RELATÓRIO DO LEAMAT III

O EIXO DE SIMETRIA COMO FERRAMENTA PARA ESTUDO DA FUNÇÃO POLINOMIAL DO SEGUNDO GRAU

ENSINO E APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA

ARTHUR SOUZA MANHÃES
LAIS MASSENA DE SOUZA
LARISSA FERREIRA BARRETO MANHÃES
MAYARA MOREIRA GUIMARÃES
THAMIRES AZEREDO COSTA

ANA MARY FONSECA BARRETO DE ALMEIDA

CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
2021.2

ARTHUR SOUZA MANHÃES
LAIS MASSENA DE SOUZA
LARISSA FERREIRA BARRETO MANHÃES
MAYARA MOREIRA GUIMARÃES
THAMIRES AZEREDO GOMES

RELATÓRIO DO LEAMAT III

O EIXO DE SIMETRIA COMO FERRAMENTA PARA ESTUDO DA FUNÇÃO POLINOMIAL DO SEGUNDO GRAU

ENSINO E APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA

Trabalho apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense *Campus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão da disciplina Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Prof. Me. Ana Mary Fonseca Barreto de Almeida

Campos dos Goytacazes - RJ
2021.2

SUMÁRIO

1) RELATÓRIO DO LEAMAT I

1.1) Atividades desenvolvidas

No dia 17/09/2019 foi realizada a apresentação da disciplina LEAMAT com todos os orientadores das linhas de pesquisa Álgebra, Geometria e Educação Matemática Inclusiva. Foi apresentado o *Schoology*, onde seriam postados os textos para discussão e fichamentos feitos pelos alunos. A turma foi dividida em grupos denominados A1, A2, A3, B1 e B2. Ficando esse grupo denominado A1.

No dia 01/10/2019 ocorreu a leitura, a discussão e a correção do fichamento referente ao texto “Número e Álgebra no Currículo Escolar” do autor João Pedro Ponte (PONTE, 2006) que trata dos problemas que se colocam entre os números e a álgebra e a dificuldade apresentada pelos alunos na transição da aritmética para a álgebra. O artigo é introduzido com o autor analisando a abordagem dos conceitos numéricos e algébricos com base no currículo, logo em seguida, o mesmo aponta algumas dificuldades no desenvolvimento do pensamento algébrico por parte dos alunos que participaram da pesquisa. Após isso, o autor argumenta que os principais problemas do currículo escolar português é a indefinição referente à área da Álgebra, fazendo com que as experiências de aprendizagem sejam empobrecidas.

No dia 15/10/2019 houve a revisão do fichamento, a análise e o debate com base no texto “Um Estudo das Potencialidades Pedagógicas das Investigações Matemáticas no Desenvolvimento do Pensamento Algébrico” de Dario Fiorentini, Fernando Luís Pereira Fernandes, Eliane Matesco Cristovão (FIORENTINI; FERNANDES; CRISTOVÃO, 2005) que aborda uma pesquisa realizada em duas escolas públicas com o intuito de investigar as potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no ensino da álgebra. O texto visa identificar indícios de formação e desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébrico dos alunos. O artigo mostra que as investigações matemáticas, por eles aplicadas, foram extremamente importantes por serem ricas em conteúdo e desafiadoras, para alunos e professores.

No dia 29/10/2019 ocorreram apresentações sobre a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2017) e dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997), sendo o grupo A1 apresentando sobre suas aplicações no Ensino Médio, o A2 os abordando no Fundamental 1 e o grupo A3 os retrata no Fundamental 2. Sobre a BNCC do ensino médio, foi possível identificar que a mesma é centrada na compreensão de conceitos, visando também a resolução de problemas, mas principalmente utilizar procedimentos e estratégias para formular novos desafios, selecionar modelos matemáticos, desenvolver o pensamento computacional, utilizando recursos disponíveis na matemática, o que se assemelha bastante ao que é proposto no PCN, que diz que é de extrema importância que a Educação se volte para o desenvolvimento das capacidades de: resolver e criar problemas, trabalhar coletivamente e também na comunicação, fazendo do homem um ser social.

No dia 05/11/2019 aconteceu o III Encontro de Educação Matemática onde tivemos apresentações de ex-alunas, no qual apresentaram seus respectivos trabalhos de conclusão de mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) e dissertaram sobre o início de suas carreiras como docentes. Estiveram presentes no turno da manhã os grupos A1, A2, A3, B1 e B2.

No dia 19/11/2019 foi realizada a correção dos slides dos grupos A1, A2, A3, B1 e B2 para apresentação do projeto de Álgebra, revisando o título, sumário, tema, aporte teórico, objetivo geral, público e as referências.

No dia 03/12/2019 ocorreu a apresentação final dos grupos A1, A2 e A3 sobre a linha de pesquisa de Álgebra.

No dia 10/12/2019 o grupo B1 realizou a apresentação final sobre a linha de pesquisa de Geometria, enquanto o grupo B2 realizou a apresentação da linha de pesquisa de Álgebra.

No dia 17/12/2019 o grupo B1 realizou a apresentação final sobre a linha de Álgebra.

1.2) Elaboração da sequência didática

1.2.1) Tema

O eixo de simetria no estudo de funções polinomiais do segundo grau.

1.2.2) Justificativa

A motivação para a escolha do tema veio logo após as aulas de Fundamentos da Matemática 1, nas quais vimos a importância da função quadrática e o seu uso recorrente nos problemas do dia a dia, porém foi possível observar a dificuldade na resolução de problemas por parte da nossa turma, conforme corroborado por

Hoffmann e Anjos (2012) que afirmam ser um tema muito usado nas salas de aula e também no cotidiano:

> É comum lidar com situações que envolvam a função quadrática, por isso deve ser estudada e trabalhada, apesar disso a dificuldade dentro da sala de aula é grande. (HOFFMANN; ANJOS, 2012, p. 66).

Por conseguinte, é possível observar que a simetria é algo recorrente na história da civilização, como por exemplo, na arquitetura. Sendo assim, uma das formas que identificarmos tal simetria é na função quadrática, através do eixo de simetria da parábola.

> Na civilização egípcia antiga é evidente o uso de um padrão em suas criações. Buscando criar figuras de fácil compreensão, os egípcios valiam-se do equilíbrio e da simetria para criar composições altamente organizadas. (SCHIMITZ, 2015, p.8).

Além disso, é visto na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que os alunos devem utilizar o conceito matemático para resolver problemas do cotidiano, fazendo com que o mesmo tenha uma formação como ser social, não sendo preparado apenas para a escola.

> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BRASIL, 2016, p. 535).

Contudo, a interpretação geométrica da função quadrática é extremamente importante para que os alunos consigam resolver problemas matemáticos e interpretar gráficos, algo que pode auxiliar o aluno na construção do gráfico da função seria o eixo de simetria, visto que daria um caráter geométrico à construção do gráfico.

> Atuando como professor de matemática em escola pública por 2 anos, foi possível identificar de perto as dificuldades que muitos alunos sentem em relação à interpretação dos gráficos, ao reconhecimento de uma função através de sua forma algébrica e utilizar conhecimento algébricos como recurso para construção de gráficos. (MARINHO, 2014, p.47).

1.2.3) Objetivo Geral:

Identificar como o eixo de simetria auxilia no processo de construção da parábola.

1.2.4) Objetivos específicos

- Identificar as coordenadas de pontos simétricos em relação ao eixo de simetria da parábola, contidos na curva;
- Solucionar problemas contextualizados com base nos conceitos adquiridos de eixo de simetria e sua relação com os pontos de uma parábola;
- Resolver problemas por meio da interpretação geométrica a partir do conceito de eixo de simetria de parábolas;
- Identificar figuras simétricas.

1.2.5) Público Alvo:

O público-alvo para realização do trabalho trata-se de alunos do 1.º ano do Ensino Médio.

2) RELATÓRIO DO LEAMAT II

2.1) Atividades desenvolvidas

No dia 24/08/2021 foi realizado o primeiro encontro da orientadora com a turma, sendo assim, foi o momento de apresentar a matéria e explicar como funcionaria a mesma visto que como estávamos em contexto de Ensino Remoto Emergencial, existiam muitas dúvidas sobre como a disciplina iria funcionar.

Entre os dias 31/08/2021 e 26/10/2021 o grupo buscou desenvolver a sequência didática com auxílio da orientadora que contribuiu com textos e sugestões para excelência da mesma. No dia 05/11/2021, iniciaram-se as apresentações com objetivo de expor o que cada grupo trabalhou durante as semanas anteriores e obter sugestões da turma em conjunto com a orientadora.

No dia 30/11/2021 ocorreu a apresentação do grupo A1, e desde então, as aulas foram destinadas para a elaboração e aprimoramento do relatório.

2.2) Elaboração da sequência didática

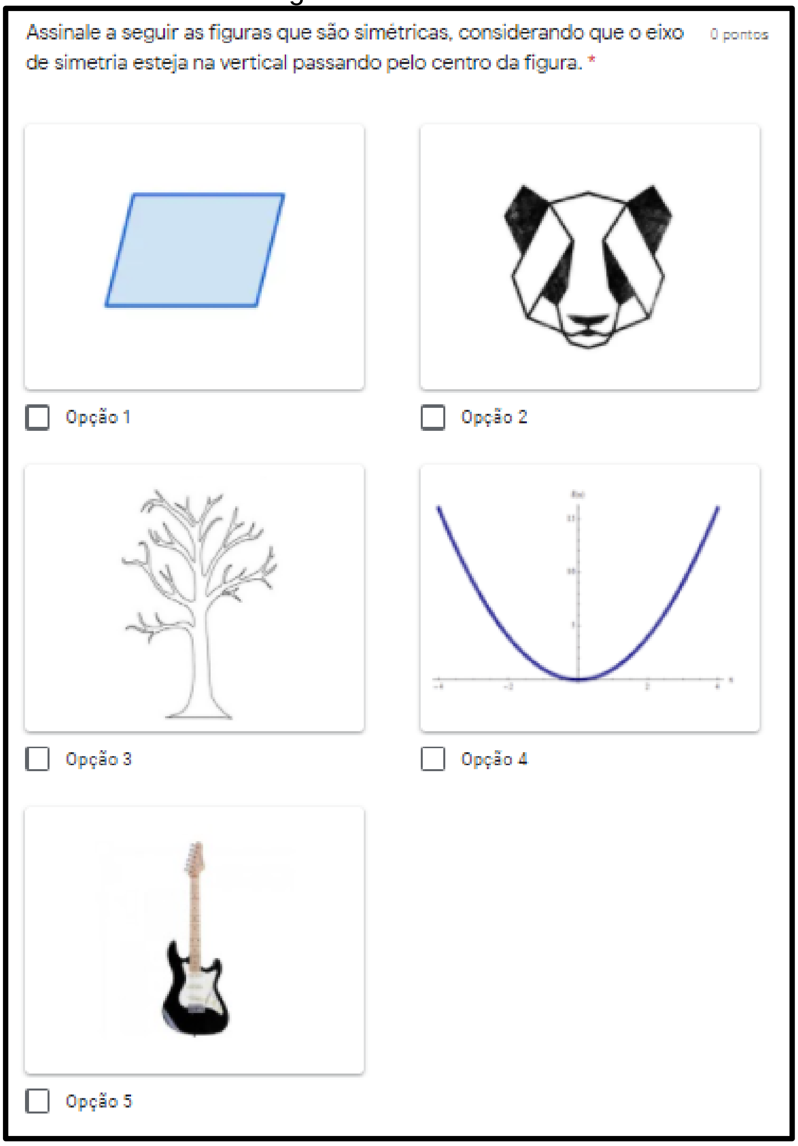
2.2.1) Planejamento da sequência didática

A sequência didática foi elaborada para ser aplicada de forma remota, visto que a mesma foi desenvolvida durante uma pandemia, à alunos que estejam no primeiro ano do ensino médio, tendo em vista que já tenham estudado anteriormente a Função Polinomial do Segundo Grau (Função Quadrática). É optado o uso do termo função quadrática por entender que essa expressão remete mais diretamente à sua interpretação geométrica, que é uma parábola, objeto a ser estudado pelo grupo.

No primeiro momento será enviada uma apostila (Apêndice A) para que os alunos acompanhem o que será trabalhado no decorrer da aula. Em seguida, será feita uma introdução do que é simetria para iniciar o trabalho e logo depois será explicado o que é eixo de simetria. Utilizaremos as definições para fazer o aluno refletir sobre a simetria axial, que será a utilizada no nosso trabalho. Sobre as figuras simétricas, definimos como: “aquelas que contenham no mínimo um eixo de simetria passando pelo seu centro, ou seja, se traçarmos uma reta dividindo uma figura ao meio, as duas partes quando sobrepostas coincidem", passando novamente a ideia de simetria axial e normalizando para o aluno a ideia de que a parábola é uma figura simétrica e que o vértice funciona como o seu ponto médio (ou centro).

Posteriormente será enviada a Atividade 1 (Figura 1), produzida no *Google Forms,* que pode ser acessada pelo link: https://forms.gle/U8ZNW1L7MLTx811E8, cujo endereço eletrônico se apresenta na apostila. A Atividade 1 tem por objetivo que os alunos identifiquem quais imagens são figuras simétricas, considerando o eixo de simetria na vertical e passando pelo centro da figura, conforme definido anteriormente com os alunos.

Figura 1: Atividade 1



Fonte: Elaboração própria

Após a realização da Atividade 1, será apresentado como o eixo de simetria se apresenta na natureza. Isso pode ser identificado a partir do item 1.3 da apostila, em que apresenta as imagens de uma borboleta, de uma flor de bússola, de uma folha de palmeira e de uma coruja, como apresentado na figura 2.

Figura 2: Item 1.3 da apostila

1.3 Simetria é natural

A simetria está presente em várias coisas no nosso cotidiano, podemos observar desde coisas naturais até a construções humanas. A simetria é um artifício muito usado pelos homens em diversas áreas e muitos a vêem como sinônimo de beleza. Porém, ela já estava presente na natureza, antes da mesma ser utilizada por nós, como podemos ver nos exemplos a seguir.

Figura 5: Simetria na natureza

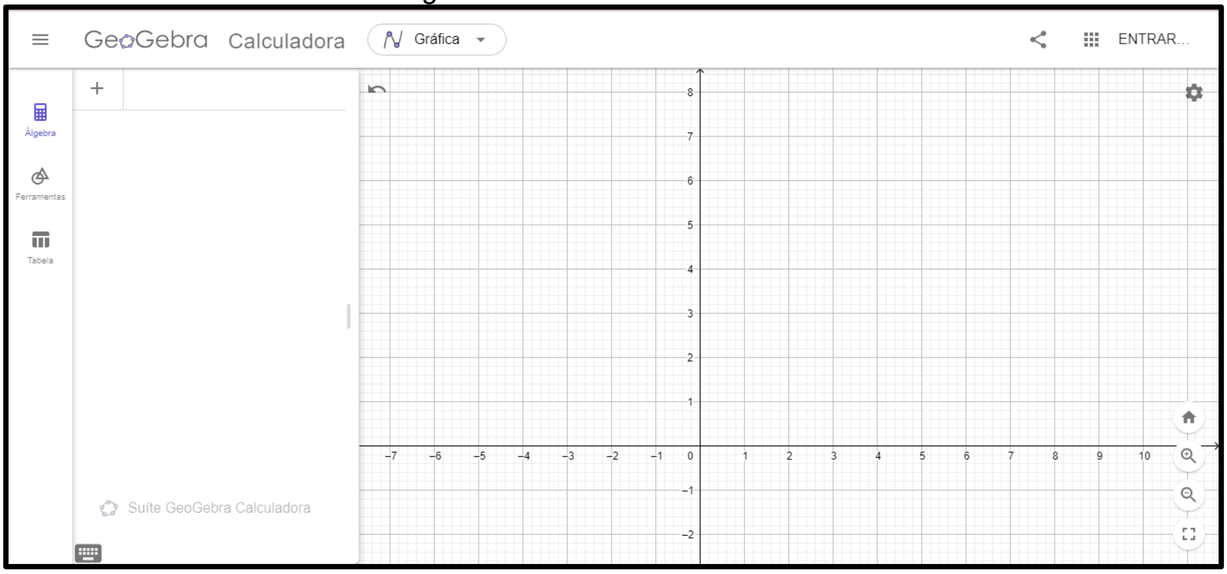
Nesses quatro exemplos, podemos ver a beleza da simetria nas asas de uma borboleta, em um flor, em uma folha de palmeira e no rosto de uma coruja, confirmando que a simetria está presente na natureza antes mesmo dos humanos começarem a utilizá-la.

Fonte: Elaboração própria.

Em seguida, serão recordados conceitos da Função Quadrática e sua interpretação geométrica, destacando os principais elementos geométricos presentes na parábola, em especial o eixo de simetria, os zeros e o vértice. A interpretação geométrica da função quadrática será apresentada por meio do *software* GeoGebra a partir de construções elaboradas pelo grupo que serão apresentadas no decorrer da aula. O *GeoGebra* é um *software* de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos. Sua interface (Figura 3) é de fácil manuseio e as construções elaboradas pelo grupo podem ser acessadas por meio dos *links* a seguir:

- https://www.geogebra.org/m/qjuehvdh
- https://www.geogebra.org/m/fwd2bj7j
- https://www.geogebra.org/m/aufuvthr

Figura 3: Interface do GeoGebra



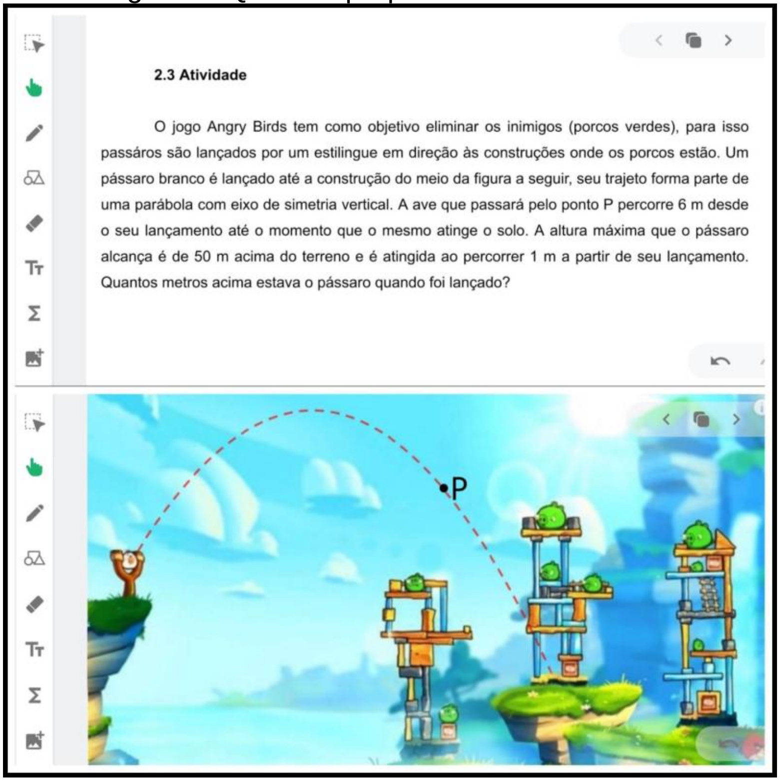
Fonte: Captura de tela.

Depois da explicação sobre o conceito de simetria na parábola, realizaremos com os alunos a Atividade 2.3 (Figura 4) visando proporcionar aos alunos um momento de fixação e compreensão do que foi explicado até esse momento. A referida atividade consiste em um problema, elaborado pelo grupo, utilizando uma ilustração que tem por base o jogo do Angry Birds. O Angry Birds (Figura 5) é um jogo de ação desenvolvido pela Rovio Mobile, da Finlândia, na qual o jogador utiliza um estilingue para lançar pássaros contra porcos verdes dispostos em estruturas constituídas de vários materiais, com a intenção de destruir todos os porcos do cenário. O jogo tem sua versão para Android e para iOs e pode ser encontrado através dos links disponibilizados a seguir:

- Android - https://play.google.com/store/apps/details?id=com.rovio.baba
- iOs - https://apps.apple.com/us/app/angry-birds-reloaded/id1539172625

A ilustração presente na atividade 2.3 também foi feita pelo grupo, sendo colocada a ilustração do jogo no *software* GeoGebra, uma parábola para auxiliar na imagem e o ponto P. A ilustração tem por objetivo auxiliar o aluno ao entendimento da questão e mostrar a parábola para o mesmo, fazendo-o ver a posição do ponto P citado na questão e auxiliando nas construções, tanto do eixo de simetria quanto do plano cartesiano.

Figura 4: Questão proposta na Atividade 2.3



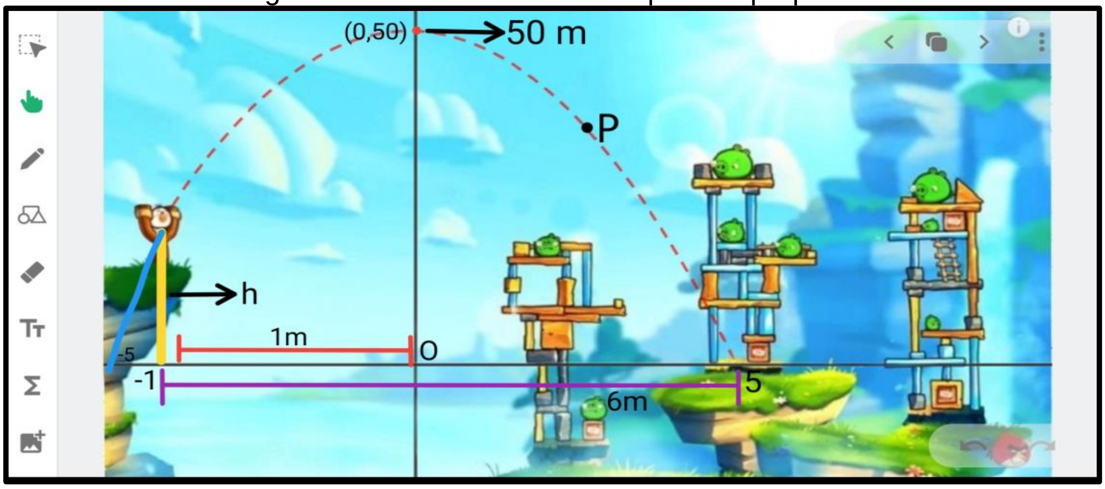
Fonte: Elaboração própria

Figura 5: Angry Birds

Fonte: https://play-lh.googleusercontent.com/JtRbt-R1yTvjNSQYCUg0GuOyXxcHyjRFtN5sUqC5z4g2mBKZcCOPrNJjdJ-tdpIoo1s=s180-rw

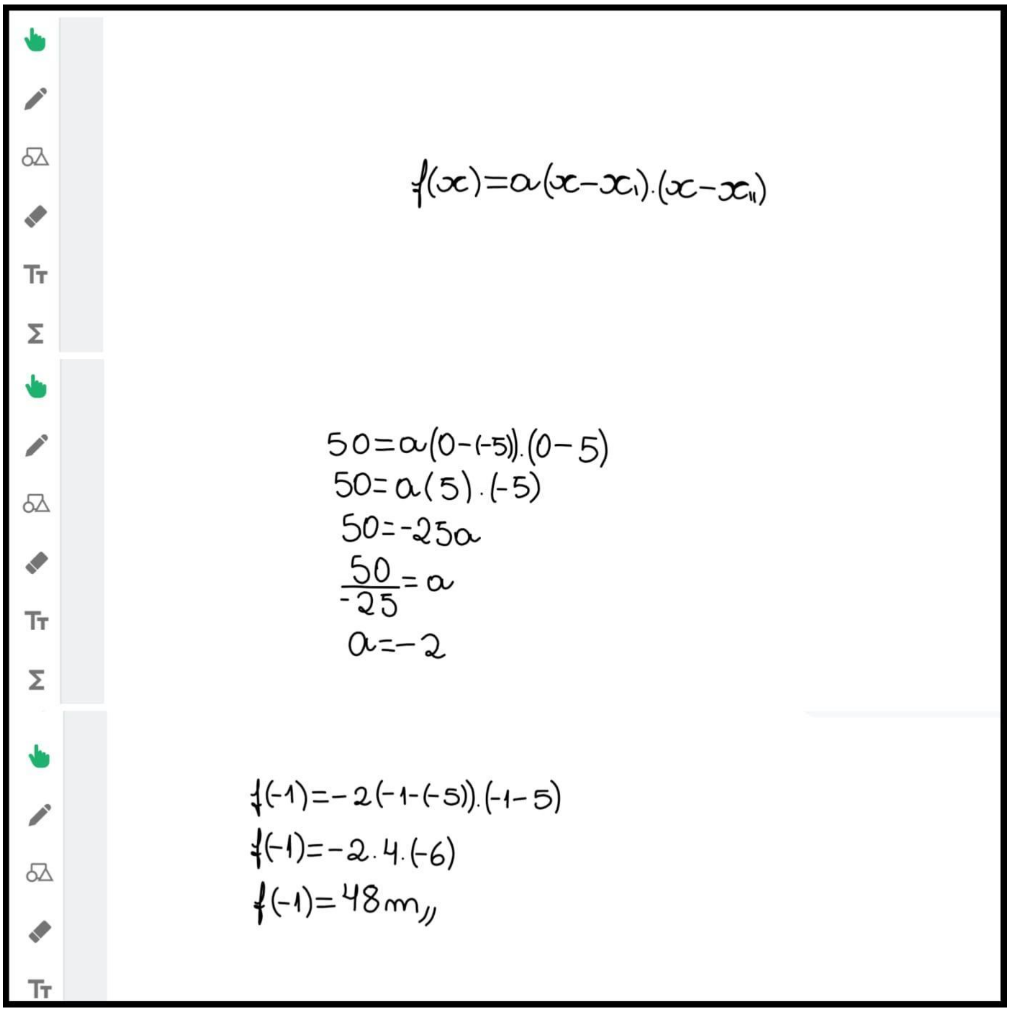
Após apresentar a questão para os alunos, prosseguiremos com o desenvolvimento da questão proposta (Figura 6), primeiramente marcando os pontos e valores destacados no enunciado na ilustração dada, depois mostrando a forma fatorada da função quadrática, visto que a questão fornecia os zeros da função e o vértice. Tendo essas informações, facilmente encontramos o valor de “*a*” e, com isso, a questão é rapidamente facilitada.

Figura 6: Desenvolvimento da questão proposta



Fonte: Elaboração própria

Figura 7: Desenvolvimento da questão proposta



Fonte: Elaboração própria

A questão será exibida por meio do *Live Board* (Figura 7), que é um aplicativo grátis que consiste em um quadro branco interativo, que permite desenhar, visualizar ideias e trabalhar em grupo, funcionando de forma offline ou online, com colaboração em tempo real de diversas pessoas, mesmo quando em diferentes locais. O aplicativo pode ser encontrado tanto para Android quanto para iOs e está disponibilizado nos links a seguir:

Android - play.google.com/store/apps/details?id=com.inconceptlabs.liveboard.

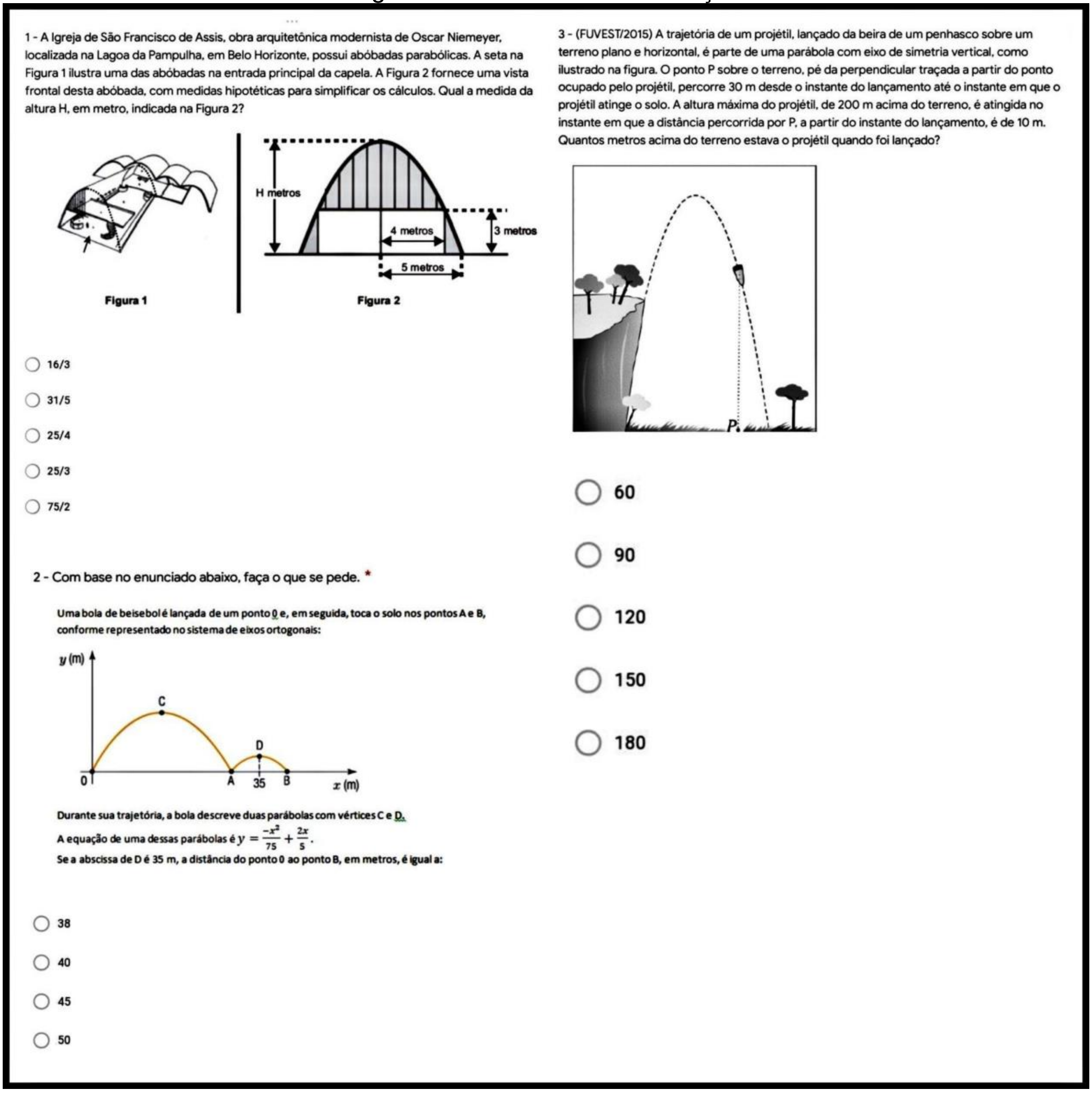
iOs - https://apps.apple.com/us/app/whiteboard-by-liveboard/id1132607923

Figura 8: LiveBoard

Fonte: play.google.com/store/apps/details?id=com.inconceptlabs.liveboard

Por conseguinte, serão apresentadas aplicações da Função Quadrática em situações da vida, elementos importantes da parábola e aplicações da simetria na Função Quadrática. Em seguida será disponibilizado a Atividade de Verificação (Figura 9) contendo 3 questões, que os alunos farão livremente sem a intervenção dos professores em formação. As questões têm por objetivo determinar pontos simétricos em relação ao eixo de simetria na parábola e o vértice, determinando o próprio eixo referente ao que foi explicado para que os alunos possam demonstrar o conhecimento adquirido no decorrer da aula.

Figura 9: Atividade de Verificação



1 - A Igreja de São Francisco de Assis, obra arquitetônica modernista de Oscar Niemeyer, localizada na Lagoa da Pampulha, em Belo Horizonte, possui abóbadas parabólicas. A seta na Figura 1 ilustra uma das abóbadas na entrada principal da capela. A Figura 2 fornece uma vista frontal desta abóbada, com medidas hipotéticas para simplificar os cálculos. Qual a medida da altura H, em metro, indicada na Figura 2?

- 16/3
- 31/5
- 25/4
- 25/3
- 75/2

2 - Com base no enunciado abaixo, faça o que se pede. *

Uma bola de beisebol é lançada de um ponto 0 e, em seguida, toca o solo nos pontos A e B, conforme representado no sistema de eixos ortogonais:

Durante sua trajetória, a bola descreve duas parábolas com vértices C e D.
A equação de uma dessas parábolas é $y = \frac{-x^2}{75} + \frac{2x}{5}$.
Se a abscissa de D é 35 m, a distância do ponto 0 ao ponto B, em metros, é igual a:

- 38
- 40
- 45
- 50

3 - (FUVEST/2015) A trajetória de um projétil, lançado da beira de um penhasco sobre um terreno plano e horizontal, é parte de uma parábola com eixo de simetria vertical, como ilustrado na figura. O ponto P sobre o terreno, pé da perpendicular traçada a partir do ponto ocupado pelo projétil, percorre 30 m desde o instante do lançamento até o instante em que o projétil atinge o solo. A altura máxima do projétil, de 200 m acima do terreno, é atingida no instante em que a distância percorrida por P, a partir do instante do lançamento, é de 10 m. Quantos metros acima do terreno estava o projétil quando foi lançado?

- 60
- 90
- 120
- 150
- 180

Fonte: Elaboração própria.

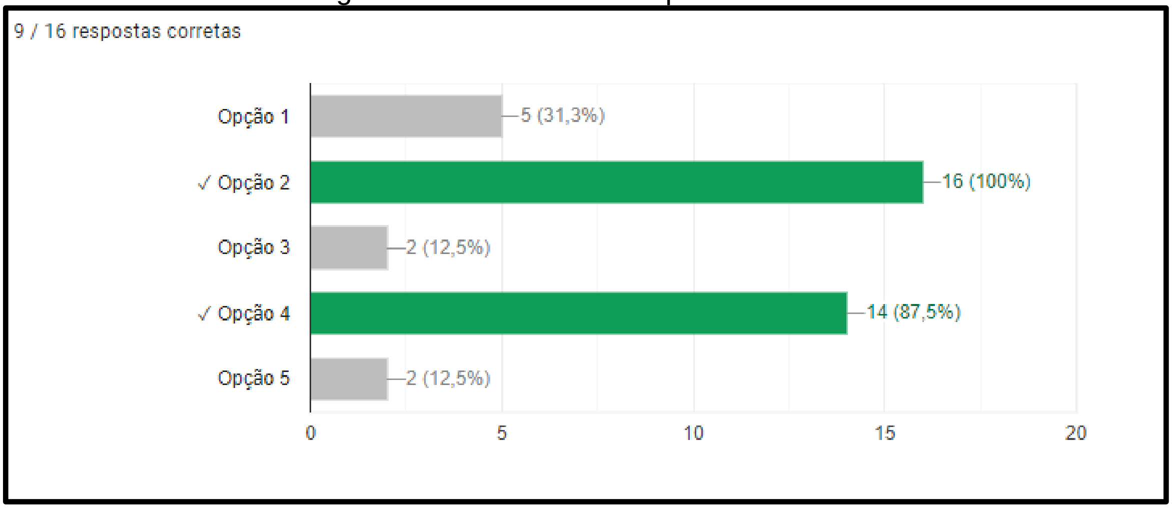
Após a devolução da atividade pelos alunos, será feita a correção das questões presentes na Atividade. O objetivo com esta correção após a devolutiva é para que os resultados a serem analisados não sofram interferência do grupo.

2.2.2) Experimentação da sequência didática na turma do LEAMAT II

A sequência didática foi aplicada na turma do LEAMAT II no dia 30 de novembro de 2021 de forma remota por meio da plataforma *Google Meet*, em uma turma do 5.° período de Licenciatura em Matemática. No dia da experimentação estavam presentes 14 alunos, que foram os sujeitos dessa análise.

A aula durou cerca de uma hora e quarenta e cinco minutos, na qual todos os membros do grupo participaram. A mesma foi iniciada explicando o conceito de simetria e o eixo de simetria. Ao concluir ambos os assuntos, foi aplicado a Atividade 1, nela foram obtidas 16 respostas, apresentadas a partir de um gráfico de barras horizontais com o resumo das respostas da Atividade 1 (Figura 10), que foram gerados automaticamente pelo *Google Forms.* Das 16 respostas obtidas, para efeito de análise, foram descartadas 2 respostas corretas realizadas por membros do grupo.

Figura 10: Resumo das respostas da Atividade 1.

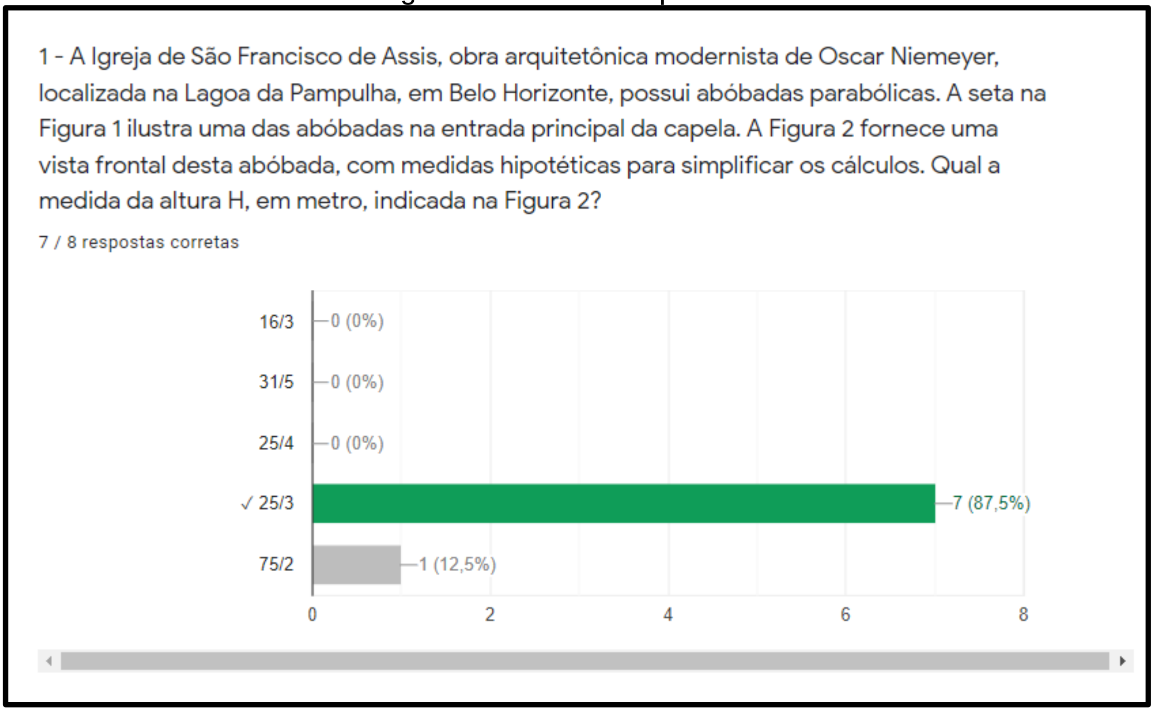


Fonte: Protocolo de pesquisa.

A atividade consistia em 5 figuras das quais apenas 2 representavam figuras simétricas, conforme definido pelo grupo, podendo o aluno marcar quantas opções desejar, com as opções corretas sendo apenas 2 e 4. Cabe destacar que 5 alunos marcaram a opção do paralelogramo, levando a uma inconclusão para entendermos se os alunos realmente entenderam sobre as figuras simétricas. Das 14 respostas consideradas, 12 marcaram as opções 2 e 4 simultaneamente. Desses 12, 5 marcaram também uma terceira alternativa, tornando assim a resposta da atividade incorreta, portanto, apenas 7 estavam corretas, podemos compreender que metade dos que estavam presentes compreenderam o que é simetria e o eixo de simetria. Dando continuidade, o grupo apresentou sobre simetria na natureza, nas construções, e antes do segundo formulário que era composto por questões de verificação foi feito uma explicação sobre a função quadrática seguida de questão com o tema e por fim, a função quadrática no cotidiano.

A seguir, temos o segundo formulário, que obtivemos 8 respostas, sendo uma delas um membro do grupo, logo, deveremos excluí-la. O membro respondeu as 3 perguntas erradas, pois o objetivo era apenas testar a plataforma. A seguir, serão apresentados os dados da questão 1 (Figura 11).

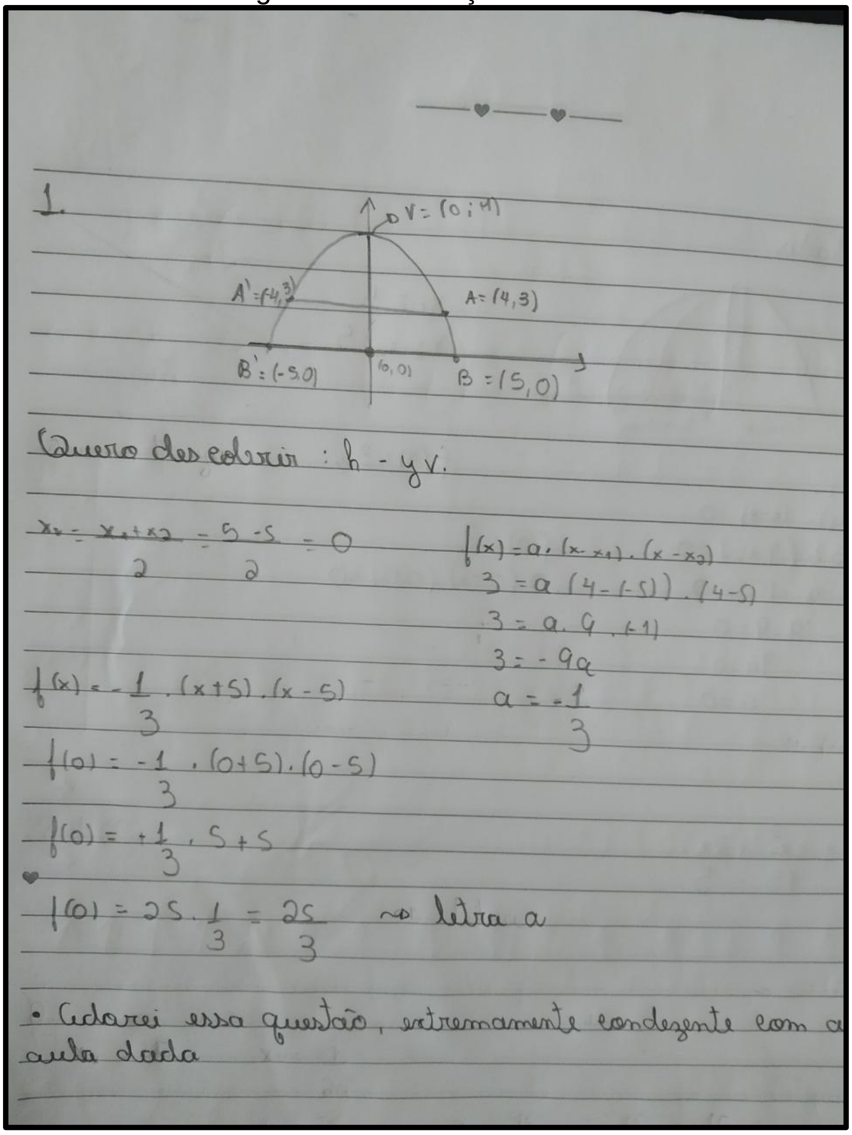
Figura 11: Dados da questão 1



Fonte: Formulário do google

A questão 1 atingiu seu objetivo, visto que todos os alunos conseguiram resolver com tranquilidade e utilizando os conceitos de simetria e eixo de simetria vistos na aula, como podemos ver na resolução do Aluno A (Figura 12).

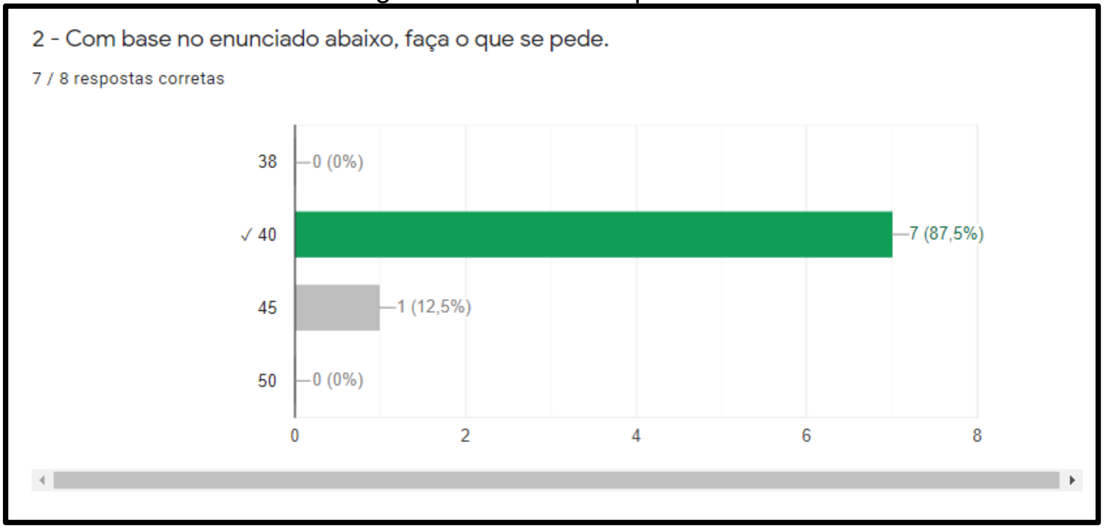
Figura 12: Resolução Aluno A



Fonte: Protocolo de observação.

Em seguida, os alunos realizaram a questão 2, que também atingiu o seu objetivo, visto que todos os alunos conseguiram resolver e acertar a atividade sem apresentar dúvidas notáveis, como pode ser visto no gráfico que apresenta os dados da questão 2 (Figura 13).

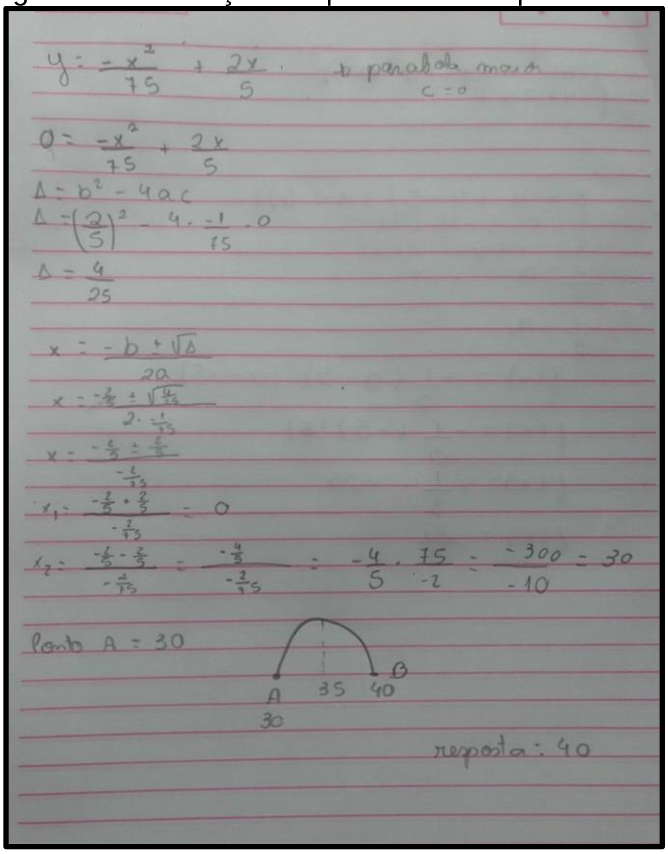
Figura 13: Dados da questão 2



Fonte: Formulário do google

Ao analisarmos a resolução da questão 2 feita pelo aluno B (Figura 14), conseguimos concluir que o conceito de pontos simétricos visto no trabalho auxiliou o aluno no fim da questão, poupando o mesmo de fazer mais uma conta.

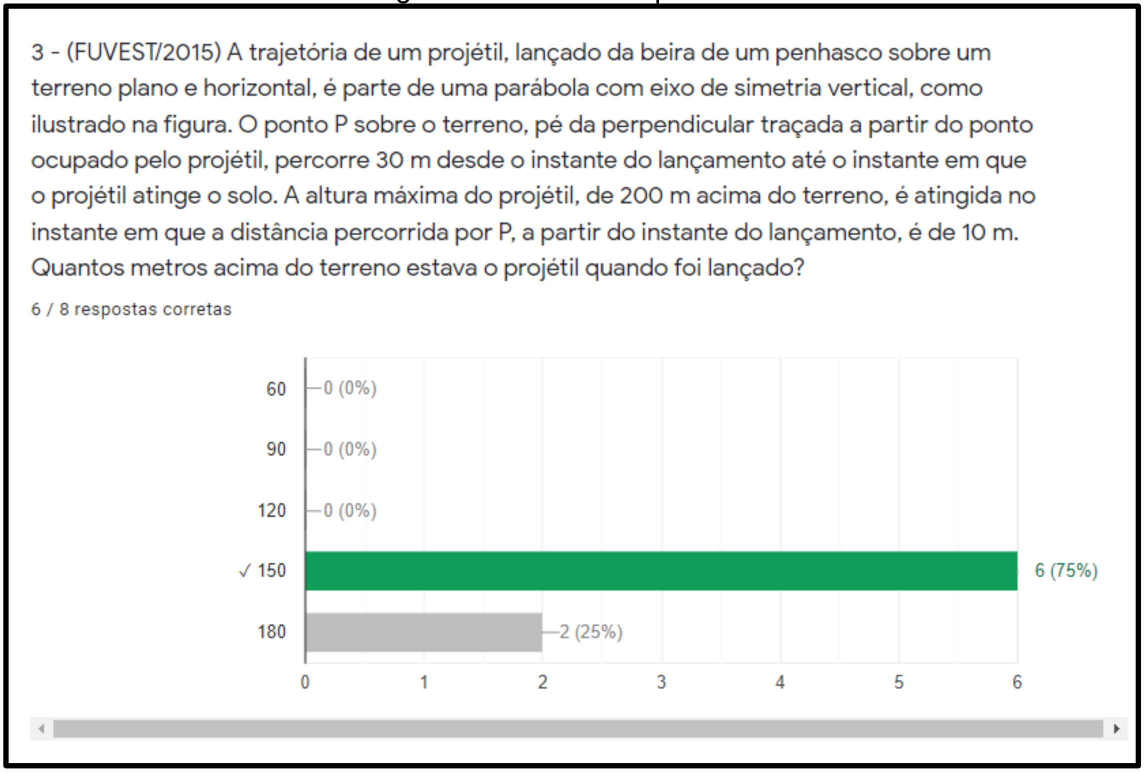
Figura 14: Resolução da questão 2 feita pelo aluno B



Fonte: Protocolo de observação

Na terceira, e última, questão da Atividade, tivemos alguns problemas quanto ao enunciado, que gerou dúvidas nos alunos. A dúvida principal vinha do estranhamento com o termo “pé da perpendicular”, que ocasionou no erro da questão para um aluno, como pode ser visto nos dados da questão 3 (Figura 15), mas a maioria conseguiu realizar e acertar a questão mesmo com o ocorrido.

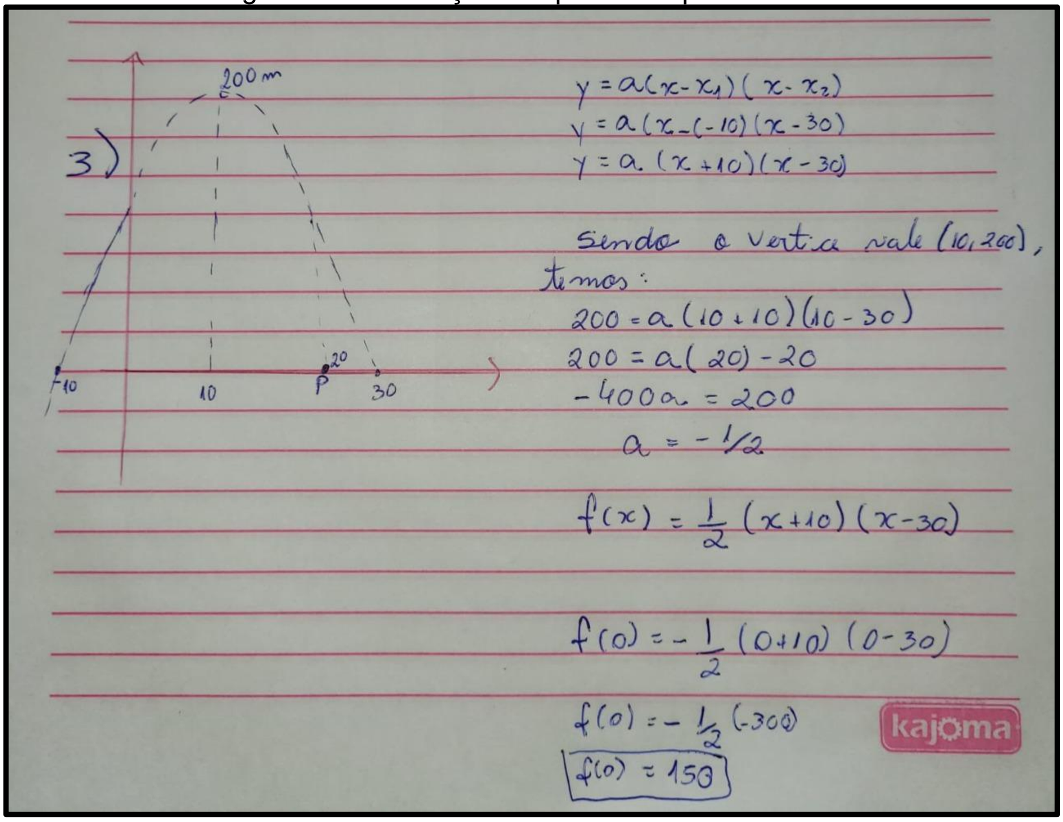
Figura 15: Dados da questão 3



Fonte: Formulário do google

Como podemos ver na resolução da questão 3 feita pelo aluno C (Figura 16), o aluno conseguiu entender e aplicar o conceito de eixo de simetria e pontos simétricos vistos na aula, ao traçar o eixo e utilizar da forma fatorada para realizar a atividade e encontrar o ponto desejado.

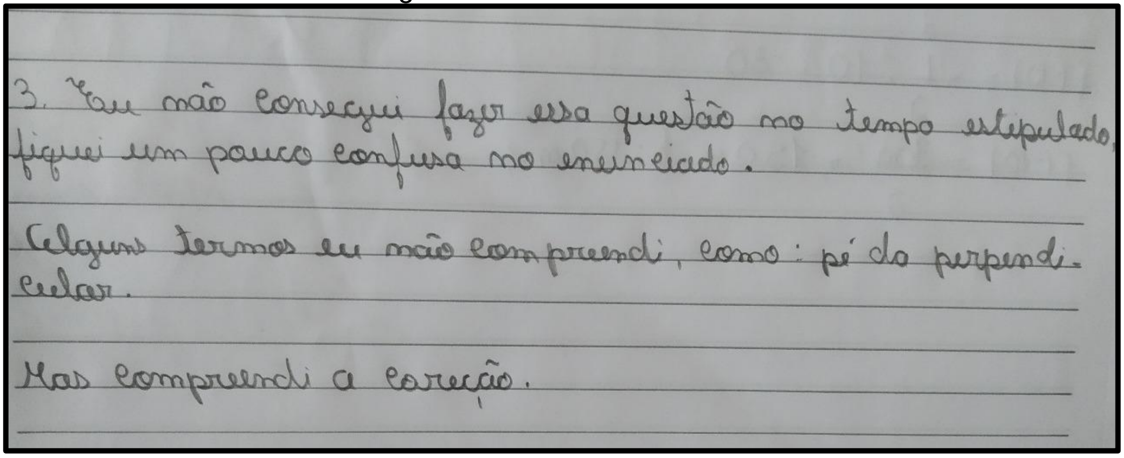
Figura 16: Resolução da questão 3 pelo aluno C



Fonte: Protocolo de observação

Como foi dito anteriormente, alguns alunos apresentaram dúvida em relação ao enunciado da questão 3, como pode ser observado no relato no Aluno A (Figura 17). O Aluno A obteve sucesso na questão 1 e na questão 2, mostrando domínio do tema, mas não conseguiu realizar a questão 3 por conta do enunciado e do não entendimento do termo “pé da perpendicular”.

Figura 17: Relato do Aluno A


3. Eu não consegui fazer essa questão no tempo estipulado, fiquei um pouco confusa no enunciado.

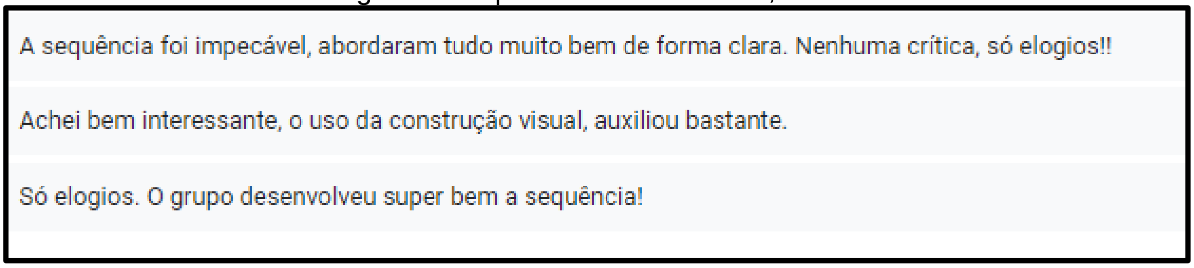
Alguns termos eu não compreendi, como: pé do perpendicular.

Mas compreendi a correção.

Fonte: Protocolo de observação.

Por fim, foi enviado um formulário onde a turma poderia contribuir com sugestões para aperfeiçoar a sequência, dentre eles podemos observar, por exemplo, as opiniões dos alunos D, E e F (Figura 18).

Figura 18: Opiniões dos alunos D, E e F.


A sequência foi impecável, abordaram tudo muito bem de forma clara. Nenhuma crítica, só elogios!!

Achei bem interessante, o uso da construção visual, auxiliou bastante.

Só elogios. O grupo desenvolveu super bem a sequência!

Fonte: Protocolo de observação.

Lendo os comentários da turma podemos compreender que a aplicação atingiu seu objetivo, o conteúdo foi bem desenvolvido e a turma conseguiu entender as relações da simetria numa parábola.

Porém, mesmo com esses elogios, a turma em conjunto com a orientadora sugeriram modificações na questão número três proposta no último formulário, como pode ser visto no relato do aluno G (Figura 19), pois consideraram o enunciado confuso.

Figura 19: Relato do aluno G

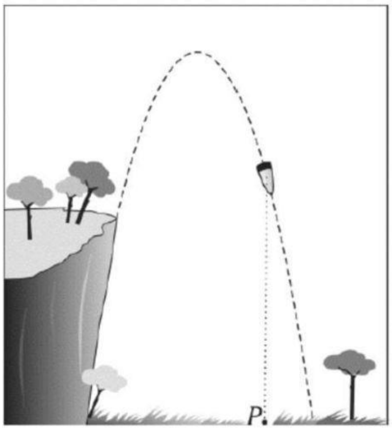
> Gostei muito do tema escolhido porque muitas vezes o eixo de simetria é explicado rapidamente, sem importância. A abordagem foi muito legal, a apostila conceituando simetria antes da aula ficou muito boa. Gostei do Applet do GeoGebra e da apresentação/demonstração que fizeram. A questão 3 pode ser adaptada porque é um tanto confusa, mesmo sendo de vestibular.

Fonte: Protocolo de observação.

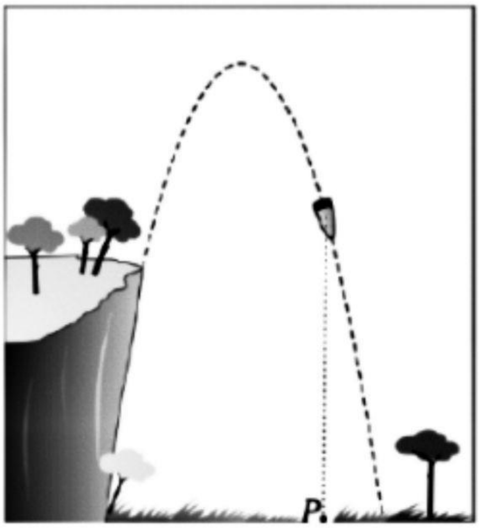
O grupo acatou as decisões da turma e da orientadora e decidiu por adaptar a questão (Figura 20), trocando o termo “pé da perpendicular” por “projeção do projétil no solo”, pois achamos que, dessa forma, ficaria mais claro o que está sendo proposto pela questão.

Figura 20: Questão inicial e questão adaptada

3 - (FUVEST/2015) A trajetória de um projétil, lançado da beira de um penhasco sobre um terreno plano e horizontal, é parte de uma parábola com eixo de simetria vertical, como ilustrado na figura. O ponto P sobre o terreno, pé da perpendicular traçada a partir do ponto ocupado pelo projétil, percorre 30 m desde o instante do lançamento até o instante em que o projétil atinge o solo. A altura máxima do projétil, de 200 m acima do terreno, é atingida no instante em que a distância percorrida por P, a partir do instante do lançamento, é de 10 m. Quantos metros acima do terreno estava o projétil quando foi lançado?



3 - (FUVEST/2015 - adaptada) A trajetória de um projétil, lançado da beira de um penhasco sobre um terreno plano e horizontal, é parte de uma parábola com eixo de simetria vertical, como ilustrado na figura. Sendo P a projeção do projétil no solo, este ponto percorre 30m do instante do lançamento até o instante que o projétil atinge o solo. A altura máxima do projétil, de 200 m acima do terreno, é atingida no instante em que a distância percorrida por P, a partir do instante do lançamento, é de 10 m. Quantos metros acima do terreno estava o projétil quando foi lançado? *



Fonte: Formulário do Google

3) RELATÓRIO LEAMAT III

3.1 Atividades desenvolvidas

No dia 07/02/2022 ocorreu o primeiro encontro com a orientadora, todos os grupos estavam presentes e a mesma explicou como funcionará o LEAMAT III e a elaboração do e-Book. Ocorreu uma troca de orientadores no segmento de Álgebra, por isso tivemos que mandar nosso relatório e sequência didática para a nova professora para que a mesma lesse e trouxesse contribuições na próxima aula.

No encontro do dia 14/02/2022 a orientadora trouxe as suas contribuições a partir da leitura do trabalho e explicou como devemos moldar a escrita para o e-Book, pois ele deve ser como um manual para o professor que irá lê-lo.

Os encontros do dia 21/02/2022 até o dia 21/03/2022 foram voltados para a escrita da introdução, da apresentação e da elaboração da sequência didática do e-Book em que todo novo encontro o grupo recebia contribuições da orientadora a fim de melhorar o mesmo. Nesses dias também foram escritas algumas informações no relatório.

Os encontros do dia 28/03/2022 ao dia 18/04/2022 destinaram-se à elaboração dos itens 3 e 4 do e-Book, Proposta Didática e Considerações Finais respectivamente. Além disso, foram feitas atualizações no Relatório e o Item atividades desenvolvidas foi criado.

Do dia 25/04/2022 ao dia 02/05/2022 foram realizados os ajustes finais na parte de formatação do e-Book com o intuito de enviar a versão final no dia 25 para a orientadora dar entrada ao número do ISBN.

Do dia 09/05/2022 ao dia 16/05/2022 após obter o número do ISBN, o grupo postou o e-Book no site da Amazon. E também terminaram o tópico de Atividades desenvolvidas e as alterações finais do relatório, conseguindo assim enviar o mesmo pronto para a orientadora.

3.2 Elaboração da sequência didática

A sequência didática é elaborada para ser aplicada de forma remota , visto que a mesma foi desenvolvida durante uma pandemia, à alunos que estejam no primeiro ano do ensino médio, porém a mesma também pode ser aplicada de forma presencial. Tendo em vista que já tenham estudado anteriormente a Função Polinomial do Segundo Grau (Função Quadrática). É feito o uso do termo função quadrática por entender que essa expressão remete mais diretamente à sua interpretação geométrica, que é uma parábola, objeto a ser estudado pelo grupo.

3.2.1 Versão final da sequência didática

A sequência didática está dividida cinco etapas, sendo:

1.º etapa: Estudo da simetria, do eixo de simetria e dos conceitos que a cercam.

2.º etapa: Estudo da função Quadrática e a simetria presente em sua representação gráfica.

3.º etapa:- Aplicações da função quadrática no cotidiano

4.º etapa: Aplicações da Simetria na Função Quadrática.

5.º etapa: Realização da Atividade de Verificação.

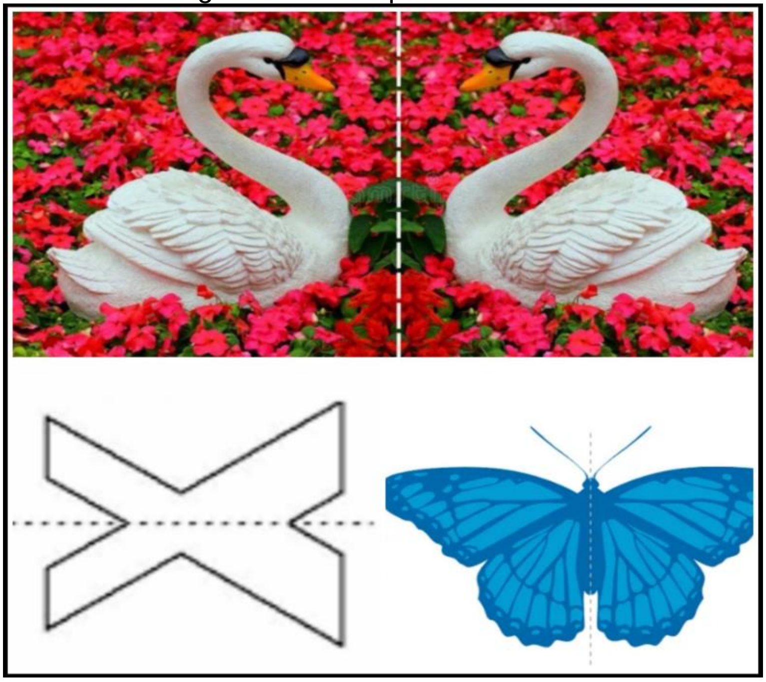
1.º etapa: Estudo da simetria, do eixo de simetria e dos conceitos que a cercam.

Na primeira etapa deste trabalho vamos trabalhar o conceito de simetria, pois para entender o eixo de simetria na parábola, os alunos devem entender o que é e como a mesma funciona.

Existem muitas definições a cerca de simetria e ela acaba sendo difícil de definir com termos matemáticos, então será passado a ideia de simetria para os alunos, considerando uma figura simétrica se conseguimos dividi-la em partes iguais e que as partes resultantes dessa divisão coincidam perfeitamente quando sobrepostas. Basicamente, quando pensamos em simetria, pensamos em proporções perfeitas e em dividir objetos em partes iguais.

Entendido o que é simetria, iremos avançar para a definição de eixo de simetria, que diferentemente da mesma, tem uma definição em termos matemáticos. O eixo de simetria é uma reta que divide um plano em dois semiplanos de forma que, cada ponto de uma figura contida em um semiplano que ele determina corresponde a um outro ponto no semiplano oposto com igual distância do eixo. Os alunos devem entender que se dividirmos uma figura em partes iguais, cada ponto de uma parte tem um ponto correspondente na outra parte. Utilizaremos as definições para fazer o aluno refletir sobre a simetria axial, que será a utilizada no nosso trabalho. Para afirmar os dois conceitos apresentados, será apresentado algumas figuras com o eixo de simetria traçado

Figura 21: Exemplos de simetria



Fonte: http://nfcomgeral.blogspot.com/2015/08/19-imagens-que-provam-simetria-perfeita.html

Uma terceira definição é a de figuras simétricas, pois vamos juntar os dois conceitos aprendidos anteriormente para chegarmos ao objetivo desta etapa. Definimos figuras simétricas como aquelas que contenham no mínimo um eixo de simetria passando pelo seu centro, ou seja, se traçarmos uma reta dividindo uma figura ao meio, as duas partes quando sobrepostas coincidem, passando novamente a ideia de simetria axial e normalizando para o aluno a ideia de que a parábola é uma figura simétrica e que o vértice funciona como o seu ponto médio (ou centro). Após essa definição traremos alguns exemplos de figuras simétricas com seu eixo de simetria traçado.

Posteriormente será enviada a Atividade 1, produzida no *Google Forms,* que pode ser acessada pelo link: https://forms.gle/U8ZNW1L7MLTx811E8. A Atividade 1 tem por objetivo que os alunos identifiquem quais imagens são figuras simétricas, considerando o eixo de simetria na vertical e passando pelo centro da figura, conforme definido anteriormente com os alunos, incluímos a parábola nessa atividade para checarmos se os alunos conseguiram chegar a conclusão que a parábola é simétrica somente com as definições apresentadas.

Para finalizar esta etapa será abordada a naturalidade da simetria, mostrando a mesma em diversos bichos e plantas presentes na natureza (Apendice C)para fazer com que o aluno entenda que a simetria já existia antes mesmo dos seres humanos a utilizarem como ferramenta. Para sinalizar como ela pode ser utilizada como ferramenta por nós, será mostrado alguns exemplos da simetria nas construções para mostrar a importância da mesma em nosso cotidiano.

2.º etapa: Estudo da função Quadrática e a simetria presente em sua representação gráfica

Após a primeira etapa é esperado que os alunos entendam os conceitos de simetria e eixo de simetria, sendo assim, o próximo objetivo é que os mesmos consigam enxergar a simetria presente na representação gráfica de uma Função Polinomial do Segundo Grau, ou seja, de uma parábola.

Para isso, será apresentado a definição de uma Função Polinomial do Segundo Grau presente no Apêndice B.

A definição está presente no Apêndice B deste relatório. Entendemos que apenas a definição não traria um efeito visual para os alunos, com isso em mente, é construído um gráfico no GeoGebra (https://www.geogebra.org/m/qjuehvdh). Esse objeto de estudo vem com um cenário do jogo *Angry Birds* com a proposta que o professor faça uma ligação entre o jogo e a representação gráfica da função.

Angry Birds é um jogo gratuito disponível para Android e IOS, nele temos como objetivo lançar pássaros em construções dos vilões, que seriam os porcos, com intuito de destruí-las, esse lançamento forma uma parábola, daí a ligação do jogo com o conteúdo a ser estudado.

No gráfico além do cenário, teremos uma Função Quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, os coeficientes a, b e c são variáveis e podemos alterá-las de -5 a 5 por meio dos controles deslizantes, também presentes na construção. Ao abrir a construção é interessante posicionar a parábola de forma que possa ser vista a trajetória do pássaro até a construção a ser destruída.

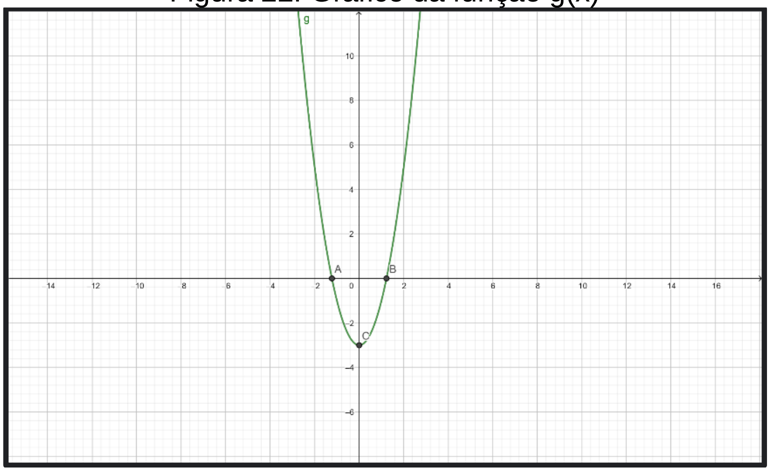
O objetivo desse experimento é que os alunos possam concluir que:

- Quando a > 0 a concavidade da parábola é voltada para cima e quando a < 0 a concavidade da parábola é voltada para baixo;

- Ao movimentar o elemento b ocorre uma translação horizontal na parábola, pois muda a inclinação da reta de acordo com a reta tangente que é feita entre a interseção da parábola com o eixo Y;
- Ao movimentar o elemento c ocorre uma transformação vertical na parábola.

Após a compreensão de Função Quadrática os alunos são introduzidos para o conceito de simetria na parábola, também por meio de uma construção no *GeoGebra*. Na função $g(x) = x^2 - 3$ (Figura 22) disponível em https://www.geogebra.org/m/fwd2bj7 é destacado alguns pontos importantes como o x do vértice (Xv) e as raízes ou zeros da função quadrática.

Figura 22: Gráfico da função g(x)



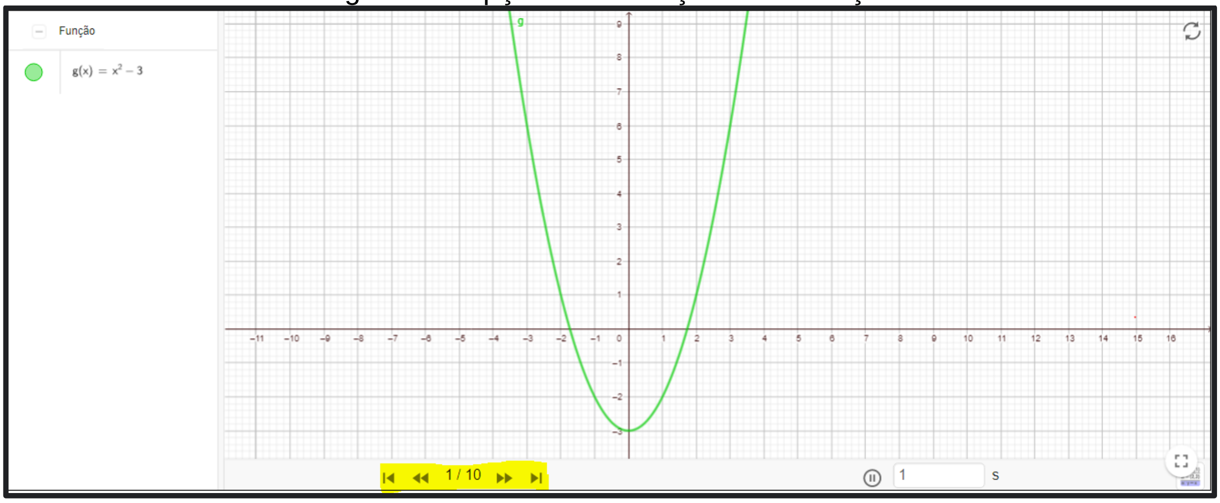
Fonte: Construção própria

Aqui os alunos devem compreender que os zeros ou raízes da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores de x reais tais que $f(x) = 0$, fica condicionada ao fato de $\sqrt{\Delta}$ ser real, sendo $\Delta = b^2 - 4ac$. Assim, temos três casos a considerar, quando $\Delta > 0$, $\Delta < 0$ e $\Delta = 0$, porém para essa aula aborda-se apenas sobre casos no qual $\Delta > 0$ logo, a equação apresentará duas raízes distintas.

Também que o Xv é chamado ponto de máximo da parábola quando a < 0 e ponto de mínimo da parábola quando a > 0, sendo assim, o y do vértice (Yv) é denominado valor máximo quando a < 0 e valor mínimo quando a > 0. O ponto C na função g é o vértice de coordenada (Xv, Yv), portanto ele é denominado ponto máximo ou mínimo da parábola.

Ainda na função $g(x)$, porém na construção https://www.geogebra.org/m/aufuvthr o professor fará uma apresentação por meio de etapas, no *GeoGebra* onde é possível mostrar a simetria da parábola por meio do desenvolvimento de uma construção ao clicar nos ícones grifados em amarelo abaixo, variando as etapas de 1/10 até 10/10.

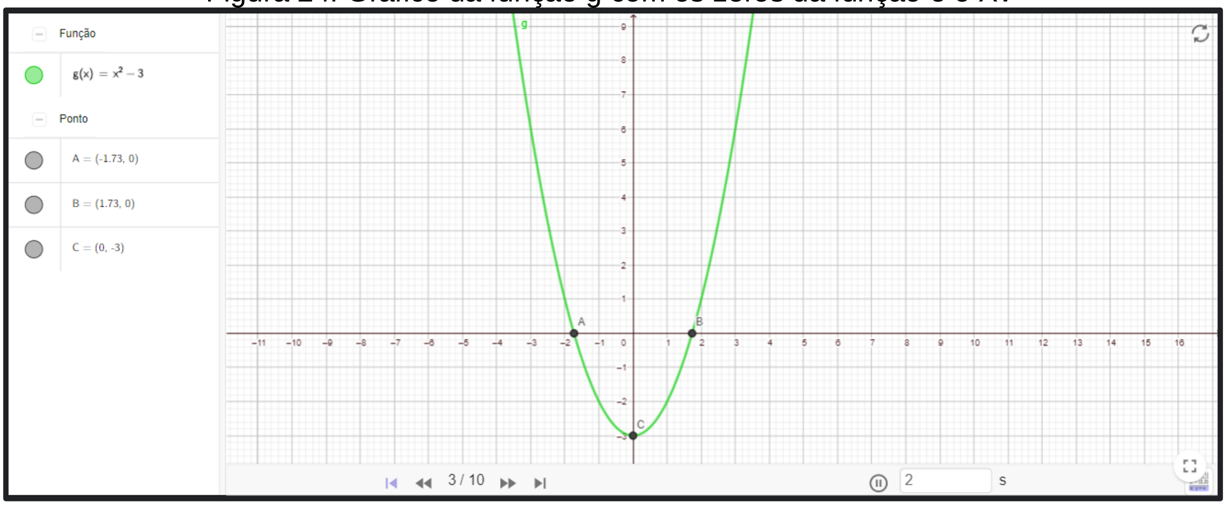
Figura 23: Opções de avanço na construção



Fonte: Construção própria

A construção será iniciada no momento 1/10 e avançada até o momento 3/10 onde estarão presentes os zeros da função e o Xv (Figura 24).

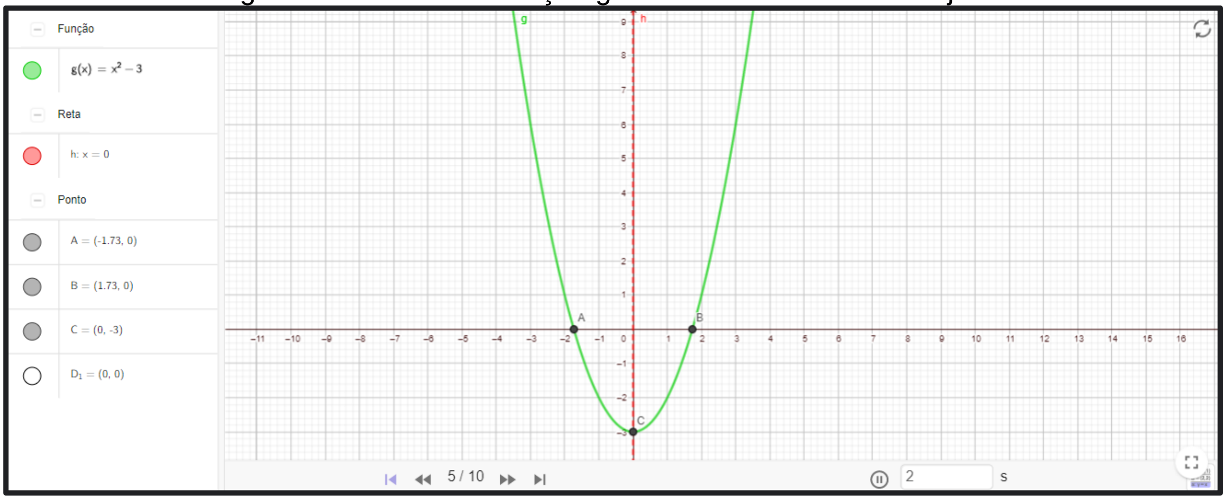
Figura 24: Gráfico da função g com os zeros da função e o Xv



Fonte: Construção própria

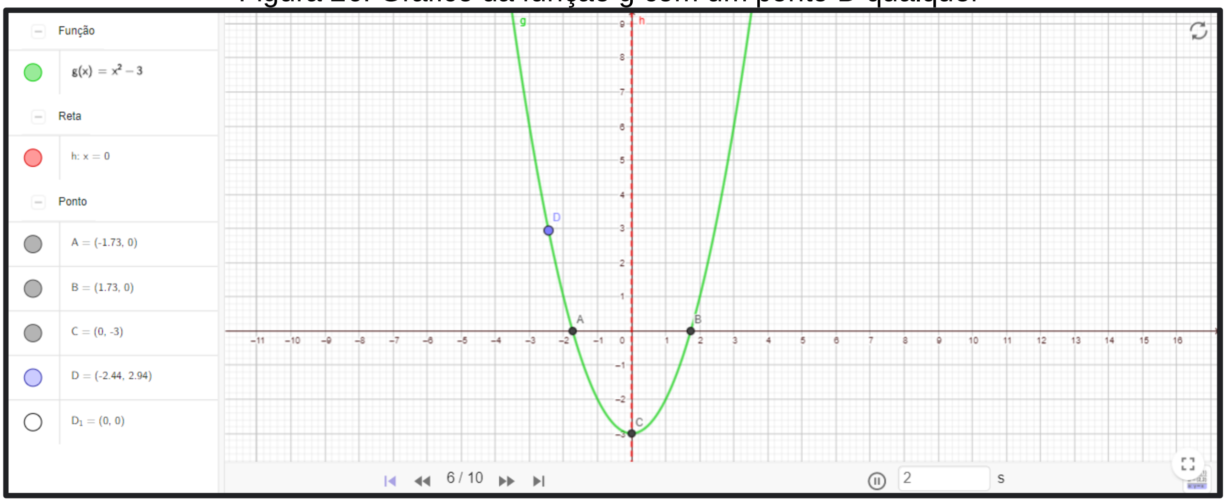
Em 5/10 (figura 25) é possível ver uma linha tracejada vermelha que passa pelo Xv, no momento (6/10 figura 26) é apresentado um ponto D qualquer presente na parábola.

Figura 25: Gráfico da função g com linha vermelha tracejada



Fonte: Construção própria

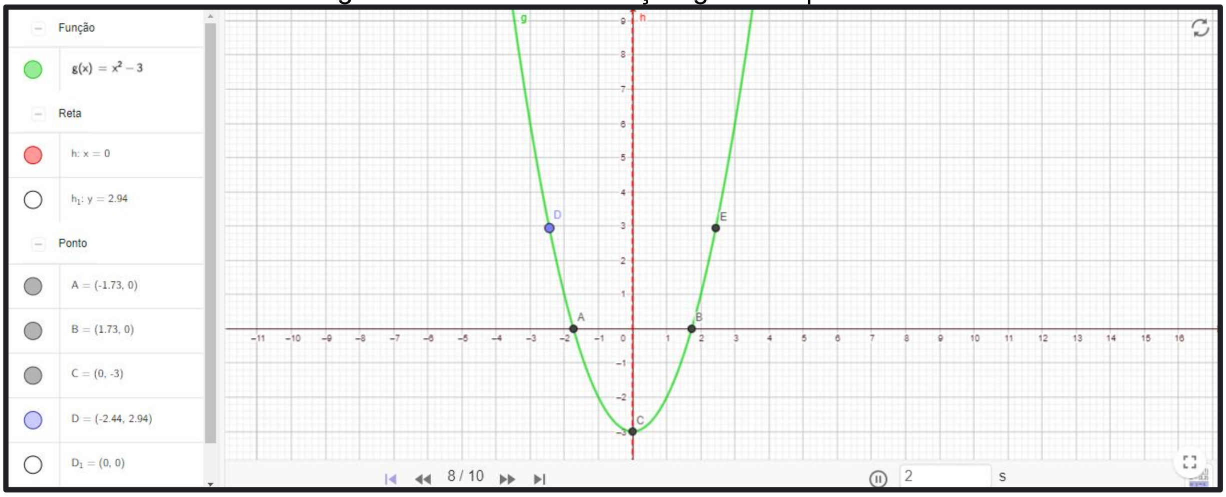
Figura 26: Gráfico da função g com um ponto D qualquer



Fonte: Construção própria

Por meio do ponto D será construído uma reta paralela ao eixo X e a interseção da reta com a parábola gerará o ponto E em 8/10 (Figura 27).

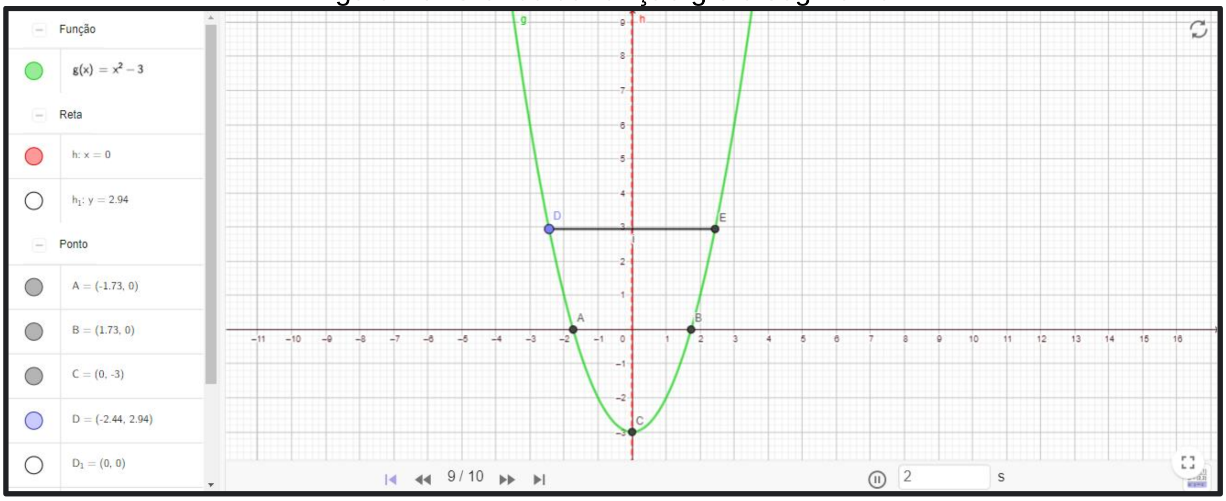
Figura 27: Gráfico da função g com o ponto E



Fonte: Construção própria

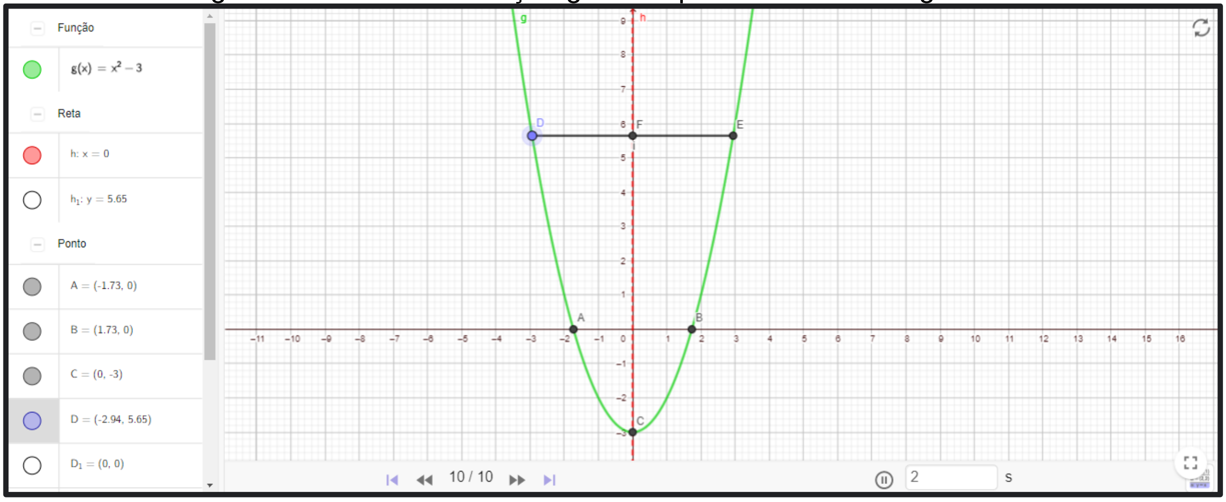
Ao ligarmos os pontos D e E chegamos ao segmento i, em 9/10 (figura 28) podemos esconder a reta paralela ao eixo x, sobrando essa forma apenas o segmento i e a parábola e, em 10/10 (Figura 29) é mostrado o ponto médio do segmento i (ponto F).

Figura 28: Gráfico da função g e o segmento i



Fonte: Construção própria

Figura 29: Gráfico da função g com o ponto médio do segmento i



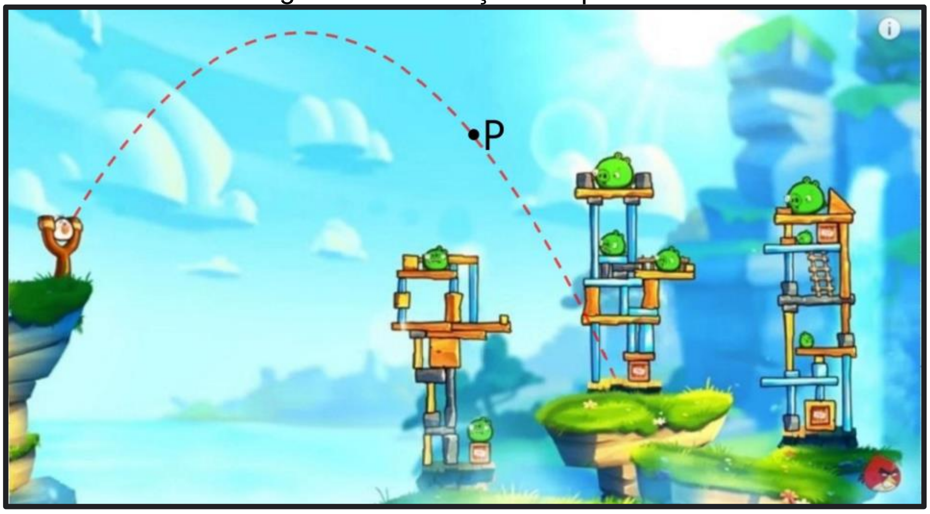
Fonte: Construção própria

Ao final dessa construção os alunos deverão entender que o ponto médio é um ponto que equidista de suas extremidades, ao mover o segmento i pela parábola o ponto F continua presente na reta vermelha tracejada, logo, a mesma é o eixo de simetria da parábola.

Por fim, encerrando a etapa 2 será proposta uma questão para verificação se os alunos conseguiram entender como funciona a simetria em uma parábola, essa questão também está presente no Apêndice B.

A atividade (figura 30) tem como enunciado: O jogo Angry Birds tem como objetivo eliminar os inimigos (porcos verdes), para isso pássaros são lançados por um estilingue em direção as contrações onde os porcos estão. Um pássaro branco é lançado até a construção no meio da figura seguir, seu trajeto forma parte de uma parábola com eixo de simetria vertical. A ave que passará pelo ponto P percorre 6 metros desde o seu lançamento até o momento que o mesmo atinge o solo. A altura máxima que o pássaro alcança é de 50 metros acima do terreno e é atingida ao percorrer 1m a partir do seu lançamento. Quantos metros acima estava o pássaro quando foi lançado?

Figura 30: Ilustração da questão



Fonte: Construção própria

A resolução da questão é feita por meio do aplicativo live board, que é um quadro branco em tempo real para ensinar, orientar, aprender e colaborar.

O primeiro passo é adicionar as afirmações da questão na imagem ilustrativa, adicionando o eixo x e o eixo y, destacando as alturas e as distâncias que já foram citadas no enunciado da questão. Após isso, use a simetria e cite que tudo que acontece de um lado da parábola, acontece do outro. Após destacar e adquirir todas as informações necessárias para resolver a questão, relembre com os alunos a forma fatorada e atribua os valores à fórmula para começar a resolução. A forma fatorada servirá para encontrar o valor de "a". Após isso será utilizado mais uma vez a forma fatorada para encontrar a altura que o pássaro estava quando foi lançado.

3.º etapa:- Aplicações da função quadrática no cotidiano

O objetivo do momento desta etapa é mostrar aos alunos que a Função Quadrática está no seu cotidiano. Assim, é apresentado a eles situações comuns do dia a dia em que a parábola está presente, para em seguida, concluir nomeando os elementos importantes da mesma.

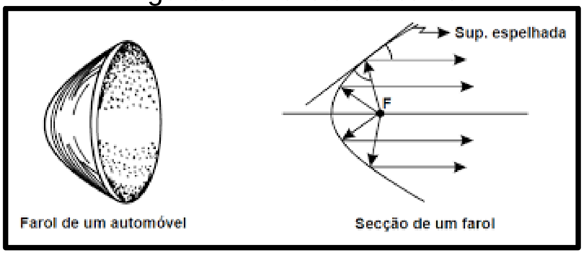
Inicialmente, é feito o seguinte questionamento: O que lançamento de projéteis, antenas parabólicas e campeonatos de futebol têm em comum? É esperado que os alunos deem sugestões e discutam entre si. Após isso, as respostas serão utilizadas para explicar que no campeonato de futebol, o movimento que a bola faz quando um jogador a chuta, é análogo ao movimento de um projétil lançado por um canhão. A imagem utilizada para ilustração está presente no Apêndice A.

Neste momento, convém detalhar a movimentação da bala de canhão e explicar que quando um objeto é lançado no espaço (bala de canhão) tendo em vista alcançar a maior distância possível, tanto horizontalmente quanto verticalmente, a curva que o objeto faz é aproximadamente uma parábola, se considerar que a resistência do ar é pequena ou não existe. O movimento da bala de canhão é acelerado pela ação do campo gravitacional, por isso o lançamento de projéteis é modelado por uma equação do segundo grau.

Após o entendimento dos alunos, deve-se ressaltar que a Função Quadrática tem várias aplicações na vida, serve por exemplo, para calcular o lançamento e o movimento de projéteis como balas de canhão e foguetes, para presumir o ângulo de reflexão de faróis de carros, conjecturar o ângulo da antena parabólica, entre outras coisas.

Pegando um gancho do momento anterior, é esclarecido que a antena parabólica tem esse nome pois possui o formato parabólico e também é explicado como ela funciona. Em seguida, explica-se que os faróis de carro funcionam de maneira análoga à antena parabólica, e portanto possui um formato parabólico e o eixo de Simetria delas também coincide, tendo o foco nessa reta, sendo ele um ponto do eixo de simetria (figura 31).

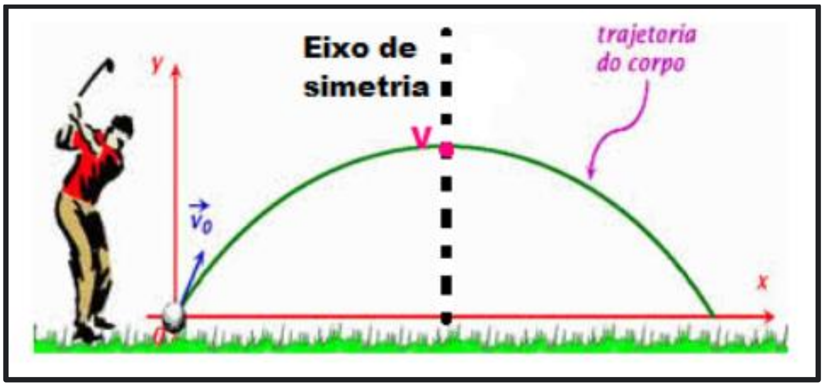
Figura 31: Faróis de carro



Fonte: https://estudandomatematicasite.wordpress.com/2015/12/04/o-comportamento-do-grafico-de-uma-funcao-quadratica-a-famosa-funcao-do-2ograu/

A partir desse momento, é possível ressaltar alguns elementos importantes sobre o gráfico de uma Função Quadrática na vida. Com o objetivo de que o aluno consiga, depois desse tópico, identificar tais elementos.

Figura 32: Jogador de golfe



Fonte: https://www.researchgate.net/figure/Figura-1-Trajetoria-de-um-arremesso-de-peso-trajetoria-de-uma-bola-de-golfe-trajetoria_fig1_329950587

A ilustração é feita utilizando a figura 15 como base, remetendo sempre a ela na hora de explicar que, a maior altura que a bola ou projétil alcançará será a ordenada do ponto máximo da parábola, ou seja, a ordenada do vértice da parábola (Yv). Assim, o ponto V que é o vértice da parábola pertencerá ao eixo de simetria.

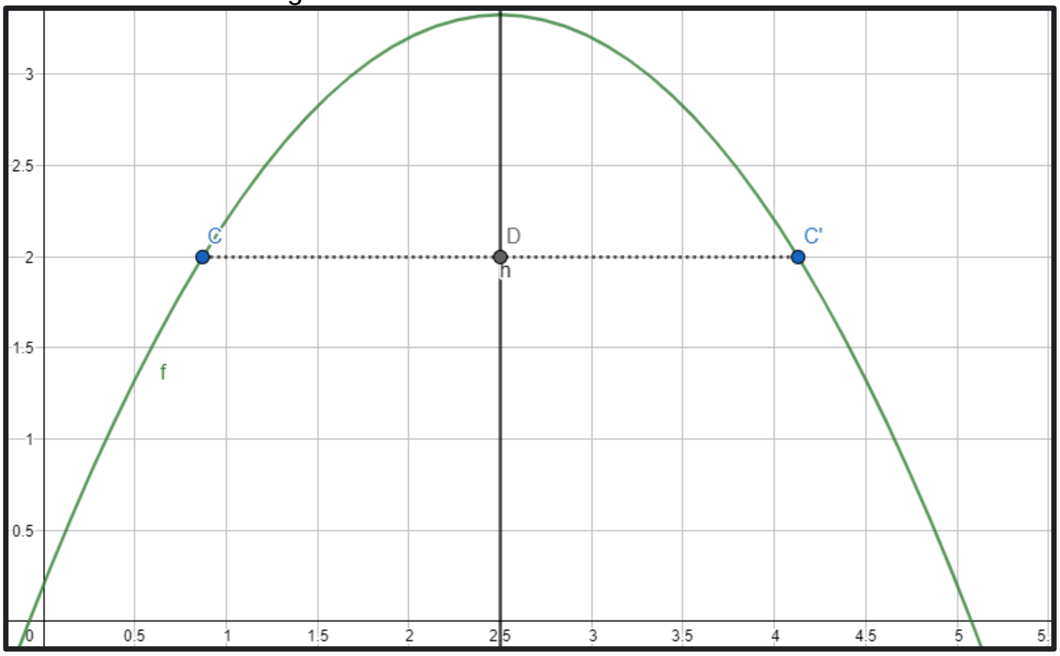
Assim, essa etapa é finalizada, retornando a resposta da pergunta inicial, explicando que em situações da vida, tais como um homem jogando golfe/futebol ou até mesmo no lançamento de um projétil, a concavidade da parábola estará voltada para baixo, portanto o coeficiente “a” será negativo. E com isso, os alunos conseguem observar seu ponto máximo, que será sua altura máxima.

4.º etapa: Aplicações da Simetria na Função Quadrática.

Na etapa 4 é feito um breve resumo de tudo que foi citado anteriormente com o objetivo de fazer o aluno relembrar os pontos altos da aula e facilitar na execução das atividades. Começa-se destacando que a simetria funciona de forma semelhante a um espelho, como se esse espelho tivesse passando pelo centro da parábola e refletisse os pontos de um lado para o outro e que com base nesse comportamento espelhado, o eixo de simetria determina relações entre os pares de pontos simétricos. Também é destacado que uma dessas relações entre os pares de pontos simétricos é o fato de que são equidistantes do eixo de simetria e que os pares de pontos simétricos possuem a mesma ordenada.

Em seguida, analisando a figura 33, é evidenciado que os pontos C e C' que são simétricos, possuem a mesma distância do ponto D e por consequência dessa simetria, tanto o ponto C quanto o C' possui a mesma ordenada que é o valor de y. E com essas observações, é possível garantir que qualquer ponto contido na parábola vai ter um simétrico de mesma ordenada e equidistante ao eixo de simetria. E esses atributos são essenciais para auxiliar na resolução de diversas questões.

Figura 33: Parábola com eixo de simetria



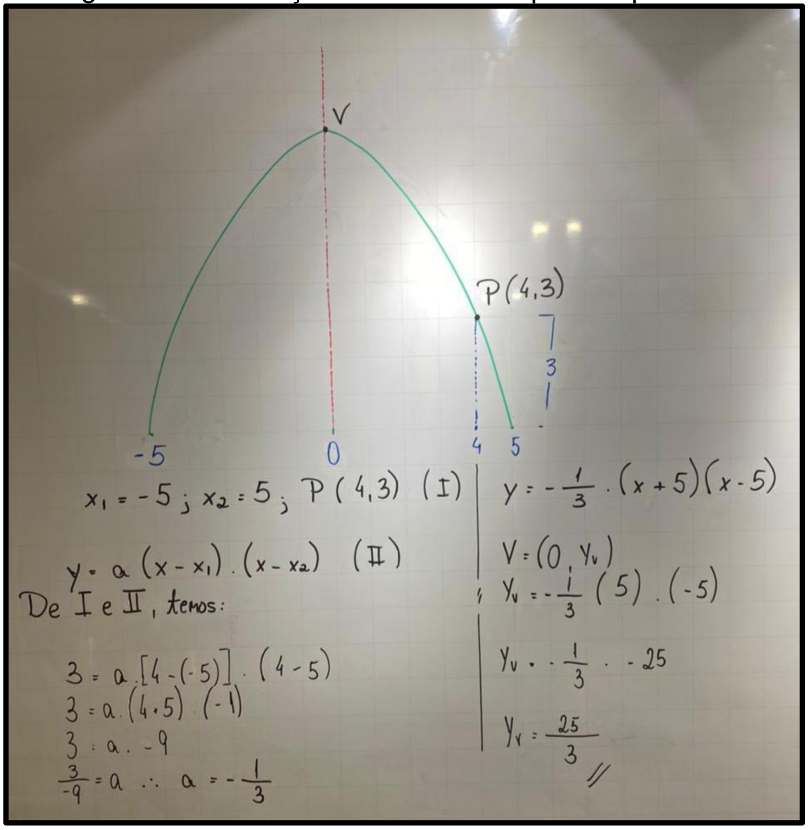
Fonte: Construção própria

5.º etapa: Realização da Atividade de Verificação.

Após as 4 etapas anteriores, os alunos terão tempo de realizar uma atividade de verificação (Apêndice C), com 3 questões, em até 40 minutos. A atividade tem como objetivo verificar se o aluno consegue realizar questões que envolvam o uso da forma fatorada na resolução da Função Quadrática, posicionando o plano cartesiano de forma a localizar da melhor forma possível o eixo de simetria. Objetiva-se também com essa atividade analisar se o aluno compreendeu as propriedades relacionadas ao vértice da parábola. Após esse tempo, o professor deve corrigir as questões.

O objetivo da questão 1 é fazer com que o aluno analise uma construção em formato parabólico e consiga aplicar os conceitos de simetria na natureza, como foi visto na aula, através do eixo de simetria na função quadrática. A resolução recomendada para a questão 1 (Figura 34) envolve o posicionamento de um plano cartesiano, da forma fatorada e da utilização do vértice.

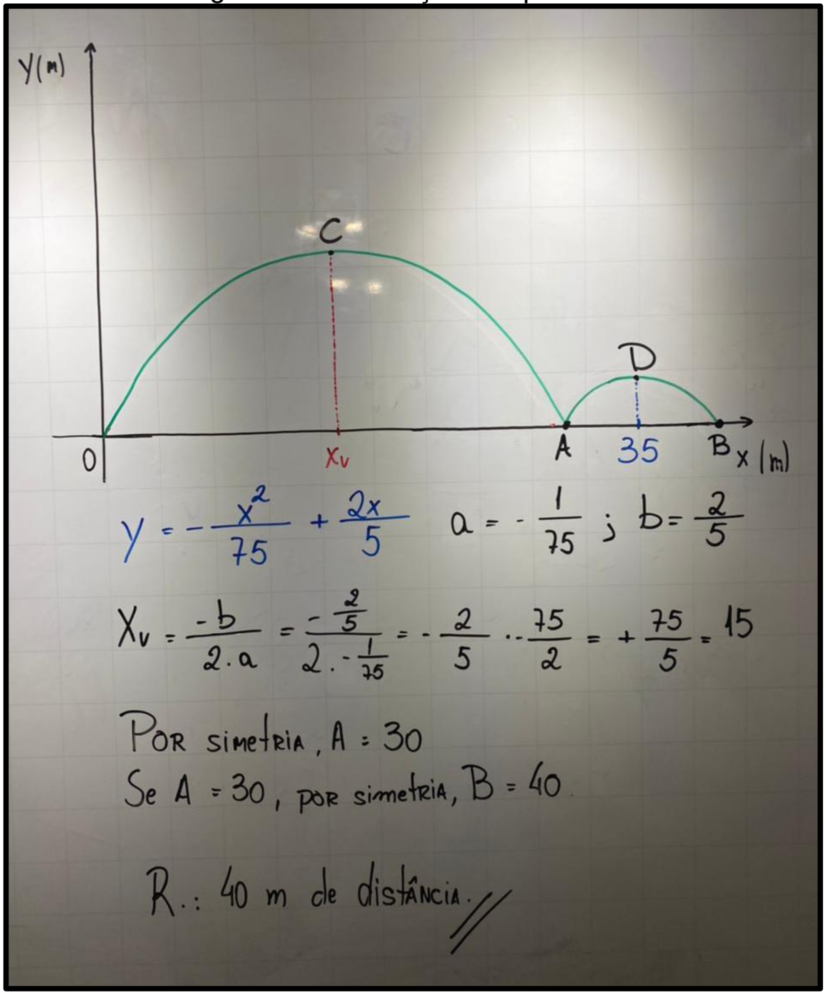
Figura 34: Resolução recomendada para a questão 1



Fonte: Construção própria

O objetivo da questão 2 é fazer com que o aluno aplique os conhecimentos teóricos obtidos na aula e entenda que a abscisa do vértice faz parte do eixo de simetria, sendo o meio da caminho entre os zeros da função. Já na resolução da questão 2 (Figura 35), é preciso indicar ao aluno como encontrar o valor de x do vértice, em seguida, basta aplicar os conhecimentos de simetria adquiridos para resolver a questão sem mais contas.

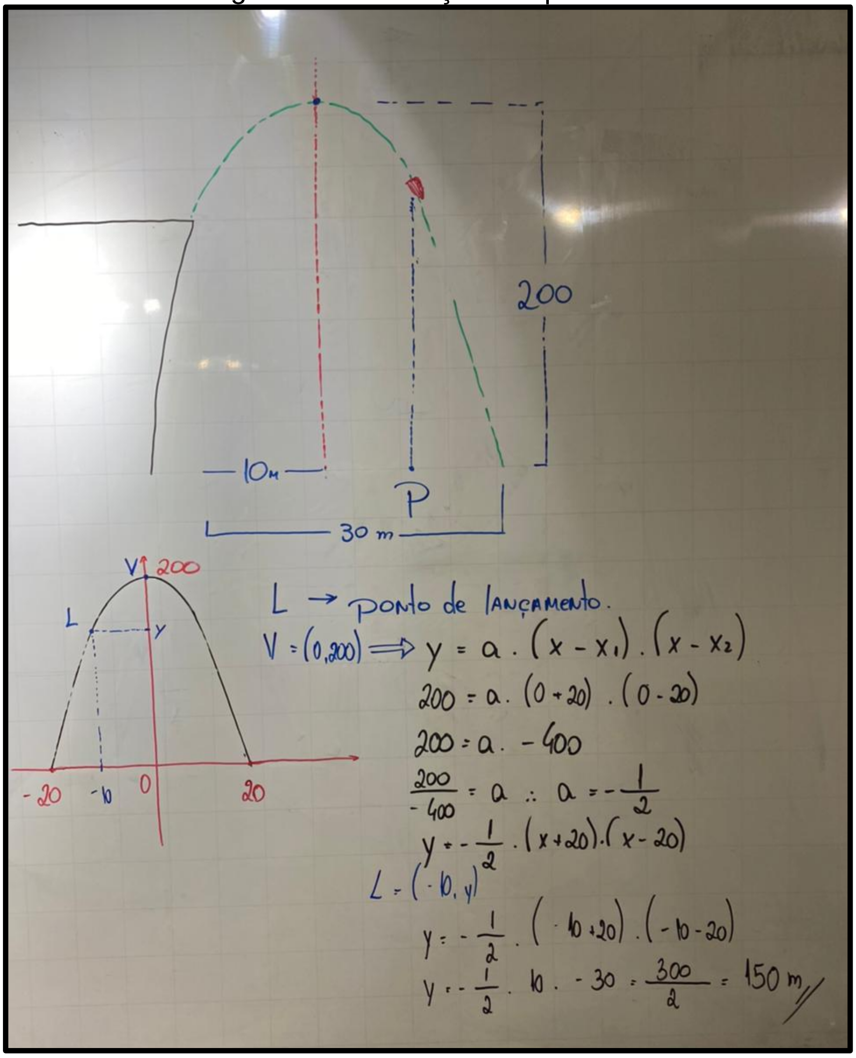
Figura 35: Resolução da questão 2



Fonte: Construção própria

O objetivo da questão 3 é fazer, novamente, com que o aluno perceba a simetria no cotidiano, mesmo com uma parábola "incompleta" visto que será necessário que o aluno trace o prolongamento, através dos conceitos de simetria obtidos na aula. A resolução da questão 3 (Figura 35) pode ser feita de diversas formas, utilizamos esta por trabalhar melhor os conhecimentos de simetria, precisando que o aluno saiba a forma fatorada e escolha um local para ser a origem do plano cartesiano.

Figura 36: Resolução da questão 3



Fonte: Construção própria

/

4) CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho em questão tem como objetivo aplicar o Eixo de Simetria no estudo de Funções Polinomiais do Segundo Grau, para auxiliar os alunos na visualização e na resolução de problemas relacionados a essa temática.

Com a apresentação da sequência didática, o grupo concluiu que o trabalho cumpriu com o seu objetivo de contribuir no entendimento do comportamento de uma Função Quadrática facilitando o ensino, o aprendizado e a realização de exercícios, promovendo dinamismo e proporcionalidade.

Como ponto positivo, temos os bons resultados na turma nas atividades propostas, porém, por ser uma forma diferente de trabalhar o conteúdo, observamos algumas dificuldades pontuais em alguns alunos de aplicar os procedimentos como foi visto em sala, fazendo de formas mais longas e cansativas. Pensando nessa dificuldade, deve ser considerado a possibilidade de aplicar essa sequência utilizando um maior número de horas/aula, dessa forma, os alunos teriam mais tempo para desenvolver o pensamento envolvendo a simetria.

Essa experiência foi muito enriquecedora para o grupo visto que como o eixo de simetria geralmente é pouco abordado em sala de aula temos uma nova visão sobre esse assunto e uma intenção de utilizá-lo em nossas futuras aulas. Também, acreditamos na importância da contribuição entre os professores, e como esse trabalho foi criado em grupo, nos mostrou como várias opiniões diferentes podem trabalhar para o mesmo objetivo.

REFERÊNCIAS

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília DF, 2016. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/#medio/matematica-e-suas-tecnologias-no-ensino-medio-competencias-especificas-e-habilidades >. Acesso em: nov. 2019.

BRASIL, **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) - Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC, 2006.

BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) - Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias**. Brasília, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/14_24.pdf>. Acesso em: out. 2019.

FIORENTINI, D; FERNANDES, F; CRISTOVÃO, E. Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemática no desenvolvimento do pensamento algébrico. **Seminário Luso-Brasileiro de Investigações Matemáticas no Currículo e na Formação do Professor,** p. 1-22, 2005. Disponível em: <https://docplayer.com.br/22745949-Um-estudo-das-potencialidades-pedagogicas-das-investigacoes-matematicas-no-desenvolvimento-do-pensamento-algebrico-1.html>. Acesso em. out. 2019.

HOFFMANN, A; ANJOS, A. **Função polinomial do 2.º grau.** Maiêutica. Indaial, SC. v.1, n.1, p.63-66. Jul. 2012.

LOPES, L.; ALVES, G.;FERREIRA, A. **A Simetria nas Aulas de Matemática: uma proposta investigativa.** Pelotas, RS, 2015. Disponível em:<http://www.scielo.br/scielo.php?scrip=sci_arttext&pid=S2175-62362015000200 549.> Acesso em: nov. 2019.

MARINHO, J. **Funções do 1.º e do 2.º grau: Interpretação Gráfica.** Dspace, Paraíba, 2014. Disponível em: <http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/123456789/6334>. Acesso em: nov. 2019

PONTE, J. **Números e Álgebra no currículo escolar**. Disponível em: http://www.edu.fc.ul.pt/docente/jponte/DADA-TEXTOS/Ponte(Caminha).rtf. Acesso em: out. 2019

APÊNDICE - A

Material Didático Elaborado

Diretoria de Ensino Superior - Licenciatura em Matemática

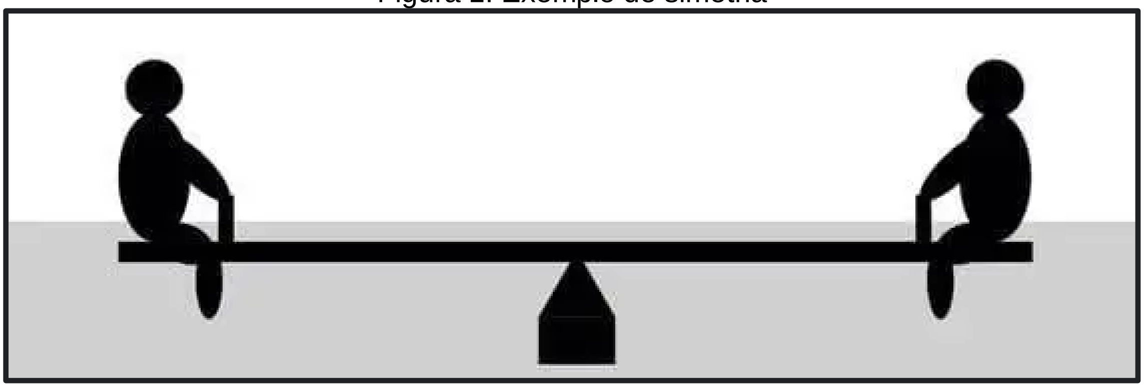
Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática II
Linha de pesquisa: Ensino e Aprendizagem de Álgebra
Licenciandos: Arthur Souza Manhães, Lais Massena de Souza, Larissa Ferreira Barreto Manhães, Mayara Moreira Guimarães, Thamires Azeredo Gomes.
Orientadora Professora Me.: Ana Mary Fonseca Barreto de Almeida.
Nome: ____ Data: ___/___/_____

O eixo de simetria como ferramenta para o estudo da função polinomial do segundo grau

1. Estudo da simetria

Quando falamos de simetria, é comum pensarmos em proporções perfeitas, harmoniosas ou até mesmo em dividir um objeto em partes iguais. De certa forma, a simetria é composta desses elementos, mas não é tarefa fácil definir a simetria em termos matemáticos precisos. O que sabemos sobre simetria é que uma figura é simétrica se conseguimos dividi-la em partes iguais e que as partes resultantes dessa divisão coincidam perfeitamente quando sobrepostas. Podemos ver um exemplo de simetria na figura abaixo.

Figura 1: Exemplo de simetria



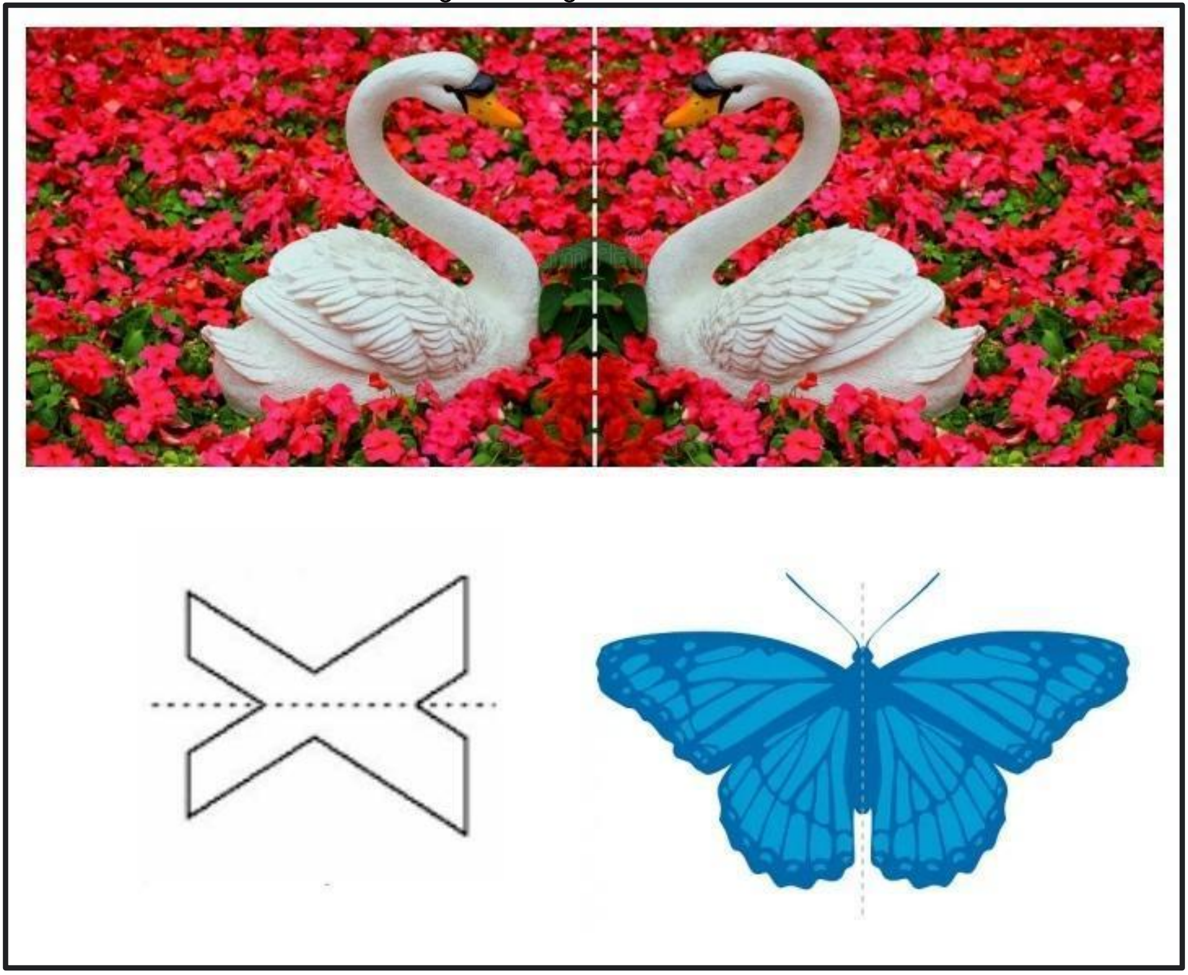
Fonte: https://br.pinterest.com/pin/362469470008789574/

1.1 Eixo de simetria

O eixo de simetria é uma reta que divide um plano em dois semiplanos de forma que, cada ponto de uma figura contida em um semiplano que ele determina corresponde a um outro ponto no semiplano oposto com igual distância do eixo.

A seguir podemos ver três figuras simétricas, com seus respectivos eixos de simetria, que consistem nessas linhas tracejadas.

Figura 2: Figuras simétricas

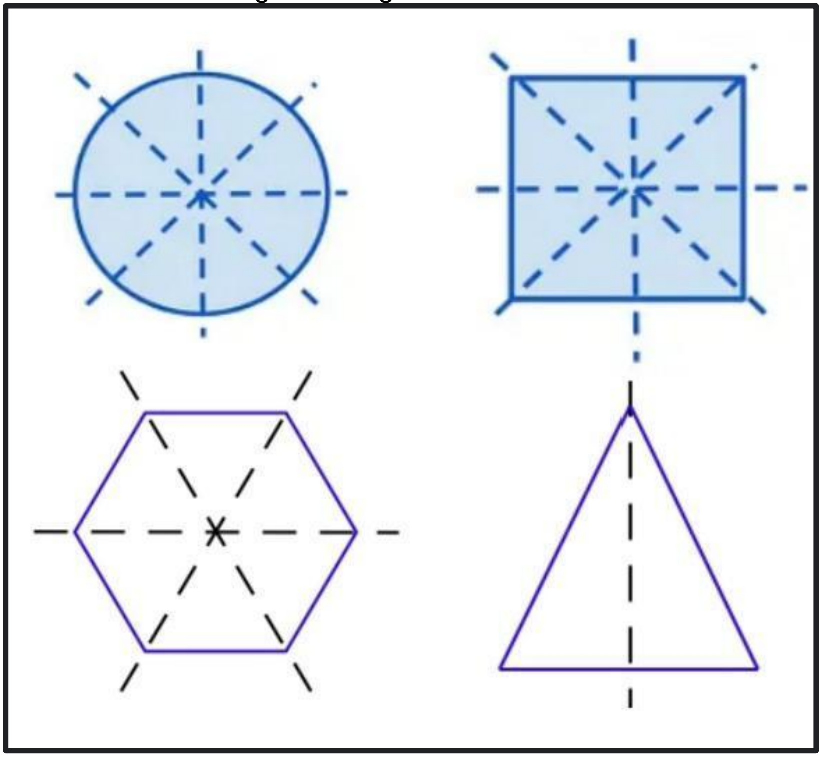


Fonte:http://nfcomgeral.blogspot.com/2015/08/19-imagens-que-provam-simetria-perfeita.html

1.2 Figuras simétricas

Adotaremos figuras simétricas aquelas que contenham no mínimo um eixo de simetria passando pelo seu centro, ou seja, se traçarmos uma reta dividindo uma figura ao meio, as duas partes quando sobrepostas coincidem. Os exemplos mais comuns de figuras simétricas são os polígonos e círculos estudados na geometria plana.

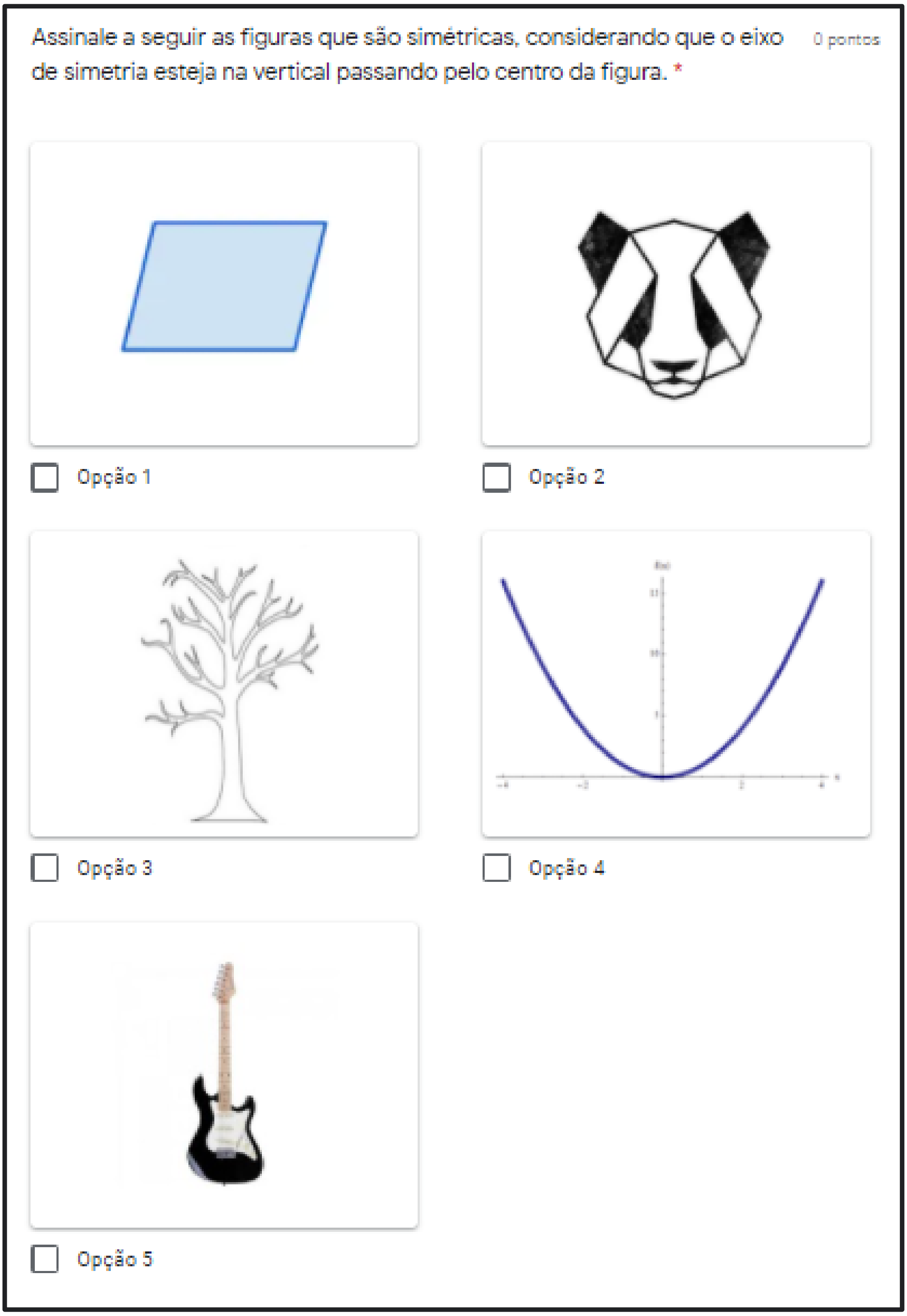
Figura 3: Figuras simétricas



Fonte: https://www.vivadecora.com.br/pro/simetria/

Em seguida será disponibilizado o seguinte formulário: https://forms.gle/U8ZNW1L7MLTx811E8

Figura 4: Figuras do formulário


Assinale a seguir as figuras que são simétricas, considerando que o eixo de simetria esteja na vertical passando pelo centro da figura. * 0 pontos

Opção 1

Opção 2

Opção 3

Opção 4

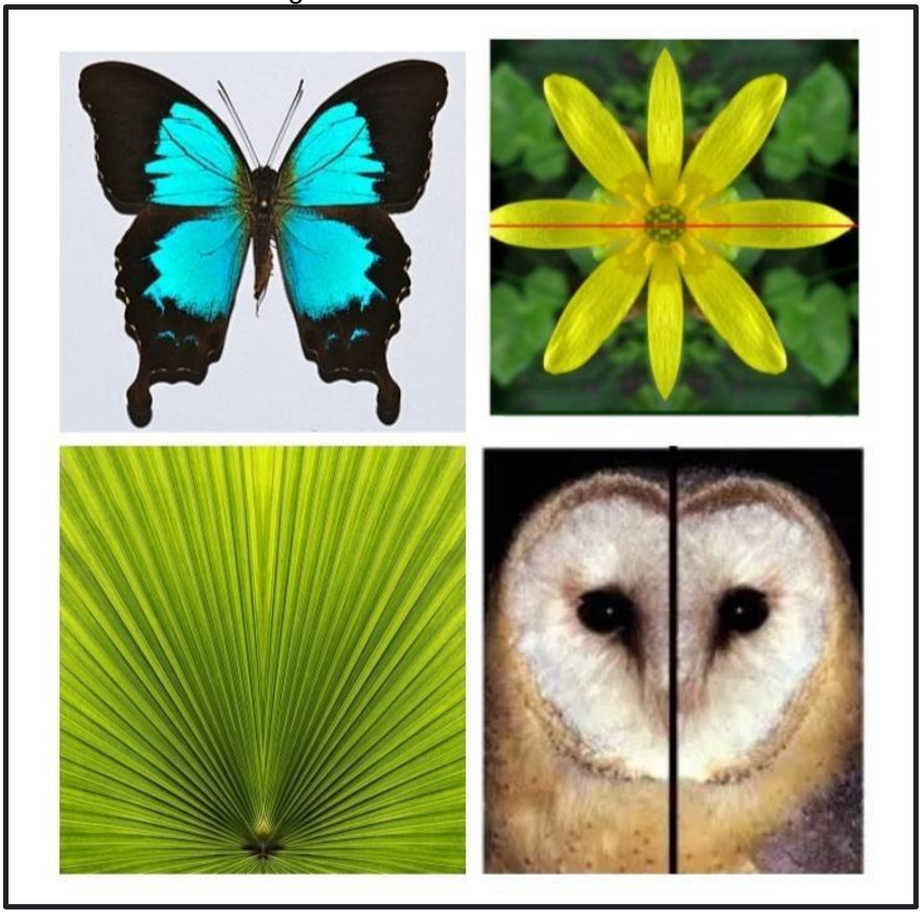
Opção 5

Formulário do Google: https://forms.gle/U8ZNW1L7MLTx811E8

1.3 Simetria é natural

A simetria está presente em várias coisas no nosso cotidiano, podemos observar desde coisas naturais até a construções humanas. A simetria é um artifício muito usado pelos homens em diversas áreas e muitos a vêem como sinônimo de beleza. Porém, ela já estava presente na natureza, antes da mesma ser utilizada por nós, como podemos ver nos exemplos a seguir.

Figura 5: Simetria na natureza



Fonte: http://nfcomgeral.blogspot.com/2015/08/19-imagens-que-provam-simetria-perfeita.html

Nesses quatro exemplos, podemos ver a beleza da simetria nas asas de uma borboleta, em um flor, em uma folha de palmeira e no rosto de uma coruja, confirmando que a simetria está presente na natureza antes mesmo dos humanos começarem a utilizá-la.

1.4 Simetria nas construções

A simetria é um artifício bastante usado na arquitetura, pois a mesma passa uma sensação de segurança e estabilidade, além de que é visualmente satisfatória. Nós podemos ver a simetria com mais intensidade nas construções antigas, pois esse costume começou lá na Grécia antiga. Ainda vemos simetria em algumas construções e decorações atuais, pois para muitos ela não é ultrapassada. Temos importantes monumentos que são simétricos, como a Torre Eiffel e o Taj Mahal:

Figura 6: Simetria na construção

Fonte: Construção própria

E também temos algumas outras construções belas e simétricas:

Figura 7: Construções simétricas

Fonte: https://www.vivadecora.com.br/pro/arquitetura-neoclassica/

2. Função polinomial do segundo grau

Uma aplicação f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ recebe o nome de função quadrática ou função polinomial do segundo grau quando associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o elemento $(ax^2 + bx + c)$, em que a, b e c são números reais dados e a ≠ 0.

Como por exemplo a função: $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$ onde $a = 2, b = -2$ e $c = 1$.

2.1 Gráfico

Angry Birds: https://www.geogebra.org/m/qjuehvdh

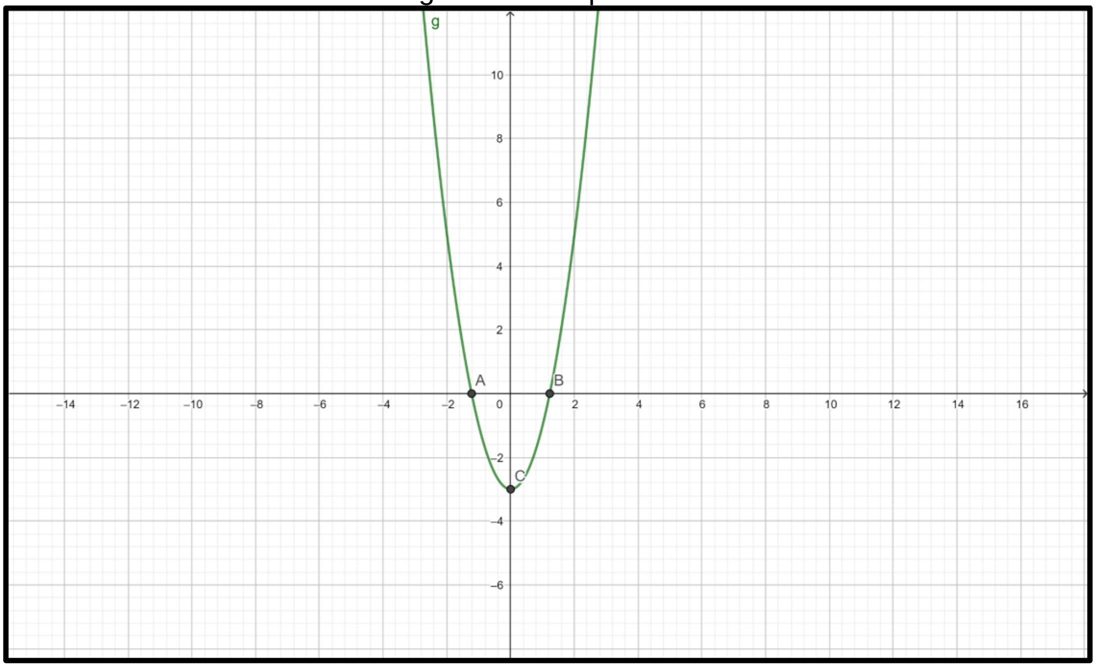
O gráfico dessa função é uma parábola. No estudo com o GeoGebra podemos concluir as seguintes observações:

- Quando a > 0 a concavidade da parábola é voltada para cima e quando a < 0 a concavidade da parábola é voltada para baixo;
- Ao movimentar o elemento b ocorre uma translação horizontal na parábola, pois muda a inclinação da reta de acordo com a reta tangente que é feita entre a interseção da parábola com o eixo Y;
- Ao movimentar o elemento c ocorre uma transformação vertical na parábola.

Construção 1: https://www.geogebra.org/m/fwd2bj7j

Vamos analisar alguns pontos importantes no gráfico da função $g(x) = x^2 - 3$

Figura 8: Uma parábola



Fonte: Construção própria

Nesse gráfico, vamos destacar três pontos importantes. Sabemos que o eixo horizontal é chamado de eixo x e o eixo vertical é chamado de eixo y. Os zeros ou raízes da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores de x reais tais que $f(x) = 0$, fica condicionada ao fato de $\sqrt{\ }$ ser real, sendo $\Delta = b^2 - 4ac$. Assim, temos três casos a considerar, quando $\Delta > 0$, $\Delta < 0$ e $\Delta = 0$, porém para essa aula falaremos apenas sobre casos no qual $\Delta > 0$ logo, a equação apresentará duas raízes distintas.

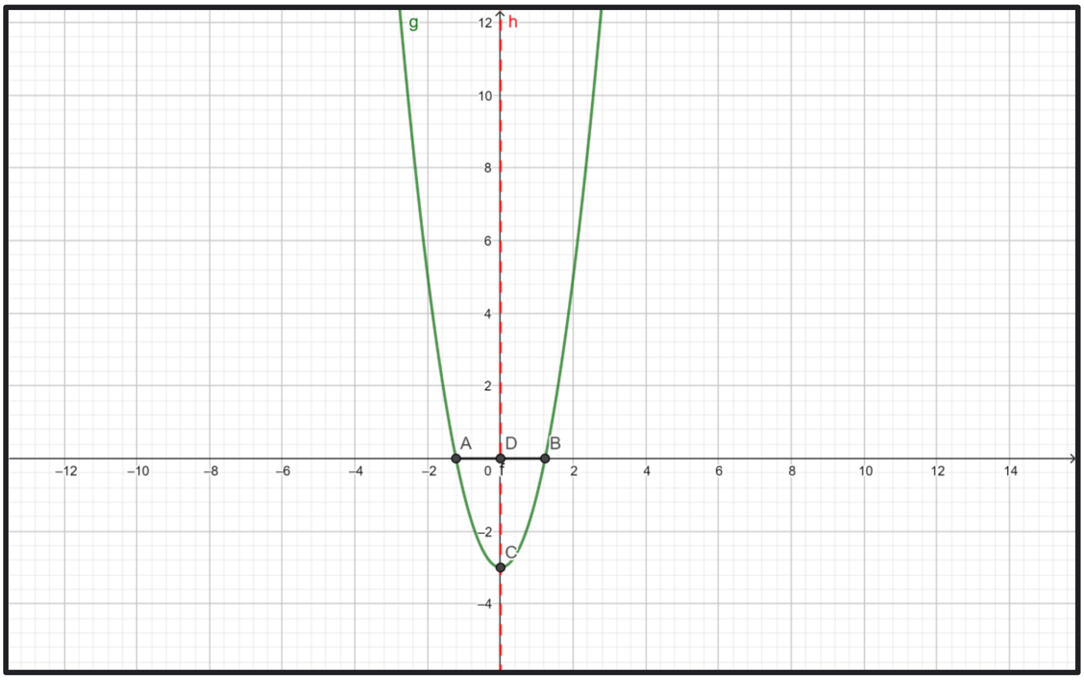
Além dos zeros da função, é importante destacar o x do vértice (Xv), o Xv é chamado ponto de máximo da parábola quando a < 0 e ponto de mínimo da parábola quando a > 0, sendo assim, o y do vértice (Yv) é denominado valor máximo quando a < 0 e valor mínimo quando a > 0. O ponto C na função g é o vértice de coordenada (Xv, Yv), portanto ele é denominado ponto máximo ou mínimo da parábola.

2.2 Simetria

Ainda na função g, observe a Figura 9 a seguir:

Construção 2: https://www.geogebra.org/m/aufuvthr

Figura 9: Uma parábola e o eixo de simetria



Fonte: Construção própria

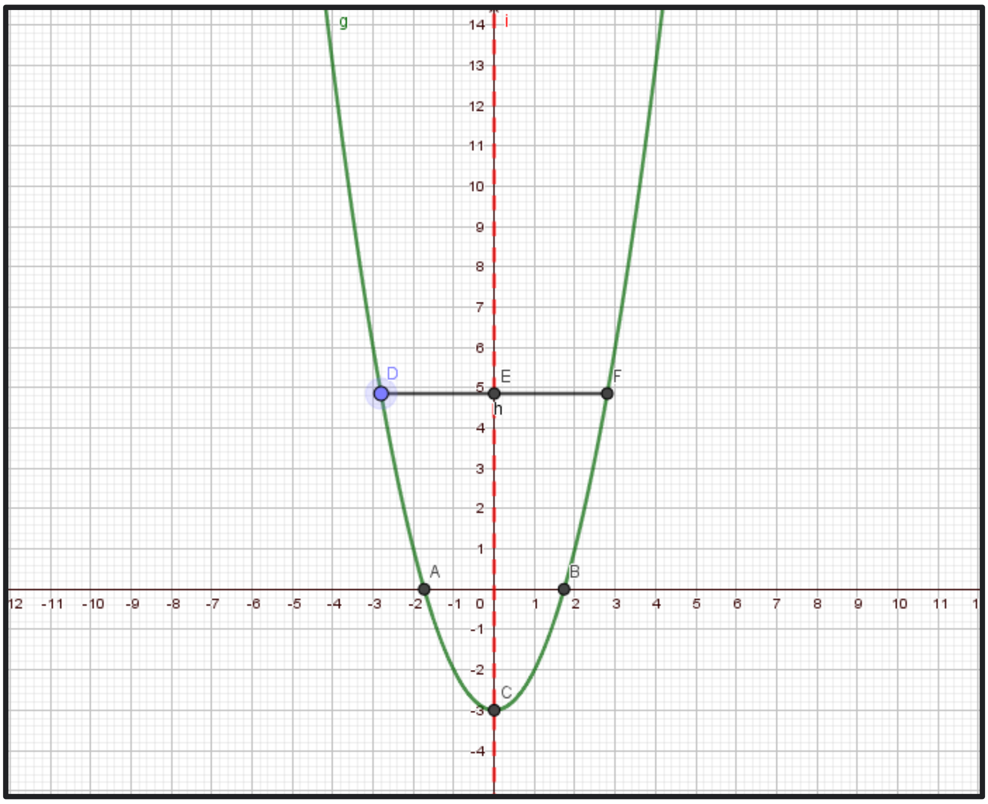
Podemos identificar as seguintes construções:

- Foi criado um segmento AB, como já observamos, as abscissas dos pontos A e B são os zeros dessa função;
- Com a ferramenta “Ponto médio ou centro” foi obtido o ponto D, ponto médio do segmento AB;
- Por fim, podemos construir uma reta passando pelo vértice e o ponto D, dessa forma, conseguimos concluir que existe uma simetria dos pontos que representam os zeros da função em relação ao ponto D;
- Ao traçar a reta que passa pelo vértice e pelo ponto D, criamos uma reta h (representada na figura 9 em linha tracejada para auxiliar na visualização da simetria) que representa o eixo de simetria.

Mas será que essa simetria vale para outros pontos da parábola? Agora, vamos mostrar uma segunda construção, dessa vez, criamos um ponto D qualquer pertencente à parábola e chegamos a um segmento DF com ponto médio em E, é possível mover esse segmento por toda a parábola e o ponto E permanece na reta tracejada h.

Podemos concluir que a reta h, que coincide com o eixo Y é nosso eixo de simetria.

Figura 10: Construção no GeoGebra com eixo de simetria

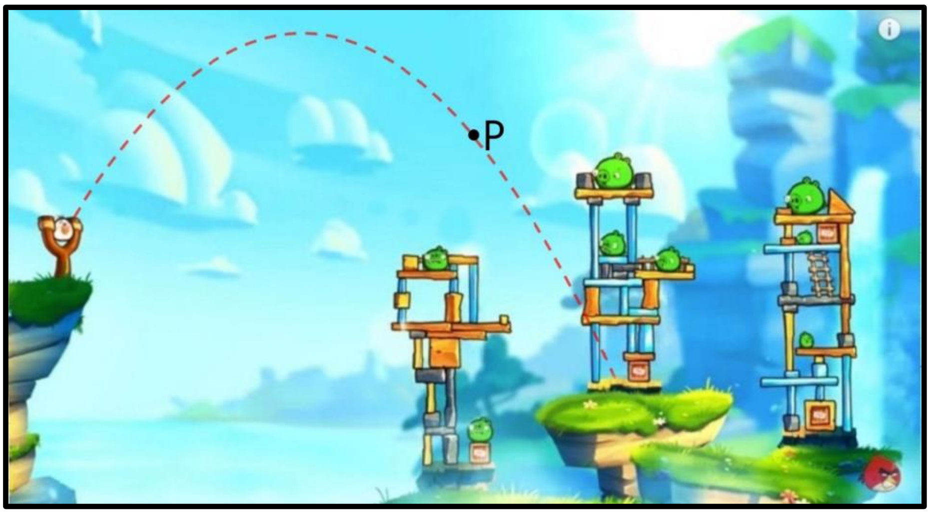


Fonte: Construção própria

2.3 Atividade

O jogo Angry Birds tem como objetivo eliminar os inimigos (porcos verdes), para isso passáros são lançados por um estilingue em direção às construções onde os porcos estão. Um pássaro branco é lançado até a construção do meio da figura a seguir, seu trajeto forma parte de uma parábola com eixo de simetria vertical. A ave que passará pelo ponto P percorre 6 m desde o seu lançamento até o momento que o mesmo atinge o solo. A altura máxima que o pássaro alcança é de 50 m acima do terreno e é atingida ao percorrer 1 m a partir de seu lançamento. Quantos metros acima estava o pássaro quando foi lançado?

Figura 11: Ilustração da questão



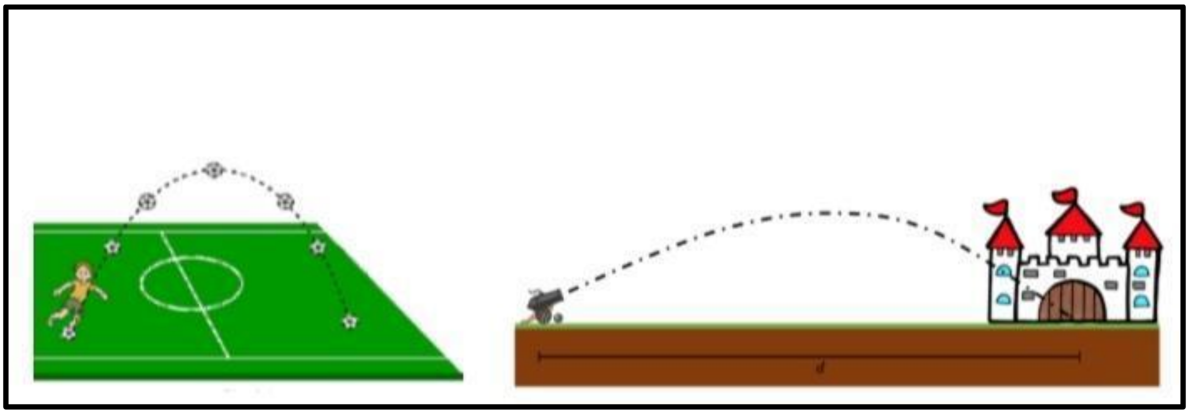
Fonte: Construção própria

3. Aplicações da função quadrática no cotidiano

O que lançamento de projéteis, antenas parabólicas e campeonatos de futebol têm em comum?

Pensando em campeonato de futebol, vemos que o movimento que a bola faz quando um jogador a chuta, é análogo ao movimento do projétil lançado por um canhão.

Figura 12: Exemplos de parábola



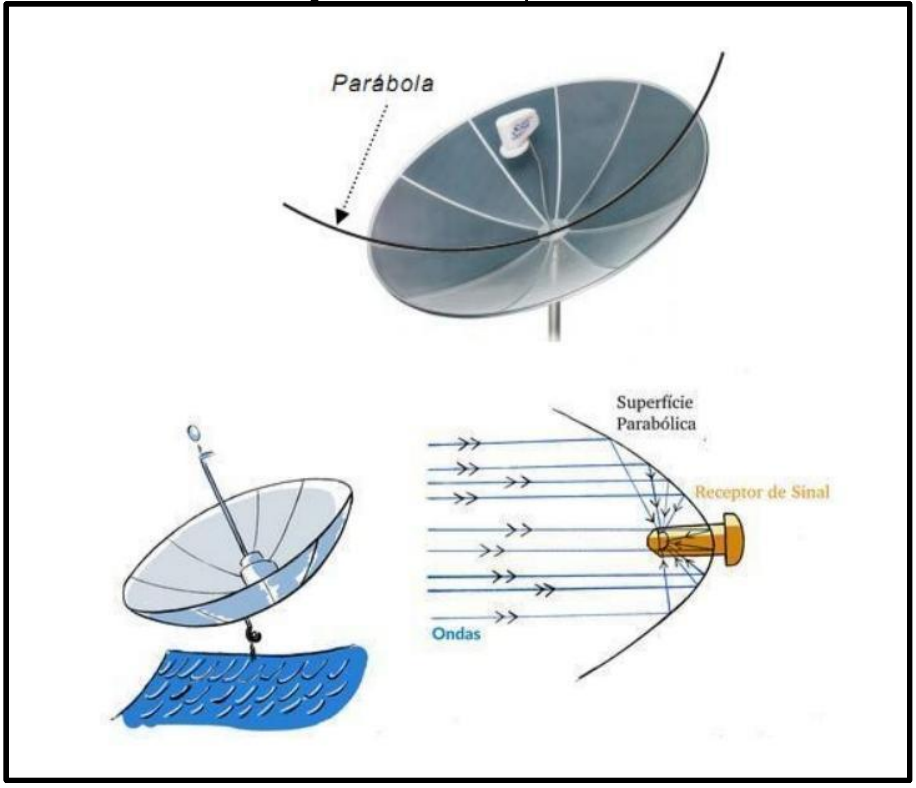
Fonte: http://funcoesopcao1c.blogspot.com/p/algumas-aplicacoes-de-funcoes.html

Quando lançamos um objeto no espaço (bala de canhão) tendo em vista alcançar a maior distância possível, tanto horizontalmente quanto verticalmente, a curva que o objeto faz é aproximadamente uma parábola, se considerarmos que a resistência do ar é pequena ou não existe. O movimento da bala de canhão é acelerado pela ação do campo gravitacional, por isso o lançamento de projéteis é modelado por uma equação do segundo grau.

Portanto o que todos eles têm em comum é que suas trajetórias são uma parábola. A Função Quadrática tem várias aplicações na vida, serve por exemplo, para calcular o lançamento e o movimento de projéteis como balas de canhão e foguetes, para presumir o ângulo de reflexão de faróis de carros, conjecturar o ângulo da antena parabólica, entre outras coisas.

3.1 Antena parabólica

Figura 13: Antena parabólica



Fonte:https://bityli.com/LIFVoi

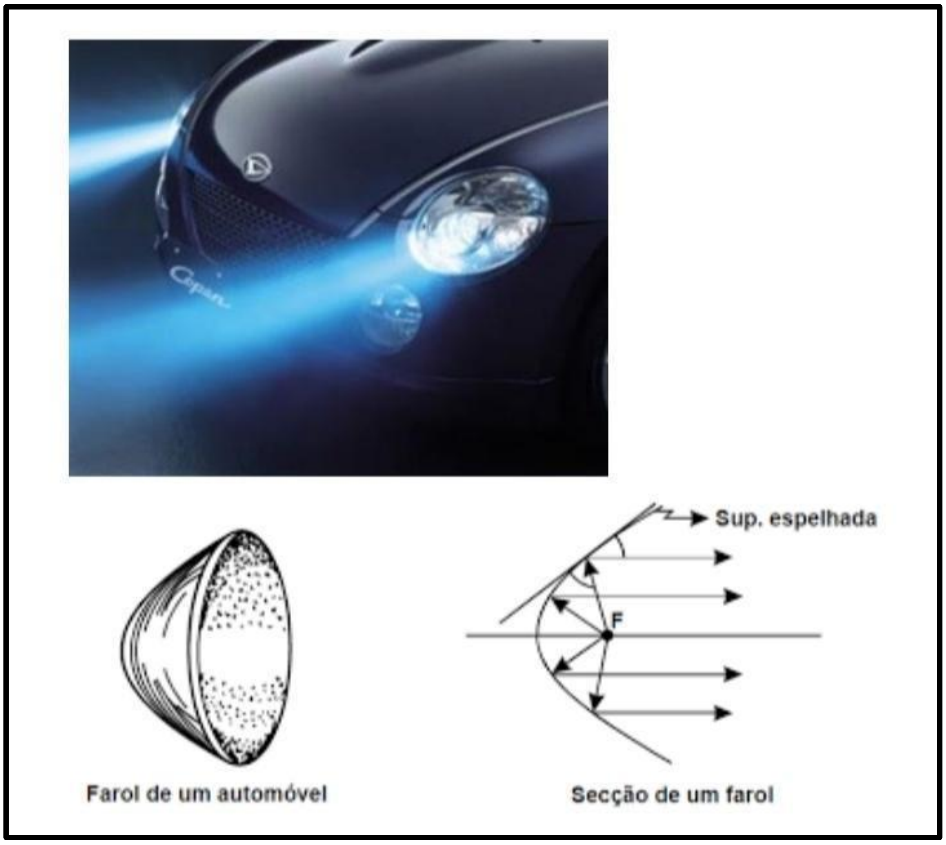
A antena parabólica tem esse nome pois possui o formato parabólico, ela é formada por várias parábolas, em que os seus pontos mínimos coincidem no vértice, logo o eixo de simetria delas é o mesmo. Assim, o foco da antena está no eixo de simetria das parábolas.

Sua antena capta as ondas eletromagnéticas que são lançadas pelo satélite e o aparelho conectado converterá estas ondas em um sinal que a sua TV transformará em filmes, novelas, jornais e outros programas que você assiste em seu sofá.

3.2 Farol de carro

Os faróis de carro funcionam de maneira análoga à antena parabólica.

Figura 14: Faróis de carro



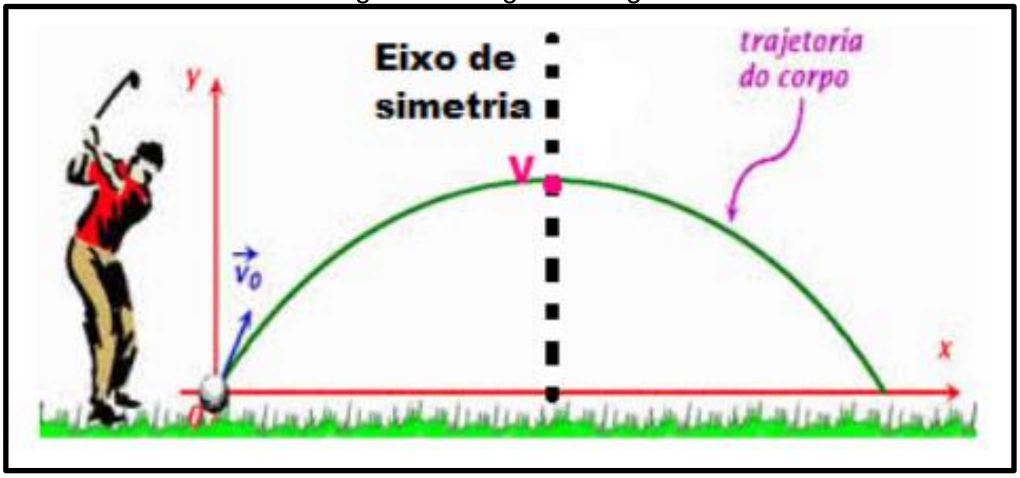
Fonte: https://bityli.com/clwYLC

O farol possui um formato parabólico e se quisermos, conseguimos traçar várias parábolas no mesmo. O eixo de Simetria delas também coincide, tendo o foco nessa reta, o foco é um ponto do eixo de simetria.

3.3 Pontos importantes na parábola

Precisamos ressaltar alguns elementos importantes sobre o gráfico de uma Função quadrática na vida.

Figura 15: Jogador de golfe



Fonte: https://bityli.com/AcYZIf

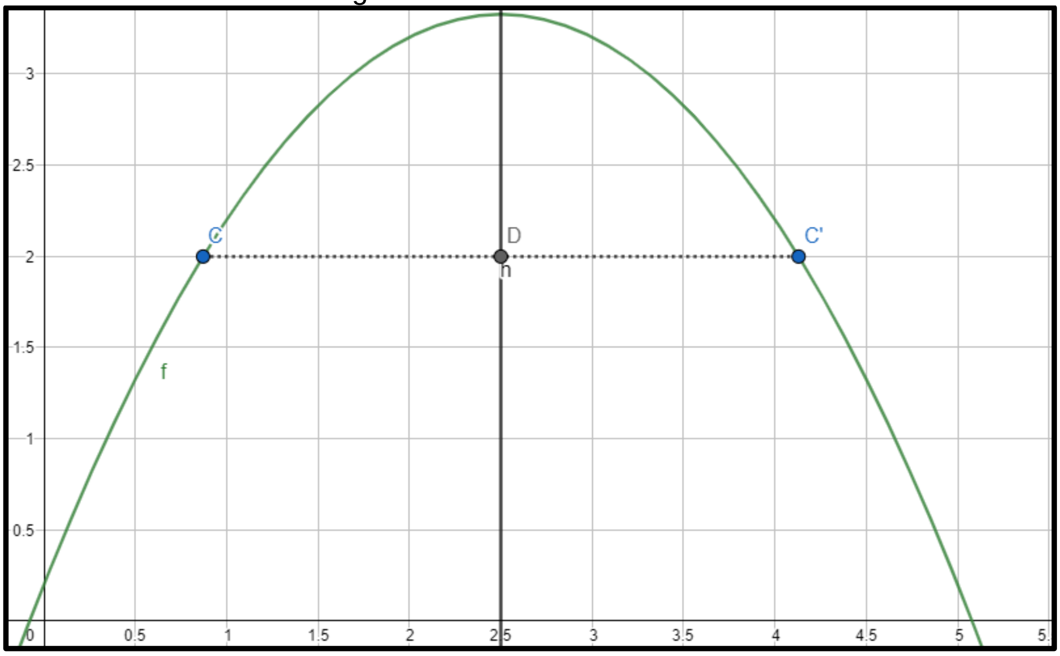
Em casos como a imagem anterior, a maior altura que a bola ou projétil alcançará será a ordenada do ponto máximo da parábola, ou seja, a ordenada do vértice da parábola (Yv). Assim, o ponto V que é o vértice da parábola pertencerá ao eixo de simetria.

Em situações da vida, tais como um homem jogando golfe/futebol ou até mesmo no lançamento de um projétil, a concavidade da parábola estará voltada para baixo, portanto o coeficiente “a” será negativo. Com isso, conseguimos observar seu ponto máximo, que será sua altura máxima.

4. Aplicações da simetria na função quadrática

Com base no que foi visto ao longo da apostila, chegamos a conclusão de que o eixo de simetria funciona de forma análoga a um espelho que passa pelo centro da parábola, refletindo os pontos de um lado para o outro. Ao se comportar como esse tal “espelho”, o eixo de simetria estabelece algumas relações interessantes entre os pares de pontos simétricos, como por exemplo, o fato de que são equidistantes do eixo e que possuem a mesma ordenada. Com essa observação, podemos garantir, por exemplo, que os dois pontos que a parábola corta o eixo x são simétricos, portanto, os zeros da função quadrática possuem abscissas simétricas. Assim, podemos garantir que qualquer ponto que seja diferente do vértice e que esteja contido na parábola, terá um simétrico de mesma ordenada e equidistante ao eixo de simetria. Vejamos o exemplo:

Figura 16: Pontos simétricos



Fonte: Construção própria

Na parábola anterior, os pontos C e C' são simétricos, ou seja, são equidistantes do eixo de simetria (a distância de C até D é a mesma distância de C' até D), como consequência dessa simetria, temos que os dois pontos possuem a mesma ordenada (valor de y) e a média de suas abscissas (valor de x) é o X do vértice. Tais características são fundamentais para a resolução de diversas questões ou caminhos mais rápidos para entender outras.

Por fim, será disponibilizado o Formulário Final: https://forms.gle/hvPykFtR4fvMZvno7

Figura 17: Questão 1 do Formulário.

1 - A Igreja de São Francisco de Assis, obra arquitetônica modernista de Oscar Niemeyer, localizada na Lagoa da Pampulha, em Belo Horizonte, possui abóbadas parabólicas. A seta na Figura 1 ilustra uma das abóbadas na entrada principal da capela. A Figura 2 fornece uma vista frontal desta abóbada, com medidas hipotéticas para simplificar os cálculos. Qual a medida da altura H, em metro, indicada na Figura 2? *

Figura 1

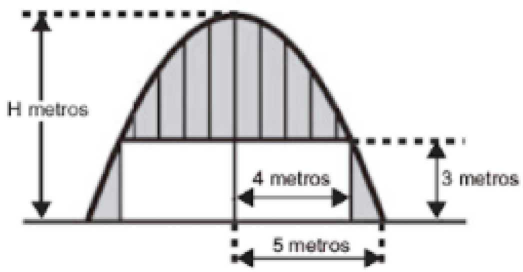


Figura 2

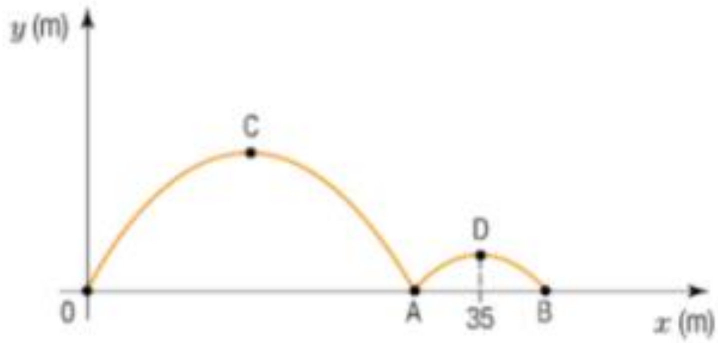
- ◯ 16/3
- ◯ 31/5
- ◯ 25/4
- ◯ 25/3
- ◯ 75/2

Fonte: Formulário do Google

Figura 18: Questão 2 do Formulário.

2 - Com base no enunciado abaixo, faça o que se pede. *

Uma bola de beisebol é lançada de um ponto 0 e, em seguida, toca o solo nos pontos A e B, conforme representado no sistema de eixos ortogonais:



Durante sua trajetória, a bola descreve duas parábolas com vértices C e D.

A equação de uma dessas parábolas é $y = \frac{-x^2}{75} + \frac{2x}{5}$.

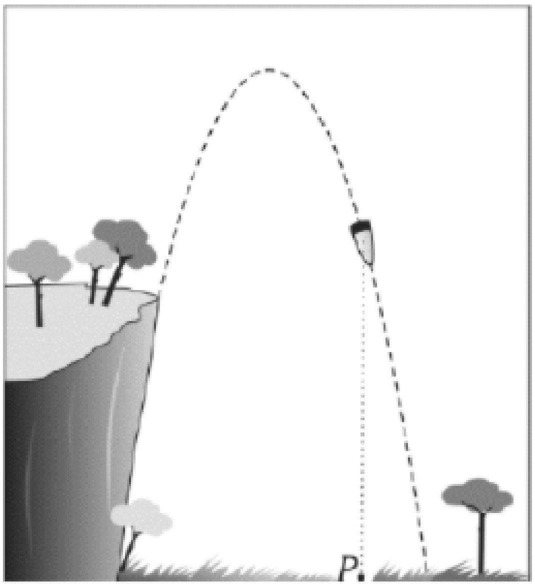
Se a abscissa de D é 35 m, a distância do ponto 0 ao ponto B, em metros, é igual a:

- 38
- 40
- 45
- 50

Fonte: Formulário do Google

Figura 19: Questão 3 do Formulário.

3 - (FUVEST/2015) A trajetória de um projétil, lançado da beira de um penhasco sobre um terreno plano e horizontal, é parte de uma parábola com eixo de simetria vertical, como ilustrado na figura. O ponto P sobre o terreno, pé da perpendicular traçada a partir do ponto ocupado pelo projétil, percorre 30 m desde o instante do lançamento até o instante em que o projétil atinge o solo. A altura máxima do projétil, de 200 m acima do terreno, é atingida no instante em que a distância percorrida por P, a partir do instante do lançamento, é de 10 m. Quantos metros acima do terreno estava o projétil quando foi lançado? * 0 pontos



- 180
- 150
- 120
- 90
- 60

Fonte: Formulário do Google

Referências

BARROS, Catarina. Simetria nos animais. **BELASIMETRIAS**, 2008. Disponível em: https://belasimetrias.wordpress.com/2008/02/27/simetria-nos-animais/. Acesso em: 16/11/2021.

CRUZ, Talita. Confira 4 tipos de simetria e veja belos exemplos na arquitetura. **VivaDecoraPro**, 2019. Disponível em: https://www.vivadecora.com.br/pro/simetria/. Acesso em: 30/10/2021.

CRUZ, Talita. O incrível olhar da arquitetura neoclássica sobre as grandes obras do passado. **VivaDecoraPro**, 2019. Disponível em: https://www.vivadecora.com.br/pro/arquitetura-neoclassica/. Acesso em: 30/10/2021.

FERREIRA, Nivardo. 19 imagens que provam a simetria perfeita da natureza. **Comentário geral**, 2015. Disponível em: http://nfcomgeral.blogspot.com/2015/08/19-imagens-que-provam-simetria-perfeita.html. Acesso em: 16/11/2021.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. Fundamentos de Matemática Elementar: Conjuntos funções - Vol 1 - 9.ed. São Paulo: Editora Atual, 2013.

LIMA, Antônio. Simetrias, 2021. Disponível em: https://www.antonioguilherme.web.br.com/blog/simetria/. Acesso em: 30/10/2021.

PATRIANI, Romeu. O que é arquitetura neoclássica? **ROMEU PATRIANI ARCHITETURE**, 2017. Disponível em: http://romeupatriani.com.br/site/o-que-e-arquitetura-neoclassica/. Acesso em: 18/11/2021.

Apêndice B - Material aplicado na turma do LEAMAT II

Diretoria de Ensino Superior - Licenciatura em Matemática

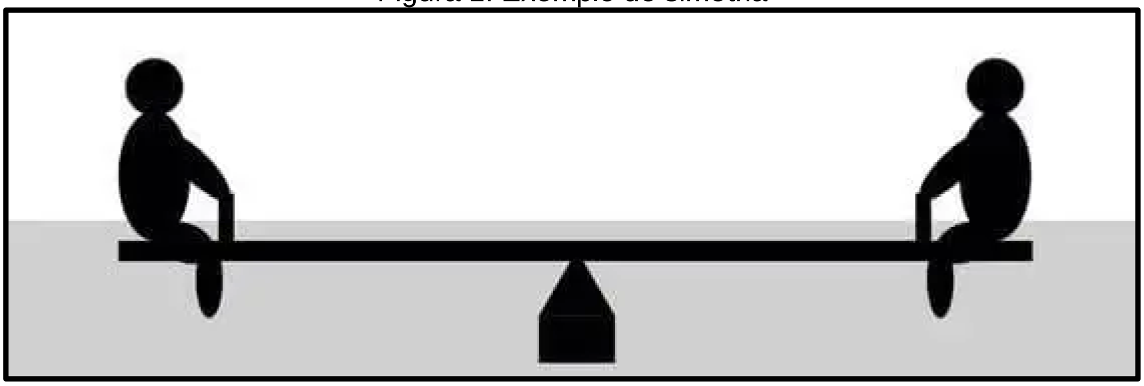
Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática II
Linha de pesquisa: Ensino e Aprendizagem de Álgebra
Licenciandos: Arthur Souza Manhães, Lais Massena de Souza, Larissa Ferreira Barreto Manhães, Mayara Moreira Guimarães, Thamires Azeredo Gomes.
Orientadora Professora Me.: Ana Mary Fonseca Barreto de Almeida.
Nome: ____ Data: ___/___/_____

O eixo de simetria como ferramenta para o estudo da função polinomial do segundo grau

1. Estudo da simetria

Quando falamos de simetria, é comum pensarmos em proporções perfeitas, harmoniosas ou até mesmo em dividir um objeto em partes iguais. De certa forma, a simetria é composta desses elementos, mas não é tarefa fácil definir a simetria em termos matemáticos precisos. O que sabemos sobre simetria é que uma figura é simétrica se conseguimos dividi-la em partes iguais e que as partes resultantes dessa divisão coincidam perfeitamente quando sobrepostas. Podemos ver um exemplo de simetria na figura abaixo.

Figura 1: Exemplo de simetria



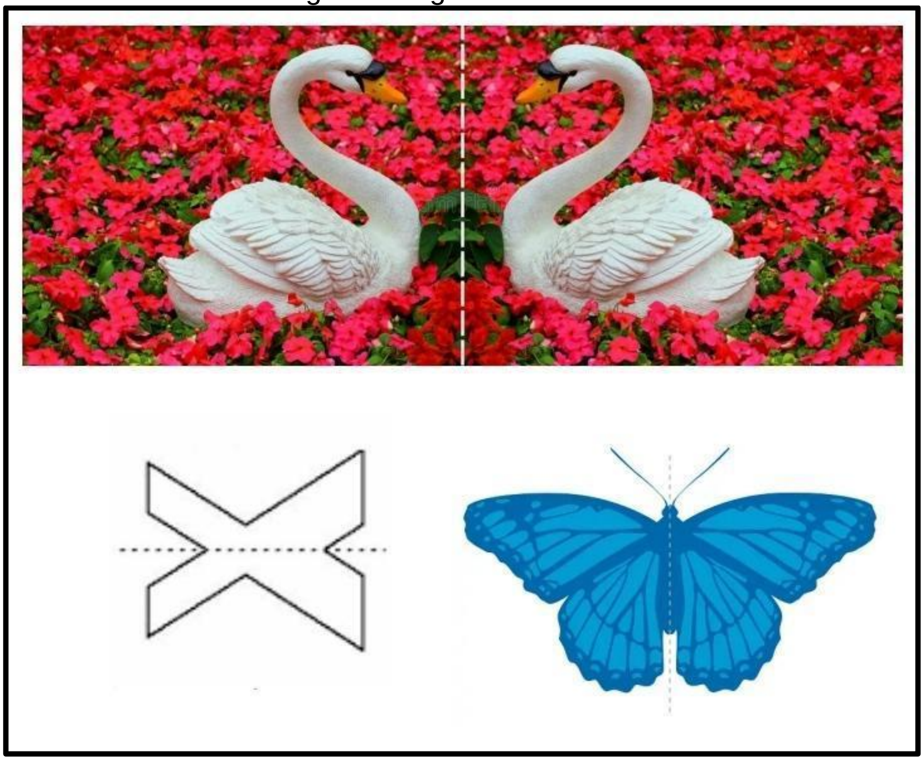
Fonte: https://br.pinterest.com/pin/362469470008789574/

1.1 Eixo de simetria

O eixo de simetria é uma reta que divide um plano em dois semiplanos de forma que, cada ponto de uma figura contida em um semiplano que ele determina corresponde a um outro ponto no semiplano oposto com igual distância do eixo.

A seguir podemos ver três figuras simétricas, com seus respectivos eixos de simetria, que consistem nessas linhas tracejadas.

Figura 2: Figuras simétricas

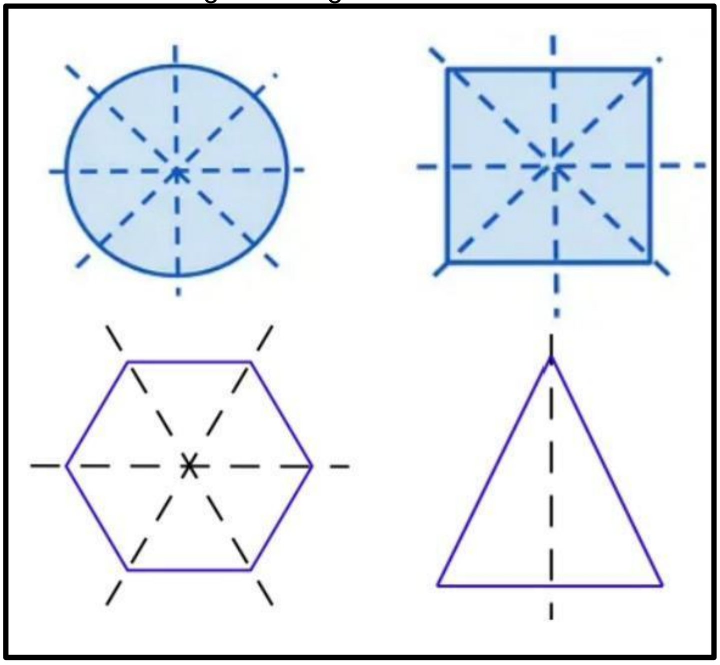


Fonte: https://bityli.com/nbhtQD

1.2 Figuras simétricas

Adotaremos figuras simétricas aquelas que contenham no mínimo um eixo de simetria passando pelo seu centro, ou seja, se traçarmos uma reta dividindo uma figura ao meio, as duas partes quando sobrepostas coincidirão. Os exemplos mais comuns de figuras simétricas são os polígonos e círculos estudados na geometria plana.

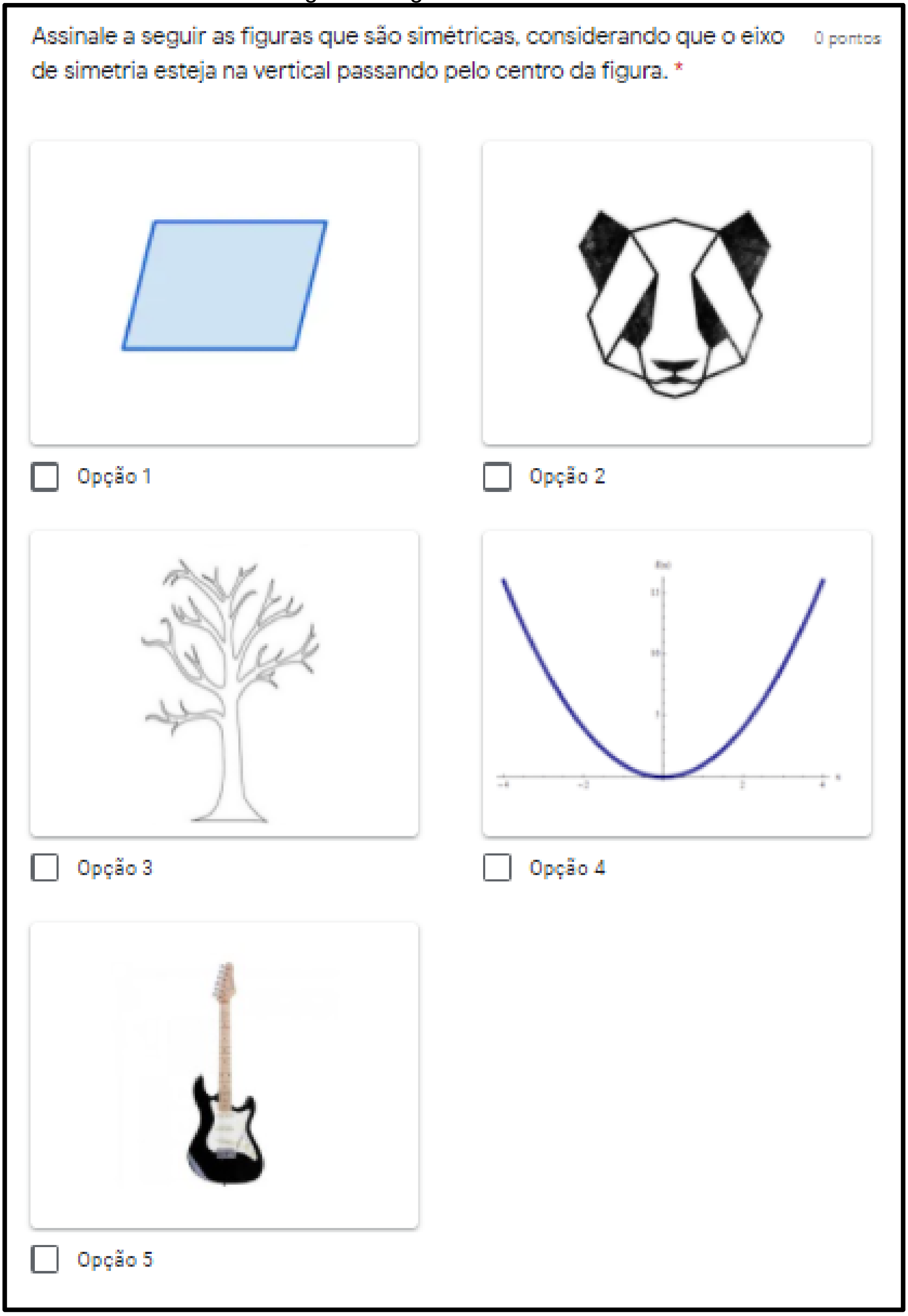
Figura 3: Figuras simétricas



Fonte: https://bityli.com/mGgHm

Em seguida será disponibilizado o seguinte formulário: https://forms.gle/U8ZNW1L7MLTx811E8

Figura 4: Figuras do formulário



Assinale a seguir as figuras que são simétricas, considerando que o eixo de simetria esteja na vertical passando pelo centro da figura. * 0 pontos

Opção 1

Opção 2

Opção 3

Opção 4

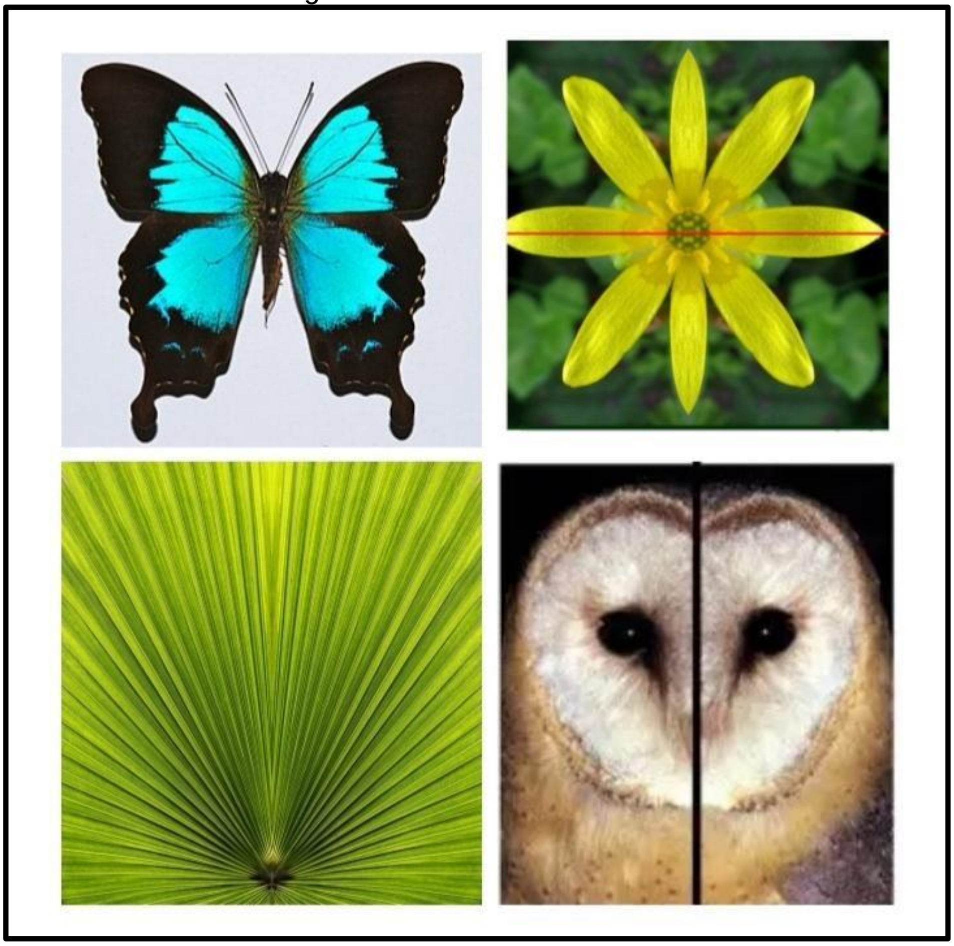
Opção 5

Fonte: Formulário do Google

1.3 Simetria é natural

A simetria está presente em várias coisas no nosso cotidiano, podemos observar desde coisas naturais até a construções humanas. A simetria é um artifício muito usado pelos homens em diversas áreas e muitos a vêem como sinônimo de beleza. Porém, ela já estava presente na natureza, antes da mesma ser utilizada por nós, como podemos ver nos exemplos a seguir.

Figura 5: Simetria na natureza



Fonte: https://bityli.com/nbhtQD

Nesses quatro exemplos, podemos ver a beleza da simetria nas asas de uma borboleta, em um flor, em uma folha de palmeira e no rosto de uma coruja, confirmando que a simetria está presente na natureza antes mesmo dos humanos começarem a utilizá-la.

1.4 Simetria nas construções

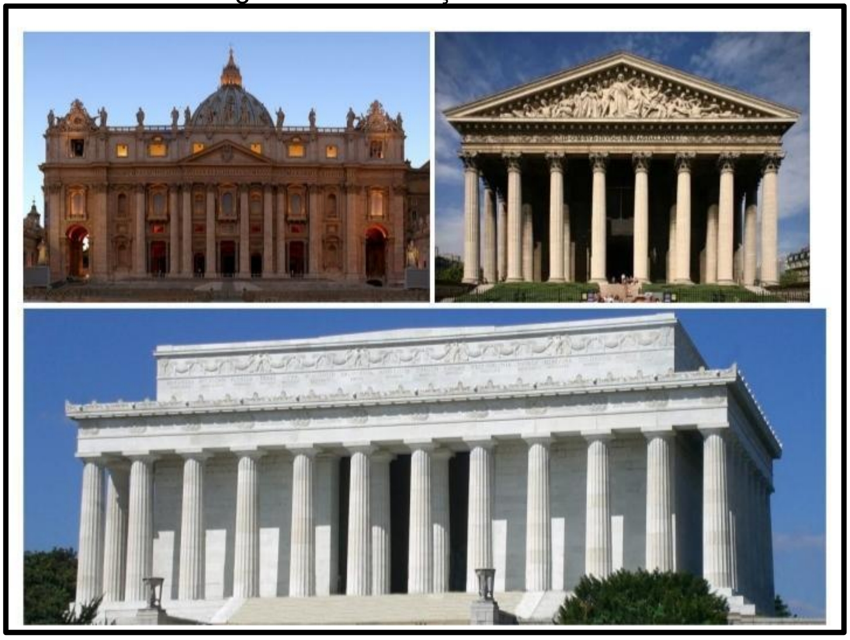
A simetria é um artifício bastante usado na arquitetura, pois a mesma passa uma sensação de segurança e estabilidade, além de que é visualmente satisfatória. Nós podemos ver a simetria com mais intensidade nas construções antigas, pois esse costume começou lá na Grécia antiga. Ainda vemos simetria em algumas construções e decorações atuais, pois para muitos ela não é ultrapassada. Temos importantes monumentos que são simétricos, como a Torre Eiffel e o Taj Mahal:

Figura 6: Simetria na construção

Fonte: Construção própria

E também temos algumas outras construções belas e simétricas:

Figura 7: Construções simétricas



Fonte: https://www.vivadecora.com.br/pro/arquitetura-neoclassica/

2. Função polinomial do segundo grau

Uma aplicação f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ recebe o nome de função quadrática ou função polinomial do segundo grau quando associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o elemento $(ax^2 + bx + c)$, em que a, b e c são números reais dados e a ≠ 0.

Como por exemplo a função: $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$onde$a = 2, b = -2$ e $c = 1$.

2.1 Gráfico

Angry Birds: https://www.geogebra.org/m/qjuehvdh

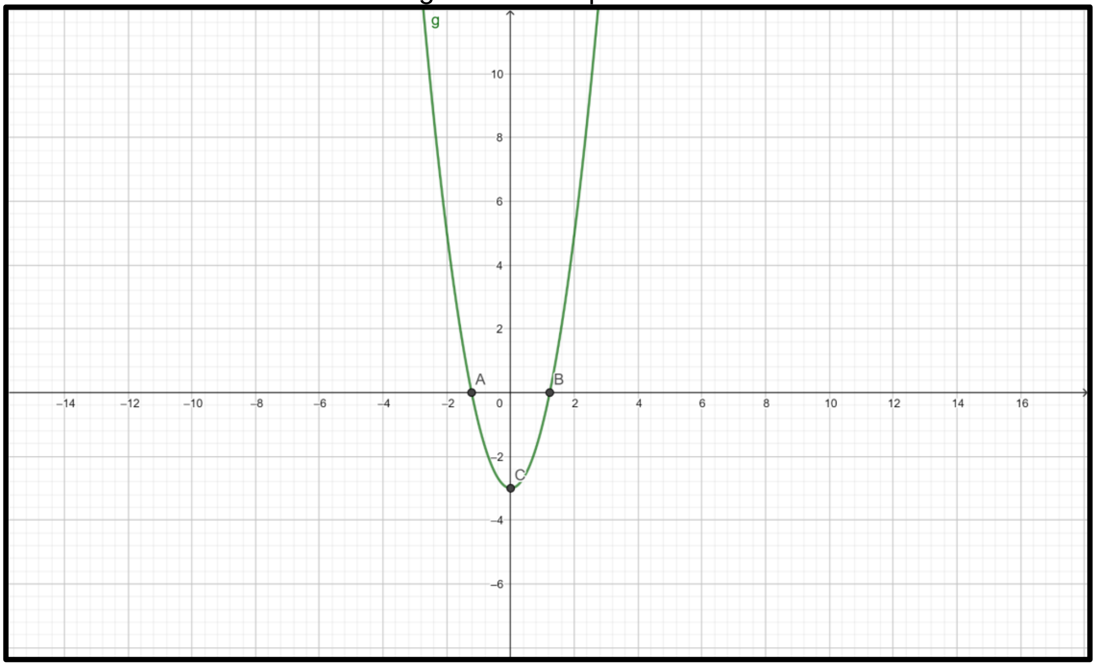
O gráfico dessa função é uma parábola. No estudo com o GeoGebra podemos concluir as seguintes observações:

- Quando a > 0 a concavidade da parábola é voltada para cima e quando a < 0 a concavidade da parábola é voltada para baixo;
- Ao movimentar o elemento b ocorre uma translação horizontal na parábola, pois muda a inclinação da reta de acordo com a reta tangente que é feita entre a interseção da parábola com o eixo Y;
- Ao movimentar o elemento c ocorre uma transformação vertical na parábola.

Construção 1: https://www.geogebra.org/m/fwd2bj7j

Vamos analisar alguns pontos importantes no gráfico da função $g(x) = x^2 - 3$

Figura 8: Uma parábola



Fonte: Construção própria

Nesse gráfico, vamos destacar três pontos importantes. Sabemos que o eixo horizontal é chamado de eixo x e o eixo vertical é chamado de eixo y. Os zeros ou raízes da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores de x reais tais que $f(x) = 0$, fica condicionada ao fato de $\sqrt{\ }$ ser real, sendo $\Delta = b^2 - 4ac$. Assim, temos três casos a considerar, quando $\Delta > 0$, $\Delta < 0$ e $\Delta = 0$, porém para essa aula falaremos apenas sobre casos no qual $\Delta > 0$ logo, a equação apresentará duas raízes distintas.

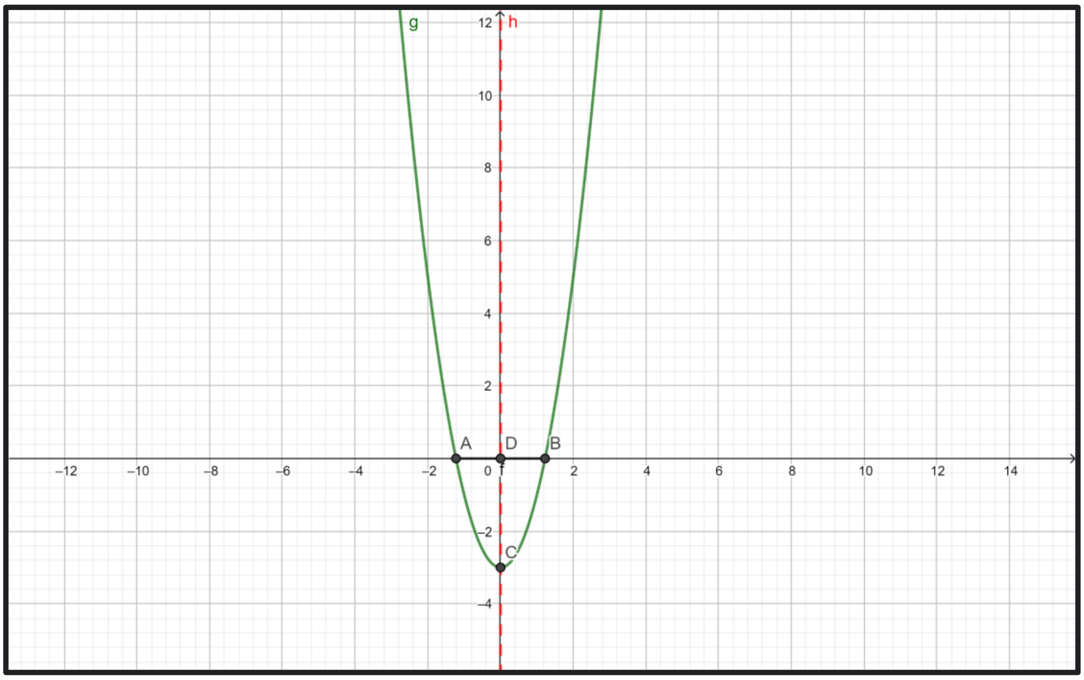
Além dos zeros da função, é importante destacar o x do vértice (Xv), o Xv é chamado ponto de máximo da parábola quando a < 0 e ponto de mínimo da parábola quando a > 0, sendo assim, o y do vértice (Yv) é denominado valor máximo quando a < 0 e valor mínimo quando a > 0. O ponto C na função g é o vértice de coordenada (Xv, Yv), portanto ele é denominado ponto máximo ou mínimo da parábola.

2.2 Simetria

Ainda na função g, observe a Figura 9 a seguir:

Construção 2: https://www.geogebra.org/m/aufuvthr

Figura 9: Uma parábola e o eixo de simetria



Fonte: Construção própria

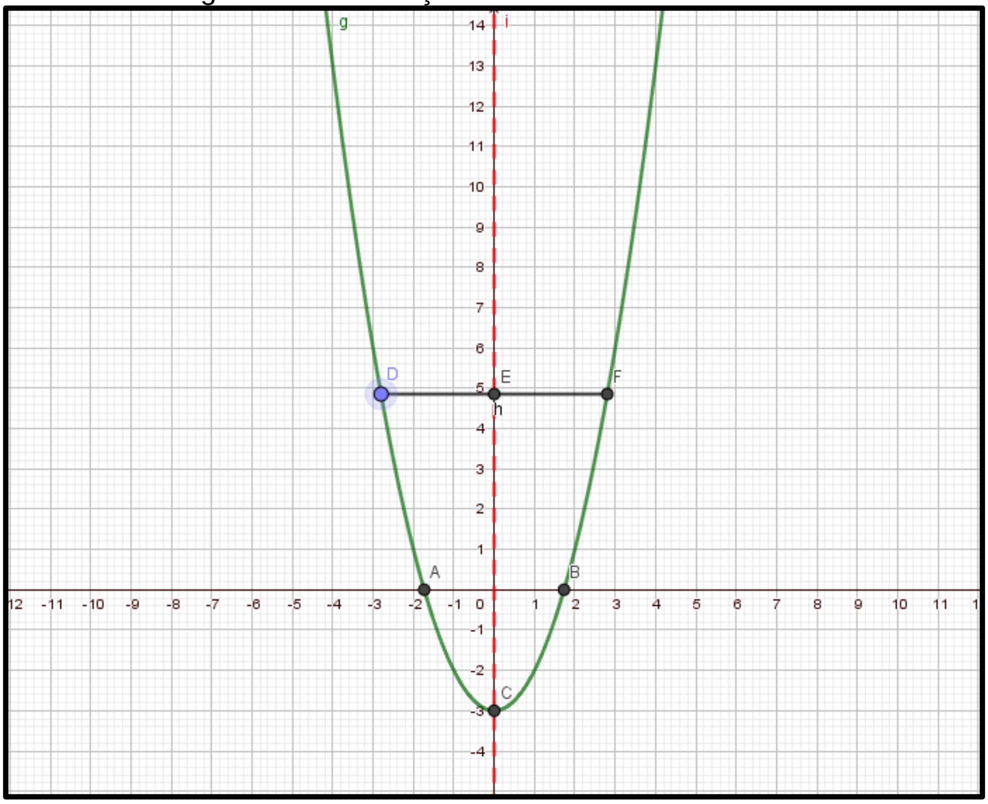
Podemos identificar as seguintes construções:

- Foi criado um segmento AB, como já observamos, as abscissas dos pontos A e B são os zeros dessa função;
- Com a ferramenta “Ponto médio ou centro” foi obtido o ponto D, ponto médio do segmento AB;
- Por fim, podemos construir uma reta passando pelo vértice e o ponto D, dessa forma, conseguimos concluir que existe uma simetria dos pontos que representam os zeros da função em relação ao ponto D;
- Ao traçar a reta que passa pelo vértice e pelo ponto D, criamos uma reta h (representada na figura 9 em linha tracejada para auxiliar na visualização da simetria) que representa o eixo de simetria.

Mas será que essa simetria vale para outros pontos da parábola? Agora, vamos mostrar uma segunda construção, dessa vez, criamos um ponto D qualquer pertencente à parábola e chegamos a um segmento DF com ponto médio em E, é possível mover esse segmento por toda a parábola e o ponto E permanece na reta tracejada h.

Podemos concluir que a reta h, que coincide com o eixo Y é nosso eixo de simetria.

Figura 10: Construção no GeoGebra com eixo de simetria

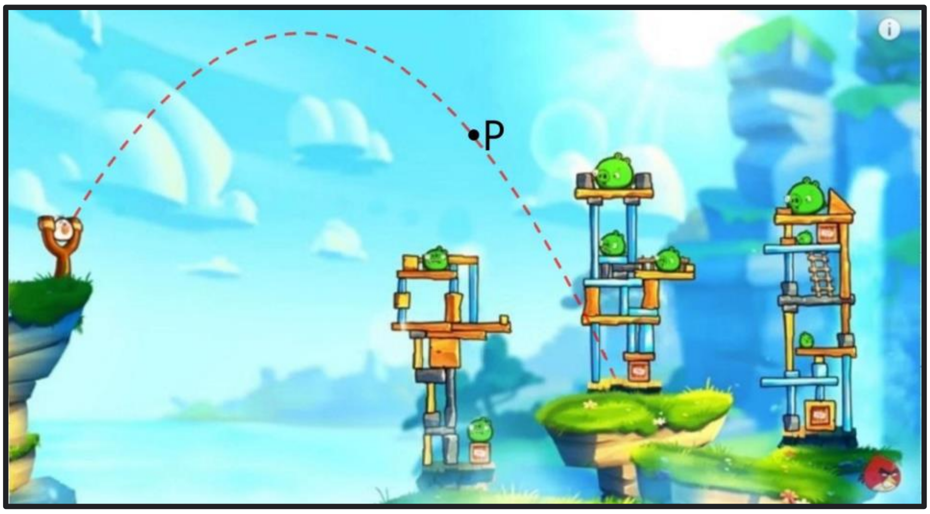


Fonte: Construção própria

2.3 Atividade

O jogo Angry Birds tem como objetivo eliminar os inimigos (porcos verdes), para isso passáros são lançados por um estilingue em direção às construções onde os porcos estão. Um pássaro branco é lançado até a construção do meio da figura a seguir, seu trajeto forma parte de uma parábola com eixo de simetria vertical. A ave que passará pelo ponto P percorre 6 m desde o seu lançamento até o momento que o mesmo atinge o solo. A altura máxima que o pássaro alcança é de 50 m acima do terreno e é atingida ao percorrer 1 m a partir de seu lançamento. Quantos metros acima estava o pássaro quando foi lançado?

Figura 11: Ilustração da questão



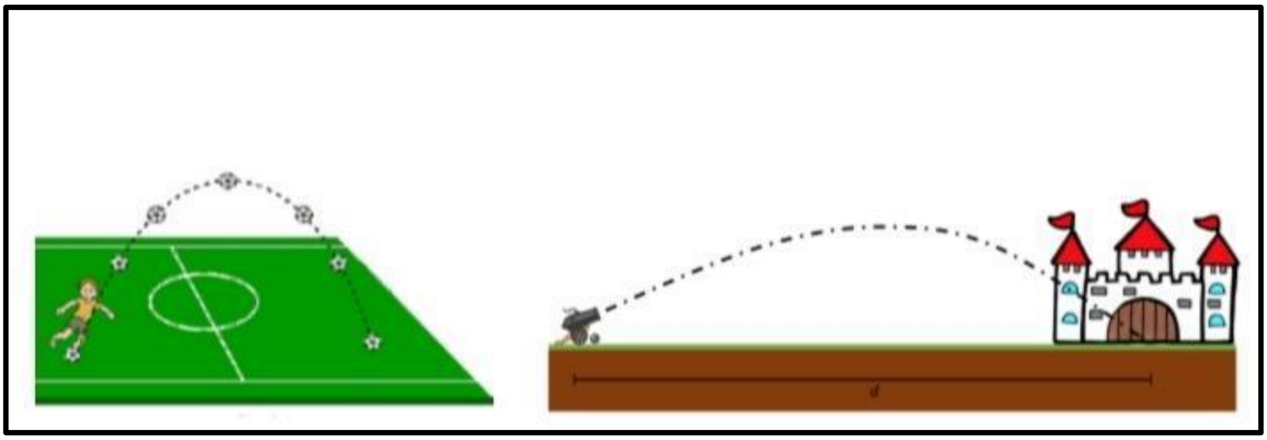
Fonte: Construção própria

3. Aplicações da função quadrática no cotidiano

O que lançamento de projéteis, antenas parabólicas e campeonatos de futebol têm em comum?

Pensando em campeonato de futebol, vemos que o movimento que a bola faz quando um jogador a chuta, é análogo ao movimento do projétil lançado por um canhão.

Figura 12: Exemplos de parábola



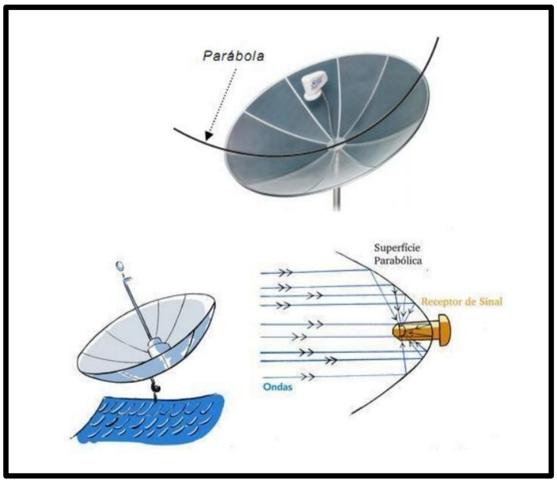
Fonte: http://funcoesopcao1c.blogspot.com/p/algumas-aplicacoes-de-funcoes.html

Quando lançamos um objeto no espaço (bala de canhão) tendo em vista alcançar a maior distância possível, tanto horizontalmente quanto verticalmente, a curva que o objeto faz é aproximadamente uma parábola, se considerarmos que a resistência do ar é pequena ou não existe. O movimento da bala de canhão é acelerado pela ação do campo gravitacional, por isso o lançamento de projéteis é modelado por uma equação do segundo grau.

Portanto o que todos eles têm em comum é que suas trajetórias são uma parábola. A Função Quadrática tem várias aplicações na vida, serve por exemplo, para calcular o lançamento e o movimento de projéteis como balas de canhão e foguetes, para presumir o ângulo de reflexão de faróis de carros, conjecturar o ângulo da antena parabólica, entre outras coisas.

3.1 Antena parabólica

Figura 13: Antena parabólica



Fonte:https://bityli.com/LIFVoi

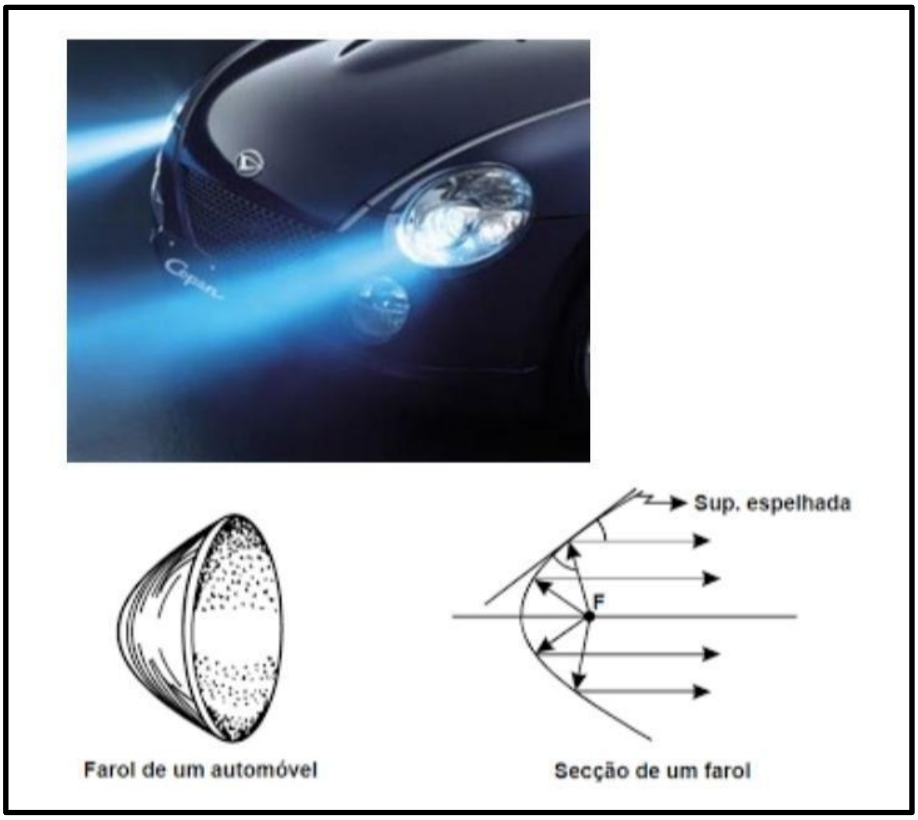
A antena parabólica tem esse nome pois possui o formato parabólico, ela é formada por várias parábolas, em que os seus pontos mínimos coincidem no vértice, logo o eixo de simetria delas é o mesmo. Assim, o foco da antena está no eixo de simetria das parábolas.

Sua antena capta as ondas eletromagnéticas que são lançadas pelo satélite e o aparelho conectado converterá estas ondas em um sinal que a sua TV transformará em filmes, novelas, jornais e outros programas que você assiste em seu sofá.

3.2 Farol de carro

Os faróis de carro funcionam de maneira análoga à antena parabólica.

Figura 14: Faróis de carro



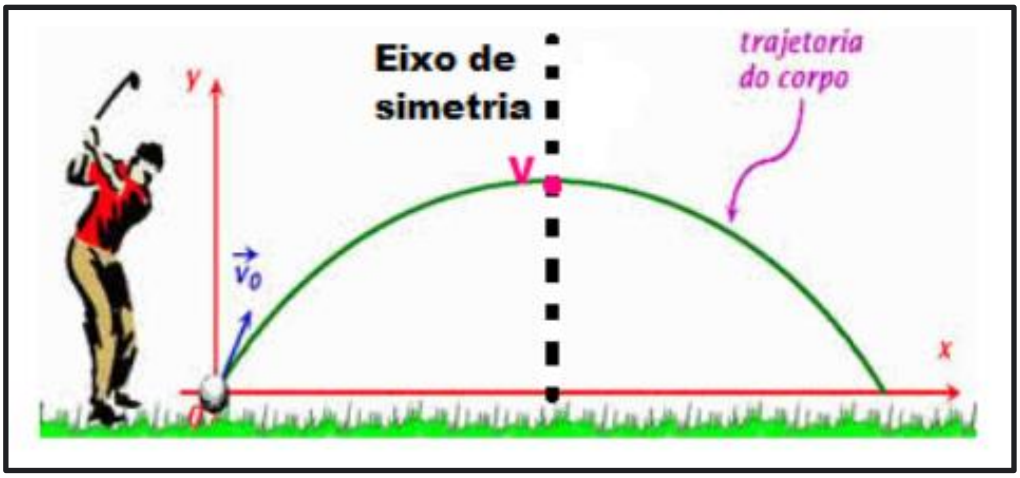
Fonte: https://bityli.com/clwYLC

O farol possui um formato parabólico e se quisermos, conseguimos traçar várias parábolas no mesmo. O eixo de Simetria delas também coincide, tendo o foco nessa reta, o foco é um ponto do eixo de simetria.

3.3 Pontos importantes na parábola

Precisamos ressaltar alguns elementos importantes sobre o gráfico de uma Função quadrática na vida.

Figura 15: Jogador de golfe



Fonte:https://bityli.com/AcYZIf

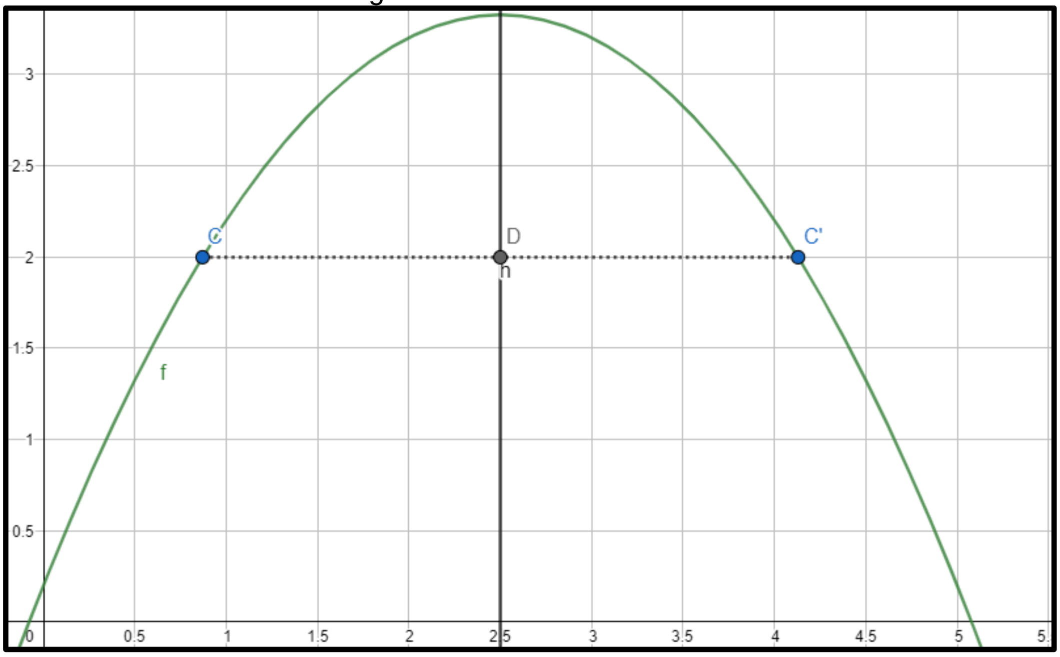
Em casos como a imagem anterior, a maior altura que a bola ou projétil alcançará será a ordenada do ponto máximo da parábola, ou seja, a ordenada do vértice da parábola (Yv). Assim, o ponto V que é o vértice da parábola pertencerá ao eixo de simetria.

Em situações da vida, tais como um homem jogando golfe/futebol ou até mesmo no lançamento de um projétil, a concavidade da parábola estará voltada para baixo, portanto o coeficiente “a” será negativo. Com isso, conseguimos observar seu ponto máximo, que será sua altura máxima.

4. Aplicações da simetria na função quadrática

Com base no que foi visto ao longo da apostila, chegamos a conclusão de que o eixo de simetria funciona de forma análoga a um espelho que passa pelo centro da parábola, refletindo os pontos de um lado para o outro. Ao se comportar como esse tal “espelho”, o eixo de simetria estabelece algumas relações interessantes entre os pares de pontos simétricos, como por exemplo, o fato de que são equidistantes do eixo e que possuem a mesma ordenada. Com essa observação, podemos garantir, por exemplo, que os dois pontos que a parábola corta o eixo x são simétricos, portanto, os zeros da função quadrática possuem abscissas simétricas. Assim, podemos garantir que qualquer ponto que seja diferente do vértice e que esteja contido na parábola, terá um simétrico de mesma ordenada e equidistante ao eixo de simetria. Vejamos o exemplo:

Figura 16: Pontos simétricos



Fonte: Construção própria

Na parábola anterior, os pontos C e C’ são simétricos, ou seja, são equidistantes do eixo de simetria (a distância de C até D é a mesma distância de C’ até D), como consequência dessa simetria, temos que os dois pontos possuem a mesma ordenada (valor de y) e a média de suas abscissas (valor de x) é o X do vértice. Tais características são fundamentais para a resolução de diversas questões ou caminhos mais rápidos para entender outras.

Por fim, será disponibilizado o Formulário Final: https://forms.gle/hvPykFtR4fvMZvno7

Figura 17: Questão 1 do Formulário.

1 - A Igreja de São Francisco de Assis, obra arquitetônica modernista de Oscar Niemeyer, localizada na Lagoa da Pampulha, em Belo Horizonte, possui abóbadas parabólicas. A seta na Figura 1 ilustra uma das abóbadas na entrada principal da capela. A Figura 2 fornece uma vista frontal desta abóbada, com medidas hipotéticas para simplificar os cálculos. Qual a medida da altura H, em metro, indicada na Figura 2? *

Figura 1

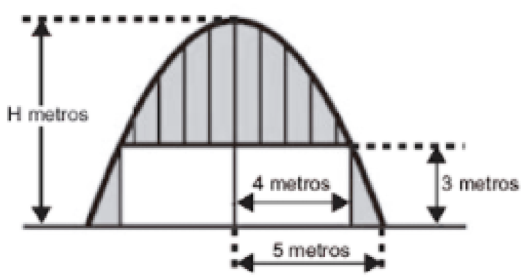


Figura 2

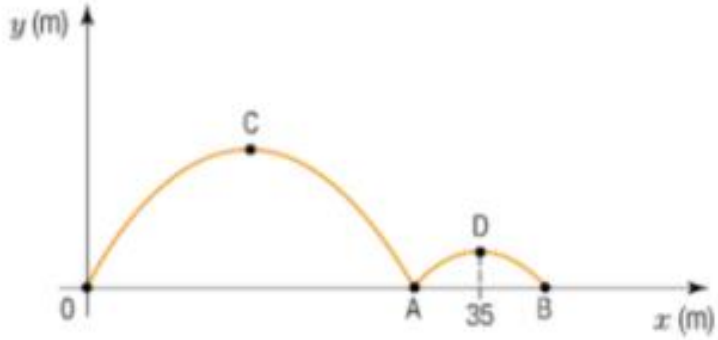
- 16/3
- 31/5
- 25/4
- 25/3
- 75/2

Fonte: Formulário do Google

Figura 18: Questão 2 do Formulário.

2 - Com base no enunciado abaixo, faça o que se pede. *

Uma bola de beisebol é lançada de um ponto 0 e, em seguida, toca o solo nos pontos A e B, conforme representado no sistema de eixos ortogonais:



Durante sua trajetória, a bola descreve duas parábolas com vértices C e D.

A equação de uma dessas parábolas é $y = \frac{-x^2}{75} + \frac{2x}{5}$.

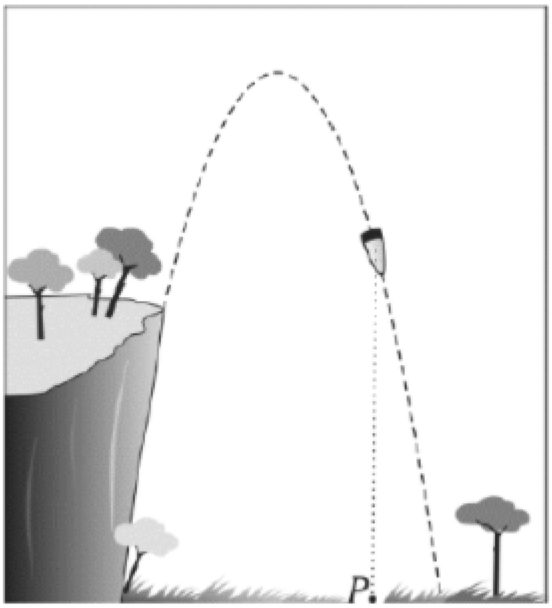
Se a abscissa de D é 35 m, a distância do ponto 0 ao ponto B, em metros, é igual a:

- 38
- 40
- 45
- 50

Fonte: Formulário do Google

Figura 19: Questão 3 do Formulário.

3 - (FUVEST/2015 - adaptada) A trajetória de um projétil, lançado da beira de um penhasco sobre um terreno plano e horizontal, é parte de uma parábola com eixo de simetria vertical, como ilustrado na figura. Sendo P a projeção do projétil no solo, este ponto percorre 30m do instante do lançamento até o instante que o projétil atinge o solo. A altura máxima do projétil, de 200 m acima do terreno, é atingida no instante em que a distância percorrida por P, a partir do instante do lançamento, é de 10 m. Quantos metros acima do terreno estava o projétil quando foi lançado? *



- 60
- 90
- 120
- 150
- 180

Fonte: Formulário do Google

Referências

BARROS, Catarina. Simetria nos animais. **BELASIMETRIAS**, 2008. Disponível em: https://belasimetrias.wordpress.com/2008/02/27/simetria-nos-animais/. Acesso em: 16/11/2021.

CRUZ, Talita. Confira 4 tipos de simetria e veja belos exemplos na arquitetura. **VivaDecoraPro**, 2019. Disponível em: https://www.vivadecora.com.br/pro/simetria/. Acesso em: 30/10/2021.

CRUZ, Talita. O incrível olhar da arquitetura neoclássica sobre as grandes obras do passado. **VivaDecoraPro**, 2019. Disponível em: https://www.vivadecora.com.br/pro/arquitetura-neoclassica/. Acesso em: 30/10/2021.

FERREIRA, Nivardo. 19 imagens que provam a simetria perfeita da natureza. **Comentário geral**, 2015. Disponível em: http://nfcomgeral.blogspot.com/2015/08/19-imagens-que-provam-simetria-perfeita.html. Acesso em: 16/11/2021.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. Fundamentos de Matemática Elementar: Conjuntos funções - Vol 1 - 9.ed. São Paulo: Editora Atual, 2013.

LIMA, Antônio. Simetrias, 2021. Disponível em: https://www.antonioguilherme.web.br.com/blog/simetria/. Acesso em: 30/10/2021.

PATRIANI, Romeu. O que é arquitetura neoclássica? **ROMEU PATRIANI ARCHITETURE**, 2017. Disponível em: http://romeupatriani.com.br/site/o-que-e-arquitetura-neoclassica/. Acesso em: 18/11/2021.

APÊNDICE - C

Material Didático Elaborado

Diretoria de Ensino Superior - Licenciatura em Matemática

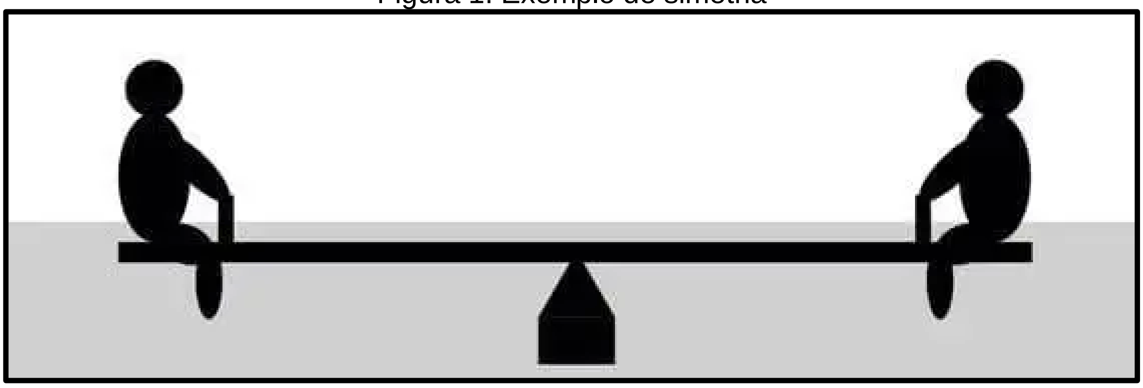
Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática II
Linha de pesquisa: Ensino e Aprendizagem de Álgebra
Licenciandos: Arthur Souza Manhães, Lais Massena de Souza, Larissa Ferreira Barreto Manhães, Mayara Moreira Guimarães, Thamires Azeredo Gomes.
Orientadora Professora Me.: Ana Mary Fonseca Barreto de Almeida.
Nome: ____ Data: ___/___/_____

O eixo de simetria como ferramenta para o estudo da função polinomial do segundo grau

1. Estudo da simetria

Quando falamos de simetria, é comum pensarmos em proporções perfeitas, harmoniosas ou até mesmo em dividir um objeto em partes iguais. De certa forma, a simetria é composta desses elementos, mas não é tarefa fácil definir a simetria em termos matemáticos precisos. O que sabemos sobre simetria é que uma figura é simétrica se conseguimos dividi-la em partes iguais e que as partes resultantes dessa divisão coincidam perfeitamente quando sobrepostas. Podemos ver um exemplo de simetria na figura abaixo.

Figura 1: Exemplo de simetria



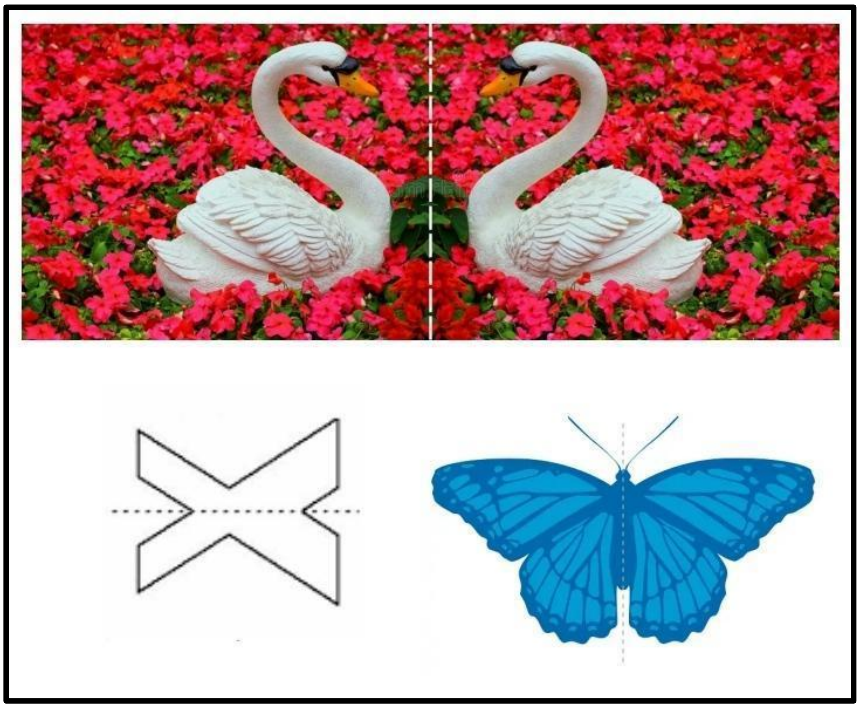
Fonte: https://br.pinterest.com/pin/362469470008789574/

1.1 Eixo de simetria

O eixo de simetria é uma reta que divide um plano em dois semiplanos de forma que, cada ponto de uma figura contida em um semiplano que ele determina corresponde a um outro ponto no semiplano oposto com igual distância do eixo.

A seguir podemos ver três figuras simétricas, com seus respectivos eixos de simetria, que consistem nessas linhas tracejadas.

Figura 2: Figuras simétricas

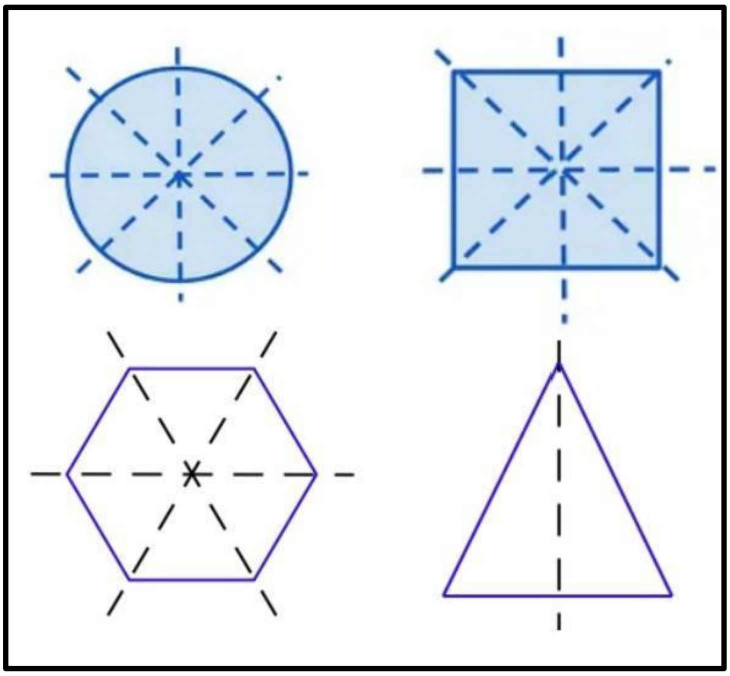


Fonte: https://bityli.com/nbhtQD

1.2 Figuras simétricas

Adotaremos figuras simétricas aquelas que contenham no mínimo um eixo de simetria passando pelo seu centro, ou seja, se traçarmos uma reta dividindo uma figura ao meio, as duas partes quando sobrepostas coincidirão. Os exemplos mais comuns de figuras simétricas são os polígonos e círculos estudados na geometria plana.

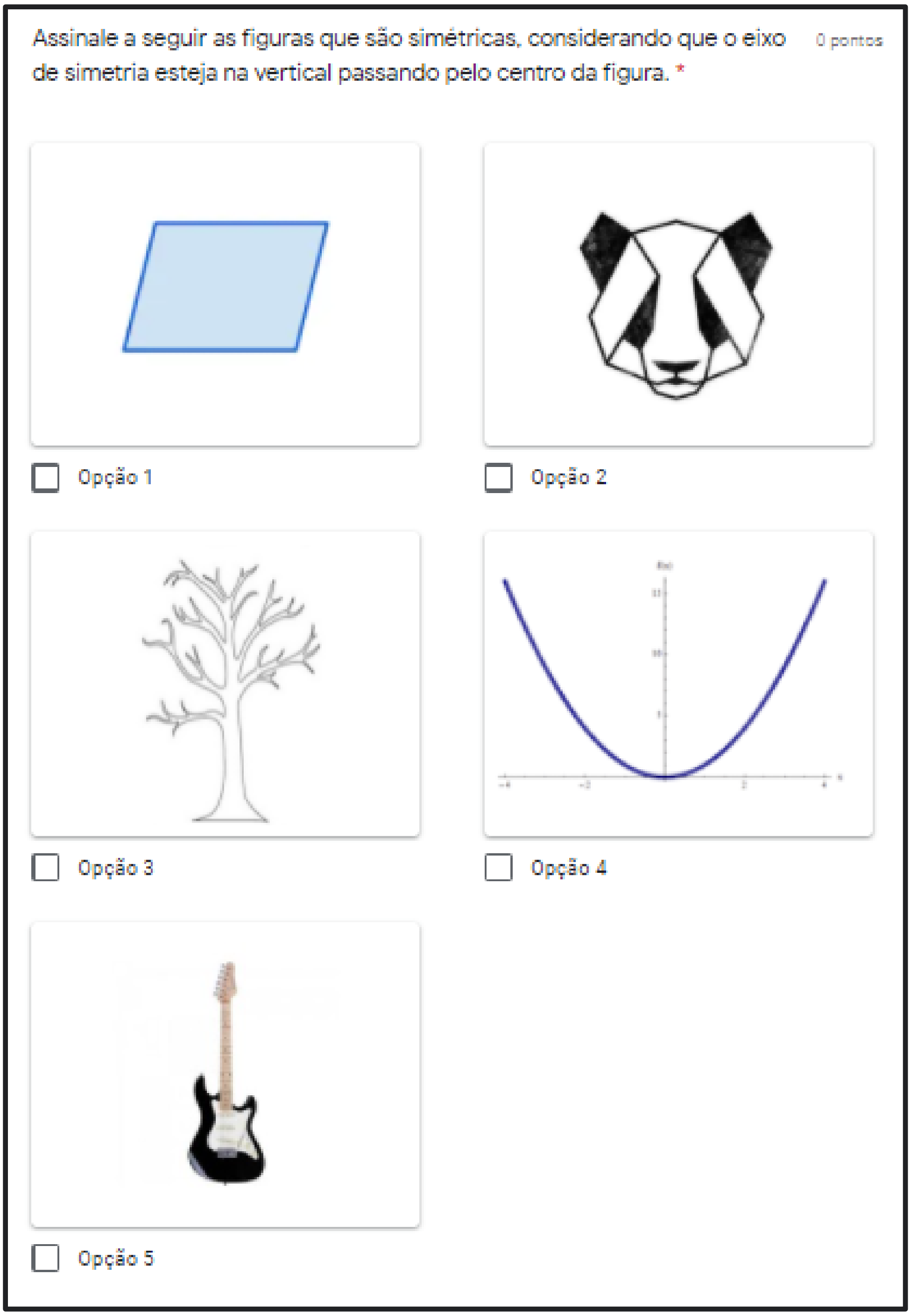
Figura 3: Figuras simétricas



Fonte: https://bityli.com/mGgHm

Em seguida, será disponibilizado o seguinte formulario: https://forms.gle/U8ZNW1L7MLTx811E8

Figura 4: Figuras do formulário


Assinale a seguir as figuras que são simétricas, considerando que o eixo de simetria esteja na vertical passando pelo centro da figura. * 0 pontos

Opção 1

Opção 2

Opção 3

Opção 4

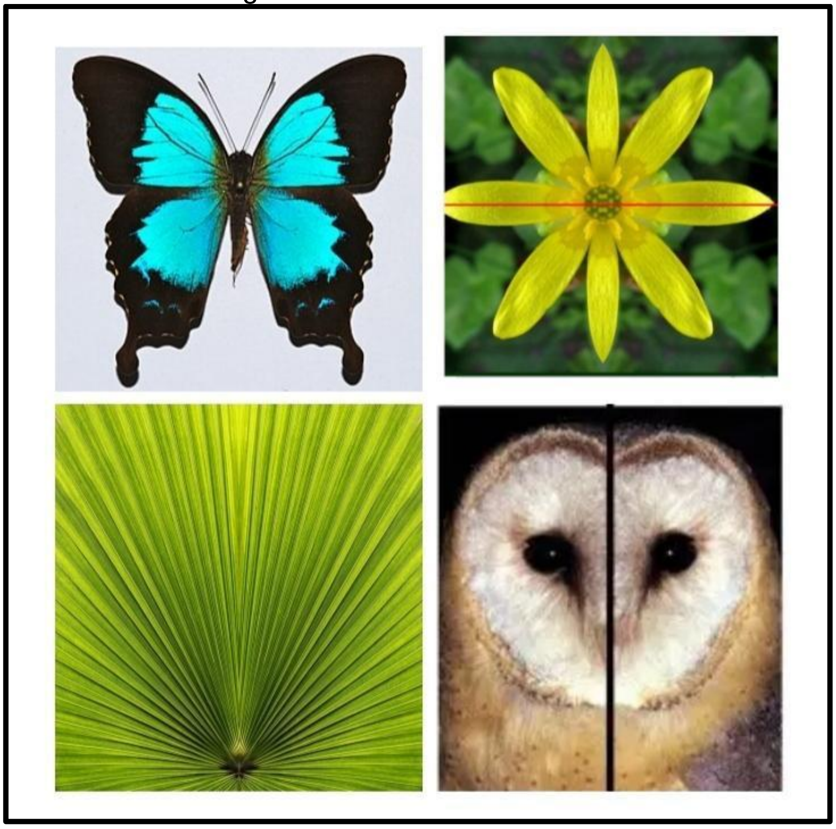
Opção 5

Fonte: Formulário do Google

1.3 Simetria é natural

A simetria está presente em várias coisas no nosso cotidiano, podemos observar desde coisas naturais até a construções humanas. A simetria é um artifício muito usado pelos homens em diversas áreas e muitos a vêem como sinônimo de beleza. Porém, ela já estava presente na natureza, antes da mesma ser utilizada por nós, como podemos ver nos exemplos a seguir.

Figura 5: Simetria na Natureza



Fonte: Construção própria

Nesses quatro exemplos, podemos ver a beleza da simetria nas asas de uma borboleta, em um flor, em uma folha de palmeira e no rosto de uma coruja, confirmando que a simetria está presente na natureza antes mesmo dos humanos começarem a utilizá-la.

1.4 Simetria nas construções

A simetria é um artifício bastante usado na arquitetura, pois a mesma passa uma sensação de segurança e estabilidade, além de que é visualmente satisfatória. Nós podemos ver a simetria com mais intensidade nas construções antigas, pois esse costume começou lá na Grécia antiga. Ainda vemos simetria em algumas construções e decorações atuais, pois para muitos ela não é ultrapassada. Temos importantes monumentos que são simétricos, como a Torre Eiffel e o Taj Mahal:

Figura 6: Simetria na construção

Fonte: Elaboração Própria

E também temos algumas outras construções belas e simétricas:

Figura 7: Construções simétricas

Fonte: https://www.vivadecora.com.br/pro/arquitetura-neoclassica/

2. Função polinomial do segundo grau

Uma aplicação f de ℝ em ℝ recebe o nome de função quadrática ou função polinomial do segundo grau quando associa a cada $x \in \mathbb{R}$ o elemento $(ax^2 + bx\ + c)$, em que a, b e c são números reais dados e a ≠ 0.

Como por exemplo a função: $f(x)\ =\ 2x^2\ -\ 2x\ +\ 1$ onde $a = 2, b =\ -2$ e $c = 1$.

2.1 Gráfico

Angry Birds: https://www.geogebra.org/m/qjuehvdh

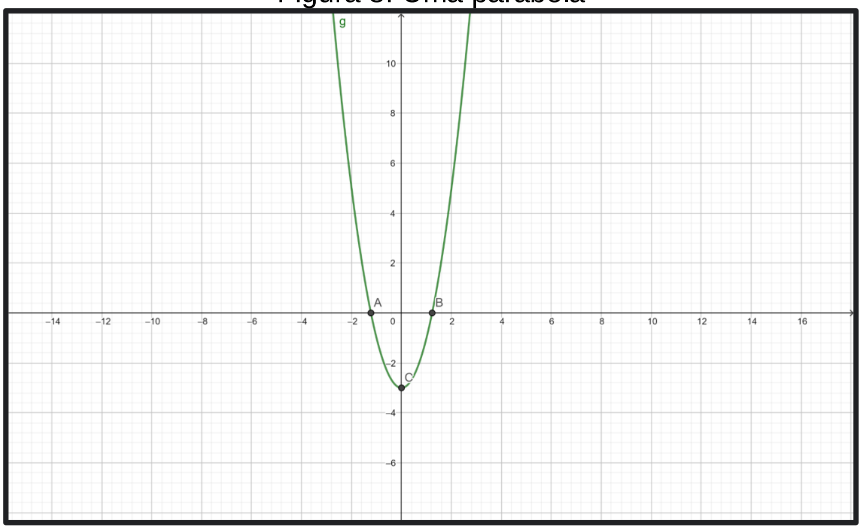
O gráfico dessa função é uma parábola. No estudo com o GeoGebra podemos concluir as seguintes observações:

- Quando a > 0 a concavidade da parábola é voltada para cima e quando a < 0 a concavidade da parábola é voltada para baixo;
- Ao movimentar o elemento b ocorre uma translação horizontal na parábola, pois muda a inclinação da reta de acordo com a reta tangente que é feita entre a interseção da parábola com o eixo Y;
- Ao movimentar o elemento c ocorre uma transformação vertical na parábola.

Construção 1: https://www.geogebra.org/m/fwd2bj7j

Vamos analisar alguns pontos importantes no gráfico da função $g(x) = x^2 - 3$

Figura 8: Uma parábola



Fonte: Construção própria

Nesse gráfico, vamos destacar três pontos importantes. Sabemos que o eixo horizontal é chamado de eixo x e o eixo vertical é chamado de eixo y. Os zeros ou raízes da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores de x reais tais que $f(x) = 0$, fica condicionada ao fato de $\sqrt{\Delta}$ ser real, sendo $\Delta = b^2 - 4ac$. Assim, temos três casos a considerar, quando $\Delta > 0$, $\Delta < 0$ e $\Delta = 0$, porém para essa aula falaremos apenas sobre casos no qual $\Delta > 0$ logo, a equação apresentará duas raízes distintas.

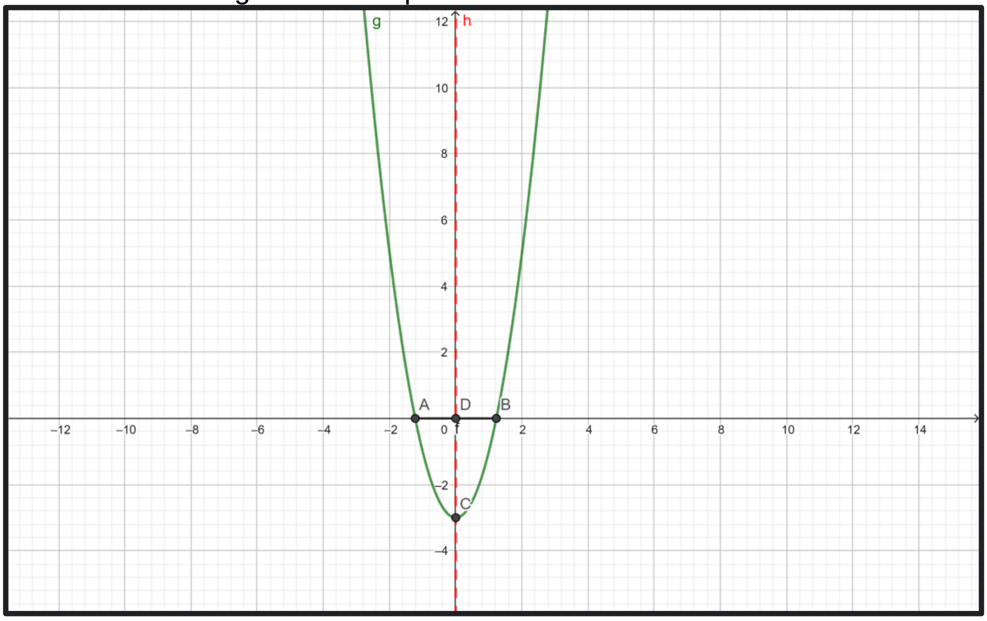
Além dos zeros da função, é importante destacar o x do vértice (Xv), o Xv é chamado ponto de máximo da parábola quando a < 0 e ponto de mínimo da parábola quando a > 0, sendo assim, o y do vértice (Yv) é denominado valor máximo quando a < 0 e valor mínimo quando a > 0. O ponto C na função g é o vértice de coordenada (Xv, Yv), portanto ele é denominado ponto máximo ou mínimo da parábola.

2.2 Simetria

Ainda na função g, observe a Figura 9 a seguir:

Construção 2: https://www.geogebra.org/m/aufuvthr

Figura 9: Uma parábola e o eixo de simetria



Fonte: Construção própria

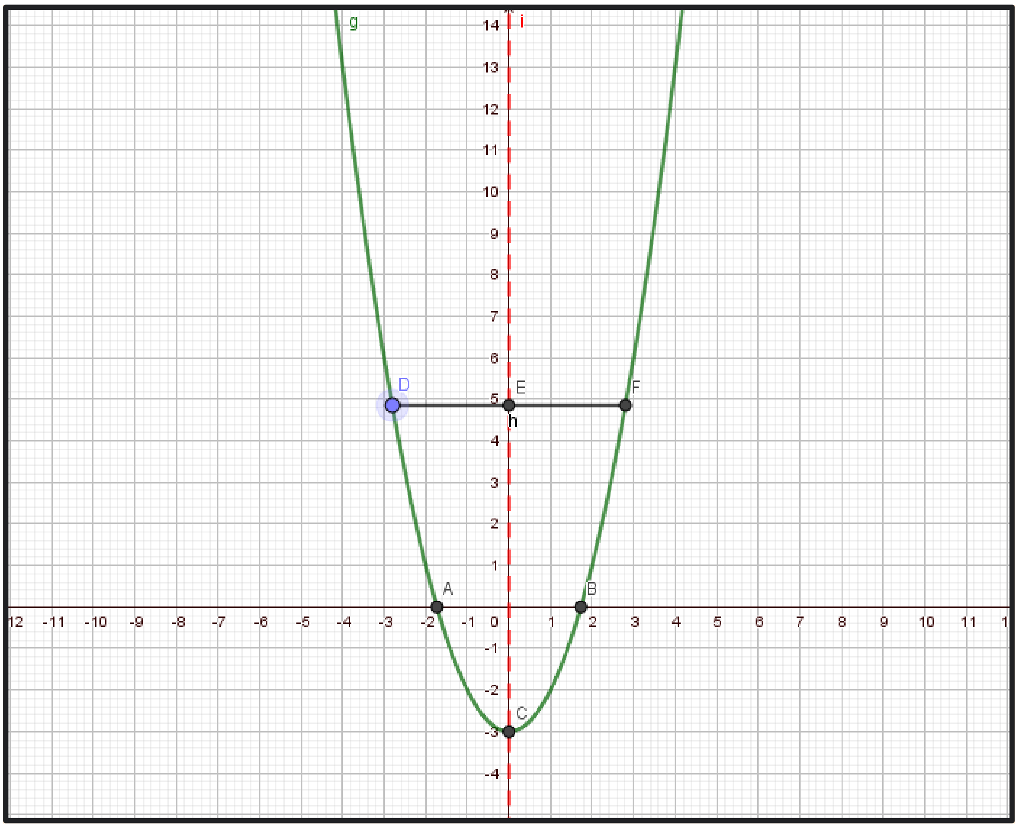
Podemos identificar as seguintes construções:

- Foi criado um segmento AB, como já observamos, as abscissas dos pontos A e B são os zeros dessa função;
- Com a ferramenta “Ponto médio ou centro” foi obtido o ponto D, ponto médio do segmento AB;
- Por fim, podemos construir uma reta passando pelo vértice e o ponto D, dessa forma, conseguimos concluir que existe uma simetria dos pontos que representam os zeros da função em relação ao ponto D;
- Ao traçar a reta que passa pelo vértice e pelo ponto D, criamos uma reta h (representada na figura 9 em linha tracejada para auxiliar na visualização da simetria) que representa o eixo de simetria.

Mas será que essa simetria vale para outros pontos da parábola? Agora, vamos mostrar uma segunda construção, dessa vez, criamos um ponto D qualquer pertencente à parábola e chegamos a um segmento DF com ponto médio em E, é possível mover esse segmento por toda a parábola e o ponto E permanece na reta tracejada h.

Podemos concluir que a reta h, que coincide com o eixo Y é nosso eixo de simetria.

Figura 10: Construção no GeoGebra com eixo de simetria

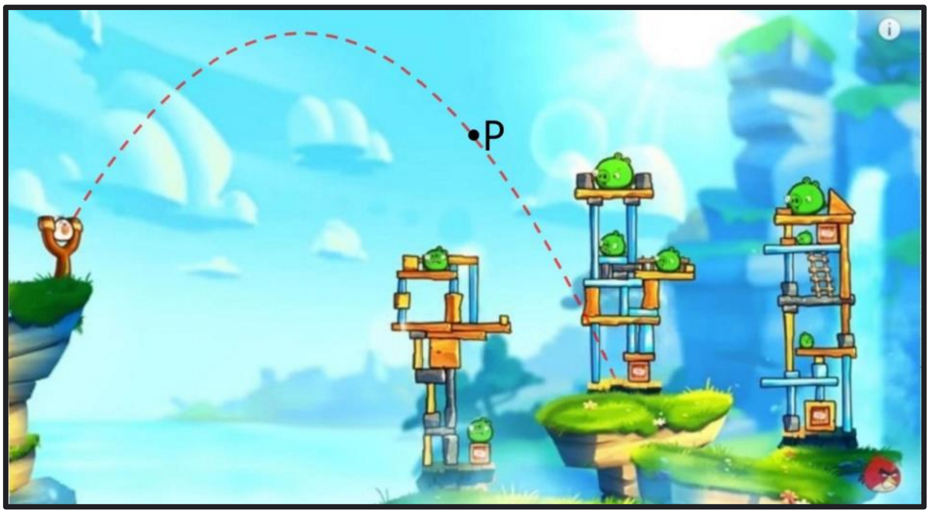


Fonte: Elaboração Própria

2.3 Atividade

O jogo Angry Birds tem como objetivo eliminar os inimigos (porcos verdes), para isso passáros são lançados por um estilingue em direção às construções onde os porcos estão. Um pássaro branco é lançado até a construção do meio da figura a seguir, seu trajeto forma parte de uma parábola com eixo de simetria vertical. A ave que passará pelo ponto P percorre 6 m desde o seu lançamento até o momento que o mesmo atinge o solo. A altura máxima que o pássaro alcança é de 50 m acima do terreno e é atingida ao percorrer 1 m a partir de seu lançamento. Quantos metros acima estava o pássaro quando foi lançado?

Figura 11: Ilustração da questão



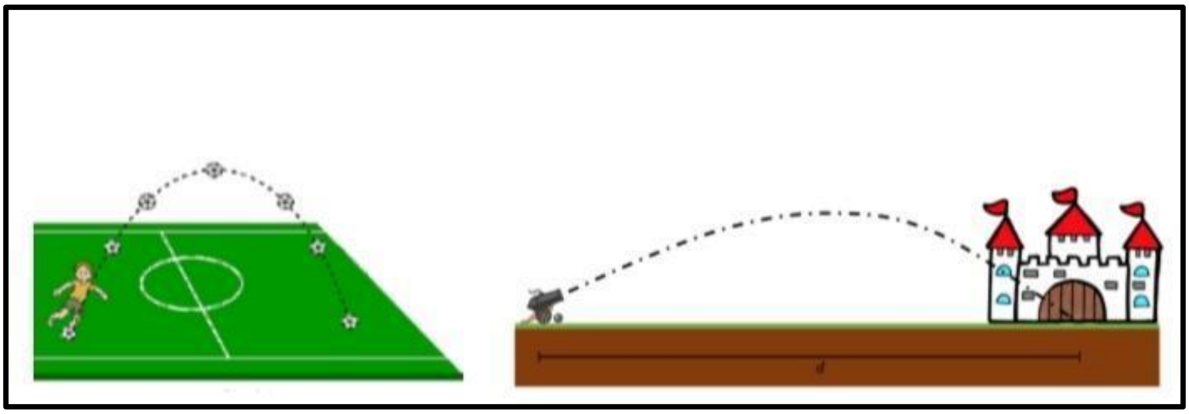
Fonte: Elaboração própria

3. Aplicações da função quadrática no cotidiano

O que lançamento de projéteis, antenas parabólicas e campeonatos de futebol têm em comum?

Pensando em campeonato de futebol, vemos que o movimento que a bola faz quando um jogador a chuta, é análogo ao movimento do projétil lançado por um canhão.

Figura 12: Exemplos de parábola



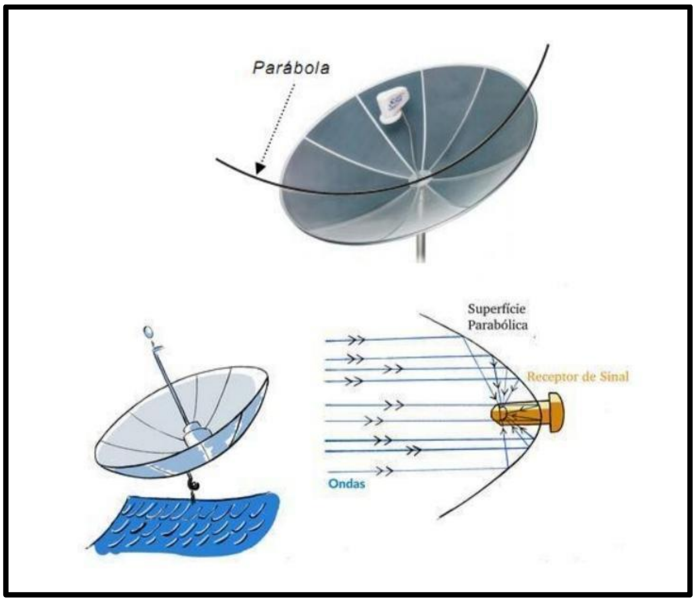
Fonte: http://funcoesopcao1c.blogspot.com/p/algumas-aplicacoes-de-funcoes.html

Quando lançamos um objeto no espaço (bala de canhão) tendo em vista alcançar a maior distância possível, tanto horizontalmente quanto verticalmente, a curva que o objeto faz é aproximadamente uma parábola, se considerarmos que a resistência do ar é pequena ou não existe. O movimento da bala de canhão é acelerado pela ação do campo gravitacional, por isso o lançamento de projéteis é modelado por uma equação do segundo grau.

Portanto o que todos eles têm em comum é que suas trajetórias são uma parábola. A Função Quadrática tem várias aplicações na vida, serve por exemplo, para calcular o lançamento e o movimento de projéteis como balas de canhão e foguetes, para presumir o ângulo de reflexão de faróis de carros, conjecturar o ângulo da antena parabólica, entre outras coisas.

3.1 Antena parabólica

Figura 13: Antena parabólica



Fonte: https://bityli.com/LIFVoi

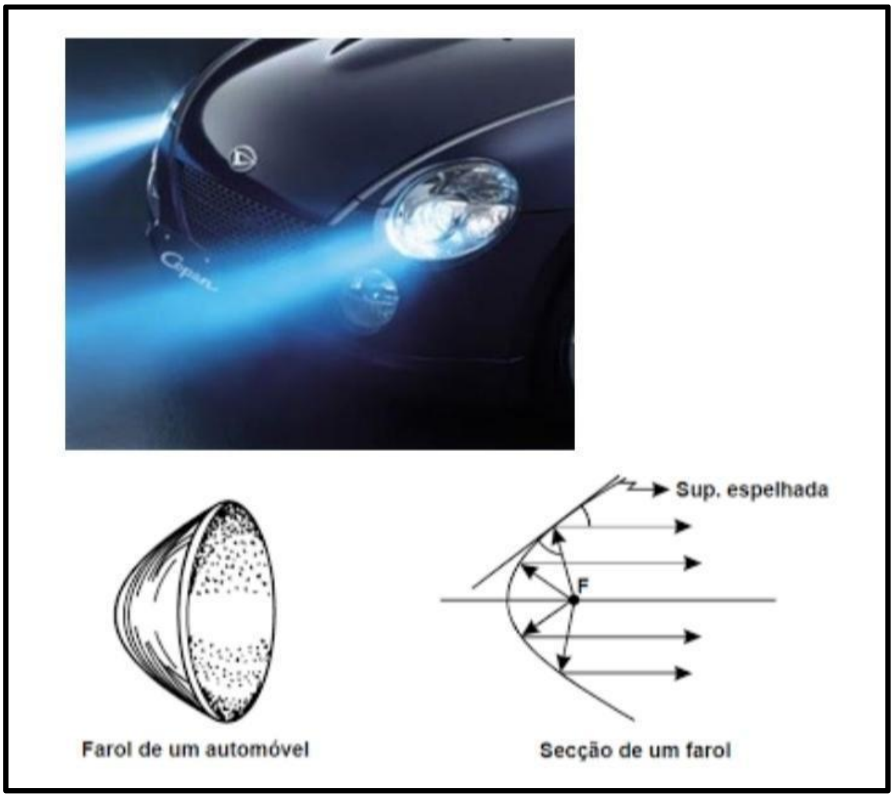
A antena parabólica tem esse nome pois possui o formato parabólico, ela é formada por várias parábolas, em que os seus pontos mínimos coincidem no vértice, logo o eixo de simetria delas é o mesmo. Assim, o foco da antena está no eixo de simetria das parábolas.

Sua antena capta as ondas eletromagnéticas que são lançadas pelo satélite e o aparelho conectado converterá estas ondas em um sinal que a sua TV transformará em filmes, novelas, jornais e outros programas que você assiste em seu sofá.

3.2 Farol de carro

Os faróis de carro funcionam de maneira análoga à antena parabólica.

Figura 14: Faróis de carro



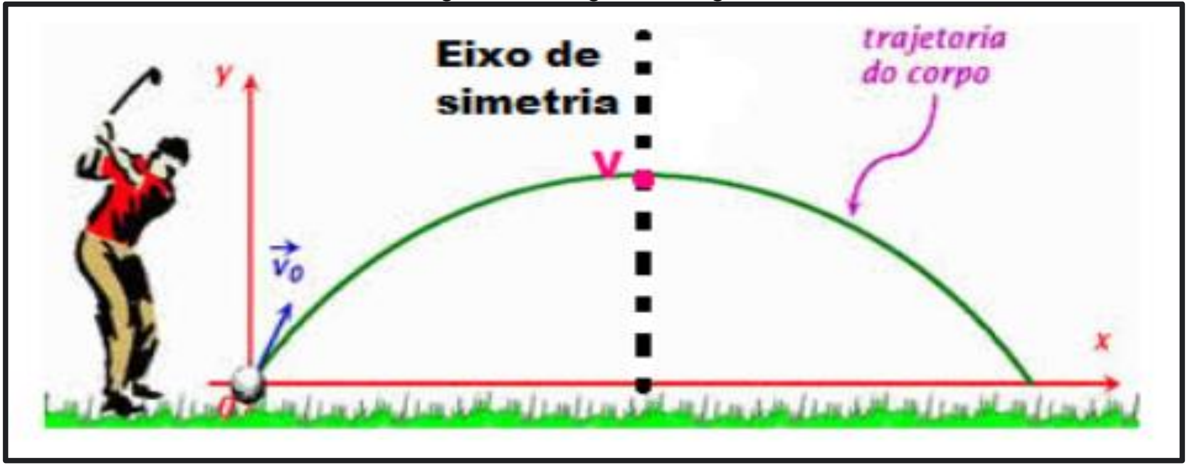
Fonte: https://bityli.com/clwYLC

O farol possui um formato parabólico e se quisermos, conseguimos traçar várias parábolas no mesmo. O eixo de Simetria delas também coincide, tendo o foco nessa reta, o foco é um ponto do eixo de simetria.

3.3 Pontos importantes na parábola

Precisamos ressaltar alguns elementos importantes sobre o gráfico de uma Função quadrática na vida.

Figura 15: Jogador de golfe



Fonte: https://bityli.com/AcYZIf

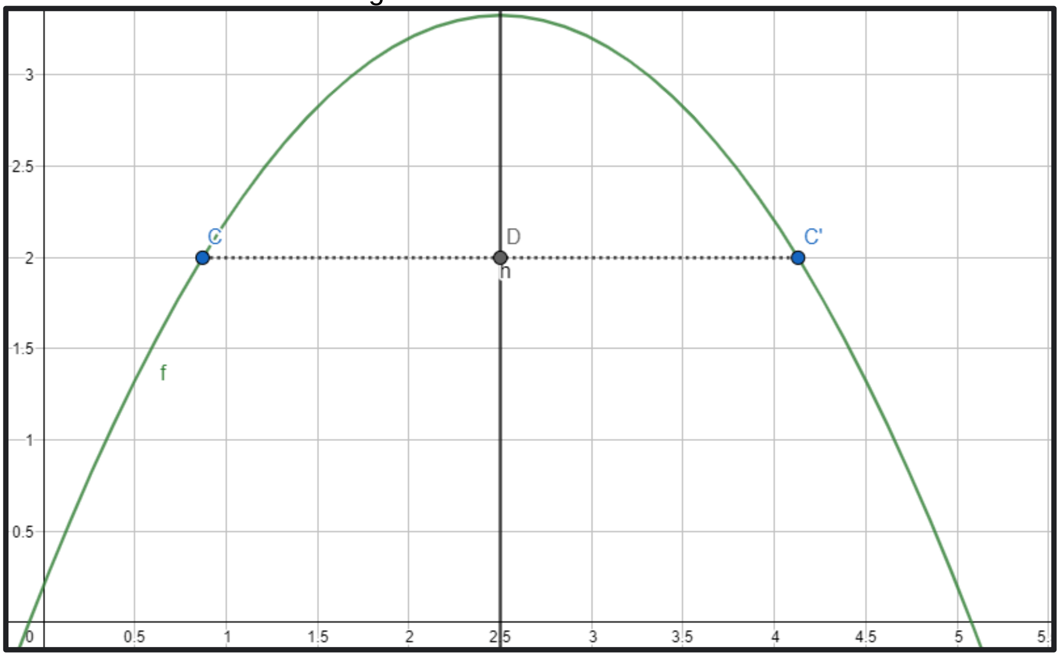
Em casos como a imagem anterior, a maior altura que a bola ou projétil alcançará será a ordenada do ponto máximo da parábola, ou seja, a ordenada do vértice da parábola (Yv). Assim, o ponto V que é o vértice da parábola pertencerá ao eixo de simetria.

Em situações da vida, tais como um homem jogando golfe/futebol ou até mesmo no lançamento de um projétil, a concavidade da parábola estará voltada para baixo, portanto o coeficiente “a” será negativo. Com isso, conseguimos observar seu ponto máximo, que será sua altura máxima.

4. Aplicações da simetria na função quadrática

Com base no que foi visto ao longo da apostila, chegamos a conclusão de que o eixo de simetria funciona de forma análoga a um espelho que passa pelo centro da parábola, refletindo os pontos de um lado para o outro. Ao se comportar como esse tal “espelho”, o eixo de simetria estabelece algumas relações interessantes entre os pares de pontos simétricos, como por exemplo, o fato de que são equidistantes do eixo e que possuem a mesma ordenada. Com essa observação, podemos garantir, por exemplo, que os dois pontos que a parábola corta o eixo x são simétricos, portanto, os zeros da função quadrática possuem abscissas simétricas. Assim, podemos garantir que qualquer ponto que seja diferente do vértice e que esteja contido na parábola, terá um simétrico de mesma ordenada e equidistante ao eixo de simetria. Vejamos o exemplo:

Figura 16: Pontos simétricos



Fonte: Elaboração própria

Na parábola anterior, os pontos C e C’ são simétricos, ou seja, são equidistantes do eixo de simetria (a distância de C até D é a mesma distância de C’ até D), como consequência dessa simetria, temos que os dois pontos possuem a mesma ordenada (valor de y) e a média de suas abscissas (valor de x) é o X do vértice. Tais características são fundamentais para a resolução de diversas questões ou caminhos mais rápidos para entender outras.

Formulário Final: https://forms.gle/hvPykFtR4fvMZvno7

Figura 17: Questão 1 do Formulário.

1 - A Igreja de São Francisco de Assis, obra arquitetônica modernista de Oscar Niemeyer, localizada na Lagoa da Pampulha, em Belo Horizonte, possui abóbadas parabólicas. A seta na Figura 1 ilustra uma das abóbadas na entrada principal da capela. A Figura 2 fornece uma vista frontal desta abóbada, com medidas hipotéticas para simplificar os cálculos. Qual a medida da altura H, em metro, indicada na Figura 2? *

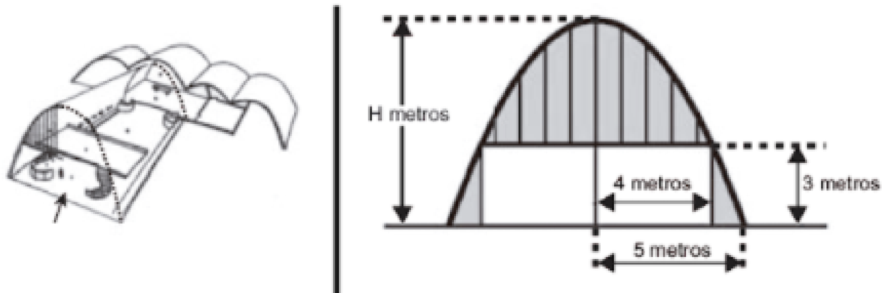


Figura 1 Figura 2

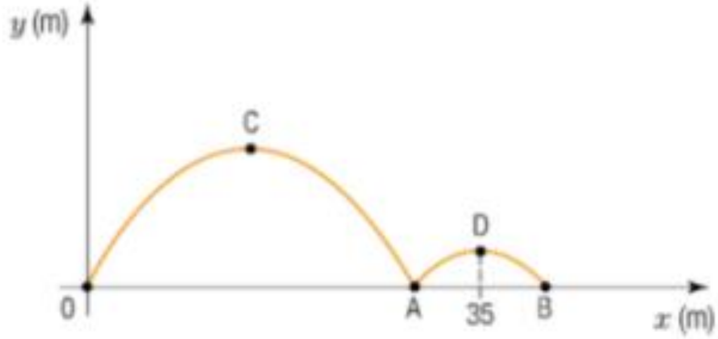
- 16/3
- 31/5
- 25/4
- 25/3
- 75/2

Fonte: Formulário do Google

Figura 18: Questão 2 do Formulário.

2 - Com base no enunciado abaixo, faça o que se pede. *

Uma bola de beisebol é lançada de um ponto 0 e, em seguida, toca o solo nos pontos A e B, conforme representado no sistema de eixos ortogonais:



Durante sua trajetória, a bola descreve duas parábolas com vértices C e D.

A equação de uma dessas parábolas é $y = \frac{-x^2}{75} + \frac{2x}{5}$.

Se a abscissa de D é 35 m, a distância do ponto 0 ao ponto B, em metros, é igual a:

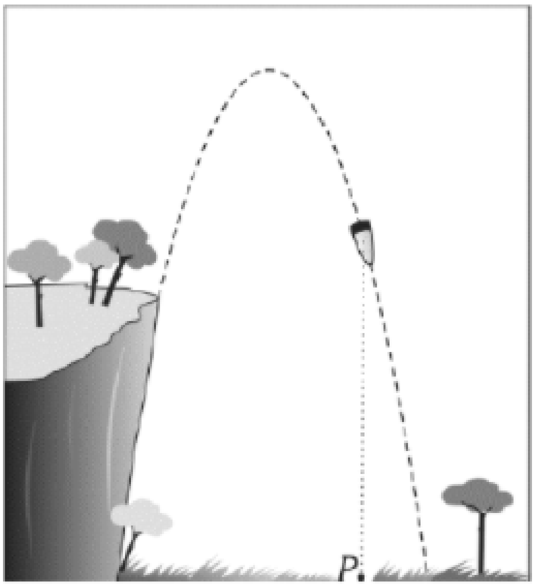
- 38
- 40
- 45
- 50

Fonte: Formulário do Google

Figura 19: Questão 3 do Formulário.

3 - (FUVEST/2015) A trajetória de um projétil, lançado da beira de um penhasco sobre um terreno plano e horizontal, é parte de uma parábola com eixo de simetria vertical, como ilustrado na figura. O ponto P sobre o terreno, pé da perpendicular traçada a partir do ponto ocupado pelo projétil, percorre 30 m desde o instante do lançamento até o instante em que o projétil atinge o solo. A altura máxima do projétil, de 200 m acima do terreno, é atingida no instante em que a distância percorrida por P, a partir do instante do lançamento, é de 10 m. Quantos metros acima do terreno estava o projétil quando foi lançado? *

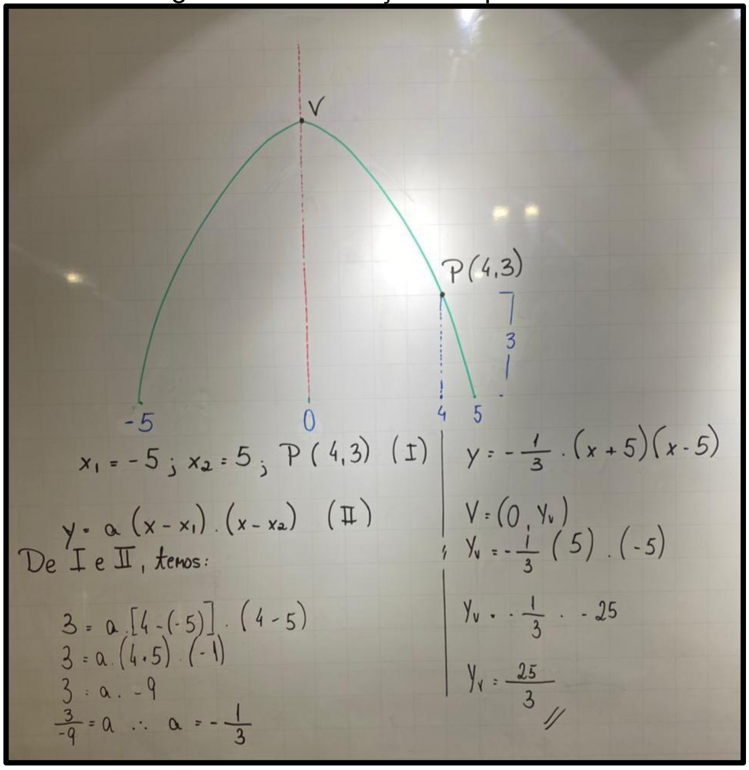
0 pontos



- 180
- 150
- 120
- 90
- 60

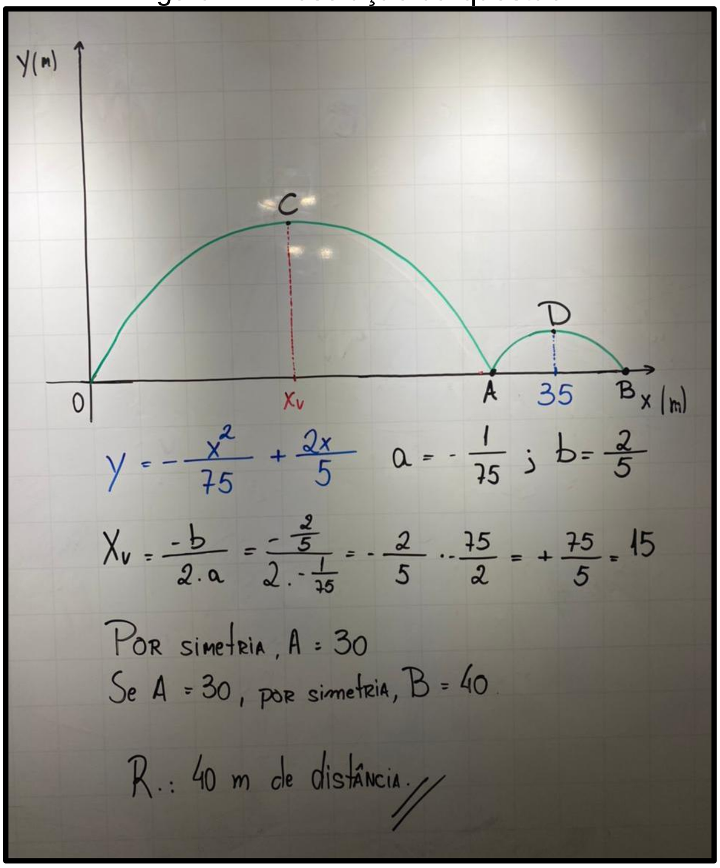
Fonte: Formulário do Google

Figura 20: Resolução da questão 1



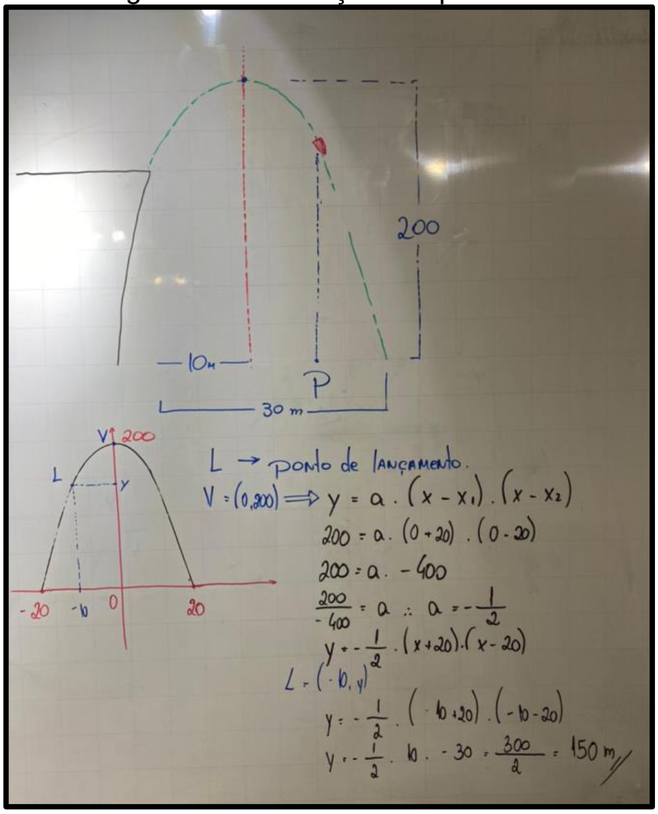
Fonte: Construção própria

Figura 21: Resolução da questão 2



Fonte: Construção própria

Figura 22: Resolução da questão 3



Fonte: Construção própria

Referências

BARROS, Catarina. Simetria nos animais. **BELASIMETRIAS**, 2008. Disponível em: https://belasimetrias.wordpress.com/2008/02/27/simetria-nos-animais/. Acesso em: 16/11/2021.

CRUZ, Talita. Confira 4 tipos de simetria e veja belos exemplos na arquitetura. **VivaDecoraPro**, 2019. Disponível em: https://www.vivadecora.com.br/pro/simetria/. Acesso em: 30/10/2021.

CRUZ, Talita. O incrível olhar da arquitetura neoclássica sobre as grandes obras do passado. **VivaDecoraPro**, 2019. Disponível em: https://www.vivadecora.com.br/pro/arquitetura-neoclassica/. Acesso em: 30/10/2021.

FERREIRA, Nivardo. 19 imagens que provam a simetria perfeita da natureza. **Comentário geral**, 2015. Disponível em: http://nfcomgeral.blogspot.com/2015/08/19-imagens-que-provam-simetria-perfeita.html. Acesso em: 16/11/2021.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. Fundamentos de Matemática Elementar: Conjuntos funções - Vol 1 - 9.ed. São Paulo: Editora Atual, 2013.

LIMA, Antônio. Simetrias, 2021. Disponível em: https://www.antonioguilherme.web.br.com/blog/simetria/. Acesso em: 30/10/2021.

PATRIANI, Romeu. O que é arquitetura neoclássica? **ROMEU PATRIANI ARCHITETURE**, 2017. Disponível em: http://romeupatriani.com.br/site/o-que-e-arquitetura-neoclassica/. Acesso em: 18/11/2021.