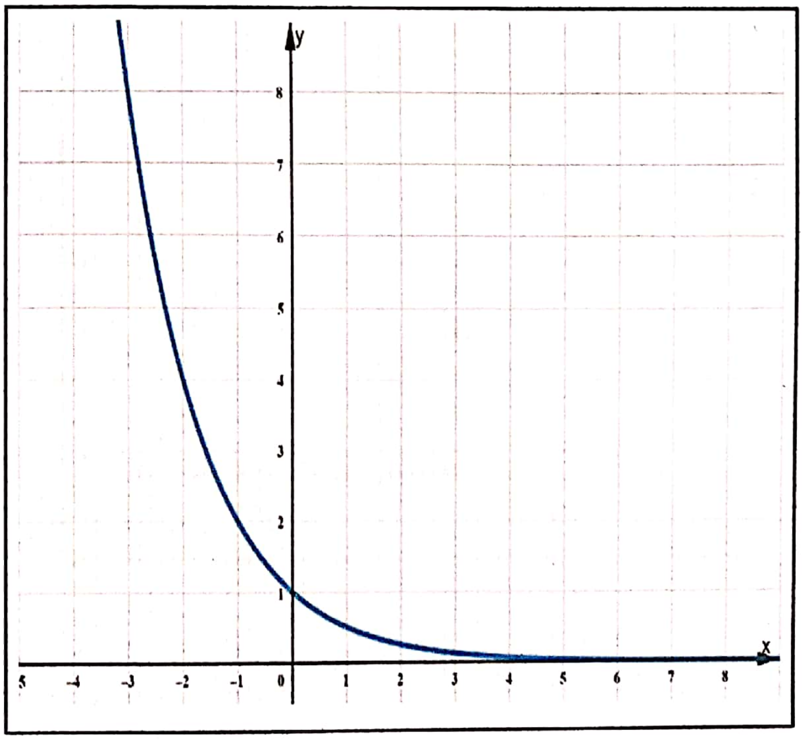
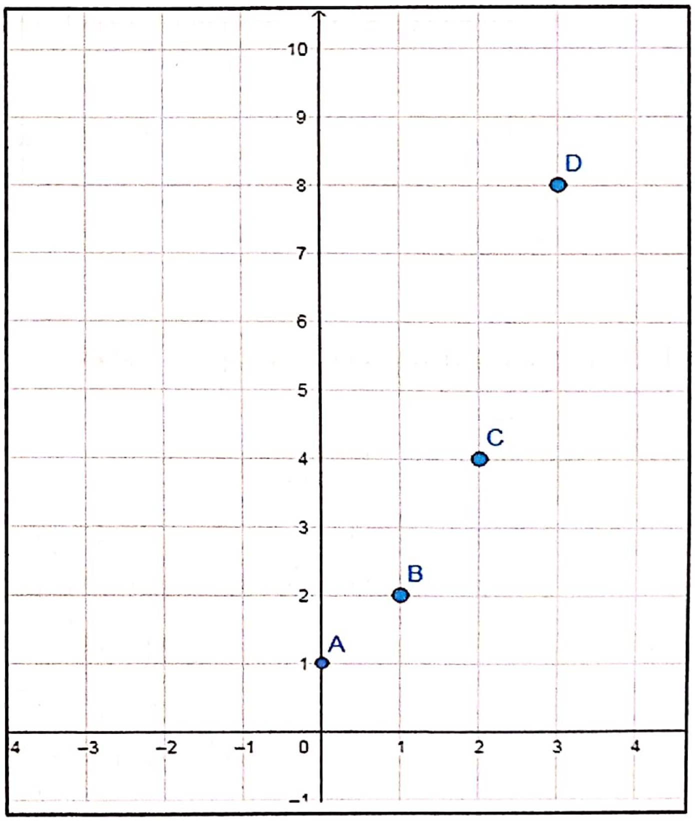


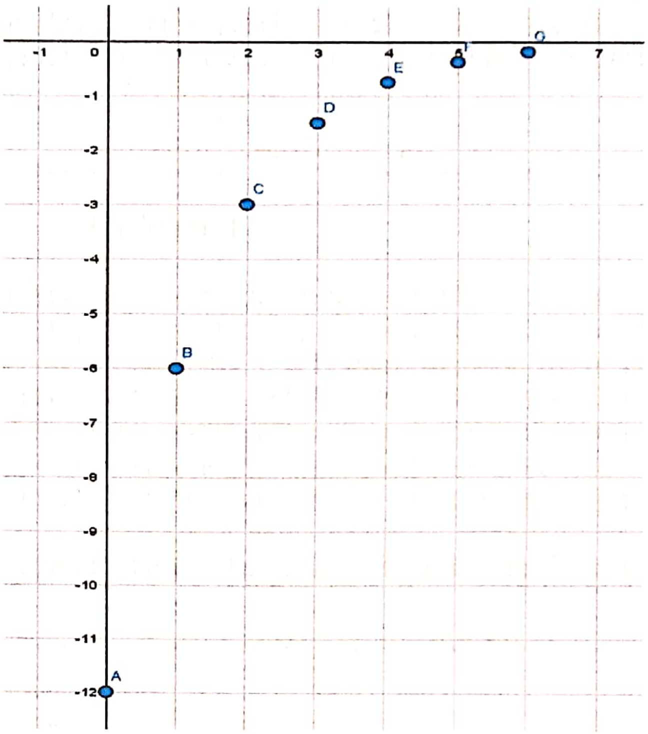
Gráfico da Progressão Geométrica

Como já vimos anteriormente o termo geral da Progressão Geométrica é dado por $a_n = a_1 \,.\, q^{n-1}$. Nesse caso, podemos pensar na Progressão Geométrica como uma função que associa a cada número natural n o valor dado por a_n. Essa função é a restrição aos números naturais não nulos da função do tipo exponencial f(x) = b.a^x . Portanto, podemos concluir que a progressão geométrica é função do tipo exponencial pode ser escrita com f(n) = b.a^n , onde n = 1, 2, 3, ..., .

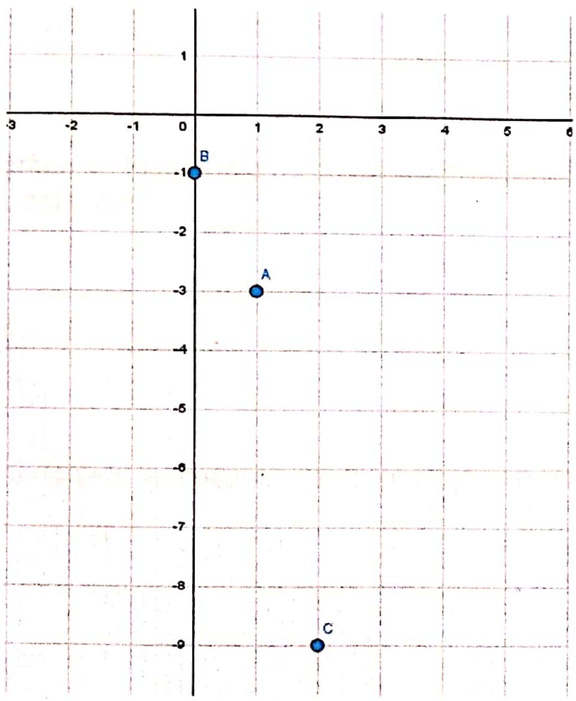
Exemplo 3: Vejamos como podemos esboçar o gráfico da progressão definida como $f\colon N^* \to R$, (1, 2, 4, 8, 16, ...), onde q = 2.



Exemplo 4: Vejamos como podemos esboçar o gráfico da progressão definida como $f: N^* \rightarrow R$, (-12, -6, -3, ...), onde q = $\frac{1}{2}$



Exemplo 5: Vejamos como podemos esboçar o gráfico da progressão definida como $f: N^* \rightarrow R$, (-1, -3, -9,...), onde q = 3



INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Fluminense

MINISTÉRIO DA
EDUCAÇÃO

PÁTRIA AMADA
BRASIL
GOVERNO FEDERAL

Diretoria de Ensino Superior Licenciatura em Matemática Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática Linha de Pesquisa: Álgebra Licenciandos: Bruna Machado, Giullia Faes, Lethícia Fernandes, Letícia Drumond, Igor Menezes e Igor Rodrigues Orientadora: Profª. Me. Lívia Azelman

Nome: ____ Data: ____/____/_____

Atividade 1

Situação 1: Na Índia, um rei quis presentear o inventor do jogo do xadrez. Como recompensa pela sua genialidade, o sábio inventor pediu "[...] desejo que me entreguem um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro de xadrez que eu inventei. [...] E pela segunda casa, peço que me entregue dois grãos de trigo, pela terceira casa, quatro grãos, pela quarta casa, oito, pela quinta, dezesseis, pela sexta, trinta e dois..." Então os matemáticos da corte comunicaram ao rei que a quantia era exageradamente grande, logo, não haveria como presentear ao sábio com tantos grãos de trigo. Considerando as informações mencionadas na lenda contada, responda:

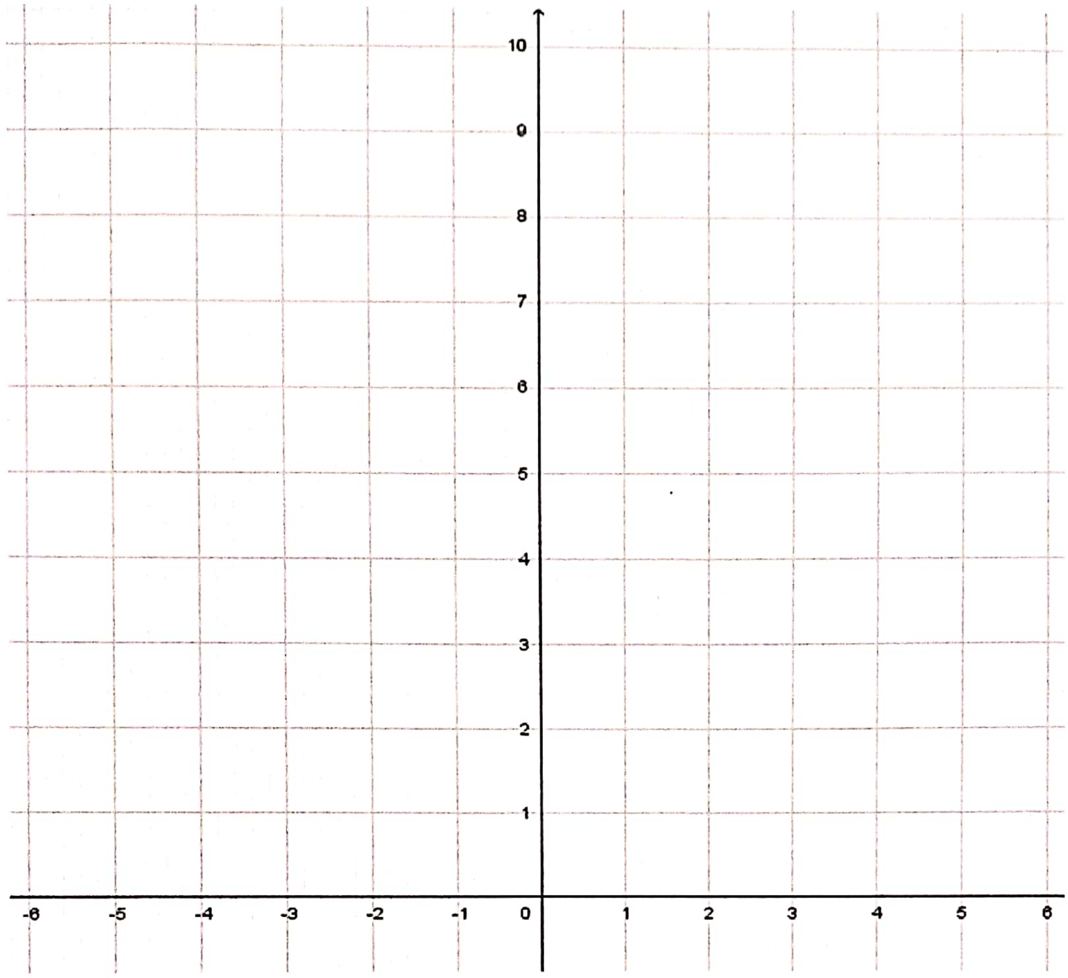
a) Você consegue identificar algum conteúdo matemático que você já estudou? Qual?

____

b) Elabore uma lei que expresse a relação entre a posição da casa e o número de grãos de trigo.

c) Para encontrar a quantidade total de grãos de trigo que o rei deveria entregar a Seta, que cálculo deve ser feito? Qual seria essa quantidade?

d) Construa o gráfico da função representada pela lei encontrada no item "b", determinando o conjunto domínio.



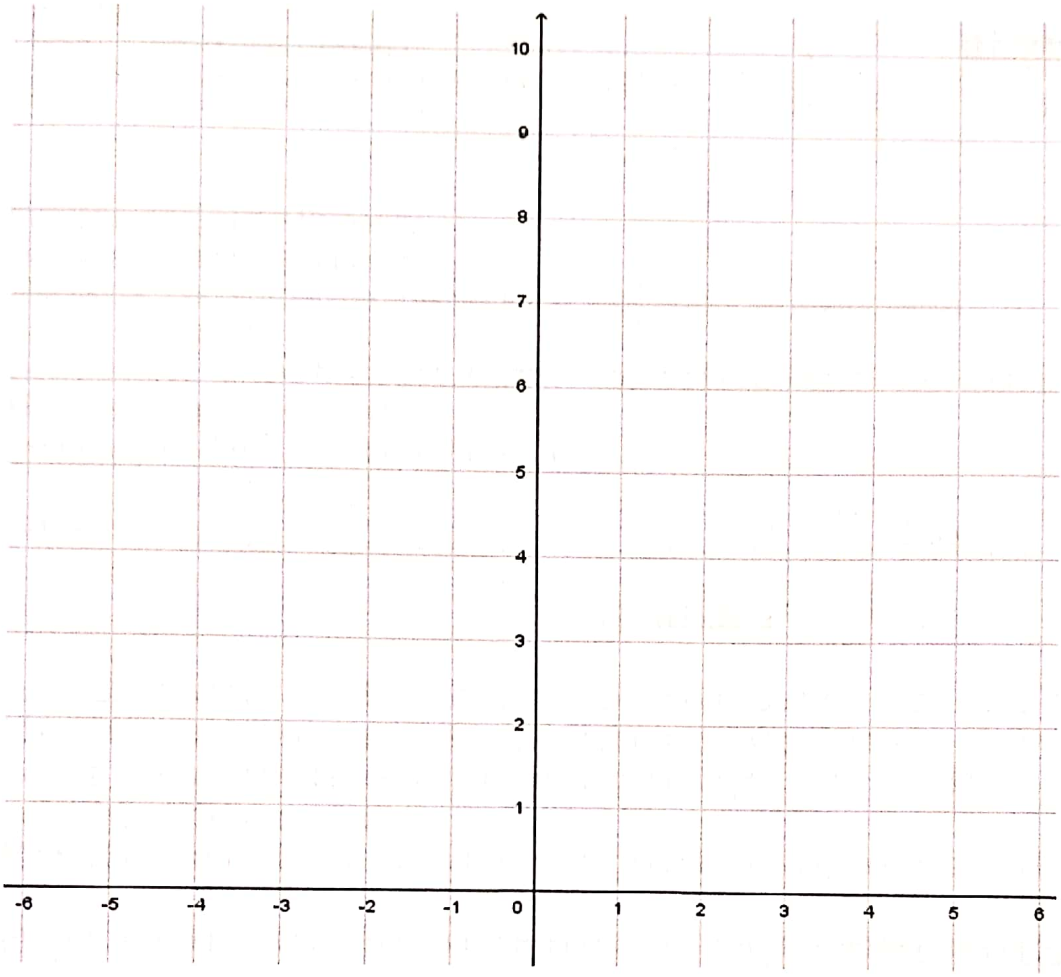
e) Escreva, na forma de potência, quantos grãos de trigo devem ser colocados na última casa do tabuleiro de xadrez.

Situação 2: Uma população de bactérias cresce de acordo com a função $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}+$ definida por $f(x) = 2^x$, em milhões, a cada hora. Considerando essas informações:

a) Determine a quantidade de bactérias em 5 horas.

b) Em quanto tempo a população de bactérias será de 128 milhões?

c) Esboce o gráfico da função na malha quadriculada abaixo.



Comparando os gráficos da situação 1 e da situação 2, o que você observa?

INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Fluminense

MINISTÉRIO DA
EDUCAÇÃO

PÁTRIA AMADA
BRASIL
GOVERNO FEDERAL

Diretoria de Ensino Superior
Licenciatura em Matemática
Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática
Linha de Pesquisa: Álgebra
Licenciandos: Bruna Machado, Giullia Faes, Lethícia Fernandes, Letícia Drumond, Igor Menezes e Igor Rodrigues
Orientadora: Profª. Me. Lívia Azelman

Nome: ____ Data: ____/____/_____

Atividade 2

1. Todo mundo, geralmente, tem dois pais, quatro avós, oito bisavós, dezesseis trisavós, etc. a cada geração, que retrocedemos, temos o dobro de antepassados. Assim, cada um de nós que está vivo hoje, teve desde o ano 400, uns 18,5 quintilhões de ancestrais.

Refletindo sobre o que foi enunciado, responda as questões abaixo:

a) Complete a tabela abaixo de acordo com a sua árvore genealógica.
Obs: Considere a sua geração como a geração 0

Geração	Quantidade de pessoas
1.ª	
2.ª	
3.ª	
4.ª	

b) Ordene os valores encontrados no quadro acima na forma de sequência.

(_____,_____,_____,_____,_____)

c) O número de ancestrais de uma família corresponde a 128. Qual seria a geração dessa família? ____

d) Para cada geração x que se escolha, há um número f(x) de ascendentes. Sabendo disso, encontre uma lei que expressa f(x) em função de x, ou seja, encontre uma função que indique essa situação. ______________________________________

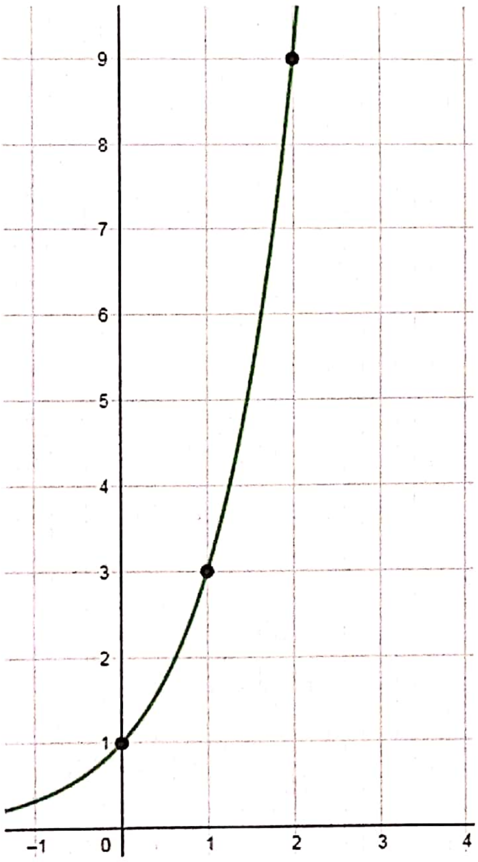
2. Uma das práticas mais comuns da relação humana – o aperto de mão – pode ser, paradoxalmente, um dos maiores meios de transmissão de bactérias. O número de

bactérias (N) por número de apertos de mão (x) é determinado pela expressão $N(x) = 5.2^x$.

a) Se você der 3 apertos de mão, quantas bactérias serão transmitidas? ____

b) Para que o número de bactérias seja 20480, quantos apertos de mão você terá que dar? ____

3. Um biólogo acompanhou o crescimento da folha circular de uma planta aquática. Durante suas observações percebeu que a cada mês o diâmetro da folha triplicava. No início de suas observações o biólogo mediu a folha e obteve 1cm de diâmetro. O gráfico abaixo representa a situação descrita. Sabendo que x é o tempo em meses e y o diâmetro em cm, responda as questões a seguir.



a) Coloque os valores dos diâmetros (y) encontrados no gráfico ao lado em forma de sequência.

(______,______,______,______,______)

b) O gráfico ao lado representa que tipo de função?

____

c) Qual a lei da função representada no gráfico?

____

d) Qual o termo geral da sequência da letra (a)? (Termo geral é quando o tempo for n).

____

g) Observando as letras (c) e (d), o que podemos concluir?

____