INSTITUTO FEDERAL
Fluminense
Campus Campos Centro

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

PÁTRIA AMADA BRASIL
GOVERNO FEDERAL

RELATÓRIO DO LEAMAT

RUMO À ÁLGEBRA DIALOGADA: PARA ALÉM DO GABARITO

ENSINO E APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA

AMANDA JACOMINI DIOGO
ELLEN CRISTINA FERREIRA MENDES
JULIANA DAMASCENO VIEIRA
MARIA THEREZA DO CARMO PEREIRA
MATHEUS DE BARROS SILVA CARDOSO HENRIQUE

CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
2022.1

AMANDA JACOMINI DIOGO
ELLEN CRISTINA FERREIRA MENDES
JULIANA DAMASCENO VIEIRA
MARIA THEREZA DO CARMO PEREIRA
MATHEUS DE BARROS SILVA CARDOSO HENRIQUE

RELATÓRIO DO LEAMAT

RUMO À ÁLGEBRA DIALOGADA: PARA ALÉM DO GABARITO

ENSINO E APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA

Trabalho apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, *Campus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão da disciplina Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Profª. Ana Paula Rangel de Andrade

CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
2022.1

SUMÁRIO

1 RELATÓRIO DO LEAMAT I

1.1 Atividades desenvolvidas

Na primeira semana do semestre, os alunos participaram da VI Semana das Licenciaturas e II Encontro de Programas Institucionais de Formação de Professores (PIBID, Programa de Residência Pedagógica e PET).

No início da segunda semana, dia 23 de agosto de 2021, a turma foi apresentada à disciplina pela professora Poliana Rodrigues, responsável pela linha de pesquisa de Ensino e Aprendizagem de Geometria, que em nome de ambas professoras ministrantes, apresentou os objetivos e a dinâmica da matéria de uma forma geral, explicitando que a avaliação não seria de notas e sim qualitativa. Os alunos seriam avaliados durante todo o semestre, inicialmente por meio da discussão de textos em aula e fichamentos e, em seguida, na fase de grupos, desenvolvendo as respectivas pesquisas.

No dia 02 de setembro de 2021, a professora Ana Paula Andrade, orientadora da linha de pesquisa de Ensino e Aprendizagem de Álgebra, postou um vídeo com orientações sobre o Texto 1: "Álgebra é mais do que algebrismo" de Tinoco *et al.* (2013). No dia 06 de setembro de 2021, foi enviado pelos alunos o fichamento referente a esse texto e postado pela professora um segundo vídeo com orientações para o Texto 2, "Álgebra e suas diferentes manifestações" de Ferreira (2011).

No encontro do dia 13 de setembro de 2021, iniciou-se a discussão sobre o Texto 1, na qual foram levantados questionamentos sobre os vários desafios encontrados para uma melhor construção do pensamento algébrico, tanto na mente dos alunos, quanto na dos professores em sua forma de ensinar. O grupo destaca o perigo de serem considerados banais temas que não são, como o debate sobre o entendimento de que a igualdade se refere a equivalência dentro da Matemática, conforme citado no texto. Nesta mesma aula, a professora apresentou uma atividade a ser realizada com base nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL,1997).

Na aula do dia 20 de setembro de 21, foram encerrados os debates sobre o Texto 1 e discutidos os principais pontos sobre o Texto 2. O autor apresenta uma oficina que tem por objetivo "[...] procurar ajudar os professores a conhecer melhor suas próprias crenças e concepções sobre álgebra e ensino de álgebra, de modo que os mesmos tomem conhecimento das diferentes manifestações deste campo da matemática." (FERREIRA, 2011, p.2).

É válido destacar as concepções de Álgebra de um dos autores que compõem o referencial teórico do texto, Usiskin (1995 apud FERREIRA, 2011):

1. Álgebra como generalização dos conceitos aritméticos, sendo a generalização a partir da análise dos casos particulares aritméticos.
2. Álgebra como estudo de métodos para resolver diferentes problemas, a vertente que é mais trabalhada em sala de aula e enfatizada no atual sistema de ensino e têm a álgebra como ferramenta.
3. Álgebra como relação entre grandezas que se estuda sobretudo as funções, nas quais se pode colocar uma grandeza em função de outra e investigar suas relações.
4. Álgebra como estudo das estruturas algébricas como equivalências entre expressões e métodos de simplificação, avaliando também se essas estruturas contribuem ou não para a resolução de problemas. (USISKIN, 1995 apud FERREIRA, 2011).

Abordam-se também, quatro caracterizações da atividade algébrica de Lins e Gimenez (1997 apud FERREIRA, 2011), sendo estas:

1. Tendência letrista, que descreve a Álgebra pelas notações algébricas, porém não se atenta a situações fora do ambiente escolar e nem contempla todo processo de desenvolvimento algébrico.
2. Tendência conteudista, resumindo o estudo algébrico aos objetos matemáticos, o que não é adequado, uma vez que os objetos matemáticos considerados algébricos podem mudar de acordo com quem os observa, como as funções, equações e polinômios.

3. Tendência de ação, caracterização que busca refletir sobre as consequências que as operações matemáticas podem ocasionar em um determinado problema. Estas reflexões não são incentivadas pelos exercícios mecanicistas e isso pode ser constatado na observação da realização de exercícios de forma "correta" por parte de crianças que nem mesmo estão aptas, pela ótica piagetiana, a compreender os conceitos por detrás destas operações.
4. Tendência conceitual, "[...] que envolve por si só, conceito, notações, esquemas mentais que resolvem e dão sentido aos conceitos relacionados com estes mesmos esquemas" (LINS; GIMENEZ, 1997 apud FERREIRA, 2011, p.4).

Nesse mesmo texto, são mostradas as três concepções sobre a educação algébrica, segundo Fiorentini *et al.* (2005 apud FERREIRA, 2011):

1. Concepção linguístico-pragmática, relacionada ao domínio mecânico de técnicas associadas a transformações algébricas.
2. Concepção fundamentalista-estrutural, associada às propriedades estruturais usadas nas transformações algébricas.
3. Concepção fundamentalista–analógica, considerada um meio termo entre as duas anteriores, resgatando o valor instrumental da álgebra e mantendo a importância das propriedades estruturais de transformações algébricas. A exemplo disso, demonstrar produtos notáveis por meio do estudo de áreas de quadrados em geometria.

Por último, apresentam-se as visões sobre a Matemática, de acordo com Ernest (1989 apud FERREIRA, 2011):

1. A visão da Matemática como um instrumento. Entende-se que os conhecimentos matemáticos na resolução de problemas algébricos funcionam como instrumentos para resolvê-los.
2. A visão da Matemática como um corpo estático e unificado do conhecimento. Neste caso, a Matemática se descobre apenas, não se cria, conhecida também como visão platônica. Essa visão se caracteriza pela ideia de que os objetos matemáticos são estáticos,

não havendo variações, imutáveis, um conhecimento que nasce pronto.

3. A visão da Matemática como um campo de criação humana e em grande expansão. Nesta visão, os modelos e procedimentos gerados são aprimorados como conhecimentos. Não há um resultado único, podendo haver revisão. Admite-se um desenvolvimento contínuo da Matemática com foco nas necessidades do mundo e da própria Matemática.

No dia 27 de setembro de 2021, foram apresentadas e discutidas as diferentes resoluções da turma para a lista de questões sobre os PCN (BRASIL, 1997, 2000). Para complementar as discussões em sala, no dia 28 de setembro de 2021, a professora enviou um vídeo expondo e comentando alguns pontos tanto dos PCN quanto da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2017).

O vídeo tratou dos ideais da BNCC, dos PCN e dos PCN + (BRASIL, 2002), que trazem uma visão da Matemática como instrumento que auxilia o aluno a entender a disciplina, estimulando o seu interesse e a sua curiosidade. Especificamente no estudo da Álgebra, estimula-se o desenvolvimento da capacidade de abstração, de generalização e do seu uso como uma ferramenta para a resolução de problemas. Além disso, esses documentos propõem situações com aplicações da Álgebra pela observação de tabelas e gráficos, em vez da ênfase em manipulações e equações, que levam a uma abordagem mecanizada.

Uma reunião extra ocorreu no dia 30 de setembro de 2021 com o objetivo do grupo indicar o tema a ser trabalhado neste componente curricular. Foi apresentada a proposta com base na atividade referente aos PCN (BRASIL, 1997) e nas diferentes formas de se pensar uma questão. Nesse dia, a professora comentou sobre uma lista de exercícios referente à função afim que foi resolvida pela sua turma de Fundamentos I, utilizando a caracterização da função afim no lugar do tradicional algebrismo. Foi sugerida a resolução desses exercícios para o grupo e a leitura dos capítulos 17 e 18 do livro “Para Aprender Matemática” de Lorenzato (2010).

No dia 04 de outubro de 2021, foram discutidas as resoluções apresentadas pelo grupo na lista sobre Função Afim e feitas orientações sobre os próximos passos para uma melhor delimitação do tema e desenvolvimento das atividades.

A partir de 04 de outubro até o dia 08 de novembro, os encontros foram destinados a elaborar o relatório em reuniões com o próprio grupo, decidindo o objetivo geral, público-alvo, o tema e o título. Depois dessa data, o grupo se dedicou à preparação dos slides para a apresentação final.

No dia 22 de novembro houve a apresentação dos trabalhos da linha de pesquisa de Álgebra e o grupo recebeu os comentários das orientadoras Ana Paula Andrade, da linha de pesquisa de Álgebra, e Poliana Rodrigues, da linha de pesquisa de Geometria. Foram comentários relativos às falas de alguns participantes e parabenizações pelo trabalho desenvolvido até o momento. A professora Ana Paula também sugeriu que o grupo colocasse um tópico voltado para professores, dando orientações e possibilidades distintas para auxiliar os alunos na resolução de questões. Além disso, foram feitas perguntas acerca do tema pela professora Poliana e, nas considerações finais, o grupo recebeu conselhos sobre como prosseguir, em especial sobre o desafio, que traz questões que irão ajudar os alunos a entender o objetivo do trabalho

A avaliação qualitativa foi realizada no dia 13 de dezembro, com um encontro entre as professoras orientadoras de Álgebra e de Geometria e os integrantes de cada grupo.

1.2 Elaboração da sequência didática

1.2.1 Tema

A multiplicidade de estratégias utilizadas na resolução de problemas matemáticos. O tema possui viés intradisciplinar e tem potencial para dialogar com o professor e expandir a visão do aluno em relação a uma prática menos mecanicista, mais autônoma e significativa.

1.2.2 Justificativa

Durante as aulas da disciplina de Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática I (LEAMAT I), foi possível observar diferentes formas de resolução nas atividades propostas. Em uma das aulas, a professora apresentou um slide expondo as resoluções corretas, que foram pensadas de uma forma não tradicional, de modo a valorizar as diferentes linhas de raciocínio seguidas pelos alunos; o que estimulou o grupo a refletir sobre a possibilidade de não haver apenas um "certo" ou "errado" em Álgebra. Partindo desse ponto, o grupo pôde debater sobre o uso de gabaritos e a mecanização no estudo da Álgebra.

Tinoco *et al.* (2013) apontam os prejuízos de um ensino mecanizado da Álgebra, em que alunos e professores não participam de um processo ensino-aprendizagem realmente significativo, mas sim de um processo que se transforma em uma mera repetição de exercícios. Nesse panorama, "A ênfase no ensino de procedimentos (algoritmos e regras), dissociados do conceito que está por trás, inibe a versatilidade de pensamento necessária ao sucesso em matemática." (DAVID; MACHADO, 1996 apud DAVID; LOPES, 1998, p.32).

Contrapondo esta visão mecanicista, há o conceito de pensamento algébrico flexível. No que tange essa forma de pensamento, com base na obra de Sousa (2009), pode-se destacar a capacidade de elaboração das próprias respostas, a aceitação de verdades, que não são absolutas, mas que podem ser diversificadas e questionadas de forma individual ou coletiva.

Ao analisar a concepção de pensamento flexível junto à de pensamento algébrico, percebe-se que a última pode ser entendida como um conceito amplo, que se estende desde a aplicação de fórmulas até a identificação de padrões e generalizações, que podem partir da intradisciplinaridade da Aritmética e da Geometria integradas à Álgebra (BRASIL, 1997; LORENZATO, 2010).

Vale ressaltar que, na Educação Básica, a Matemática muitas vezes é reduzida à aplicação de fórmulas, devido à mecanização e aos algebrismos, que diversas vezes são incentivados pelos próprios professores. Essa prática induz os alunos a abandonarem seus próprios raciocínios e reproduzirem formas já ensinadas, uma vez que a ênfase nos algoritmos, na simbologia algébrica e nos procedimentos dissociados dos conceitos matemáticos desfavorecem a elaboração do pensamento flexível (BRASIL, 1997; DAVID, LOPES, 1998).

Essa mecanização contraria, inclusive, algumas indicações feitas pelos PCN (BRASIL, 1997, 2002), documento que estabelece diretrizes para o ensino no Brasil. Nele, é defendido que a Álgebra deve ser ensinada pela observação de regularidades e padrões, valorizando o raciocínio e o desenvolvimento de habilidades que possibilitem a modelagem de problemas da realidade, a argumentação, a apropriação da linguagem simbólica e de seus significados, dentre outras. (BRASIL, 1997, 2000).

Nessa ótica, é necessário quebrar esse paradigma, incentivando o aluno a flexibilizar o seu raciocínio, e analisar quando é realmente vantajoso utilizar manipulações algébricas para resolver um problema ou quando outras ferramentas como a Aritmética e a Geometria são mais pertinentes (TINOCO *et al.*, 2011; LORENZATO, 2010). A própria Álgebra pode ser explorada de diferentes formas em uma mesma questão. David e Lopes (1998) afirmam que:

> [...] quando os professores fazem uso de formas de pensamento flexível, mesmo que de forma não deliberada, eles podem estar contribuindo para que alguns alunos busquem um sentido para o uso de fórmulas e conceitos matemáticos, e, em última análise, contribuindo para o sucesso em matemática. (DAVID; LOPES, 1998, p. 31).

Neste contexto, Tinoco *et al.* (2011) citam que o uso de várias estratégias de resolução para um determinado problema e o reconhecimento das relações entre elas são enriquecedores e podem agregar significado às manipulações simbólicas comumente utilizadas em sala de aula.

Concomitantemente e em uma análise mais ampla, é necessário validar as experiências pessoais, escolares e o contexto social dos alunos para eles terem maior liberdade de utilizarem conceitos além dos que estão sendo trabalhados, e, assim, adquirirem a habilidade de resolverem as questões com maior autonomia. Lorenzato (2010) afirma que:

> [...] para que o professor perceba os significados das revelações dos alunos, não basta escutá-los ou observá-los, é preciso auscultá-los; mais do que responder a eles, é preciso falar com

> eles; mais do que corrigir as tarefas, sentir quem as fez e como elas foram feitas; mais do que aceitar o silêncio de alguns alunos, captar seus significados. Enfim, auscultar significa analisar e interpretar os diferentes tipos de manifestações dos alunos (LORENZATO, 2010, p.16).

Deste modo, o trabalho pretende estimular a autonomia dos alunos, por meio da ruptura com a mecanização no ensino da Álgebra e da apresentação de problemas, cujas resoluções possibilitem o desenvolvimento de diferentes raciocínios, e não apenas a repetição de algo preestabelecido nos gabaritos. Espera-se uma melhoria no processo ensino-aprendizagem ao desenvolver uma via de diálogo entre o professor e o aluno, por meio da qual o último seja verdadeiramente auscultado.

1.2.3 Objetivo Geral

Abordar e incentivar o uso de diferentes estratégias de resolução de problemas.

1.2.4 Público-Alvo

Alunos do terceiro ano do Ensino Médio.[1]

[1] Embora a proposta inicial seja para a 3ª série do Ensino Médio devido à bagagem de conteúdos adquiridos que poderá fornecer mais ferramentas para as múltiplas resoluções, a sequência poderá ser aplicada ou adaptada para outras turmas. Neste caso, fica a critério do professor as questões a serem utilizadas.

2 RELATÓRIO DO LEAMAT II

2.1 Atividades desenvolvidas

A semana do dia 31 de janeiro de 2022 ao dia 05 de fevereiro foi destinada a eventos acadêmicos. Os alunos da Licenciatura em Matemática que participaram do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) contaram suas experiências nessa ocasião.

No dia 07 de fevereiro de 2022, ocorreu o primeiro encontro síncrono da disciplina Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática II (LEAMAT II), no qual a professora Poliana Rodrigues apresentou essa nova fase da disciplina, sanando algumas dúvidas dos alunos.

Em 09 de fevereiro de 2022, houve o primeiro encontro do grupo com a professora Ana Paula Andrade, no qual foram relembrados tópicos importantes a serem abordados na sequência didática para direcionar as futuras atividades. A professora solicitou a elaboração do esboço da sequência didática, elucidando quais ferramentas poderiam ser utilizadas durante sua aplicação.

Após a apresentação de um esboço inicial sobre a sequência didática, no dia 16 de fevereiro de 2022, a professora Ana Paula Andrade fez suas considerações e sugestões quanto ao número de questões a serem abordadas em cada etapa da sequência. A professora também destacou alguns pontos importantes para a questão inicial (desafio). Foi ainda apresentado por ela um cronograma com as atividades realizadas nessa etapa do LEAMAT.

A elaboração da sequência didática ocorreu entre os dias 23 de fevereiro de 2022 e 20 de abril de 2022. Nesse período, foram construídos os slides, selecionados os exercícios e algumas das possíveis resoluções e foi discutida a pauta do bate-papo, adicionado posteriormente como um momento da aula.

As aplicações para a turma do LEAMAT II, nas quais as professoras e os alunos do componente curricular puderam fazer suas observações sobre cada um dos trabalhos apresentados, iniciaram-se no dia 27 de abril 2022 e finalizaram-se em 11 de maio de 2022. A partir de então, os encontros foram destinados à finalização e à entrega dos relatórios no dia 03 de junho de 2022 para a avaliação final no dia 08 de junho de 2022.

2.2 Elaboração da sequência didática

Nesta seção, será descrito o planejamento da sequência didática a ser apresentada na turma do LEAMAT II. A sequência é voltada para o formato on-line, porém pode ser aplicada no presencial com algumas adaptações que serão sugeridas ao longo do texto. Para a aplicação, serão necessários o uso de slides (Apêndice A), de mesa digitalizadora ou quadro branco.

2.2.1 Planejamento da sequência didática

Para dar início à aula, questiona-se os alunos sobre o tema que será abordado na sequência didática com base no título apresentado: "Rumo à álgebra dialogada: para além do gabarito".

Inicia-se a sequência didática, que está dividida em cinco etapas. O Quadro 1 apresenta os objetivos das etapas.

Quadro 1 - Objetivos de cada etapa da sequência didática

Etapas	Objetivo
Desafio	Despertar o interesse dos alunos por meio de um primeiro contato com diversas resoluções para uma mesma questão.
Bate-papo	Explicitar as vantagens do pensamento flexível na resolução de problemas matemáticos, a importância do erro no processo de ensino e aprendizagem da Matemática e da conexão de diferentes vertentes da Matemática na análise de uma situação-problema.
Pensando em grupos	Propor aos alunos o uso de diferentes estratégias para a resolução dos problemas apresentados e acompanhar o processo de resolução.
Compilando ideias	Apresentar as diversas resoluções elaboradas pelos alunos para as questões propostas.
Pensando em casa	Verificar se os alunos, individualmente, conseguiram resolver as questões de diversas formas.

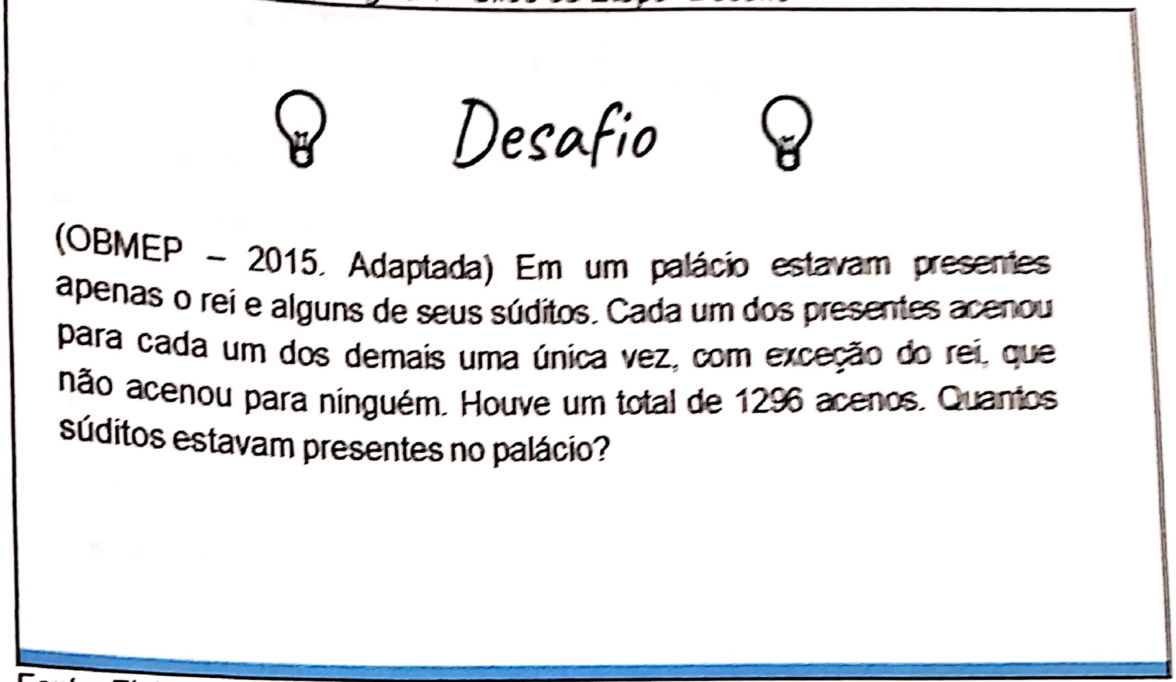
Fonte: Elaboração própria.

A seguir, é feito o detalhamento de cada uma das etapas:

Desafio

É apresentada aos alunos uma questão e solicitada a sua resolução (Figura 1).

Figura 1 - Slide da Etapa "Desafio"



Fonte: Elaboração própria a partir da OBMEP (2015).

Em seguida, os professores em formação discutem com os alunos as resoluções elaboradas e os questionam sobre a possibilidade de existirem outras formas de se pensar a questão. Assim, são mostradas e discutidas várias resoluções pensadas previamente pelos professores em formação (Figura 2).

Figura 2 - Resoluções do "Desafio"

Resolução 1:

1 súdito
1 Rei — 1 aceno

2 súditos (S)
1 Rei (R)

$S_1 \to S_2, R$
$S_2 \to S_1, R$
— 4 acenos

3 súditos (S)
1 Rei (R)

$S_1 \to S_2, S_3, R$
$S_2 \to S_1, S_3, R$
$S_3 \to S_1, S_2, R$
— 9 acenos

Portanto:

n súditos
1 Rei — n^2 acenos

Se o número de acenos é 1296:

$n^2 = 1296$
$n = 36$

R.: 36 súditos.

Resolução 2:

Considerando n o número total de pessoas temos:

$$\underbrace{n \times (n-1)}_{\text{todos acenos}} - \underbrace{(n-1)}_{\text{acenos do Rei}} = 1296$$

$$(n^2 - n) - (n-1) = 1296$$
$$n^2 - n - n + 1 = 1296$$
$$n^2 - 2n + 1 = 1296$$
$$n_1 = 37 \qquad n_2 = -35 \quad \text{(não convém)}$$

Sendo $n = 37$ e desconsiderando o Rei temos:

$$37 - 1 = 36$$

R.: 36 súditos.

Resolução 3:

Considerando n o número total de súditos temos:

$$\underbrace{n \times (n-1)}_{\text{acenos entre os súditos}} + \underbrace{n}_{\text{acenos para o Rei}} = 1296$$

$$(n^2 - n) + n = 1296$$
$$n^2 - n + n = 1296$$
$$n^2 = 1296$$
$$n = 36 \text{ súditos}$$

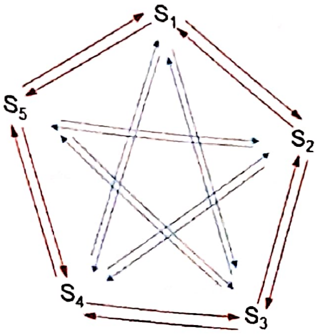
R.: 36 súditos.

Fonte: Elaboração própria.

Figura 2 - Resoluções do "Desafio" (continuação)

Resolução 4:

Supondo que os súditos S_n estão organizados como os vértices de um polígono, é possível relacionar os acenos (n) da seguinte forma:



Acenos entre os súditos.

$$\underbrace{2n}_{\text{número de lados vezes dois}} + \underbrace{n.(n-3)}_{\text{número de diagonais vezes dois}} + \underbrace{n}_{\text{acenos para o Rei}} = 1296$$

$$2n + n^2 - 3n + n = 1296$$
$$n^2 = 1296$$
$$n = 36 \text{ súditos}$$

Resolução 5:

Analisando os acenos entre os súditos através de uma matriz quadrada, sendo 0 quando não há aceno e 1 quando há, observa-se que para a matriz 4x4:

	s1	s2	s3	s4
s1	0	1	1	1
s2	1	0	1	1
s3	1	1	0	1
s4	1	1	1	0

$$\underbrace{4^2}_{\text{quantidade de elementos da matriz}} - \underbrace{4}_{\text{quantidade de elementos da diagonal}} + \underbrace{4}_{\text{acenos para o rei}} = \textit{número de acenos}$$

Em uma matriz nxn:

$$n^2 - n + n = \textit{número de acenos}$$
$$n^2 - n + n = 1296$$
$$n^2 = 1296$$
$$n = 36$$

R.: 36 súditos.

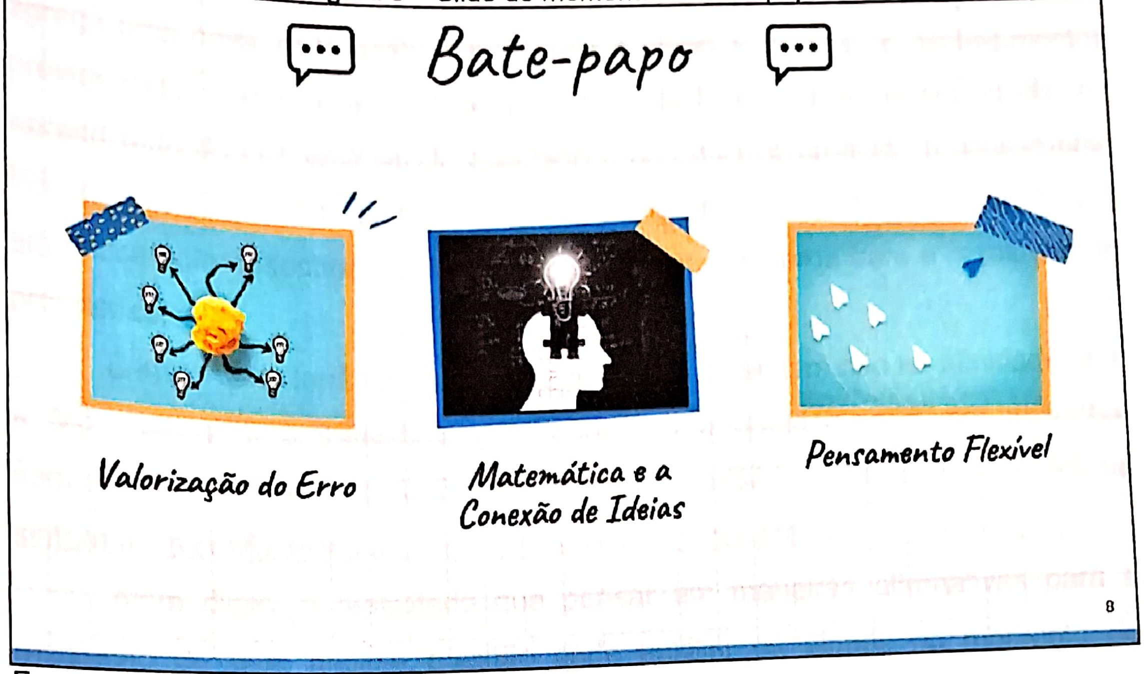
Fonte: Elaboração própria.

As resoluções apresentadas permitem uma abordagem intradisciplinar, uma vez que o desafio pode ser resolvido pelos vieses algébrico, geométrico, aritmético ou matricial. Além disso, possibilita uma exploração mais criativa e menos mecanicista da questão.

Após esse primeiro momento, os professores em formação retornam ao questionamento inicial, sobre o título: "Rumo à Álgebra dialogada: para além do gabarito.", indagando os alunos se, após a discussão sobre diversas resoluções para o desafio, é possível ter uma ideia sobre o que será discutido nesta sequência.

Bate-papo

Figura 3 – Slide do momento do Bate-papo



Fonte: Elaboração própria.

O momento do bate-papo busca ser uma troca mais informal entre alunos e professor, na qual este apresenta, por meio do slide abaixo (Figura 3), algumas ideias importantes para a compreensão da sequência didática.

- **A valorização do erro**

É válido destacar que os erros são importantes no processo de aprendizagem do aluno e, mesmo que a resposta prevista no gabarito não seja encontrada, o raciocínio deve ser valorizado. Ao explorar o caminho percorrido pelo aluno, o professor faz com que ele reflita sobre o que está inadequado na questão. Dessa forma, o aluno participa ativamente do processo de construção do seu conhecimento e se sente respeitado e confiante para explorar diferentes caminhos que utilizem os seus conhecimentos.

- **Matemática e a conexão de ideias**

O uso da intradisciplinaridade na resolução de questões de Matemática agrega uma nova visão desta ciência para o aluno, visto que os conhecimentos prévios deste, mesmo que em outros vieses da Matemática, podem auxiliar no aprendizado do que está sendo estudado e no desenvolvimento do pensamento matemático. Desta forma, o aluno pode usar tanto a álgebra, a geometria, a aritmética com desenhos, esquemas e até a língua materna para a resolução de problemas.

É importante lembrar que, para alunos que acreditam não ter afinidade com a Matemática, a possibilidade de explorar uma questão, seja por desenho, esquemas ou até mesmo de forma oral, pode auxiliá-los, de modo que eles se sintam mais confortáveis e confiantes durante o processo.

Além disso, é ressaltado que pensar em maneiras alternativas para a resolução de uma mesma questão pode auxiliar os alunos no momento do vestibular, em que eles estão sob pressão. Nessas ocasiões, nem sempre é necessário o uso de fórmulas, as quais, por sua vez, podem fugir à memória.

- **Pensamento flexível**

Com o auxílio do pensamento flexível é possível lidar com as adversidades que podem se apresentar na resolução de problemas matemáticos de forma criativa, não-linear, não rígida ou mecanizada.

O pensamento flexível mostra que é possível, por meio dos conhecimentos adquiridos, ter autonomia no processo de resolução de questões, que não se resume a encontrar o gabarito, mas que vai além disso. Esta forma de pensamento não nega a existência de verdades matemáticas, mas a vê como uma ciência muito mais ampla, que envolve outras habilidades além da mera memorização. Então, o estímulo do professor para a busca de novos caminhos na resolução de problemas contribui para a superação das dificuldades alunos.

Com esse momento de bate-papo, pretende-se levar os alunos a refletirem sobre a importância desses tópicos apresentados.

Pensando em grupos

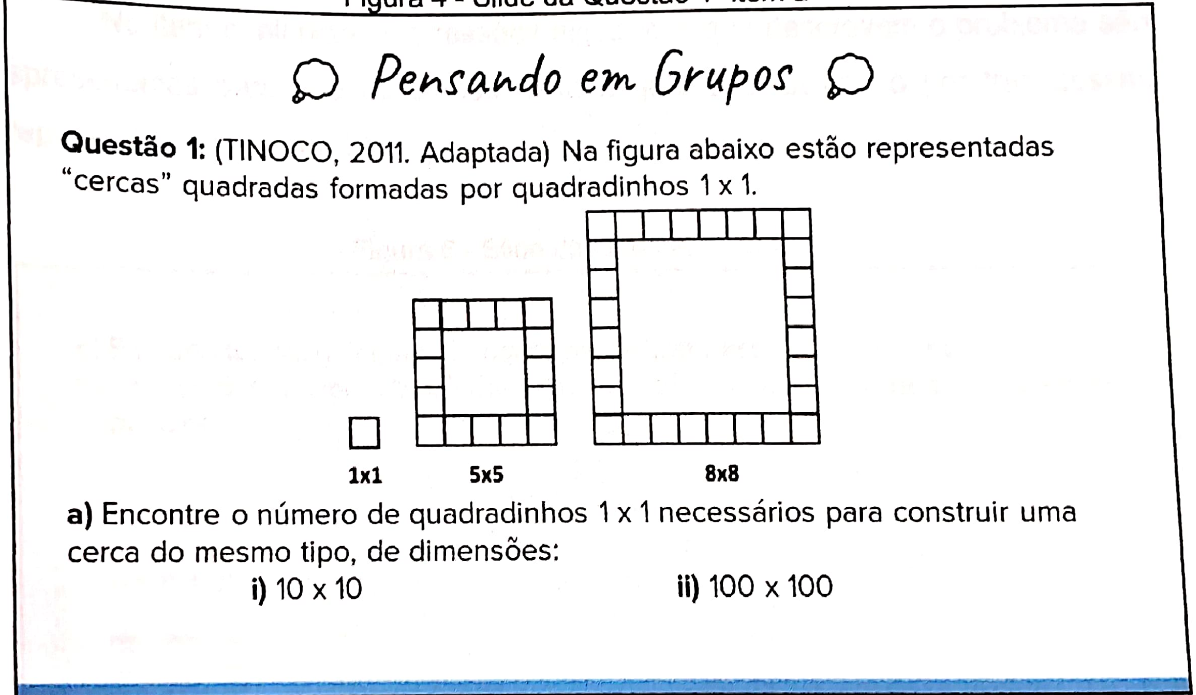
Em um terceiro momento, a turma é dividida em grupos para a discussão de duas questões. Sugere-se que os grupos sejam formados por quatro alunos cada. A divisão deve ser feita por meio de salas criadas pelo aplicativo Google Meet ou outro equivalente, cada sala para um grupo. Os professores em formação são responsáveis por auxiliar os alunos em cada grupo, incentivando-os a buscar diferentes maneiras para resolver os problemas propostos.

As questões são apresentadas por meio de slides.

Questão 1:

No item "a", os alunos devem encontrar o número de quadradinhos para construir cercas de dois tamanhos diferentes (Figura 4).

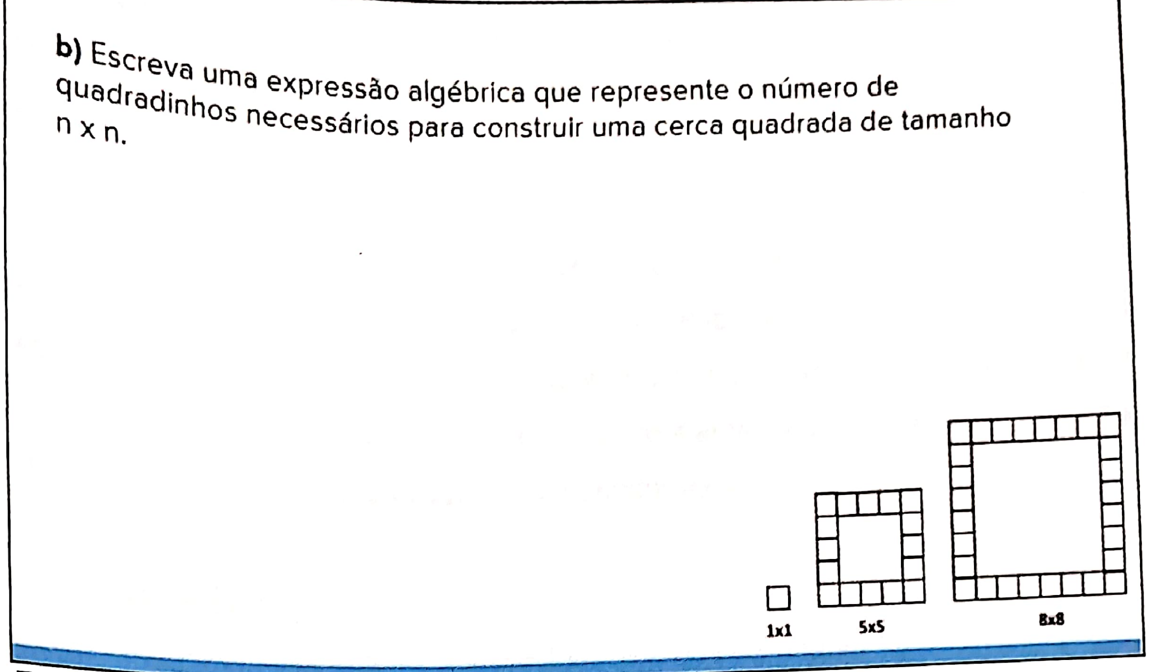
Figura 4 - Slide da Questão 1- item a



Fonte: Elaboração própria a partir de Tinoco (2011).

No item b, os alunos devem escrever uma expressão algébrica que represente uma cerca quadrada de tamanho n×n. (Figura 5).

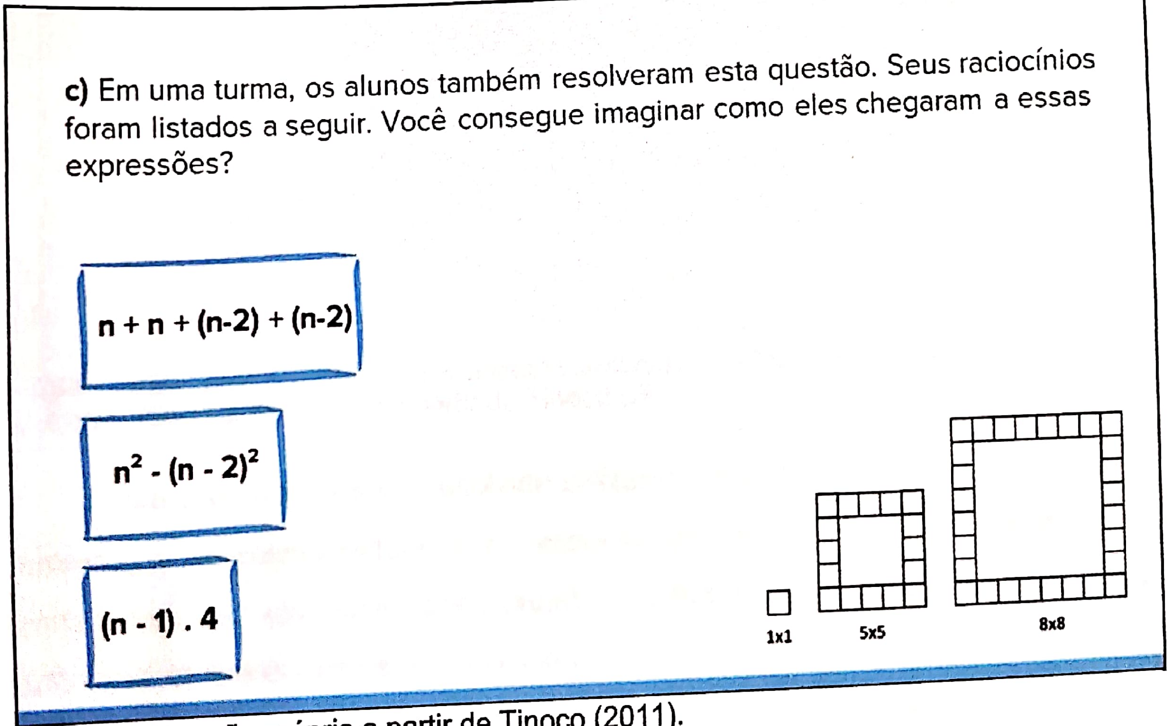
Figura 5 - Slide da Questão 1- item b



Fonte: Elaboração própria a partir de Tinoco (2011).

No item c, algumas expressões algébricas que descrevem o problema são apresentadas para que os alunos reflitam qual é o raciocínio por trás dessas representações (Figura 6).

Figura 6 - Slide da Questão 1- item c



Fonte: Elaboração própria a partir de Tinoco (2011).

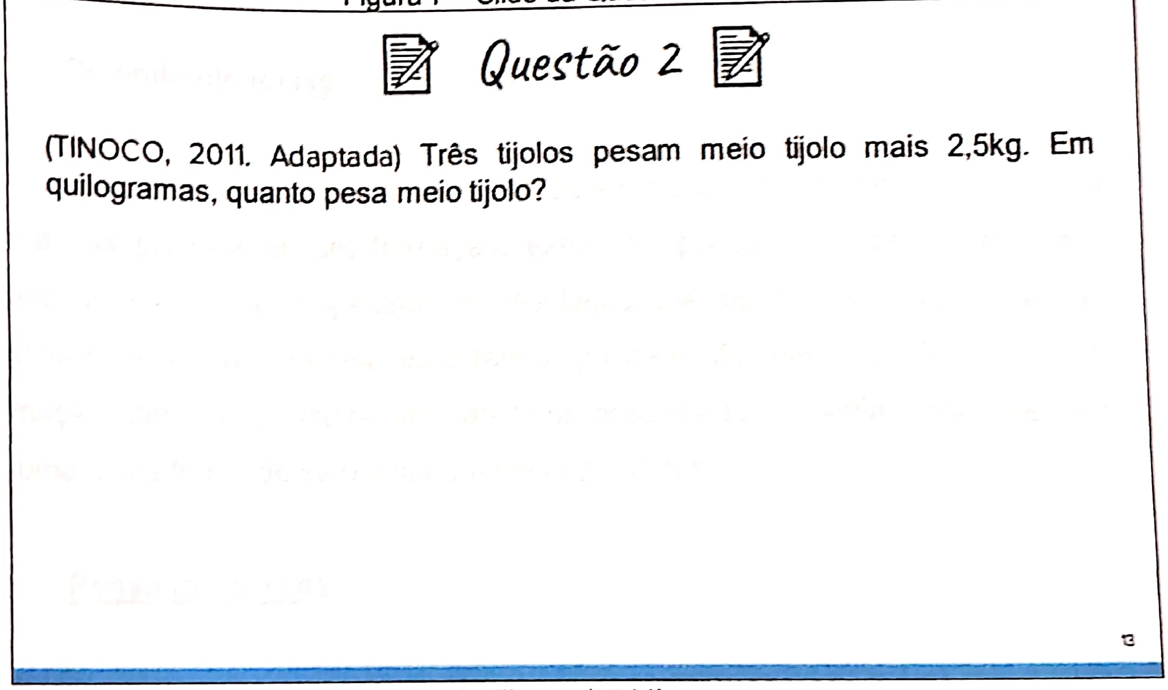
Essa questão, além de incentivar os alunos a identificarem e generalizarem um padrão, apresenta diversas outras formas de raciocínio. Assim, ainda que os alunos não consigam desenvolver todas essas expressões algébricas, estarão colocando em prática o pensamento flexível ao refletirem sobre tais expressões.

Dessa forma, essa primeira questão tem como objetivo fazer com que os alunos partam de um caso específico para a generalização, além de mostrar, com as várias expressões algébricas, que há diversos caminhos possíveis para se pensar um mesmo problema. Ao apresentar essa gama de resoluções, é esperado que os alunos se sintam mais confiantes para a próxima questão, abrindo novas possibilidades para o seu pensamento autônomo.

Questão 2:

A questão 2 também é apresentada aos grupos (Figura 7):

Figura 7 – Slide da Questão 2

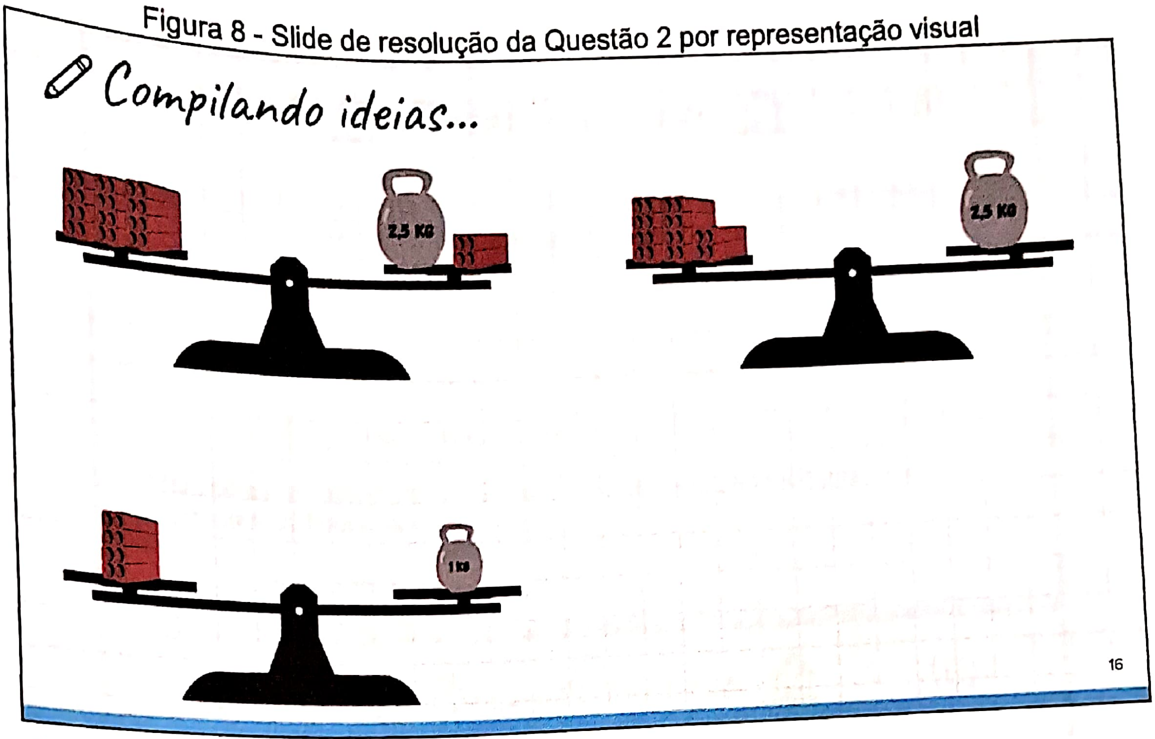


Fonte: Elaboração própria a partir de Tinoco (2011).

Esta questão pode ser resolvida utilizando diferentes ideias, como o próprio desenho, a proporcionalidade e o raciocínio algébrico. Espera-se que o aluno, tendo visto os exemplos apresentados anteriormente, visualize, de forma autônoma, diversas formas de resolução.

Em aula, discute-se a sua resolução pelo viés algébrico, por proporcionalidade, além da utilização da representação visual (Figura 8).

Figura 8 - Slide de resolução da Questão 2 por representação visual



Fonte: Elaboração própria.

Compilando ideias

Para finalizar a aula, os alunos retornam ao link inicial com o restante da turma. Os professores em formação, tendo compilado as respostas de cada grupo, apresentam as sugestões de resolução dos alunos para cada uma das questões e outras formas elaboradas previamente pelos professores em formação, destacando diferentes caminhos encontrados e reafirmando que não há uma única forma de se pensar um mesmo problema.

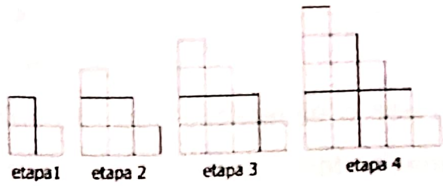
Pensando em casa

Duas questões são apresentadas como atividade extra (Figura 9) (Apêndice B). É solicitado aos alunos que elaborem em casa, ao menos duas resoluções para os exercícios mostrados. As soluções ou dúvidas podem ser enviadas para um contato (e-mail ou WhatsApp) disponibilizado.

Figura 9 - Questões da etapa "Pensando em casa"

Pensando em casa (a)

1. (UFRGS-2017. Adaptada) Quadrados iguais de lado 1 são justapostos, segundo padrão representado nas figuras das etapas abaixo.

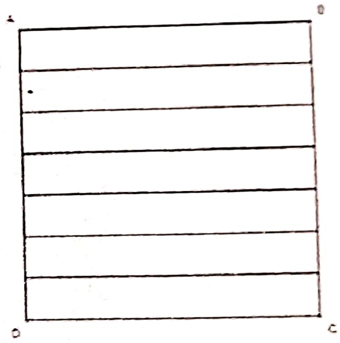


Mantido esse padrão de construção, o número de quadrados de lado 1, existentes na figura da etapa 100, é ?

→ Resolver de duas formas distintas

Pensando em casa (b)

2. (Campeonato de Matemática SUB14-2006/2007) O quadrado ABCD está dividido em 7 retângulos iguais. O perímetro de cada um dos retângulos é 32 cm. Qual é a área do quadrado ABCD?



→ Resolver de duas formas distintas

Fonte: (a) Elaboração própria a partir de UFRGS (2017)
(b) Elaboração própria a partir do Campeonato de Matemática SUB 14 – 2006/2007.

2.2.2 Aplicação da sequência didática na turma do LEAMAT II

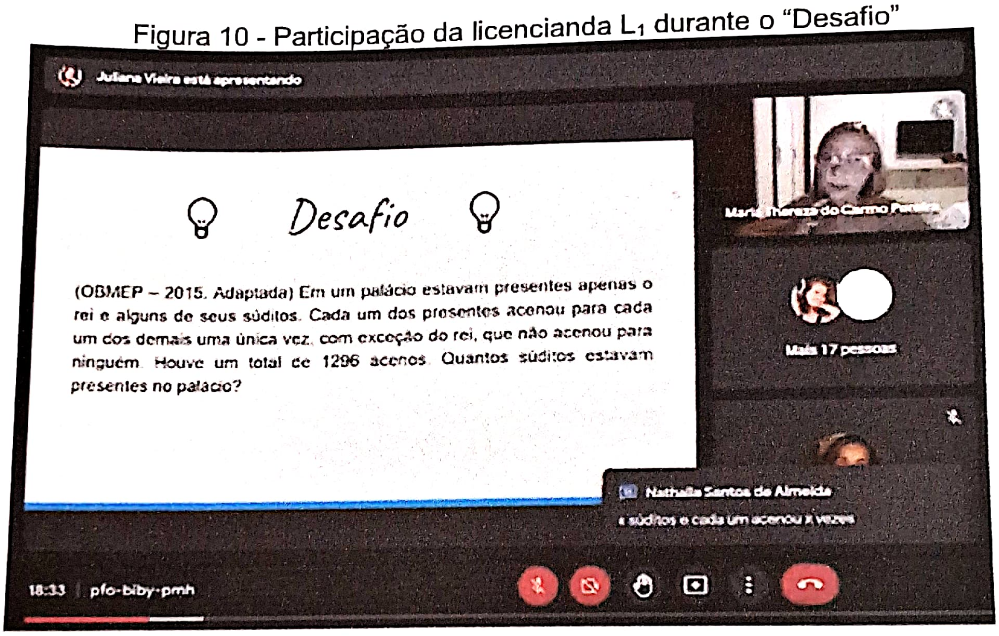
No dia 27 de abril de 2022, foi realizada a aplicação da sequência didática, em uma aula on-line síncrona, para a turma do LEAMAT II. Estavam presentes 20 licenciandos. Na ocasião, foi utilizada uma mesa digitalizadora para o registro das resoluções apresentadas pela turma e slides.

No início da aula foi falado o título do trabalho: "Rumo à Álgebra dialogada: para além do gabarito" e feito para a turma um questionamento sobre que ideia o título trazia. Alguns falaram "manipulações", "não ter só uma resolução", "atividades" entre outras coisas. Os professores em formação indicaram que tal discussão seria retomada posteriormente. Logo depois, foi proposto o "Desafio" e dado um tempo para a resolução da questão.

No começo, houve pouca interação. Apenas alguns alunos explicaram suas formas de chegar à resposta. Uma licencianda (L_1) disse que chegou ao resultado "raiz quadrada de 1296".

Foi solicitado à aluna L_1 que explicasse o seu raciocínio, e, então, outra licencianda (L_2) digitou como pensou pelo chat, dizendo "x suditos e cada um acenou x vezes" (Figura 10). A partir da fala da licencianda, os professores em formação entenderam que ela quis dizer que existiam x súditos e cada um acenava x vezes para os demais súditos e para o rei. Deste modo, a resposta poderia ser obtida pelo produto de x por x. Mediante essa explicação, L_2 confirmou que esse foi seu raciocínio.

Figura 10 - Participação da licencianda L_1 durante o "Desafio"



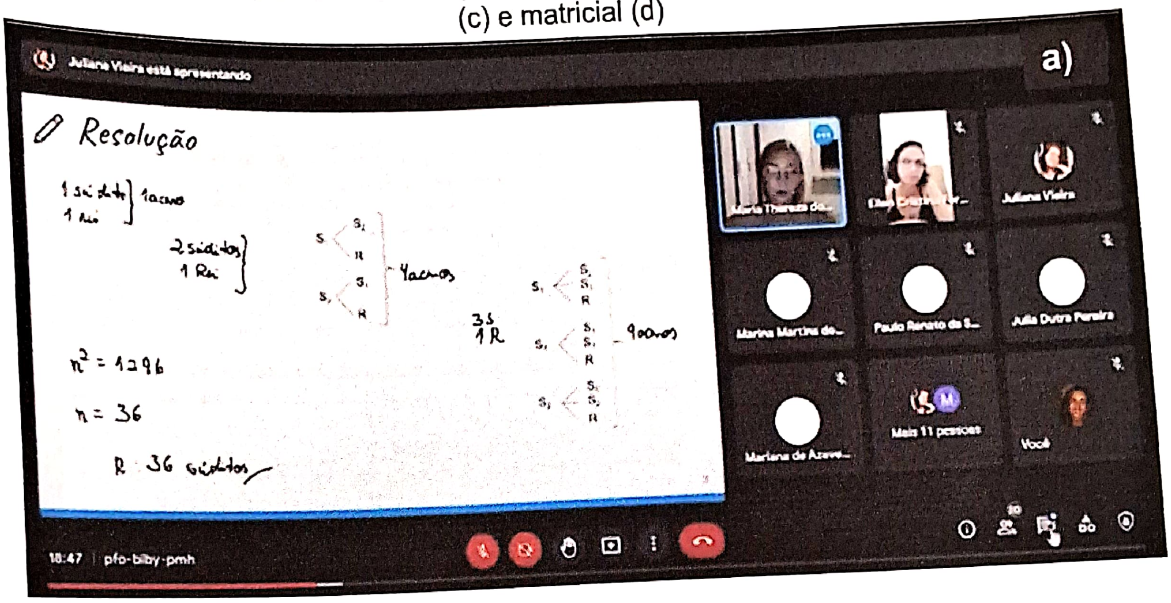
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Essa explicação foi anotada no slide e a resolução estava correta. Quando o grupo perguntou à licencianda L_1 como ela havia pensado, ela disse que havia sido da mesma forma que L_2 explicou.

A licencianda L_3 disse que fez parecido, porém desconsiderando o rei e usando o x como o número de súditos, o que resultou em $x^2 = 1296$, chegando à mesma resposta. Os professores em formação afirmaram que estava correto e perguntaram se mais alguém gostaria de compartilhar o raciocínio. Neste momento, alguns participantes disseram pelo chat que haviam pensado conforme L_1, L_2 ou L_3.

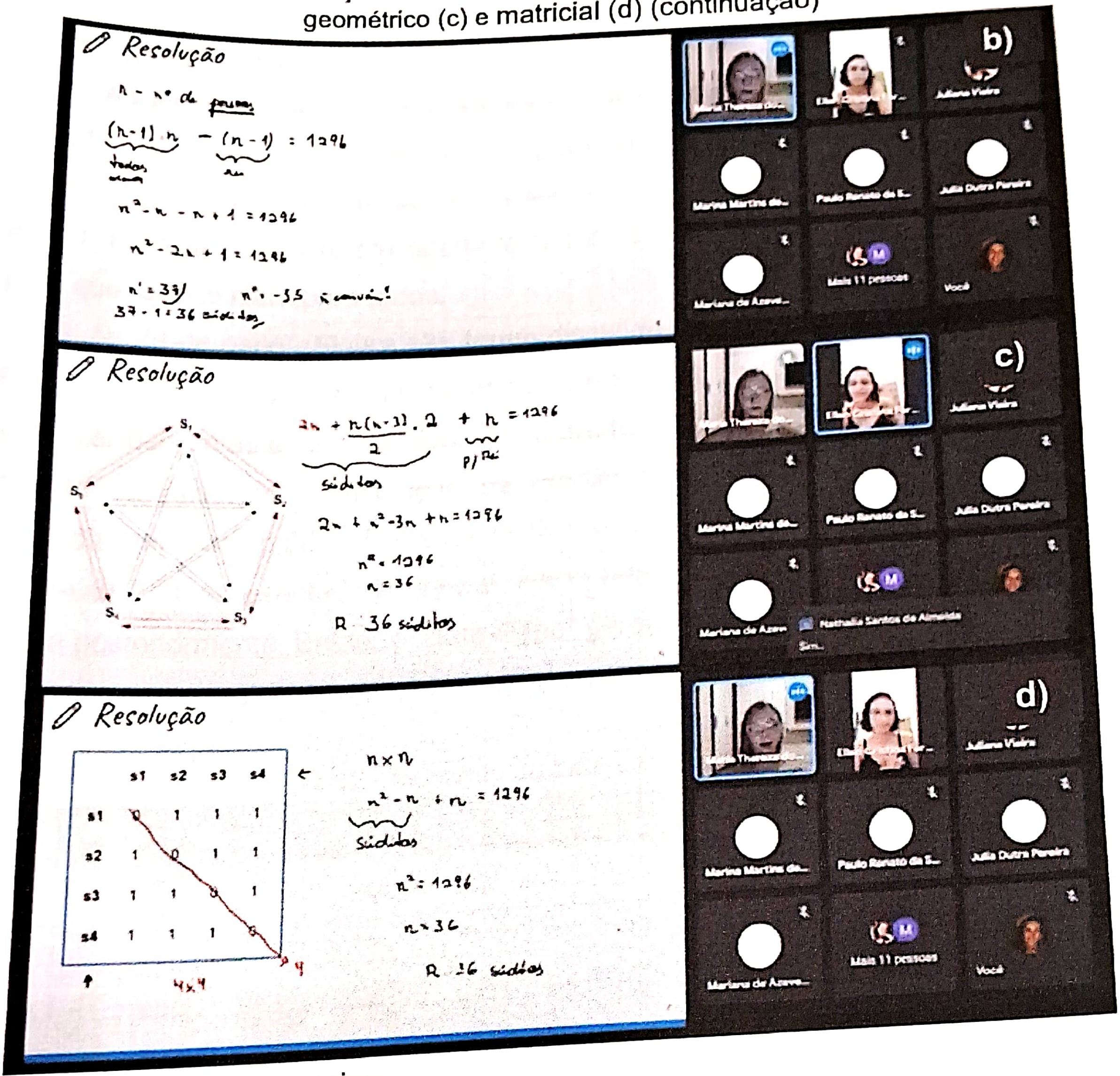
Como não foi apresentada pelos alunos mais nenhuma forma de resolver a questão, os professores em formação mostraram outras maneiras para se chegar ao mesmo resultado, pelo viés aritmético (a) (Figura 11), algébrico (b), geométrico (c), e matricial (d) (Figura 11).

Figura 11 – Resolução do "Desafio" pelos vieses aritmético (a), algébrico (b), geométrico (c) e matricial (d)



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Figura 11 – Resolução do "Desafio" pelos vieses aritmético (a), algébrico (b), geométrico (c) e matricial (d) (continuação)



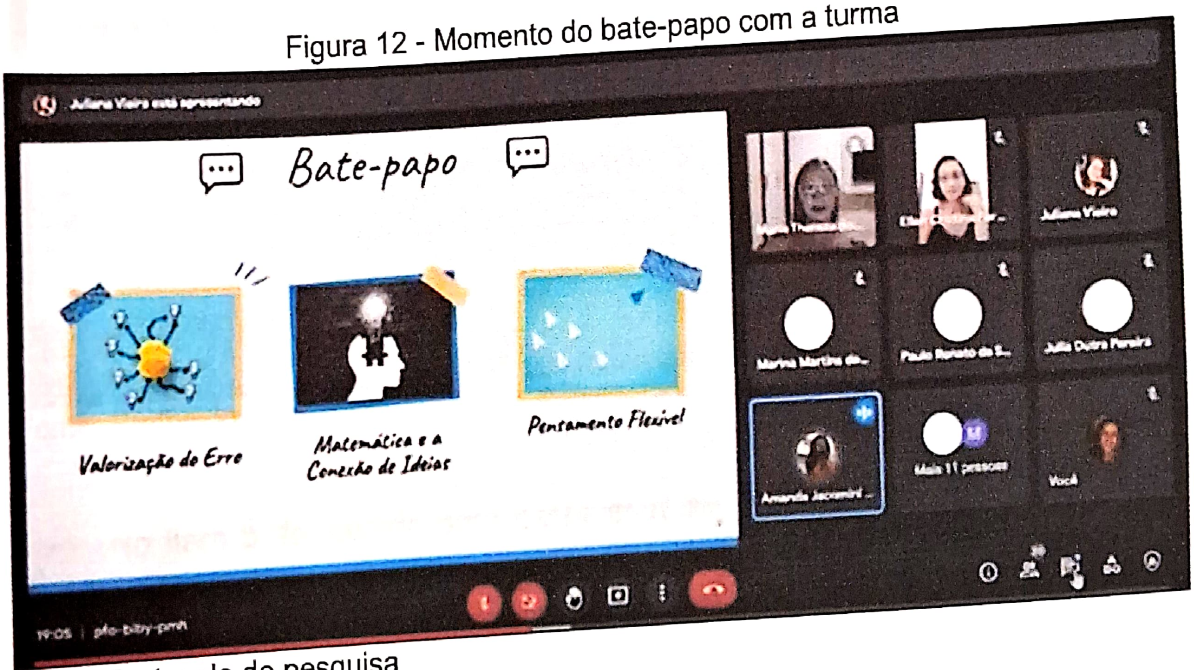
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Durante a apresentação, os professores em formação perguntaram a turma se havia dúvidas, e eles disseram que não. Os licenciandos acharam o desafio interessante e alegaram não ter pensado nessas resoluções.

Ao final do "Desafio", retomou-se o questionamento referente ao título do trabalho: "Rumo à Álgebra dialogada: para além do gabarito.", verificando se, após a apresentação da questão, foi possível descobrir o tema da aula. Apesar de alguns licenciandos já terem acertado antes, o tema foi explicitado pelo grupo para que ficasse claro para todos.

No "Bate papo" (Figura 12), foram discutidos três tópicos: a Valorização do Erro, Matemática e a Conexão de Ideias e Pensamento Flexível. O objetivo não era fazer perguntas e, sim, elucidar que o trabalho tem como proposta uma forma distinta de enxergar a resolução de problemas, de pensar e de abordar a aprendizagem matemática. Por esse motivo, o sentimento de insegurança quando o "Desafio" foi apresentado é normal, como relatado por alguns licenciandos da turma posteriormente. Então, o "Bate-Papo" gerou identificação e mostrou como o pensamento flexível pode ajudar no desenvolvimento do aluno.

Figura 12 - Momento do bate-papo com a turma



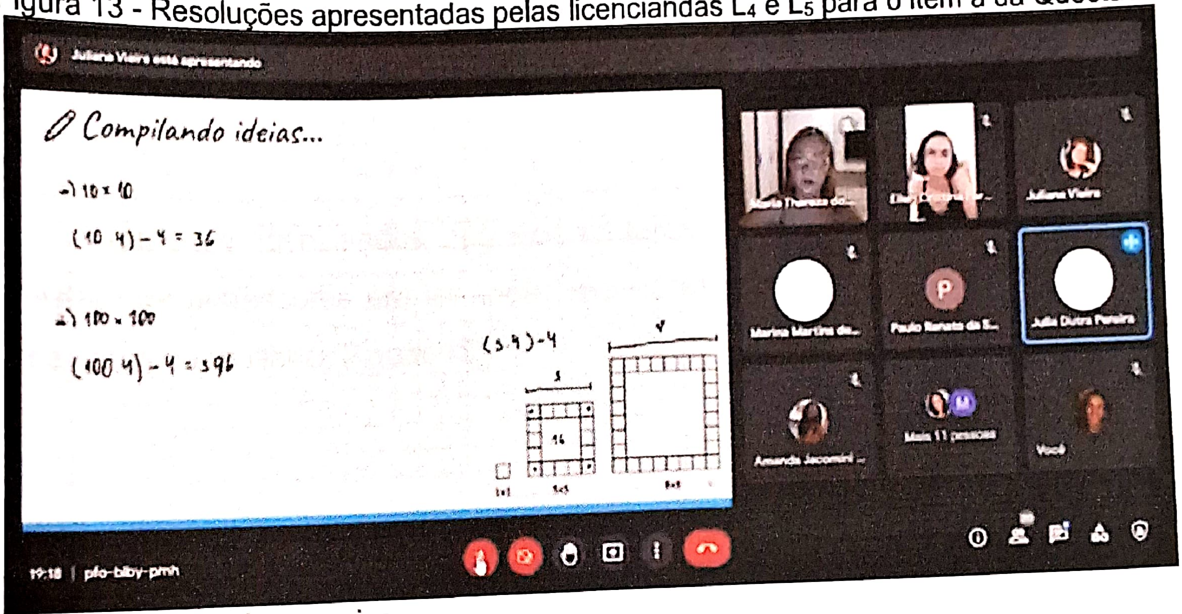
Fonte: Protocolo de pesquisa

Ao final dessa parte, foram apresentadas as outras questões. Foi solicitado que eles resolvessem a primeira questão, item a, e alguns alunos apresentaram resultados. Foi possível notar que, após o "Bate-Papo", a turma se sentiu mais confortável para participar da aula, e mais licenciandos compartilharam suas respostas.

Uma licencianda (L_4), explicando seu raciocínio para descobrir a quantidade de quadradinhos contidos no 5x5, disse que contou quantos quadradinhos havia e viu que eram 16, observando que em cada lado tem 5 quadradinhos. Ela observou que 4 destes são contados 2 vezes. Chegando, então, na sentença (5.4) - 4=16.

Outra licencianda (L_5) explicou por áudio que fez a área 5x5=25, como se o quadrado estivesse todo preenchido, e depois a área de um suposto quadrado interno 3x3=9, e descontou (25 - 9) chegando no mesmo resultado, 16. Da mesma forma, essas licenciandas utilizaram esse método para resolver os itens a (Figura 13) e b.

Figura 13 - Resoluções apresentadas pelas licenciandas L_4 e L_5 para o item a da Questão 1.



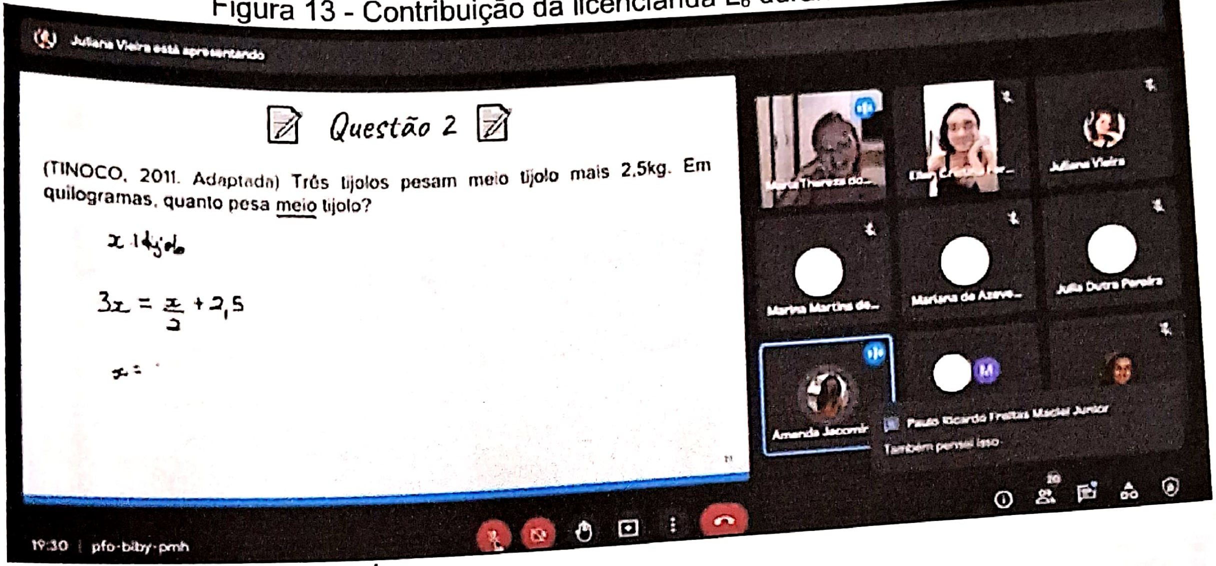
Fonte: Protocolo de pesquisa.

No item b, foi pedido para escrever a expressão que representa a cerca quadrada de tamanho n x n. As licenciandas L4 e L5, que haviam respondido o item anterior, disseram respectivamente "(n. 4) – 4" e "n^2 - (n - $2)^2$". Houve também outra resposta: "n + (n - 1) . 2 + (n - 2)".

Como os licenciandos apresentaram no item b todas as expressões trazidas no item c, não foi preciso explicá-las, somente foi verificado se eles compreenderam o significado de todas.

Na última questão, uma licencianda L_6 disse que o resultado era "½". Ela explicou o seu raciocínio, que estava correto, para que uma das professoras em formação escrevesse no slide (Figura 14). Outro licenciando afirmou que pensou de maneira semelhante à L_6.

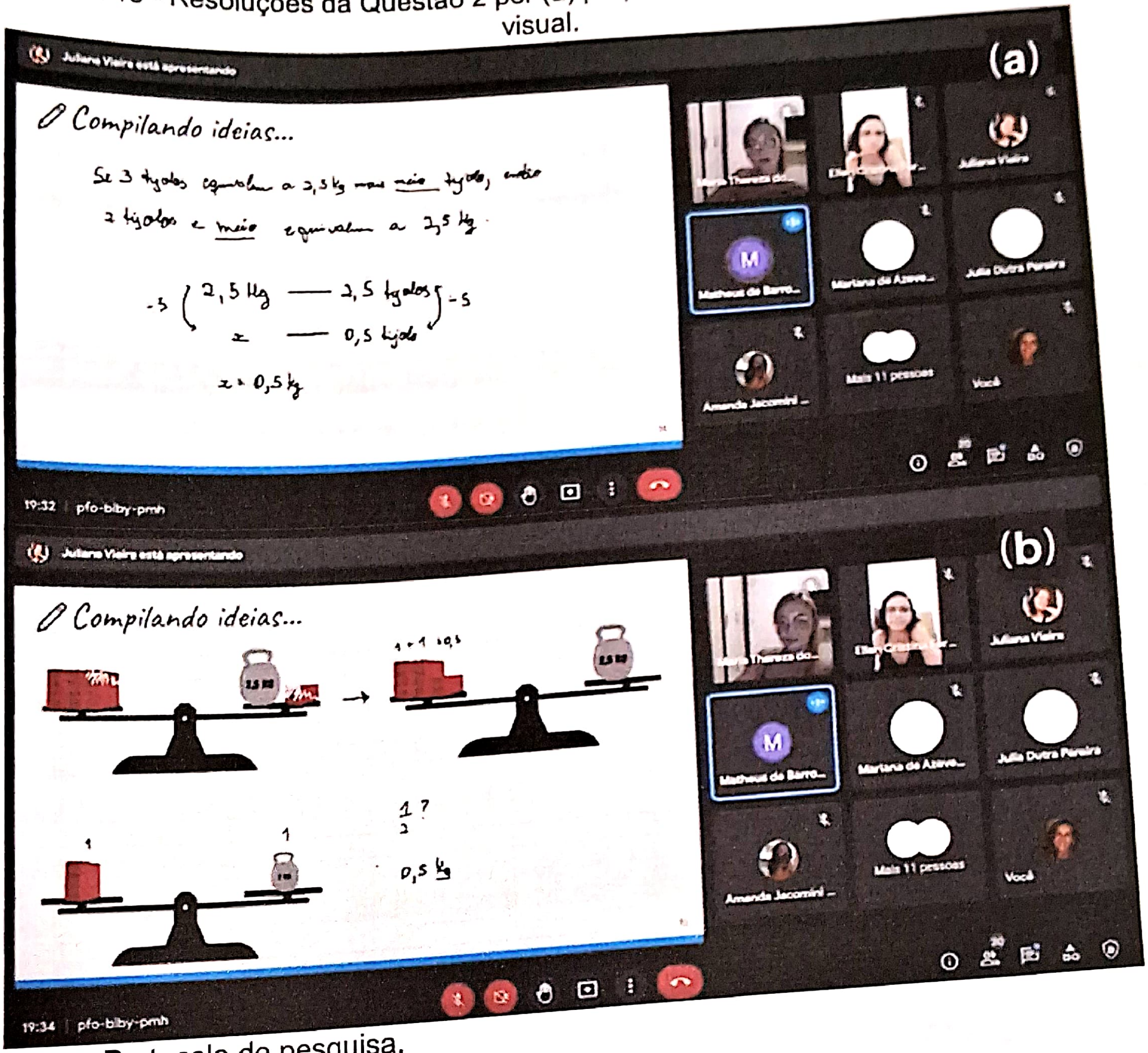
Figura 13 - Contribuição da licencianda L_6 durante a Questão 2



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Como os licenciandos não apresentaram outra forma de resolver essa questão, os professores em formação explicaram outras maneiras de chegar a esse mesmo resultado (Figura 15).

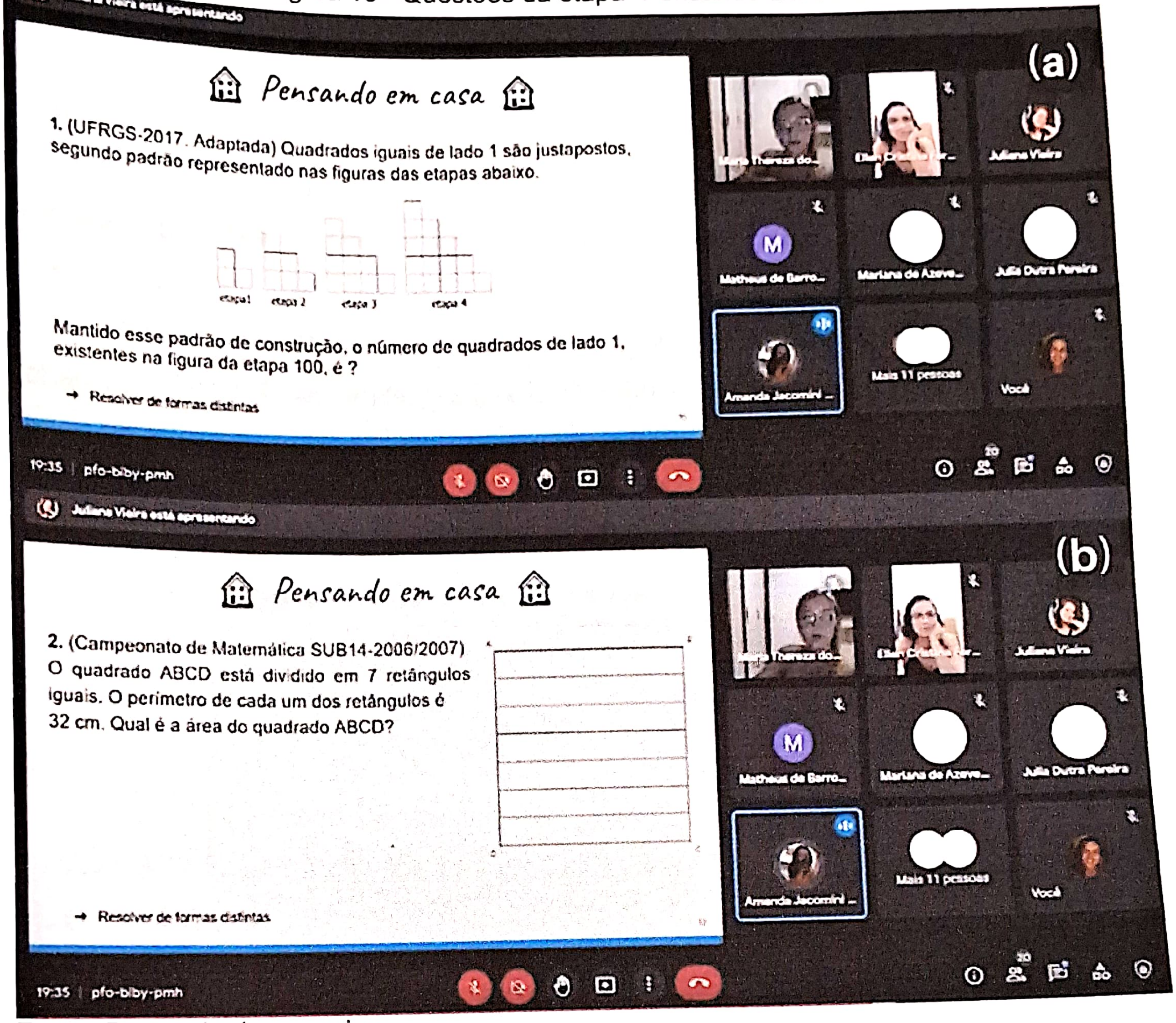
Figura 15 - Resoluções da Questão 2 por (a) proporcionalidade e (b) representação visual.



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Como citado anteriormente, foi observado que, após o “Bate Papo”, vários alunos se sentiram mais confortáveis para responder, apresentando mais opções de resolução em cada questão. O trabalho foi finalizado com um pedido para que os alunos resolvessem os exercícios da seção “Pensando em casa” (Figura 16) e enviassem para o e-mail ou WhatsApp disponibilizados no Google Classroom.

Figura 16 - Questões da etapa "Pensando em casa"



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Pelo fato do trabalho demandar constante participação da turma, os alunos alegaram que tiveram medo de responder incorretamente às perguntas. Entretanto, essa insegurança foi discutida durante o “Bate Papo”, no tópico “Valorização do erro”. Com isso, uma licencianda relatou que, depois dessa parte, ela se sentiu mais segura para interagir durante a aula, pois compreendeu que o erro faz parte do processo de aprendizagem.

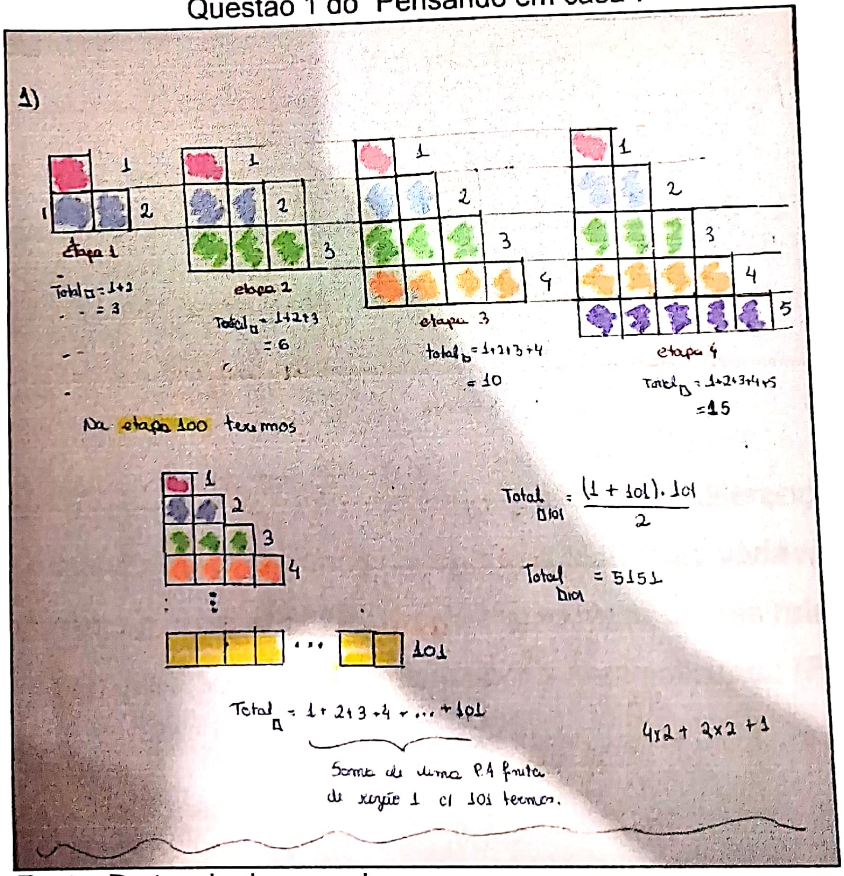
O trabalho foi muito elogiado, e os licenciandos relataram ter compreendido as explicações das questões. Além disso, uma licencianda fez a sugestão de ser apresentado, na questão do "Desafio", uma resolução de início ou alguma ideia e, em seguida, pedir para que resolvam de outra forma.

Em relação às resoluções enviadas posteriormente pelos licenciandos para as questões do "Pensando em casa", é possível observar que, mesmo para alunos de ensino superior, ainda é pouco usual pensar em mais de uma resolução para uma mesma questão.

Exceto por uma licencianda (L_7), que desenvolveu a questão 1 de duas maneiras distintas, os demais enviaram as questões com apenas uma forma de resolução.

No que diz respeito às respostas da questão 1, a maioria dos alunos observou uma relação entre o número da etapa e o número de quadrados da base de cada figura e utilizou a soma dos termos de uma Progressão Aritmética (Figura 17).

Figura 17: Resolução enviada por uma licencianda para a Questão 1 do "Pensando em casa".



Fonte: Protocolo de pesquisa.

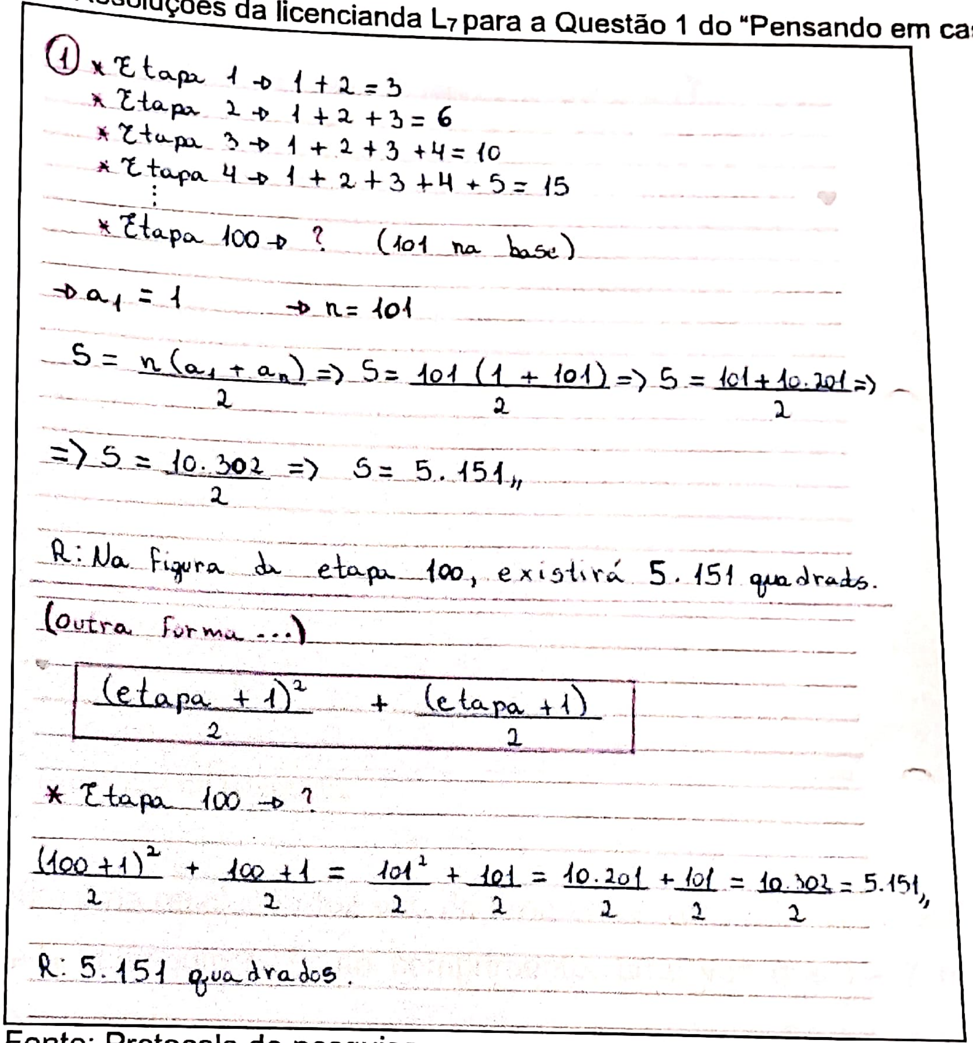
Quanto às resoluções da licencianda L7 (Figura 18), destaca-se a segunda forma de raciocínio apresentada:

$$\frac{(etapa+1)^2}{2}+\frac{(etapa+1)}{2}$$

$$Etapa\ 100 = ?$$

$$\frac{(100+1)^2}{2}+\frac{100+1}{2}=\frac{101^2}{2}+\frac{101}{2}=5151$$

Figura 18 - Resoluções da licencianda L7 para a Questão 1 do "Pensando em casa".



1 * Etapa 1 $\rightarrow$ 1 + 2 = 3
* Etapa 2 $\rightarrow$ 1 + 2 + 3 = 6
* Etapa 3 $\rightarrow$ 1 + 2 + 3 + 4 = 10
* Etapa 4 $\rightarrow$ 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15

⋮

* Etapa 100 $\rightarrow$? (101 na base)

$\rightarrow a_1 = 1$ $\rightarrow n = 101$

$S = \frac{n(a_1+a_n)}{2} \Rightarrow S = \frac{101\,(1+101)}{2} \Rightarrow S = \frac{101+10.201}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow S = \frac{10.302}{2} \Rightarrow S = 5.151$

R: Na figura da etapa 100, existirá 5.151 quadrados.

(Outra forma...)

$\boxed{\frac{(etapa+1)^2}{2} + \frac{(etapa+1)}{2}}$

* Etapa 100 $\rightarrow$?

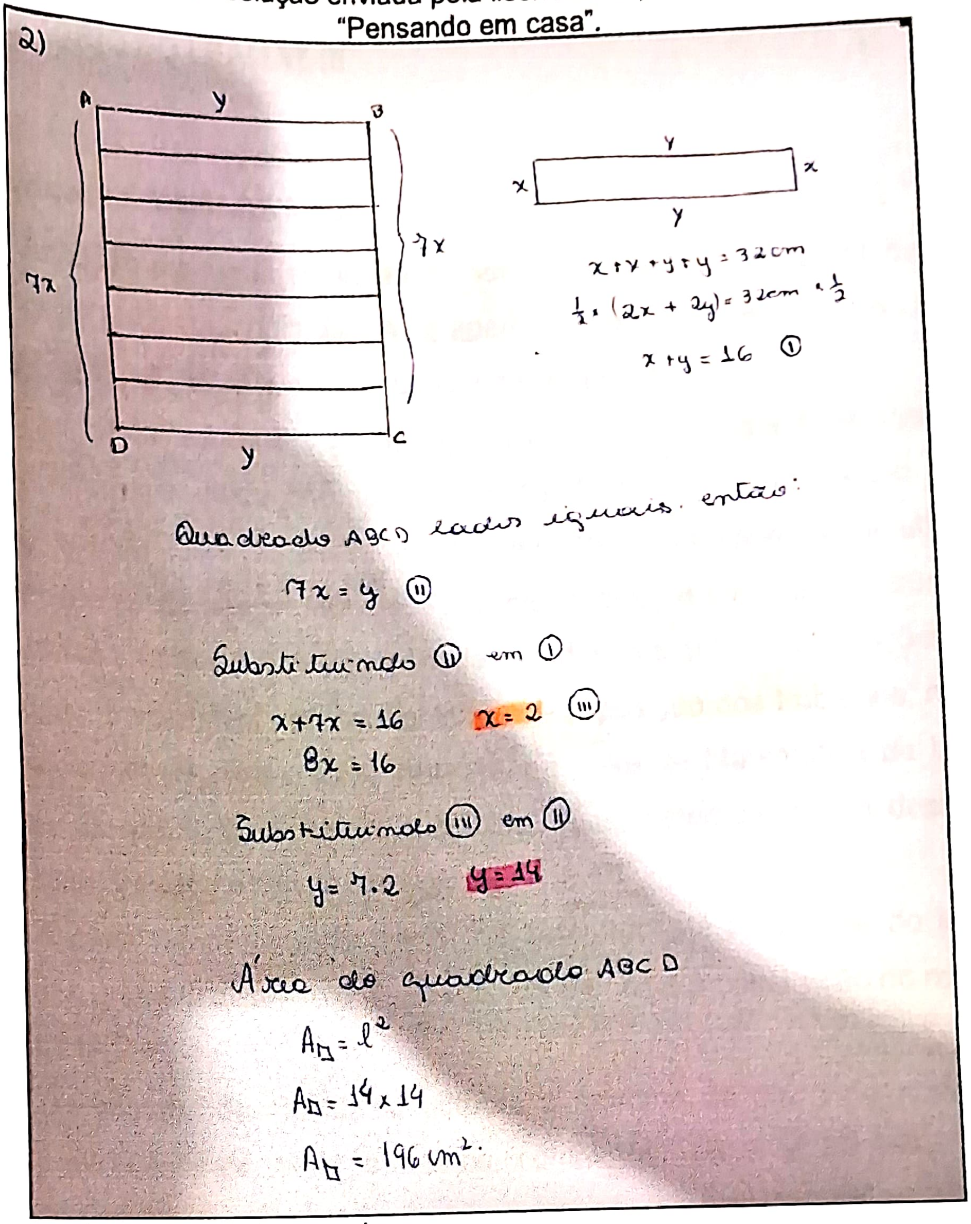
$\frac{(100+1)^2}{2} + \frac{100+1}{2} = \frac{101^2}{2} + \frac{101}{2} = \frac{10.201}{2} + \frac{101}{2} = \frac{10.302}{2} = 5.151$

R: 5.151 quadrados.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Já para a questão 2, não houve significativas diferenças entre as resoluções dos licenciandos. A grande maioria associou duas variáveis diferentes, uma ao comprimento e outra à largura do retângulo, para depois relacionar essas medidas ao lado do quadrado e, assim, descobrir a área solicitada (Figura 19).

Figura 19 - Resolução enviada pela licencianda para a Questão 2 do "Pensando em casa".



$x+x+y+y = 32cm$

$\frac{1}{2}\cdot(2x+2y) = 32cm \cdot \frac{1}{2}$

$x+y = 16$ (I)

Quadrado ABCD lados iguais. então:

$7x = y$ (II)

Substituindo (II) em (I)

$x+7x = 16$ $\quad x = 2$ (III)

$8x = 16$

Substituindo (III) em (II)

$y = 7.2$ $\quad y = 14$

Área do quadrado ABCD

$A_{\square} = l^2$

$A_{\square} = 14 \times 14$

$A_{\square} = 196\ cm^2$.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Apenas uma resolução fez uso de uma única variável, com x associado à altura de cada retângulo e 7x ao comprimento, uma vez que há 7 retângulos compondo o quadrado.

3 RELATÓRIO DO LEAMAT III

3.1 Atividades desenvolvidas

As cinco primeiras semanas do semestre, iniciado no dia 11 de julho de 2022, foram dedicadas à finalização e aperfeiçoamento do relatório do LEAMAT II para que, por fim, fosse iniciada a escrita deste relatório.

Nas semanas do dia 25 de agosto de 2022 e do dia 1 de setembro de 2022, foram feitas alterações no relatório do LEAMAT II, adaptando-o para o e-book, buscando deixá-lo mais compreensível para os professores que utilizarem a sequência didática posteriormente. Além disso, deu-se início à construção do e-book, com a escrita da Apresentação, da Introdução e das Considerações Finais.

Com o surgimento da oportunidade de exposição dos trabalhos, nas linhas de pesquisa de Álgebra e de Geometria, na Feira de Matemática da UENF, as semanas do dia 8 de setembro e do dia 15 de setembro foram destinadas à elaboração do resumo para a inscrição.

A partir da semana do dia 22 de setembro até a semana do dia 13 de outubro, o grupo dedicou-se à finalização do e-book e à construção do relatório do LEAMAT III.

Da semana do dia 20 de outubro à semana do dia 3 de novembro os grupos apresentaram seus trabalhos completos, para a turma e para as orientadoras.

Na semana do dia 7 de novembro foram feitas as avaliações finais dos trabalhos e dos grupos.

3.2 Elaboração da sequência didática

Nesta seção, será descrito o planejamento da sequência didática ""Rumo à álgebra dialogada: para além do gabarito", aplicada na turma do LEAMAT II, na qual foram apresentados sugestões e comentários dos alunos e professores do LEAMAT como contribuições para o aperfeiçoamento do trabalho, incluídas nesta versão. Embora seja voltada para o formato on-line, a sequência pode ser aplicada no presencial com algumas adaptações. Para a aplicação, serão necessários o uso de slides e de uma mesa digitalizadora ou quadro branco.

3.2.1 Versão final da sequência didática

Para dar início à aula, questiona-se os alunos sobre o tema que será abordado na sequência didática com base no título apresentado: "Rumo à álgebra dialogada: para além do gabarito".

Inicia-se a sequência didática, que está dividida em cinco etapas. O Quadro 1 apresenta os objetivos das etapas.

Quadro 1 - Objetivos de cada etapa da sequência didática

Etapas	Objetivo
Desafio	Despertar o interesse dos alunos por meio de um primeiro contato com diversas resoluções para uma mesma questão.
Bate-papo	Explicitar as vantagens do pensamento flexível na resolução de problemas matemáticos, a importância do erro no processo de ensino e aprendizagem da Matemática e da conexão de diferentes vertentes da Matemática na análise de uma situação-problema.
Pensando em grupos	Propor aos alunos o uso de diferentes estratégias para a resolução dos problemas apresentados e acompanhar o processo de resolução.
Compilando ideias	Apresentar as diversas resoluções elaboradas pelos alunos para as questões propostas.
Pensando em casa	Verificar se os alunos, individualmente, conseguiram resolver as questões de diversas formas.

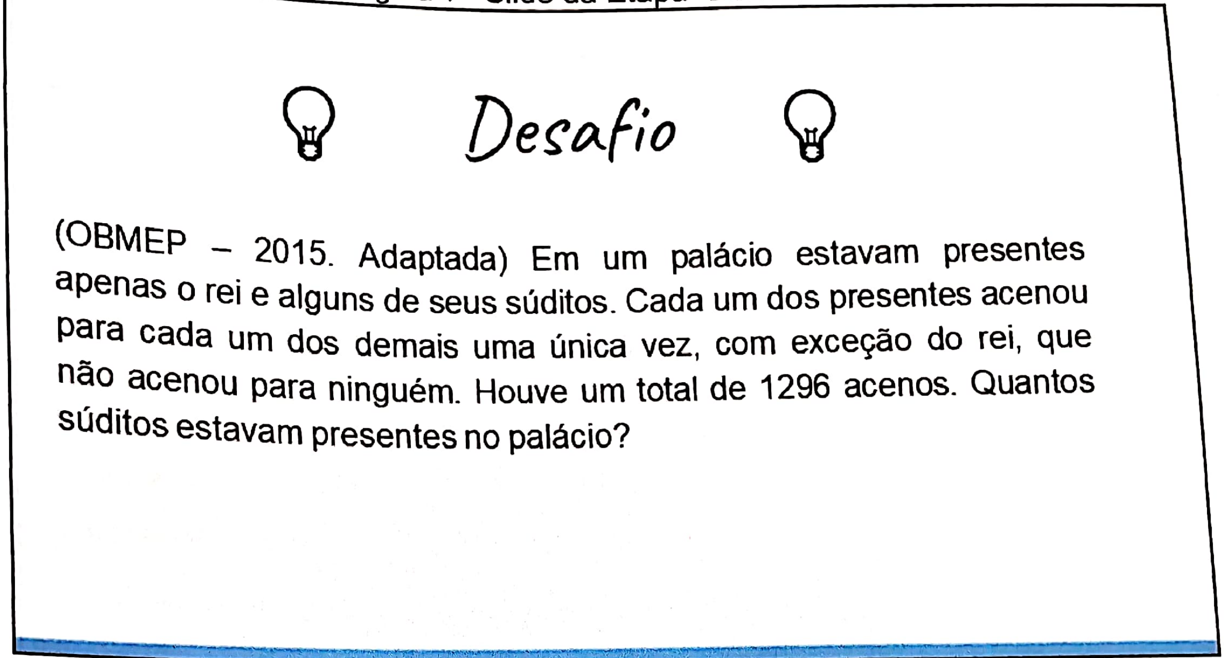
Fonte: Elaboração própria.

A seguir, é feito o detalhamento de cada uma das etapas:

Desafio

É apresentada aos alunos uma questão e solicitada a sua resolução (Figura 1).

Figura 1 - Slide da Etapa "Desafio"



Fonte: Elaboração própria a partir da OBMEP (2015).

Em seguida, os professores em formação discutem com os alunos as resoluções elaboradas e os questionam sobre a possibilidade de existirem outras formas de se pensar a questão. Assim, são mostradas e discutidas várias resoluções pensadas previamente pelos professores em formação (Figura 2). Caso algum aluno apresente uma sugestão de resolução, sugere-se que o professor solicite que o raciocínio seja apresentado à turma, promovendo, assim, o protagonismo dos alunos.

Figura 2 - Resoluções do “Desafio”

Resolução 1:

1 súdito
1 Rei
} 1 aceno

2 súditos (S)
1 Rei (R)

$S_1 < S_2, R$

$S_2 < S_1, R$

} 4 acenos

3 súditos (S)
1 Rei (R)

$S_1 < S_2, S_3, R$

$S_2 < S_1, S_3, R$

$S_3 < S_1, S_2, R$

} 9 acenos

Portanto:

n súditos
1 Rei
} n^2 acenos

Se o número de acenos é 1296:

$n^2 = 1296$

$n = 36$

R.: 36 súditos.

Resolução 2:

Considerando n o número total de pessoas temos:

$$\underbrace{n \times (n-1)}_{\text{todos acenos}} - \underbrace{(n-1)}_{\text{acenos do Rei}} = 1296$$

$$(n^2 - n) - (n-1) = 1296$$

$$n^2 - n - n + 1 = 1296$$

$$n^2 - 2n + 1 = 1296$$

$n_1 = 37$ $\quad n_2 = -35$ (não convém)

Sendo $n = 37$ e desconsiderando o Rei temos:

$$37 - 1 = 36$$

R.: 36 súditos.

Resolução 3:

Considerando n o número total de súditos temos:

$$\underbrace{n \times (n-1)}_{\text{acenos entre os súditos}} + \underbrace{n}_{\text{acenos para o Rei}} = 1296$$

$$(n^2 - n) + n = 1296$$

$$n^2 - n + n = 1296$$

$$n^2 = 1296$$

$$n = 36\ súditos$$

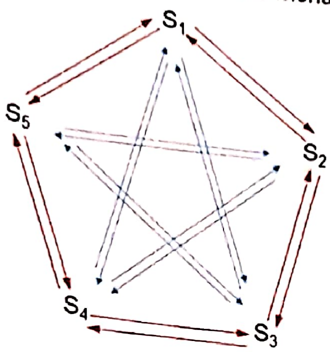
R.: 36 súditos.

Fonte: Elaboração própria.

Figura 2 - Resoluções do "Desafio" (continuação)

Resolução 4:

Supondo que os súditos S_n estão organizados como os vértices de um polígono, é possível relacionar os acenos (n) da seguinte forma:



Acenos entre os súditos.

$$\underbrace{2n}_{\text{número de lados vezes dois}} + \underbrace{n.(n-3)}_{\text{número de diagonais vezes dois}} + \underbrace{n}_{\text{acenos para o Rei}} = 1296$$

$$2n + n^2 - 3n + n = 1296$$
$$n^2 = 1296$$
$$n = 36 \; súditos$$

Resolução 5:

Analisando os acenos entre os súditos através de uma matriz quadrada, sendo 0 quando não há aceno e 1 quando há, observa-se que para a matriz 4x4:

	s1	s2	s3	s4
s1	0	1	1	1
s2	1	0	1	1
s3	1	1	0	1
s4	1	1	1	0

$$\underbrace{4^2}_{\text{quantidade de elementos da matriz}} - \underbrace{4}_{\text{quantidade de elementos da diagonal}} + \underbrace{4}_{\text{acenos para o rei}} = número\ de\ acenos$$

Em uma matriz nxn:

$$n^2 - n + n = número\ de\ acenos$$
$$n^2 - n + n = 1296$$
$$n^2 = 1296$$
$$n = 36$$

R.: 36 súditos.

Fonte: Elaboração própria.

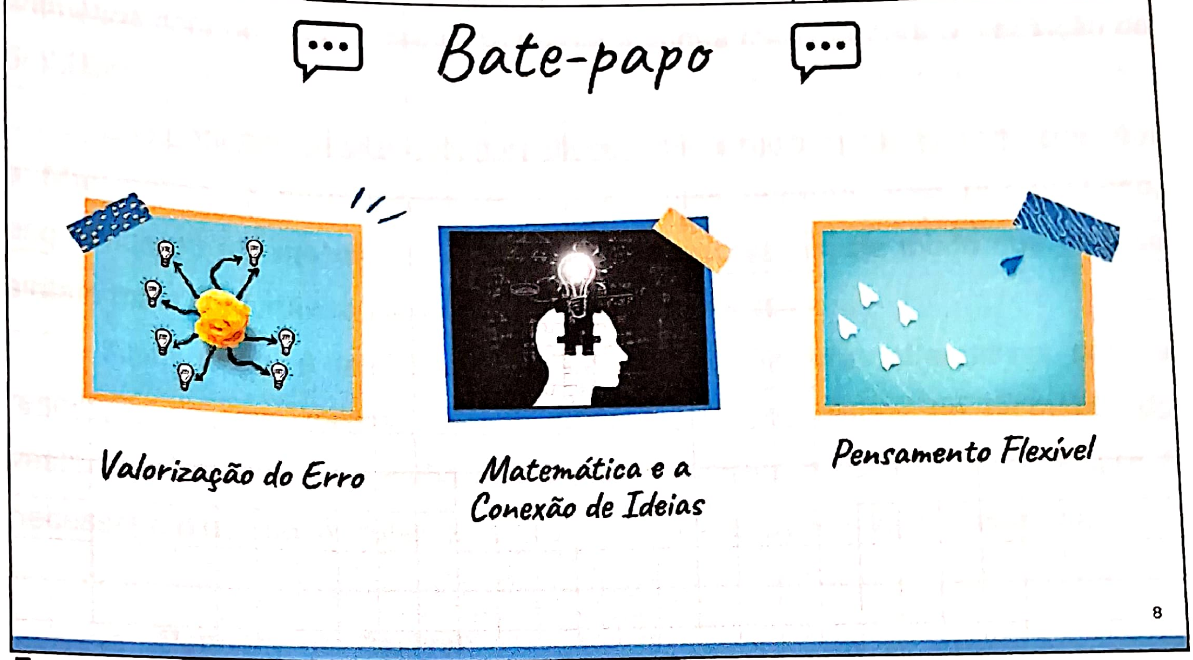
As resoluções apresentadas permitem uma abordagem intradisciplinar, uma vez que o desafio pode ser resolvido pelos vieses algébrico, geométrico, aritmético ou matricial. Além disso, possibilita uma exploração mais criativa e menos mecanicista da questão.

Após esse primeiro momento, os professores em formação retornam ao questionamento inicial, sobre o título: "Rumo à Álgebra dialogada: para além do gabarito.", indagando os alunos se, após a discussão sobre diversas resoluções para o desafio, é possível ter uma ideia sobre o que será discutido nesta sequência.

<u>**Bate-papo**</u>

O momento do bate-papo busca ser uma troca mais informal entre alunos e professor, na qual este apresenta, por meio do slide abaixo (Figura 3), algumas ideias importantes para a compreensão da sequência didática:

Figura 3 – Slide do momento do Bate-papo



Fonte: Elaboração própria.

- **A valorização do erro**

É válido destacar que os erros são importantes no processo de aprendizagem do aluno e, mesmo que a resposta prevista no gabarito não seja encontrada, o raciocínio deve ser valorizado. Ao explorar o caminho percorrido pelo aluno, o professor faz com que ele reflita sobre o que está inadequado na questão. Dessa forma, o aluno participa ativamente do processo de construção do seu conhecimento e se sente respeitado e confiante para explorar diferentes caminhos que utilizem os seus conhecimentos.

- **Matemática e a conexão de ideias**

O uso da intradisciplinaridade na resolução de questões de Matemática agrega uma nova visão desta ciência para o aluno, visto que os conhecimentos prévios deste, mesmo que em outros vieses da Matemática, podem auxiliar no aprendizado do que está sendo estudado e no desenvolvimento do pensamento matemático. Desta forma, o aluno pode usar tanto a álgebra, a geometria, a aritmética com desenhos, esquemas e até a língua materna para a resolução de problemas.

É importante lembrar que, para alunos que acreditam não ter afinidade com a Matemática, a possibilidade de explorar uma questão, seja por desenho, esquemas ou até mesmo de forma oral, pode auxiliá-los, de modo que eles se sintam mais confortáveis e confiantes durante o processo.

Além disso, é ressaltado que pensar em maneiras alternativas para a resolução de uma mesma questão pode auxiliar os alunos no momento do vestibular, em que eles estão sob pressão. Nessas ocasiões, nem sempre é necessário o uso de fórmulas, as quais, por sua vez, podem fugir à memória.

- **Pensamento flexível**

Com o auxílio do pensamento flexível é possível lidar com as adversidades que podem se apresentar na resolução de problemas matemáticos de forma criativa, não-linear, não rígida ou mecanizada.

O pensamento flexível mostra que é possível, por meio dos conhecimentos adquiridos, ter autonomia no processo de resolução de questões, que não se resume a encontrar o gabarito, mas que vai além disso. Esta forma de pensamento não nega a existência de verdades matemáticas, mas a vê como uma ciência muito mais ampla, que envolve outras habilidades além da mera memorização. Então, o estímulo do professor para a busca de novos caminhos na resolução de problemas contribui para a superação das dificuldades alunos.

Com esse momento de bate-papo, pretende-se levar os alunos a refletirem sobre a importância desses tópicos apresentados.

Pensando em grupos

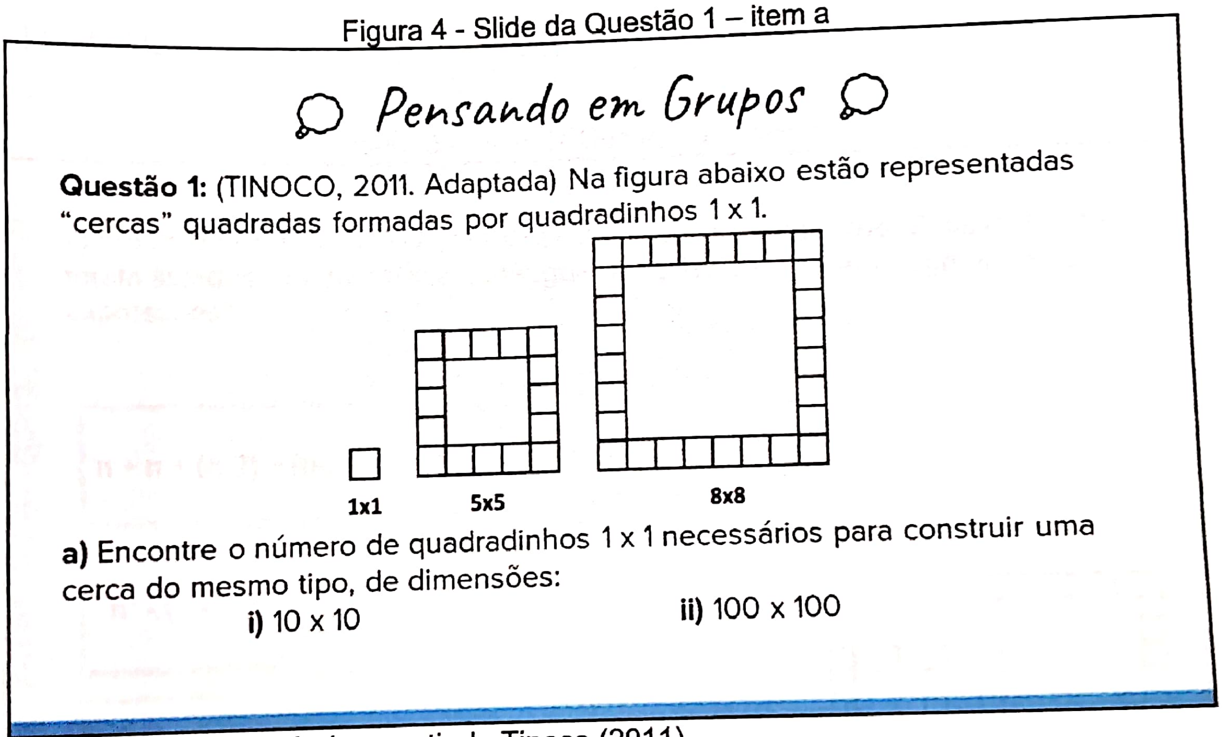
Em um terceiro momento, a turma é dividida em grupos para a discussão de duas questões. Sugere-se que os grupos sejam formados por quatro alunos cada. A divisão deve ser feita por meio de salas criadas pelo aplicativo Google Meet ou outro equivalente, cada sala para um grupo. Os professores em formação são responsáveis por auxiliar os alunos em cada grupo, incentivando-os a buscar diferentes maneiras para resolver os problemas propostos. Caso a sequência didática seja aplicada presencialmente, sugere-se separar a turma em grupos da mesma forma, com a quantidade a depender do número de alunos total.

As questões são apresentadas por meio de slides.

Questão 1:

No item "a", os alunos devem encontrar o número de quadradinhos para construir cercas de dois tamanhos diferentes (Figura 4).

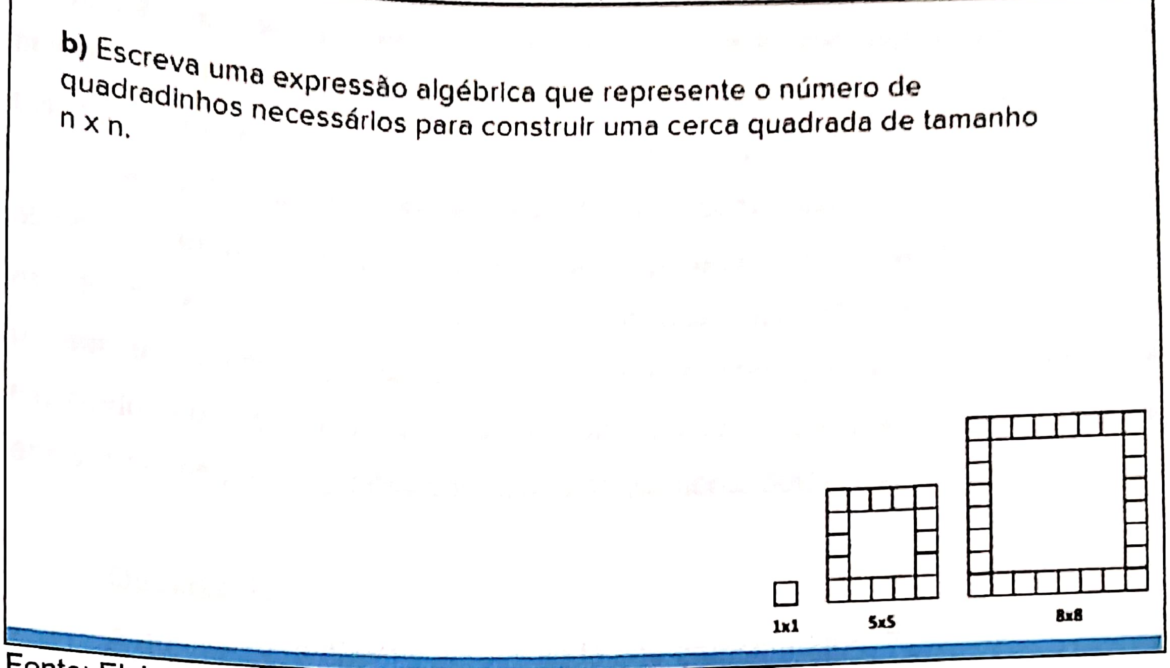
Figura 4 - Slide da Questão 1 – item a



Fonte: Elaboração própria a partir de Tinoco (2011).

No item b, os alunos devem escrever uma expressão algébrica que represente uma cerca quadrada de tamanho n×n. (Figura 5).

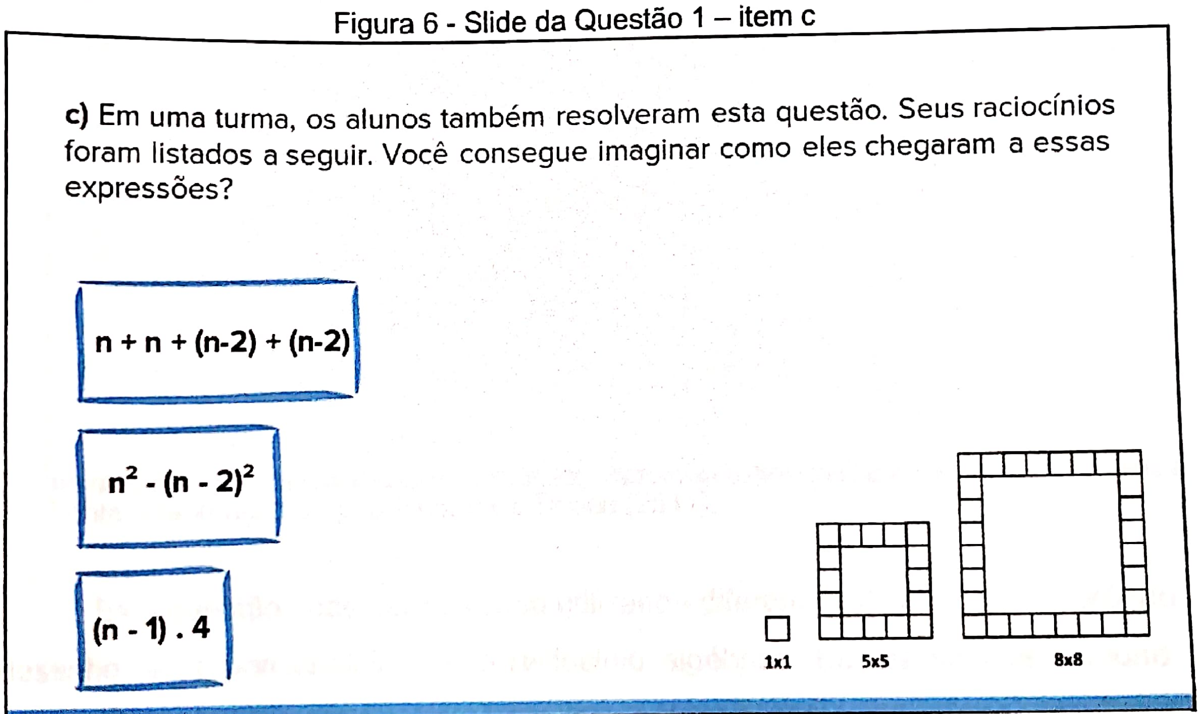
Figura 5 - Slide da Questão 1 – item b



Fonte: Elaboração própria a partir de Tinoco (2011).

No item c, algumas expressões algébricas que descrevem o problema são apresentadas para que os alunos reflitam qual é o raciocínio por trás dessas representações (Figura 6).

Figura 6 - Slide da Questão 1 – item c



Fonte: Elaboração própria a partir de Tinoco (2011).

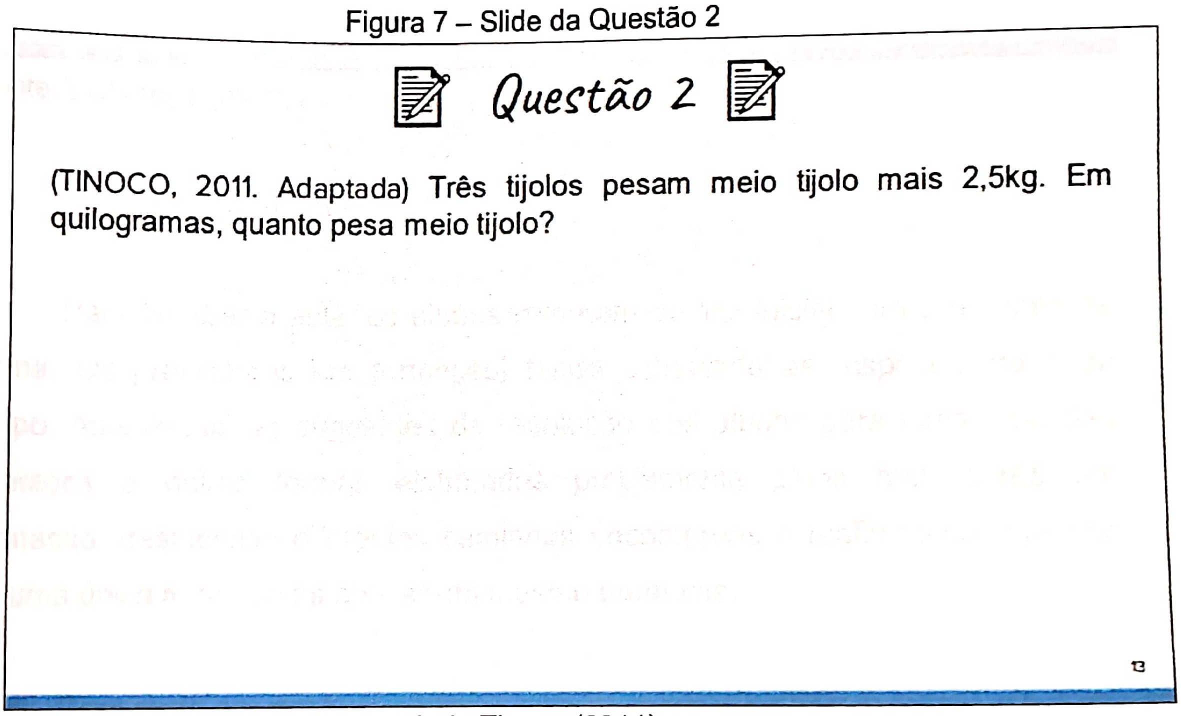
Essa questão, além de incentivar os alunos a identificarem e generalizarem um padrão, apresenta diversas outras formas de raciocínio. Assim, ainda que os alunos não consigam desenvolver todas essas expressões algébricas, estarão colocando em prática o pensamento flexível ao refletirem sobre tais expressões.

Dessa forma, essa primeira questão tem como objetivo fazer com que os alunos partam de um caso específico para a generalização, além de mostrar, com as várias expressões algébricas, que há diversos caminhos possíveis para se pensar um mesmo problema. Ao apresentar essa gama de resoluções, é esperado que os alunos se sintam mais confiantes para a próxima questão, abrindo novas possibilidades para o seu pensamento autônomo.

Questão 2:

A questão 2 também é apresentada aos grupos (Figura 7):

Figura 7 – Slide da Questão 2

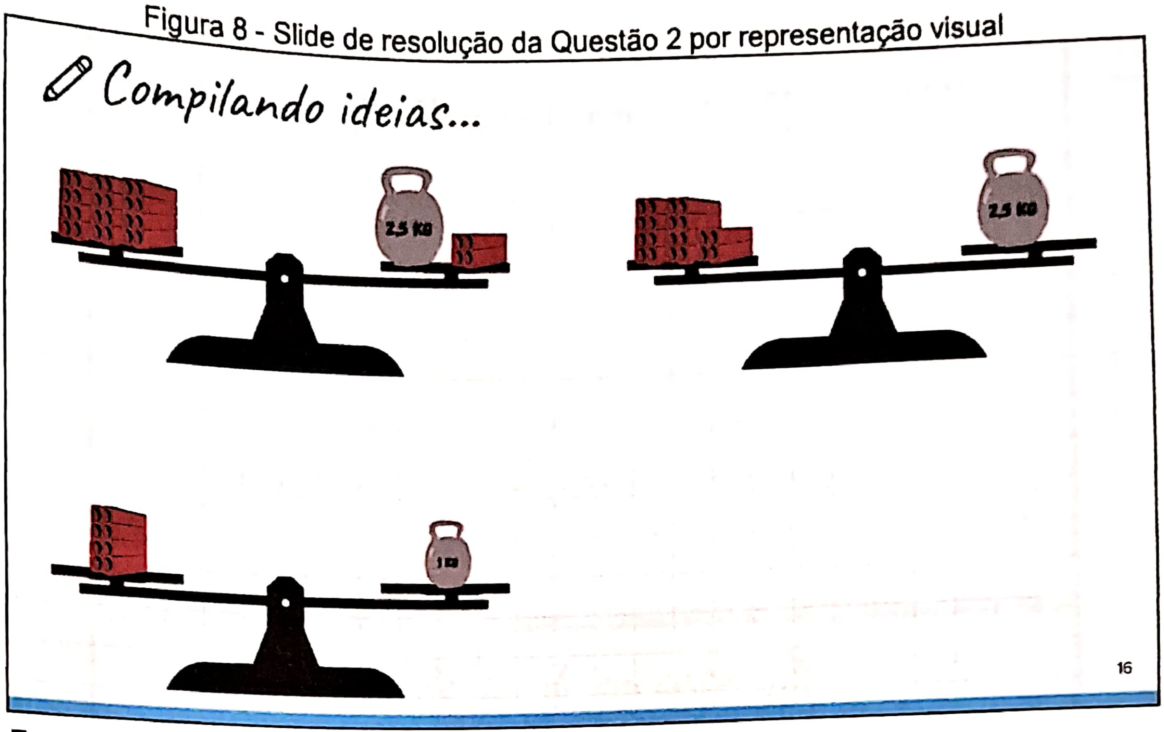


Fonte: Elaboração própria a partir de Tinoco (2011).

Esta questão pode ser resolvida utilizando diferentes ideias, como o próprio desenho, a proporcionalidade e o raciocínio algébrico. Espera-se que o aluno, tendo visto os exemplos apresentados anteriormente, visualize, de forma autônoma, diversas formas de resolução.

Em aula, discute-se a sua resolução pelo viés algébrico, por proporcionalidade, além da utilização da representação visual (Figura 8).

Figura 8 - Slide de resolução da Questão 2 por representação visual



Fonte: Elaboração própria.

Compilando ideias

Para finalizar a aula, os alunos retornam ao link inicial com o restante da turma. Os professores em formação, tendo compilado as respostas de cada grupo, apresentam as sugestões de resolução dos alunos para cada uma das questões e outras formas elaboradas previamente pelos professores em formação, destacando diferentes caminhos encontrados e reafirmando que não há uma única forma de se pensar um mesmo problema.

Pensando em casa

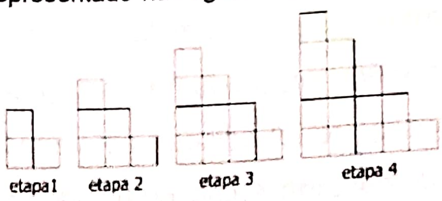
Duas questões são apresentadas como atividade extra (Figura 9) (Apêndice B). É solicitado aos alunos que elaborem em casa, ao menos duas resoluções para os exercícios mostrados. As soluções ou dúvidas podem ser enviadas para um contato (e-mail ou WhatsApp) disponibilizado. É importante ressaltar que o aluno deve enviar sua atividade mesmo que este resolva apenas uma questão ou apresente apenas uma forma de resolução.

Figura 9 - Questões da etapa "Pensando em casa"

(a)

Pensando em casa

1. (UFRGS-2017. Adaptada) Quadrados iguais de lado 1 são justapostos, segundo padrão representado nas figuras das etapas abaixo.



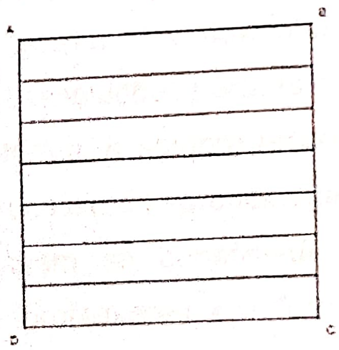
Mantido esse padrão de construção, o número de quadrados de lado 1, existentes na figura da etapa 100, é ?

→ Resolver de duas formas distintas

(b)

Pensando em casa

2. (Campeonato de Matemática SUB14-2006/2007) O quadrado ABCD está dividido em 7 retângulos iguais. O perimetro de cada um dos retângulos é 32 cm. Qual é a área do quadrado ABCD?



→ Resolver de duas formas distintas

Fonte: (a) Elaboração própria a partir de UFRGS (2017)
(b) Elaboração própria a partir do Campeonato de Matemática SUB 14 – 2006/2007.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho conseguiu ser disruptivo ao alçar outras áreas da Matemática, trazendo riqueza no modo de pensar e distanciando-se do mero uso do gabarito. Isso já se reflete no pensamento do grupo, na relação dos integrantes com as atividades acadêmicas e a futura atuação docente.

Como o objetivo do trabalho é abordar e incentivar o uso de diversas resoluções para um mesmo problema, pode-se afirmar que esse objetivo foi parcialmente cumprido. O grupo percebeu, por meio dos comentários da turma durante a aula, que a proposta do trabalho foi compreendida. Por outro lado, nas atividades para casa, somente uma aluna apresentou mais de uma solução e apenas para uma questão.

Quanto aos impactos da disciplina na formação dos integrantes do grupo, destaca-se o desenvolvimento da escrita acadêmica como um fator positivo, bem como a oportunidade de experienciar o planejamento e a aplicação de uma aula no início da graduação. É notado, também, o quanto a ideia de pensamento flexível tornou-se presente no cotidiano do grupo. Inevitavelmente, os participantes passaram a se questionar sobre outras resoluções para as questões encontradas nas disciplinas do curso. Da mesma forma, é sempre recordada, a importância do erro e de auscultar o aluno para o processo de aprendizagem.

É esperado que os alunos da turma tenham se beneficiado com a aplicação do trabalho, uma vez que esses são professores em formação e poderão utilizar o conceito de pensamento flexível em sua docência, incentivando os seus discentes a utilizarem diversas estratégias de resolução para uma mesma questão. Além disso, os licenciandos deverão auscultar seus futuros alunos, contribuindo para uma relação mais horizontal e para a autoconfiança e desenvolvimento dos que estão aprendendo

Considera-se válido o aprofundamento deste tema em futuros trabalhos acadêmicos que possam ter este como base, sobretudo se houver a possibilidade da investigação dos resultados de sua aplicação presencial em uma turma regular do Ensino Básico, preferencialmente em mais de um dia de aula.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+)**: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental.** Introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais +:** Matemática. Brasília: MEC / SEF, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF, 2017.

DAVID, M. M. M. S.; LOPES, M. da P. Professores que explicitam a utilização de formas de pensamento flexível podem estar contribuindo para o sucesso em matemática de alguns de seus alunos. **Zetetike,** São Paulo, v.6, n.1, p. 31-58, jan/jun. 1998.Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646806. Acesso em: 25 out. 2021.

FERREIRA, M. L. A álgebra e suas diferentes manifestações. *In*: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XIII., 2011, Recife. **Anais Eletrônicos** [...] A álgebra e suas diferentes manifestações- CIAEM-IACME. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2011. p. 1-8. Disponível em: http://xiii.ciaemredumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/1503/818. Acesso em: 23 nov 2021.

LORENZATO, S. **Para aprender matemática**. 3. ed. rev. Campinas: Autores Associados, 2010.

SOUSA, M. C. de. Quando professores têm a oportunidade de elaborar atividades de ensino de Matemática na perspectiva lógico-histórica. **BOLEMA- Boletim de Educação Matemática**, São Paulo, v. 22, n. 32, p. 83-99, 2009.

TINOCO L.A.A. *et al*. Álgebra é mais do que algebrismo. *In:* ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11, 2013, Curitiba. **Anais Eletrônicos**[...]. Curitiba: PUC-PR, 2013, p. 1-4. Disponível em: http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/1429_422_ID.pdf. Acesso em: 25 out. 2021.

TINOCO, L. A. A. (coord), Resolução de problemas: nem sempre as equações são necessárias. *In:* **Álgebra:** Pensar, Calcular, Comunicar... 2 ed., Rio de Janeiro, Instituto de Matemática/UFRJ- Projeto Fundão, 2011. p.83 – 88.

Campos dos Goytacazes (RJ), 31 de outubro de 2022.

Amanda Jaramuru Orego

Ellen Cristina Ferreira Mendes

Juliana Damasceno Vieira

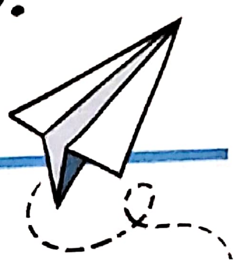
Maria Thereza do C. Pereira

Matheus de Barros Silva Cardoso Henrique

APÊNDICES

Apêndice A: Slides para a aplicação da sequência didática

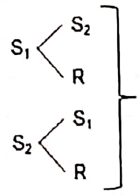
Rumo à Álgebra dialogada: para além do gabarito.

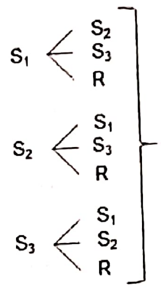


Desafio

(OBMEP – 2015. Adaptada) Em um palácio estavam presentes apenas o rei e alguns de seus súditos. Cada um dos presentes acenou para cada um dos demais uma única vez, com exceção do rei, que não acenou para ninguém. Houve um total de 1296 acenos. Quantos súditos estavam presentes no palácio?

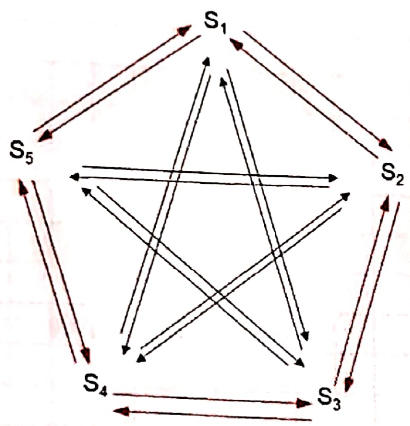
Resolução





Resolução

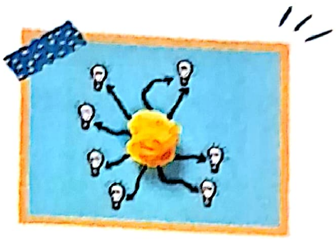
Resolução



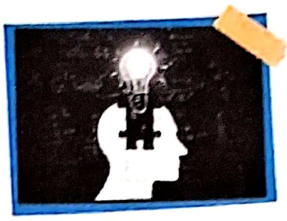
Resolução

	s1	s2	s3	s4
s1	0	1	1	1
s2	1	0	1	1
s3	1	1	0	1
s4	1	1	1	0

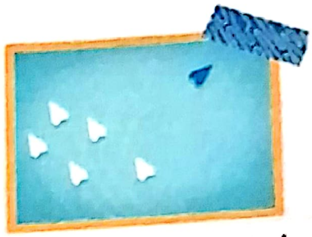
Bate-papo



Valorização do Erro



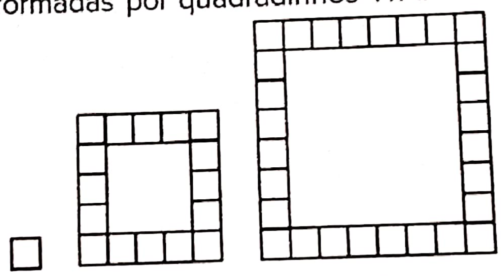
Matemática e a Conexão de Ideias



Pensamento Flexível

Pensando em Grupos

Questão 1: (TINOCO, 2011. Adaptada) Na figura abaixo estão representadas "cercas" quadradas formadas por quadradinhos 1 x 1.

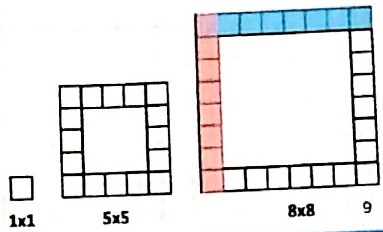


1x1 5x5 8x8

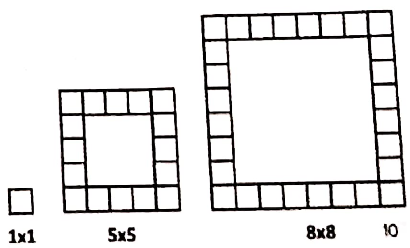
a) Encontre o número de quadradinhos 1 x 1 necessários para construir uma cerca do mesmo tipo, de dimensões:

i) 10 x 10 **ii)** 100 x 100

Compilando ideias...



b) Escreva em linguagem matemática o número de quadradinhos necessários para construir uma cerca quadrada de tamanho n x n.

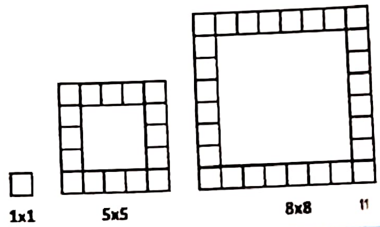


c) Em uma turma, os alunos também resolveram esta questão. Seus raciocínios foram listados a seguir. Você consegue imaginar como eles chegaram a essas expressões?

$n + n + (n-2) + (n-2)$

$n^2 - (n - 2)^2$

$(n - 1) . 4$

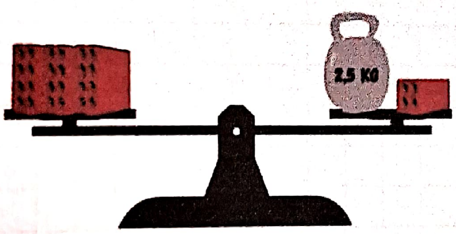


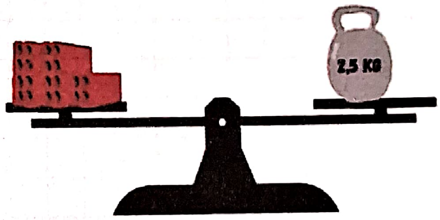
Questão 2

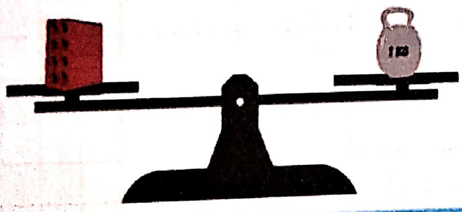
(TINOCO, 2011. Adaptada) Três tijolos pesam meio tijolo mais 2,5kg. Em quilogramas, quanto pesa meio tijolo?

Compilando ideias...

Compilando ideias...

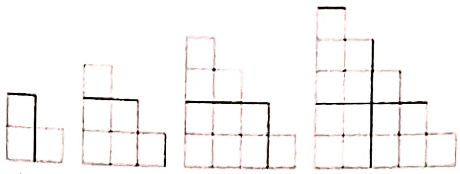






Pensando em casa

1. (UFRGS-2017. Adaptada) Quadrados iguais de lado 1 são justapostos, segundo padrão representado nas figuras das etapas abaixo.

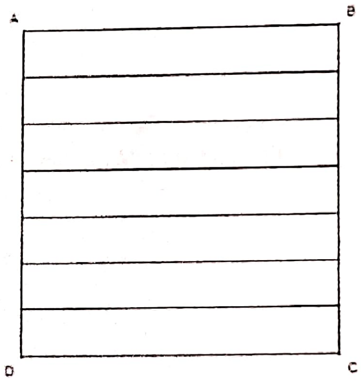


Mantido esse padrão de construção, o número de quadrados de lado 1, existentes na figura da etapa 100, é ?

➜ Resolver de formas distintas

Pensando em casa

2. (Campeonato de Matemática SUB14-2006/2007) O quadrado ABCD está dividido em 7 retângulos iguais. O perímetro de cada um dos retângulos é 32 cm. Qual é a área do quadrado ABCD?



➜ Resolver de formas distintas

Enviar para:

Referência

TINOCO, L. A. A. (coord), Resolução de problemas: nem sempre as equações são necessárias. In: **Álgebra**: Pensar, Calcular, Comunicar... 2 ed., Rio de Janeiro, Instituto de Matemática/UFRJ-Projeto Fundão, 2011. p.83 – 88.

INSTITUTO FEDERAL
Fluminense
Campus Campos Centro

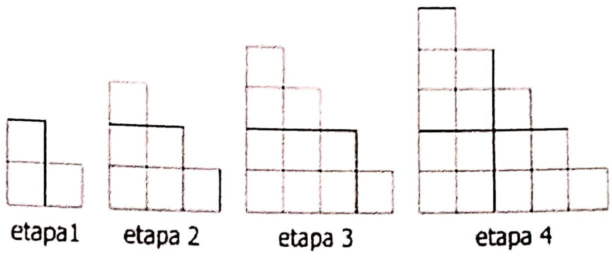
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
PÁTRIA AMADA BRASIL
GOVERNO FEDERAL

Diretoria de Ensino Superior
Licenciatura em Matemática
Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática
Linha de Pesquisa: Álgebra
Licenciandos: Amanda Jacomini, Ellen Cristina, Juliana Vieira, Maria Thereza e Matheus de Barros
Orientadora: Profª Ana Paula Rangel de Andrade
Nome: ______________________________ Data:___/___/____

Pensando em Casa - Atividades

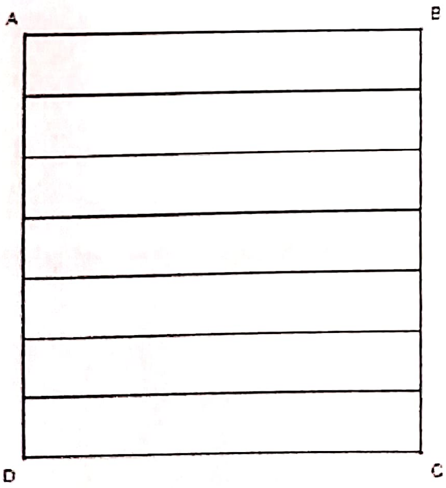
Apresente, para as seguintes atividades, ao menos duas resoluções distintas.

1.(UFRGS-2017. Adaptada) Quadrados iguais de lado 1 são justapostos, segundo padrão representado nas figuras das etapas abaixo.

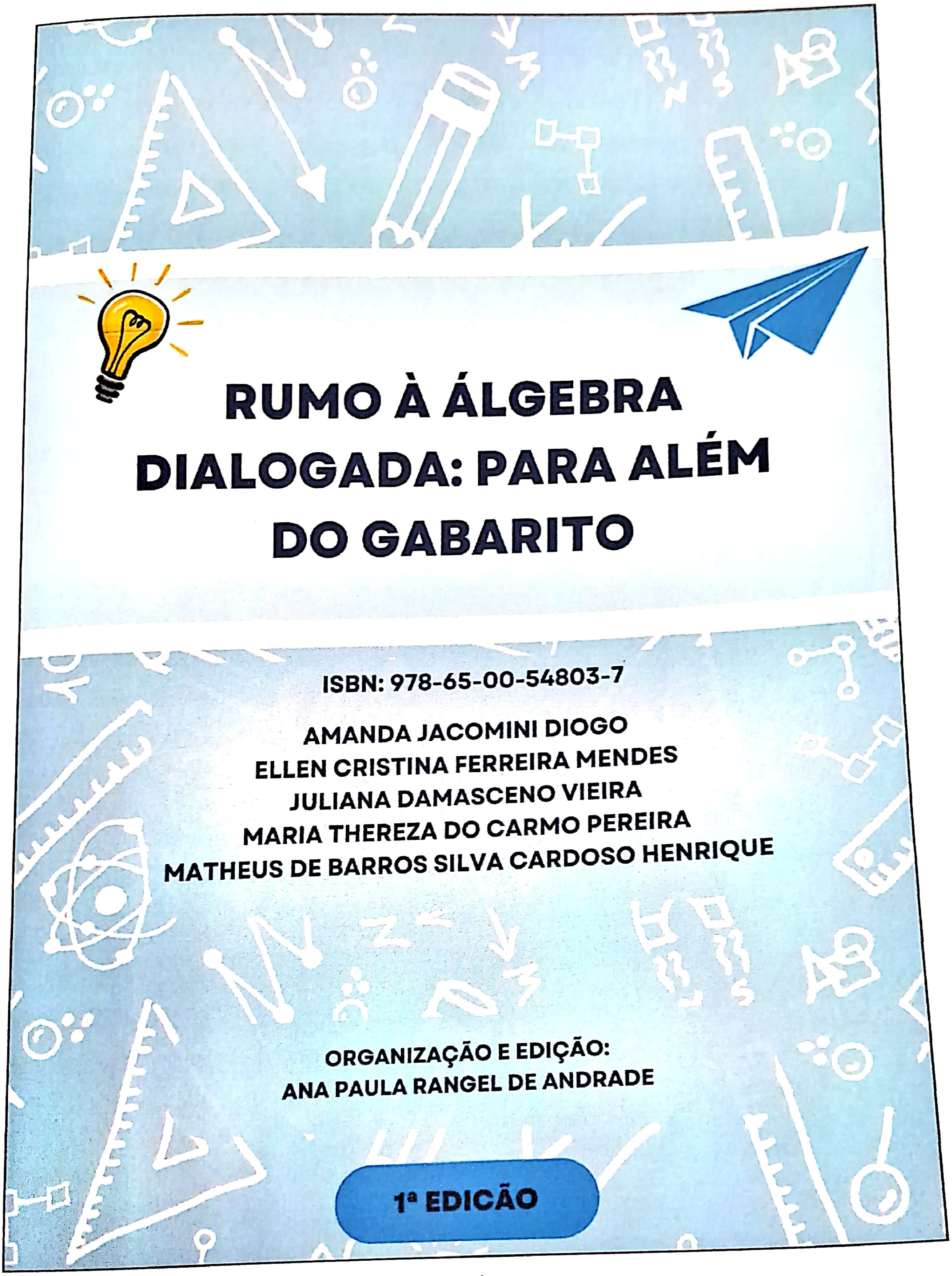


Mantido esse padrão de construção, qual é o número de quadrados de lado 1, existentes na figura da etapa 100?

2.(Campeonato de Matemática SUB14-2006/2007) O quadrado ABCD está dividido em 7 retângulos iguais. O perímetro de cada um dos retângulos é 32 cm. Qual é a área do quadrado ABCD?



Apêndice C: e-book publicado com a versão final da sequência



Disponível em: https://www.amazon.com.br/