INSTITUTO FEDERAL
Fluminense
Campus
Campos Centro

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

GOVERNO FEDERAL
BRASIL
UNIÃO E RECONSTRUÇÃO

RELATÓRIO DO LEAMAT

DEFINIÇÃO, ELEMENTOS E PRODUTO DE MATRIZES: APLICAÇÕES EM QUESTÕES DE VESTIBULAR

ENSINO E APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA

MARIA ROBERTA MATA JUSTINIANO
SAMUEL PEREIRA DE BRITO

CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

2023.2

MARIA ROBERTA MATA JUSTINIANO
SAMUEL PEREIRA DE BRITO

RELATÓRIO DO LEAMAT

DEFINIÇÃO, ELEMENTOS E PRODUTO DE MATRIZES: APLICAÇÕES EM QUESTÕES DE VESTIBULAR

ENSINO E APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA

Trabalho apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, *Campus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão da disciplina Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Ana Paula Rangel de Andrade.

CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

2023.2

SUMÁRIO

1 RELATÓRIO DO LEAMAT I

1.1 Atividades desenvolvidas

No dia 15 de dezembro de 2022, iniciou-se a apresentação do componente curricular Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática I (LEAMAT I). Neste dia, foi pontuado como ocorreria o desenvolvimento do mesmo ao longo do período, os seus objetivos (desenvolver a capacidade de leitura, escrita e argumentação de textos acadêmicos científicos, entre outros), e os critérios prescritos para a aprovação (comprometimento, participação, e assiduidade).

Foram discutidas neste encontro notas históricas referentes ao estudo da Álgebra (Roque, 2012) e apresentado documentos norteadores da Educação Básica Brasileira: a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Brasil, 1997). Além disso, citou-se a existência de alguns grupos e sites de pesquisa relevantes para a Matemática, como por exemplo, o Projeto Fundão (UFRJ).

Também, foi pontuado o papel Instrumental e informativo da Matemática no Ensino Médio e explanado algumas vantagens do ensino da Álgebra, como: desenvolver capacidade de abstração e generalização. Ademais, ocorreu a apresentação de trabalhos relevantes orientados anteriormente na linha de pesquisa Álgebra, destacando principalmente seus títulos, temas e objetivos. E, por fim, os professores em formação também foram orientados quanto à criação de fichamentos bibliográficos e solicitados a redigir um, do texto "Álgebra é mais que algebrismo” de Tinoco *et al.* (2013).

O próximo encontro, ocorreu no dia 22 de dezembro de 2022. Nele, sucedeu-se o debate on-line do texto recomendado na aula anterior. Elucidou-se que o artigo apresenta atividades que permitem ao professor refletir sobre sua prática pedagógica no ensino da Álgebra. Os autores apontam quatro aspectos que consideram essenciais para seu ensino: igualdade, propriedade distributiva, simbologia e linguagem algébrica, e regularidade e generalização. E, ainda, fazem críticas em relação à falta de ênfase dada nos primeiros anos escolares a identidades numéricas, relatando que há uma imposição muito rápida e precoce do uso de símbolos. Afirmam ainda o desprezo do uso da linguagem corrente materna, algo que contradiz a evolução histórica da Matemática. Além do debate, também se orientou sobre como se faz o uso correto das referências bibliográficas.

No terceiro encontro, realizado no dia 2 de fevereiro de 2023, foram realizadas as divisões dos grupos e seus integrantes efetuaram pesquisas em livros e em relatórios antigos. Após investigações, os autores deste trabalho, escolheram o tema: Introdução à Álgebra. Sendo assim, definiram que a sequência didática seria aplicada para alunos do 7º. ano do Ensino Fundamental e que teria como objetivo principal introduzir o ensino da Álgebra com a finalidade de promover uma aprendizagem mais significativa, por meio de padrões numéricos.

No dia 4 de fevereiro de 2023, ocorreu uma reunião on-line entre os autores do trabalho e a orientadora. Neste encontro, a professora Ana Paula Rangel de Andrade, manifestou orientações sobre a elaboração do relatório visando a futura aplicação. Foi enfatizada a importância do comprometimento dos indivíduos para o desenvolvimento deste trabalho.

O dia 9 de fevereiro de 2023 foi designado para dar continuidade à fomentação das discussões e pesquisas.

No dia 16 de fevereiro de 2023, os autores do trabalho pleitearam em aula, com a orientadora, a possibilidade de alteração do tema. Passaram a cogitar a elaboração de uma sequência didática com a temática Matrizes, tendo como público-alvo alunos de pré-vestibulares sociais. No dia seguinte, todos se reuniram e decidiram mudar definitivamente a temática, reiniciando assim, a escrita do relatório.

No dia 2 de março de 2023, sucederam-se orientações sobre a realização do relatório. Pontos essenciais foram discutidos principalmente sobre o cuidado que se deve ter no desenvolvimento do relatório e no tema. Para melhor embasamento do mesmo, pesquisas na BNCC (Brasil,2018) e nos PCN (Brasil,1997) foram feitas, a fim de promover uma justificativa mais palpável e sólida; sites e materiais foram sugeridos como fonte de pesquisa.

No dia 9 de março de 2023 obteve-se da professora Ana Paula, observações do relatório escrito, e foi iniciada a sua correção. Por fim, orientações sobre citações e referência de acordo com as normas da ABNT foram executadas novamente.

Do dia 16 de março até o dia 20 de abril, as reuniões foram destinadas à elaboração e correção dos relatórios.

No dia 27 de abril de 2023, ocorreu a apresentação deste trabalho na linha de pesquisa em Álgebra. As professoras orientadoras, destacaram a necessidade de se realizar ajustes de formatação e correções ortográficas. Também foi pontuado a importância dos autores desfrutarem de mais encontros presenciais para obtenção de pensamentos e falas mais conectadas, sem fragmentações e descontinuidades.

No dia 2 de maio de 2023, foi entregue a última versão do relatório de LEAMAT I na linha de Álgebra.

No dia 4 de maio ocorreu a avaliação final do componente curricular LEAMAT I.

1.2 Elaboração da sequência didática

1.2.1 Tema

O estudo de matrizes com ênfase na definição, nos elementos que a compõem e no produto, aplicado a exames vestibulares.

1.2.2 Justificativa

Enquanto alunos da Educação Básica, os autores deste trabalho observaram o descaso e a ausência com o estudo de Matrizes. Compartilham também do desejo de auxiliar alunos de pré-vestibulares sociais, que possuem dificuldades com este tema.

Matriz é uma maneira de representar dados dividindo-os em linhas e colunas (Iezzi, Hazzan, 2013). Ela possui uma grande importância tanto na Matemática quanto no cotidiano das pessoas. Sampaio (2018) afirma que as matrizes têm a capacidade de ordenar e simplificar problemas, tornando-se uma ferramenta valiosa na resolução de questões diversas, desde a Estatística, a Física Atômica, a Economia, até a Matemática Pura e Aplicada. Acrescenta ainda que, podem ser aplicadas em projetos de construção de estruturas metálicas, em circuitos elétricos fechados, no balanceamento de reações químicas e na computação gráfica, em ações como a rotação, a mudança de escala, a translação e a composição de transformações geométricas (Sampaio, 2018).

Segundo Moura (2014), elas são uma ferramenta prática e adicional no processo de ensino e aprendizagem dos alunos, pois suas aplicações estão presentes no cotidiano dos alunos, como por exemplo: na organização de dados, de tabelas de campeonato esportivo, de calendários, de fichas de apostas da loteria, na interpretação de gráficos, e nas animações cinematográficas (Moura, 2014).

Corroborando com a importância dos estudos das Matrizes, a BNCC (Brasil, 2018) afirma que este conteúdo deveria ser abordado no Ensino Médio. O documento destaca como uma das habilidades a ser desenvolvida: “Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de softwares que inter-relacionam estatística, geometria e álgebra” (Brasil, 2018, p. 539).

De acordo com os PCN+ (Brasil, 2002) os estudos que envolvem: tabelas, gráficos, diagramas e esquemas, ajudam os alunos a sintetizar o conhecimento de modo que a aprendizagem se torne mais eficaz. Analisar e interpretar problemas com tabela facilita na organização das ideias, ponto indispensável não só para desenvolvimento do pensamento matemático, mas também para a aprendizagem (Brasil, 2002). Além disso, reconhece que a abordagem dos estudos no ensino de Matemática deve estar relacionada com a resolução de problemas práticos em diferentes áreas do conhecimento (Brasil, 2002).

A organização National Council of Teachers Mathematics (NCTM), que é uma organização profissional que tem como objetivo melhorar o ensino e a aprendizagem da Matemática em todos os níveis escolares, trata do tópico de matrizes diretamente, ressaltando a importância das compreensões sobre matrizes pois as mesmas, permitem inúmeras relações significativas enfatizando sua relevância no campo matemático (Nctm, 2000).

Outro ponto muito importante a se tratar é sobre o processo de preparação para o ingresso no Ensino Superior via vestibular. Isso ocorre porque o vestibular é um dos principais processos de seleção para a entrada nas instituições de Ensino Superior que atualmente apresenta fragilidades pedagógicas e barreiras, principalmente para aqueles que frequentam a rede pública de ensino, os estudantes de classes populares (Nascimento, 1999).

Os autores deste trabalho pretendem elaborar uma sequência didática que prepare os alunos para a resolução de questões sobre Matrizes, em particular, a definição, os elementos e o produto. A abordagem irá ser complementada com a resolução de problemas e habilidades como a leitura e a interpretação de enunciados também serão estimuladas.

Por fim, com a elaboração dessa sequência didática, pretende-se alcançar objetivos semelhantes aos de Almeida:

> Espera- se que o aluno consiga desenvolver, além de outras aptidões, a capacidade de resolução de problemas e de aplicar os conceitos e habilidades matemáticas para desenvolverem na vida cotidiana, o que muitas vezes não ocorre quando são avaliadas habilidades e competências adquiridas pelos alunos em relação a esta disciplina (Almeida, 2006, p. 3).

1.2.3 Objetivo geral

Aplicar conceitos referentes à definição, aos elementos e ao produto de matrizes em questões contextualizadas, especialmente a de exames vestibulares.

1.2.4 Público-alvo

Alunos de pré-vestibulares sociais.

2 RELATÓRIO DO LEAMAT II

2.1 Atividades desenvolvidas

Iniciou-se no dia 30 de maio de 2023 as atividades do LEAMAT II. Neste dia, a professora Ana Paula Rangel de Andrade recordou algumas experiências e desafios enfrentados no LEAMAT I, tais como: a falta de correção nas tarefas sugeridas, os erros de postagens de conteúdo e a dificuldade de adaptação a um componente curricular que possui uma estrutura diferente das demais, em que a participação do discente é avaliada em todas as aulas.

No decorrer da aula, houve a exposição do plano de ensino, destacando três objetivos específicos do componente: elaborar uma sequência didática, aplicá-la na turma do LEAMAT II e escrever o Relatório. Sendo assim, foi evidenciado pela docente orientadora a importância dos professores em formação zelarem pela qualidade da sequência didática a ser elaborada, que deve ser interessante e motivadora. Salientou também o quão valiosa deverá ser a participação dos alunos deste componente curricular com críticas e sugestões que contribuam para o aperfeiçoamento da sequência. Além disso, ocorreu a exposição de trabalhos anteriores, mostrando que existe a possibilidade das pesquisas realizadas durante o LEAMAT serem publicadas em revistas e apresentadas em eventos acadêmicos. Posteriormente, uma parte da aula foi utilizada para a última correção do relatório do LEAMAT I, em que cada grupo foi orientado particularmente pela docente sobre erros ainda pendentes.

Por fim, foi anunciado que na semana seguinte, no dia 6 de junho de 2023, ocorrerão discussões sobre a elaboração da sequência didática. Enfatizando assim, a necessidade de ser criado um quadro com as etapas desta sequência. Destacou-se ainda, a importância dos professores em formação estudarem o tema escolhido, pesquisando ferramentas, exercícios, vídeos e materiais que contribuam para o aprimoramento da sequência.

O segundo encontro reservado para a elaboração das atividades do LEAMAT II, ocorreu no dia 6 de junho de 2023. Como estabelecido anteriormente, estava previsto para esta data, o início da elaboração da sequência didática. Porém, a professora orientadora julgou de suma relevância seu adiamento, sugerindo que se priorizasse o estudo mais aprofundado do tema escolhido. Portanto, a maior parte da reunião neste dia foi designada para solucionar as questões recomendadas pela docente.

Os professores em formação discutiram sobre o nível de dificuldades das questões apresentadas, avaliando o tempo gasto para sua conclusão. Ao término, ficou acordado o compromisso de estudo do material disponibilizado e a marcação de um próximo encontro on-line com a finalidade de esclarecer dúvidas existentes.

No dia 13 de junho de 2023, os autores realizaram um encontro com a docente orientadora do componente curricular, que sugeriu algumas tarefas:

- Realizar um levantamento em tópicos dos conceitos e atividades que se pretende abordar na sequência didática.
- Definir a alternância entre a parte teórica e os exercícios;
- Realizar a associação dos exercícios sugeridos pela docente com os conteúdos que se pretende explorar;
- Estabelecer o nível de dificuldades das questões, que devem oscilar entre fáceis e médias; e
- Inserir no máximo oito questões na sequência didática, para se obter um melhor gerenciamento do tempo de aula.

O dia 20 de junho de 2023 foi reservado para a confecção do quadro de etapas da sequência didática. Sendo assim, refletiram quais seriam os objetivos que iriam nortear cada uma das etapas principais da sequência didática. Neste dia, a professora orientadora pontuou a importância de se ter um bom gerenciamento de tempo em cada etapa, sugerindo assim, ajustes e inclusão de uma quantidade de minutos mais generosos para realização de exercícios. O encontro foi concluído com a decisão de finalizar a sequência didática com resolução de exercícios.

As atividades do dia 27 de junho de 2023 ao dia 22 de agosto foram designadas para confecção da sequência didática, incluindo a elaboração de lista de exercícios, das apostilas e dos slides.

Do dia 29 de agosto ao dia 19 de setembro de 2023, os encontros remeteram-se à apresentação das aplicações das sequências didáticas, elaboradas pelos quatro grupos. Após as aplicações, cada grupo dedicou-se aos aprimoramentos das sequências didáticas, inserindo assim, mudanças que surgiram após as valiosas sugestões dadas pelos professores em formações, pertences a esta turma, e pelas professoras orientadoras do componente curricular das duas linhas de pesquisas, Álgebra e Geometria.

O dia 3 de outubro de 2023 foi reservado como último encontro do componente curricular LEAMAT II. Nele, as docentes orientadoras das duas linhas de pesquisa, Álgebra e Geometria, realizaram a avaliação final. Neste encontro, foram compartilhadas vivências do componente curricular, pontuando seus aspectos positivos e de aprimoramentos.

2.2 Elaboração da sequência didática

Nesta seção, será abordado o planejamento da sequência didática e a sua implementação na turma do LEAMAT II.

2.2.1 Planejamento da sequência didática

A sequência didática exposta a seguir, destina-se a estudantes que frequentam cursos de pré-vestibulares sociais. É importante ressaltar essa informação para destacar sua valiosa contribuição na seleção do tema e validar as escolhas das questões incluídas nessa sequência didática.

Abaixo, encontra-se o quadro que explica sua divisão em três etapas. Na primeira, utilizou-se a Apostila I (Apêndice A-I); na segunda, a Apostila II (Apêndice A-II); e na terceira, a lista de exercícios (Apêndice A-III). Durante todo o percurso didático, também foram empregados slides criados no Canvas (Apêndice A-IV).

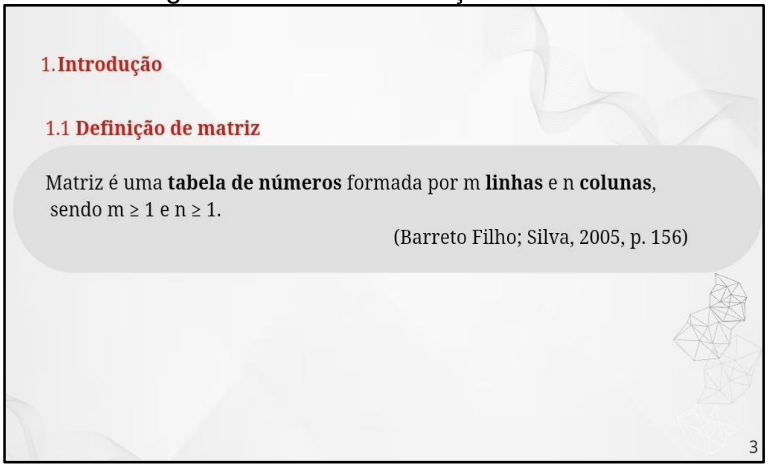
Quadro 1 - Etapas, títulos e objetivos

Etapas	Títulos	Objetivos
1	**Definição e elementos de uma matriz**	Definir uma matriz, apresentar os seus elementos e sua representação genérica.
	Exercício - I	Aplicar os conhecimentos da parte teórica em uma questão contextualizada, de vestibular.
2	**Produto de matrizes**	Apresentar a operação de produto entres matrizes, enfatizando sua condição de existência e seu desenvolvimento aritmético.
	Exercício - II	Aplicar os conhecimentos da parte teórica em uma questão contextualizada, de vestibular.
3	**Lista de exercícios**	Aplicar os conhecimentos das duas etapas anteriores em questões contextualizadas, de vestibulares.

Fonte: Elaboração própria.

A sequência didática inicia com a distribuição da Apostila I (Apêndice A-I). De forma dialogada, visando promover a participação dos alunos e reconhecer seus conhecimentos prévios, um dos professores em formação os questiona sobre o que entendem por matriz. Após ouvir seus relatos, o professor define matriz (Figura 1), haja vista, que cada indivíduo compreende este conceito de forma diferente.

Figura 1 - Slide 3: definição de matriz

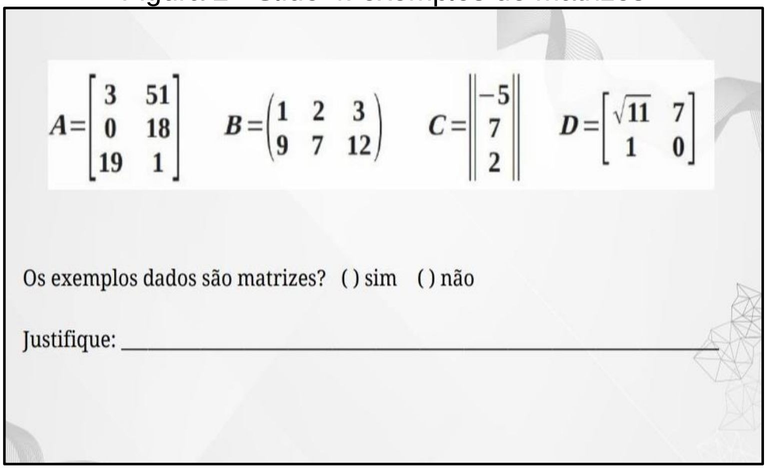


Fonte: Elaboração própria.

Além disso, é valioso ressaltar a importância da definição na Matemática, pois a mesma faz com que todos tenham um ponto de partida comum, e bem fundamentado, desmistificando assim as definições como algo a ser decorado, mas sim uma ferramenta importante e significativa, pois com o auxílio das definições, o aluno consegue resolver muitos problemas desafiadores.

Com o intuito de verificar o entendimento da definição abordada, um dos professores em formação propõe a questão do Slide 4 (Figura 2).

Figura 2 - Slide 4: exemplos de matrizes

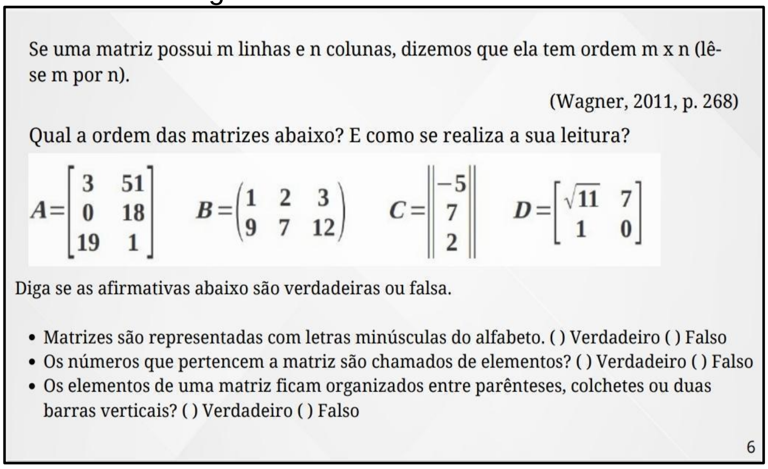


Fonte: Elaboração própria.

A resposta certa só é colocada no quadro, após os alunos responderem, a fim de instigar a participação e o engajamento de todos. Como bem nos assegura Zabala (1998), as relações interativas no ambiente escolar oportunizam uma atividade mental auto estruturante. Adiante, realiza-se mais algumas indagações, em relação à ordem e à leitura das matrizes. De maneira análoga, escuta-se atentamente as respostas dos alunos.

Após este momento, explica-se como executar de forma adequada a leitura das matrizes, e é feito o preenchimento das ordens das matrizes junto com os alunos (Figura 3).

Figura 3 - Slide 6: leitura das matrizes



Fonte: Elaboração própria.

Seguidamente, discute-se se as alternativas apresentadas são verdadeiras ou falsas. Sendo assim, é necessário instigar os alunos a observarem:

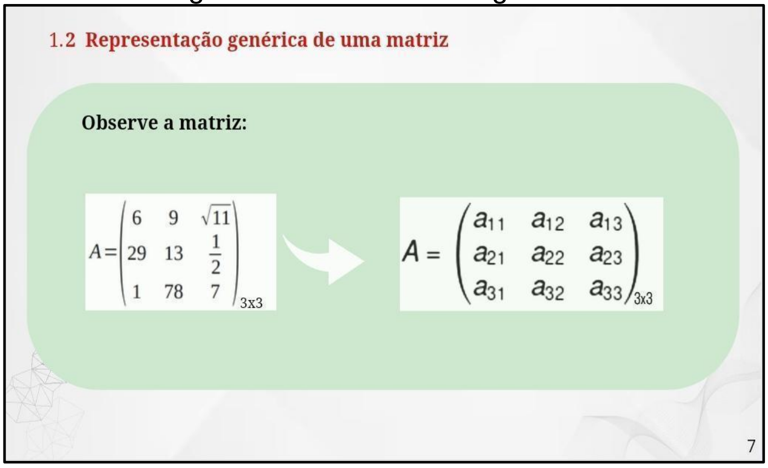
a) que nos exemplos dados as matrizes, são representadas por letras maiúsculas do alfabeto;

b) que as matrizes podem ser simbolizadas com parênteses, colchetes ou barra duplas verticais; e

c) que os números pertencentes a matriz são nomeados de elementos. Durante a aula, os professores em formação conversam sobre as dúvidas e esclarecem pontos que ainda não estão compreendidos.

Finalizadas as explanações, inicia-se os apontamentos sobre sua representação genérica (Figura 4).

Figura 4 - Slide 7: matriz genérica

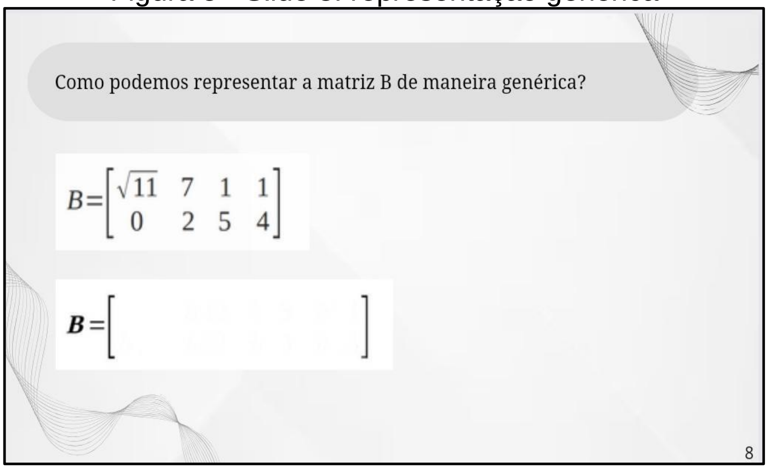


Fonte: Elaboração própria.

Com o propósito de estar linhada ao posicionamento defendido pelo PCN (Brasil, 1998, p.60) que incentiva: “O desenvolvimento do pensamento algébrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem”, é indispensável que se apresente a simbologia a_{ij}, reforçando assim, que todos os números pertencentes na matriz são considerados elementos e podem ser representados de maneira genérica com uma letra minúscula do alfabeto acompanhada de dois valores. Esses valores tornam cada elemento único. Eles indicam sua posição na matriz em relação a linha e coluna que se encontram, respectivamente.

Com a finalidade de verificar a compreensão do aluno, em relação a representação genérica de uma matriz, os mesmos, de forma participativa, executam o preenchimento da matriz genérica B (Figura 5).

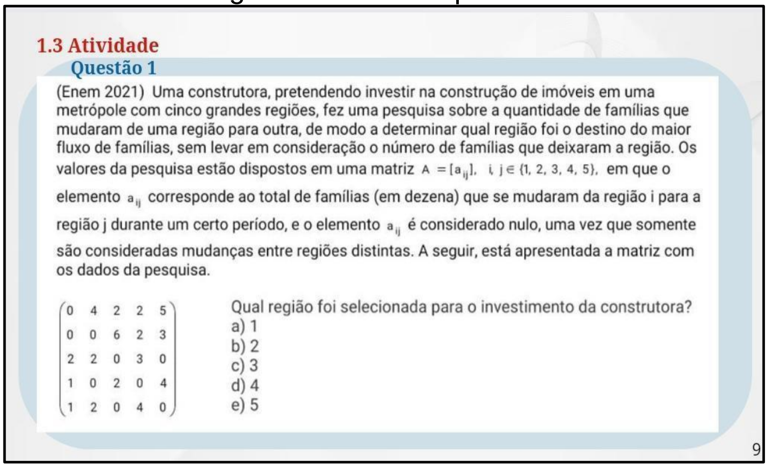
Figura 5 - Slide 8: representação genérica



Fonte: Elaboração própria.

Para encerrar, a primeira etapa da sequência didática, um dos professores em formação discute uma questão de vestibular (Figura 6).

Figura 6 - Slide 9: questões

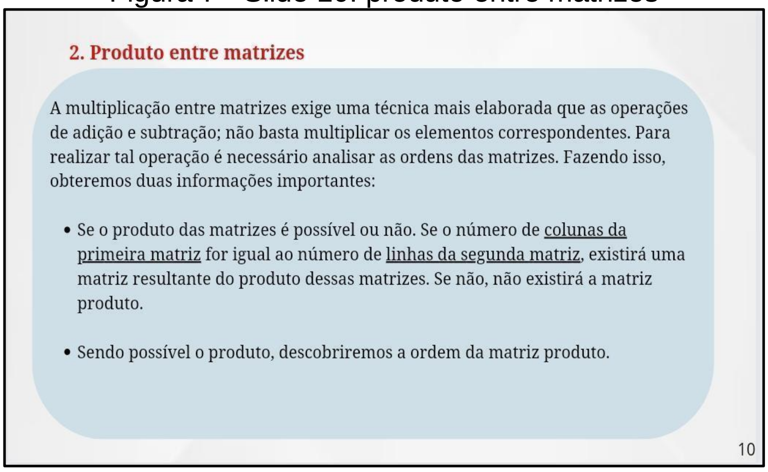


Fonte: Elaboração própria.

Nesta ocasião, instiga os alunos a analisar as colunas, pois elas indicam o número total de dezenas de famílias que se mudaram. Como o objetivo da questão é descobrir a região selecionada para o investimento, basta encontrar a coluna que obteve a maior pontuação, pois a mesma apontará a região escolhida pela construtora.

A segunda etapa da sequência didática inicia com a distribuição da Apostila II (Apêndice A-II). Inicialmente, apresenta o produto de matrizes e sua condição de existência (Figura 7).

Figura 7 - Slide 10: produto entre matrizes



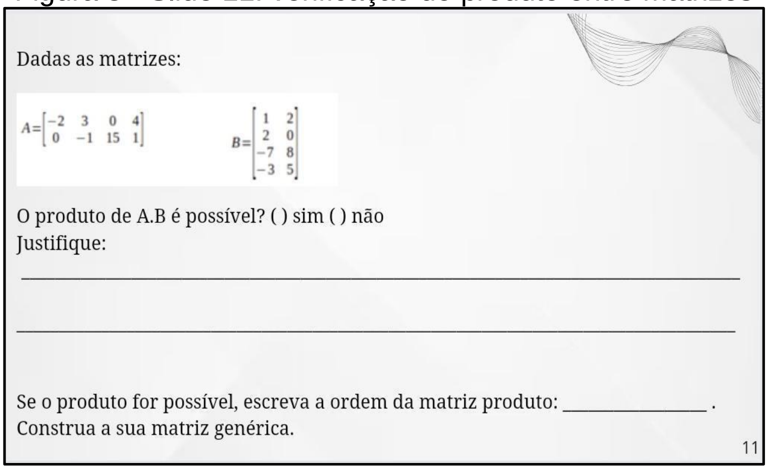
Fonte: Elaboração própria.

Explica-se que o produto de matrizes só é possível quando o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda matriz.

Em sequência, destaca-se que, sendo atendida a condição de existência para a efetivação de seu produto, pode-se obter outra informação relevante, que é a ordem da matriz resultante dessa multiplicação. Para isso, é preciso observar a linha da primeira matriz e a coluna da segunda matriz. Elas irão compor a ordem desta nova matriz. Ciente de sua ordem, é possível elaborar a matriz genérica. Consequentemente a mesma facilitará a multiplicação, que é realizada em seguida.

A fim de verificar o entendimento dessa explicação, referente à condição de existência do produto entre matrizes e a construção da matriz produto genérica, os alunos são convidados a refletirem sobre a possibilidade de existir ou não a matriz produto (Figura 8).

Figura 8 - Slide 11: verificação do produto entre matrizes

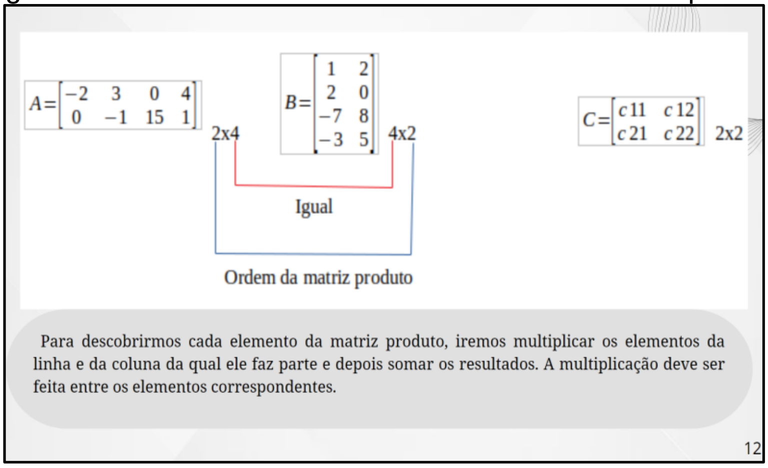


Fonte: Elaboração própria.

Após ouvir as respostas dadas verbalmente pelos alunos, um dos professores em formação preenche os espaços das respostas. Portanto, afirma que é possível o produto, pois o número de linhas da primeira matriz é igual ao número de colunas da segunda matriz. Também é possível obter a ordem da matriz produto, que é dada pelo número de linhas da primeira matriz, acompanhado pelo número de colunas da segunda matriz. Sendo assim, constrói-se a matriz genérica da matriz produto, que terá a ordem dois por dois, ou seja, uma matriz quadrada de ordem dois.

Sem demora, é exposto no Slide 12 (Figura 9), a resposta das perguntas feitas no slide anterior.

Figura 9 - Slide 12: elementos da matriz resultante do produto

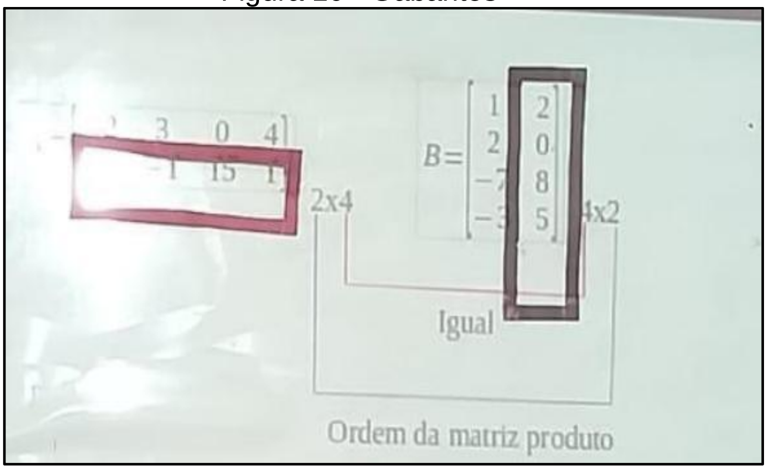


Fonte: Elaboração própria.

É destacado que para se realizar o produto entre matrizes, é preciso multiplicar os elementos correspondentes da linha e da coluna da qual os elementos genéricos fazem parte e depois somar os resultados.

Compreendido isso, um dos professores em formação, efetua o produto dos quatros elementos que pertencem a essa matriz dois por dois, com o auxílio dos gabaritos (Figura 10).

Figura 10 - Gabaritos



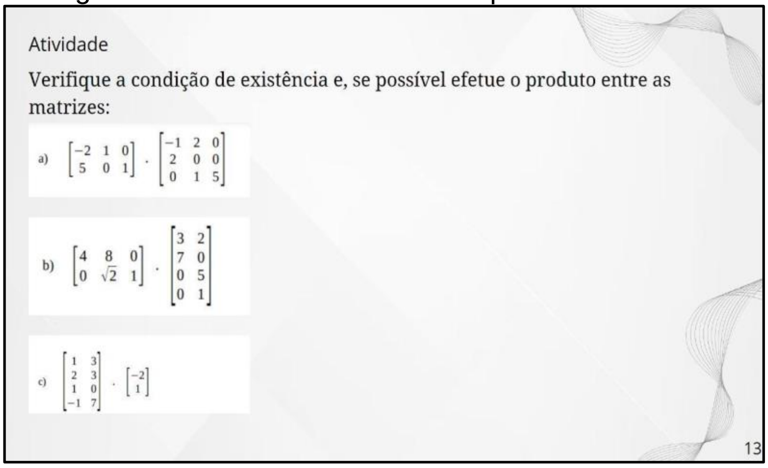
Fonte: Elaboração própria

Os mesmos foram confeccionados com o objetivo de enfatizar que linha e que coluna estão sendo multiplicadas, auxiliando assim, na visualização da multiplicação desempenhada.

Por fim, constrói-se a matriz produto juntamente com a turma.

Para dar continuidade a sequência, alguns minutos são dispensados aos alunos para a realização de uma atividade (Figura 11), segunda página da Apostila II.

Figura 11 - Slide 13: atividade de produto de matriz



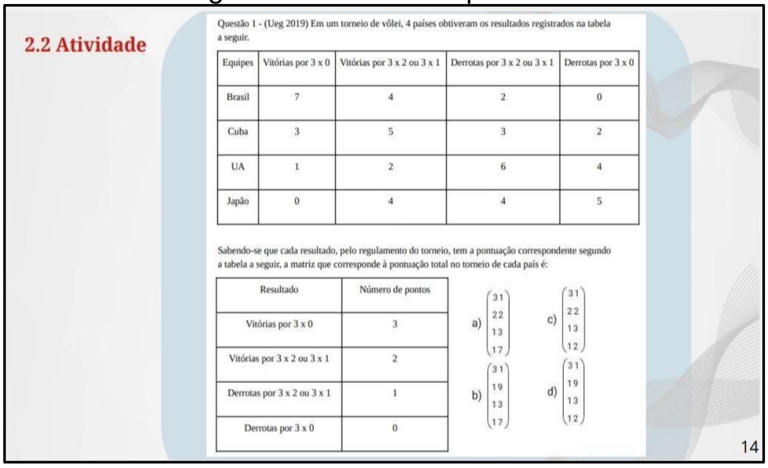
Fonte: Elaboração própria.

Três alternativas são expostas e em apenas uma (alternativa b), não é possível a realização do produto. Neste tempo, o professor em formação indaga os alunos sobre suas dúvidas. Freire (1995) compartilha do ideal de que para se ocorrer uma aprendizagem significativa é muito relevante o aluno aprender a perguntar. Com esse contato individual o aluno se sente mais à vontade para realizar esclarecimentos e dúvidas que talvez não faça em público.

Ao término do tempo estabelecido, o professor em formação convida um aluno a vir ao quadro, expor a todos como sucedeu a solução. Aqui, são feitas orientações e intervenções caso sejam necessárias. Após, soluciona juntamente com a turma, as duas questões restantes.

Em sequência, é exposto uma atividade de exame vestibular (Figura 12).

Figura 12 - Slide 14: questão 1



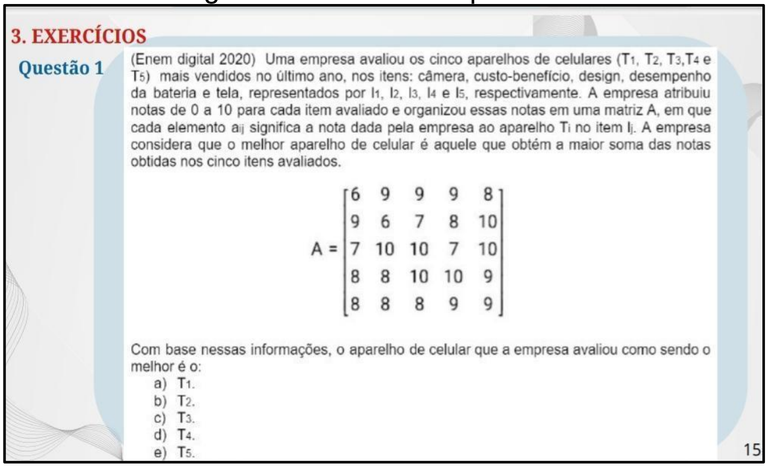
Fonte: Elaboração própria.

Neste caso, é exigido um nível de interpretação mais profundo. Deve-se salientar que a atividade expõe duas tabelas que podem ser representadas de maneira mais simplificada, ou seja, como matrizes. Para tal, destaca-se a extração da informação dada pelo enunciado da questão, que afirma que há uma relação de correspondência entre as matrizes (a multiplicação) haja vista, que as colunas da primeira matriz relacionam-se diretamente com as linhas da segunda matriz. Assim, para se obter a resposta correta, é imprescindível realizar o produto das matrizes apresentadas.

O professor em formação junto à turma, dialoga a efetivação deste produto, analisando a condição de existência, pontuando a ordem da matriz produto, elaborando sua matriz genérica e multiplicando linha e coluna de cada elemento correspondente, e como sabido, somando ao fim. Deste modo, chega-se a resposta final assinalando a alternativa b.

Agora, a terceira e última etapa se inicia, com a distribuição de uma lista de exercícios que possui duas questões de vestibulares. A primeira refere-se à primeira etapa da sequência (definição, elementos e matriz genérica) (Figura 13).

Figura 13 - Slide 15: questão 1



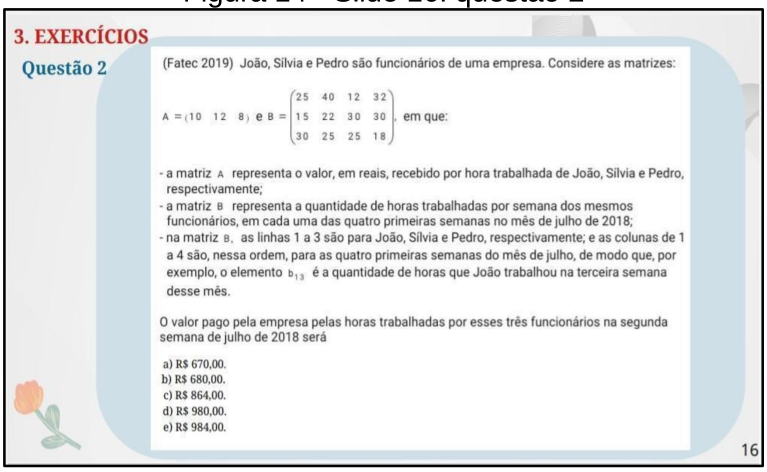
Fonte: Elaboração própria.

Nesta questão, um dos professores em formação destaca inicialmente, que os valores que estão nas linhas indicam os itens que estão sendo avaliados e os valores que estão nas colunas indicam os aparelhos. Para melhor visualização dos alunos, salienta-se isto, de maneira escrita na matriz. Sendo assim, é enfatizado que o objetivo da questão é descobrir o aparelho celular com maior nota total dos itens. Portanto, basta somar as linhas para ter a solução, descobrindo a alternativa c como correta.

Aqui, pode-se ponderar a importância de se interpretar os enunciados das questões e de se captar as informações que não podem passar despercebidas. Isso diminui as possibilidades de erro. Outro detalhe que pode ser evidenciado é o fato de que a questão analisada na primeira etapa, diferente desta, enfatiza as colunas.

Na segunda questão, referente ao produto entre matrizes (Figura 14), o professor em formação inicia pontuando que esta atividade apresenta uma tabela simplificada, uma matriz.

Figura 14 - Slide 16: questão 2



Fonte: Elaboração própria.

As informações decorridas no enunciado da questão, auxiliam na sua interpretação. A primeira destaca, que na primeira matriz as linhas indicam salário, e as colunas indicam os funcionários respectivos. A segunda, salienta em suas linhas os funcionários respectivos e as suas colunas destacam o total de horas trabalhadas nas quatro primeiras semanas no mês de junho 2018. A terceira, complementa a veracidade das interpretações dadas acima.

É válido destacar também, o que a questão solicita: saber o valor despendido pela empresa para se pagar esses três funcionários na segunda semana de junho de 2018. Para isso, é essencial realizar o produto entre essas matrizes, mais especificamente da primeira linha da primeira matriz com a segunda coluna da segunda matriz. Verificada a condição de existência para obtenção de tal resultado, basta multiplicar os elementos correspondentes e ao final somá-lo, chegando assim ao resultado de assinalando a alternativa c.

Alguns minutos são dispensados aos alunos para a resolução da questão. Um dos professores em formação circula pela turma, a fim de analisar o desempenho dos alunos mediante a atividade, efetuando poucas intervenções, a fim de instigá-los a buscarem por conta própria soluções e a consultarem o material disponibilizado junto com as questões anteriores.

Após o tempo estabelecido, professores em formação e alunos respondem às questões. O professor em formação intervém, caso alguma interpretação da questão esteja equivocada, ou efetuação de alguma manipulação tenha obtido alguma falha, fazendo assim complementações significativas sem desprezar os conhecimentos dos alunos. É válido ressaltar que o erro faz parte do processo de aprendizagem. Como cita Freire (1995), o erro é uma forma provisória de saber.

Ao final, são mostradas as referências em que a aula foi pautada.

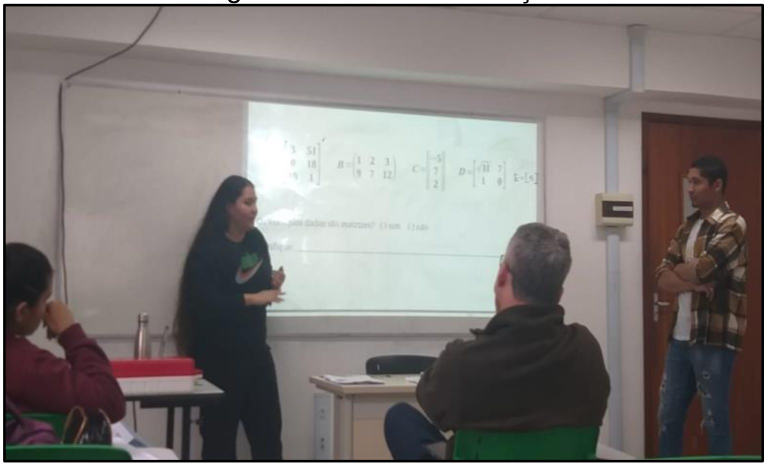
2.2.2 Aplicação da sequência didática na turma do LEAMAT II

No dia 29 de agosto de 2023, foi realizada a aplicação da sequência didática “Matriz: definição e produto” para a turma do LEAMAT II. Estavam presentes 11 licenciandos.

Grande parte da sequência ocorreu como o planejado acima, salvo algumas ponderações que serão destacadas aqui.

Indagados inicialmente sobre as matrizes, os licenciandos foram participativos e falaram algumas palavras chaves como: linha, colunas, tabela. Após, a definição foi formalizada e a atividade proposta no Slide 4 foi elaborada junto com os licenciandos, onde os mesmo após compreenderem a tarefa, responderam verbalmente (Figura 15).

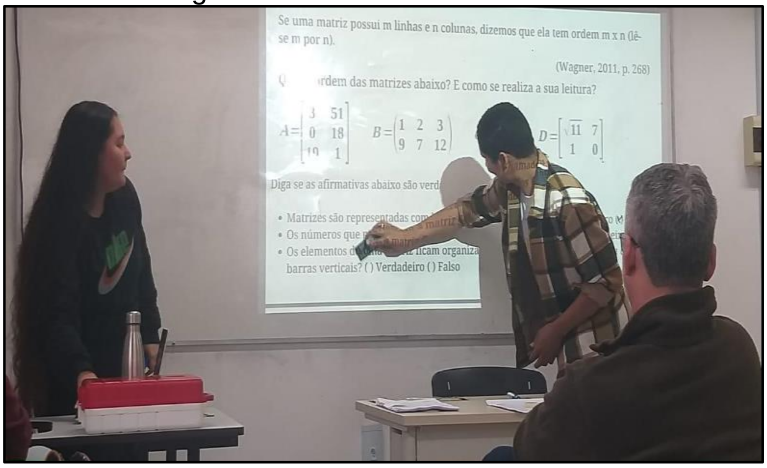
Figura 15 - Matriz: definição



Fonte: Protocolo de pesquisa.

A seguir, a segunda pergunta indagadora foi realizada. Desse modo, os licenciandos se propuseram a refletir sobre como é dada a leitura de uma matriz, verbalizando a solução de modo informal. Os professores em formação prontamente se dispuseram a registar de maneira oficial a leitura da matriz, que deve ressaltar a quantidade total de linhas e a quantidade total de colunas que possuem, lendo “m por n”, de modo genérico. Em seguida, assim como na primeira indagação, também resolveram juntos a atividade proposta, com a participação da turma (Figura 16).

Figura 16 - Leitura da uma matriz



Fonte: Protocolo de pesquisa.

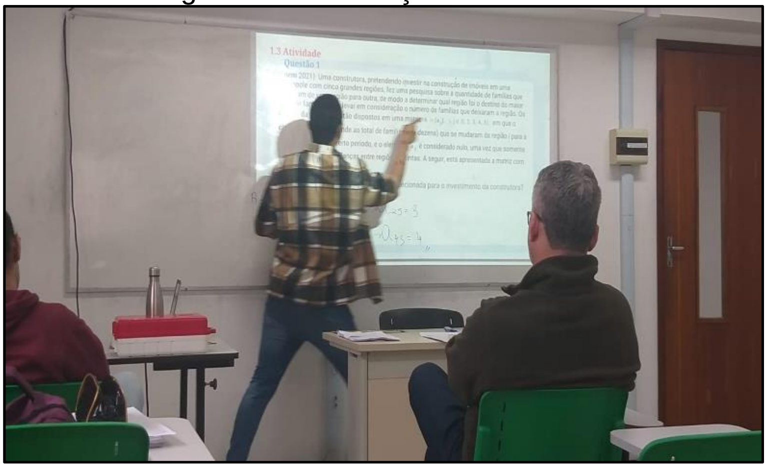
Para dar continuidade a sequência, explicou-se sobre matriz genérica, seus elementos e a simbologia a_{ij}. Adiante, os licenciandos realizaram o completamento da matriz genérica B, indicando os elementos em suas respectivas posições (Figura 17).

Figura 17 - Matriz genérica

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Após concluir a primeira etapa da sequência, um dos professores em formação abordou com os licenciandos uma questão de vestibular (Figura 18), levantando questionamentos aos quais os licenciandos não demonstraram ter dúvidas.

Figura 18 - Resolução da atividade

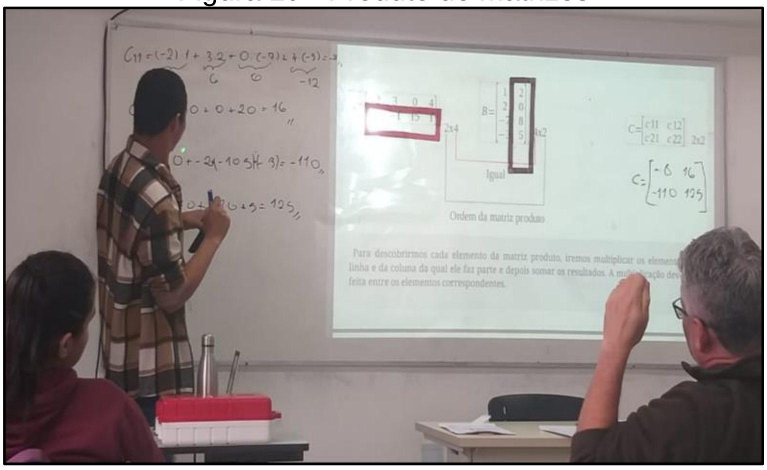


Fonte: Protocolo de pesquisa.

Finalizadas as explanações sobre definição de matriz, elementos e matriz genérica, os licenciandos acompanharam simultaneamente na apostila e no slide a introdução do novo tópico. Inicialmente, o professor em formação afirmou que entre as matrizes podem ser realizadas operações de adição, subtração e multiplicação.

Em seguida, iniciou-se a explicação sobre como é dada a multiplicação entre matrizes, e para isso utilizou-se um gabarito (Figura 19).

Figura 19 - Produto de matrizes



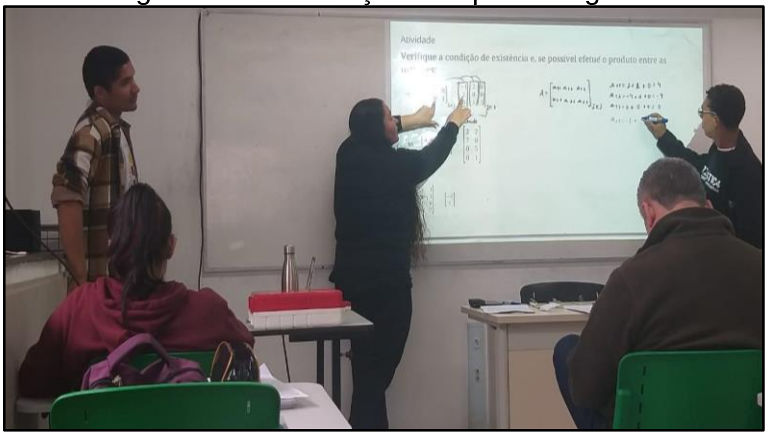
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Foi destacada, portanto, a condição de existência do produto de matrizes (o produto de matrizes só é possível quando o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda matriz), a ordem da matriz produto (número de linhas da primeira matriz e o número de colunas da segunda matriz), e suas manipulações aritméticas.

Mais adiante, foi pontuado de maneira sucinta que a multiplicação entre matrizes não admite a propriedade comutativa. Logo após, alguns minutos foram dispensados para realizar o Exercício 1 da Apostila II.

Ao término do tempo estabelecido, os professores em formação convidaram um aluno a vir ao quadro, expor a todos como sucedeu sua solução (Figura 20).

Figura 20 - Verificação de aprendizagem



Fonte: Elaboração própria.

Adiante, um dos professores em formação resolveu as duas alternativas restantes, com a turma. Dessa forma, a segunda etapa foi encerrada realizando junto com a turma uma questão de vestibular.

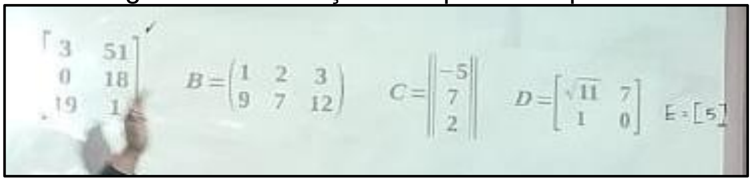
Os licenciandos concluíram as questões sem apresentar dúvidas.

A terceira etapa, que pretendia conceder aos licenciandos alguns minutos para tentarem resolver as duas questões propostas de vestibulares, não foi concretizada devido à falta de tempo.

Ao final da aula, os licenciandos e as professoras orientadoras fizeram considerações em relação à sequência didática, sobre o que deveria ser melhorado ou modificado. Seguem as sugestões:

- Corrigir a formatação das apostilas e dos slides (número de página, maior espaço para escrever o nome no cabeçario e pontuação);
- Elaborar os slides mantendo a mesma arrumação dos dados das apostilas entregues;
- Inserir na Apostila I, o mesmo exemplo colocado no quadro da matriz E (Figura 21);

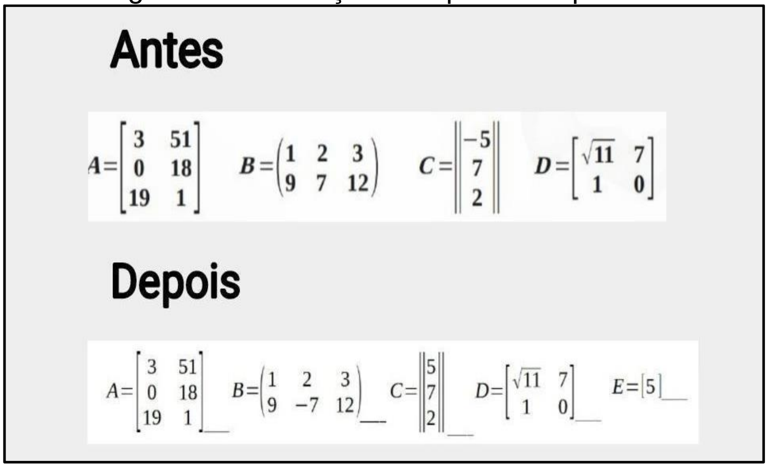
Figura 21 - Alteração na Apostila I - parte I



Fonte: Elaboração própria.

- Incluir nas matrizes (Apostila I), um espaço reservado para escrever as ordens; (Figura 22);

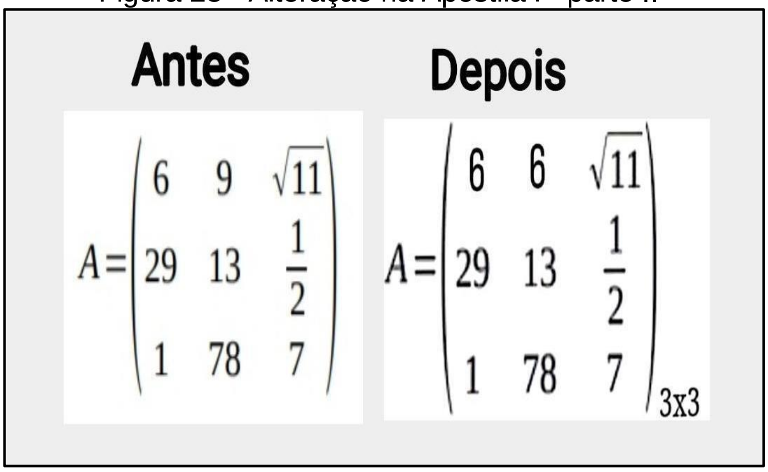
Figura 22 - Alteração na Apostila I - parte II



Fonte: Elaboração própria.

- Incluir um número igual na matriz A, para enfatizar que o que torna único um elemento na matriz é a sua posição referente a linha e a coluna em que se encontram (Figura 23);

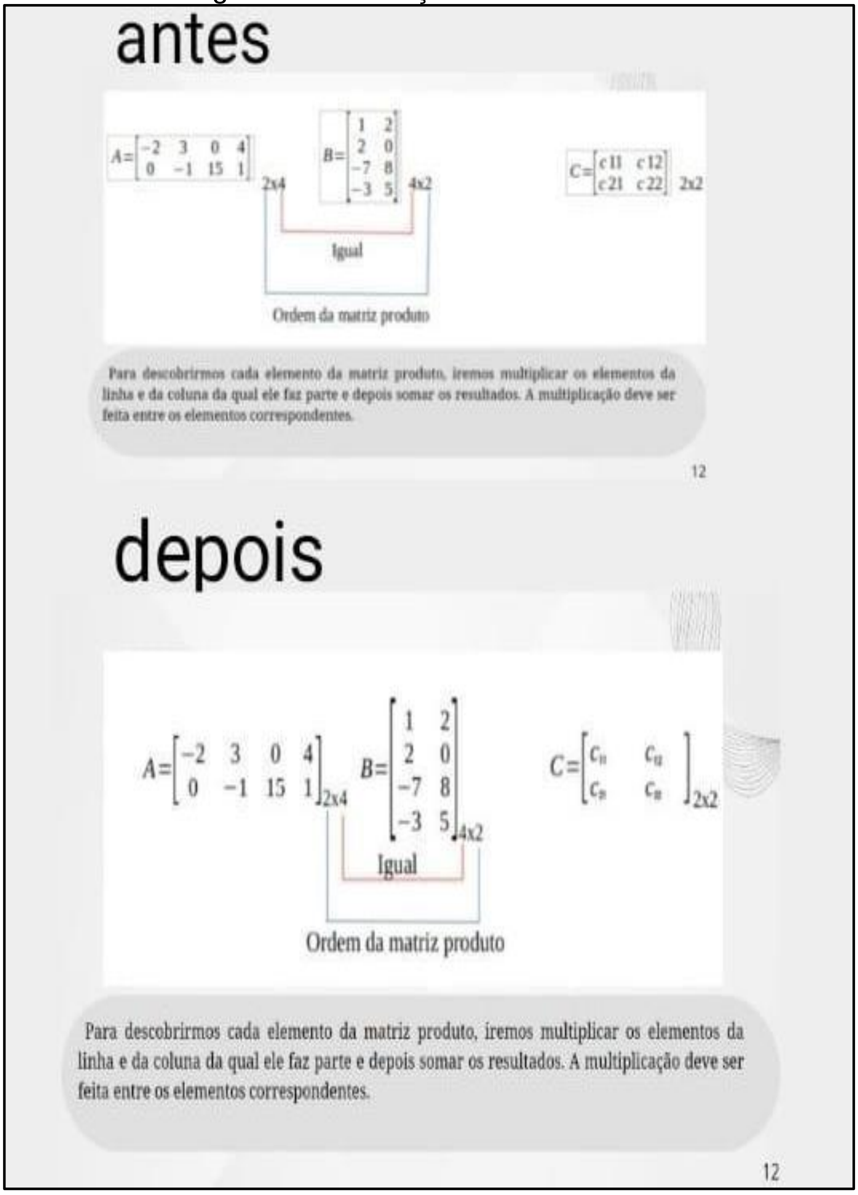
Figura 23 - Alteração na Apostila I - parte II



Fonte: Elaboração própria.

- Não utilizar a palavra “coordenadas” para expressar os valores de i e de j em a_{ij};
- Corrigir a fala de um dos professores em formação: “Três famílias”. O ideal seria enfatizar que são três dezenas de famílias;
- Escrever a justificativa completa, para pontuar a definição de matriz, e o produto entre matrizes. As mesmas foram elaboradas de maneira incompleta e não atingiram o objetivo central. Em aula, a primeira justificativa foi escrita no quadro “Todos os exemplos atendem/ obedecem a definição de Matriz ". O ideal seria complementar essa justificativa, ficando: Todos os exemplos atendem a definição de matriz pois são uma tabela de números formada por m linhas e n colunas, sendo m maior ou igual a um e n maior ou igual a 1;
- Na segunda justificativa foi escrito no quadro: “Obedecem a condição de existência da matriz produto”, a ideal seria: Obedecem a condição de existência da matriz produto, pois possui o número de colunas da primeira matriz igual ao número de linhas da segunda matriz;
- Aprimorar a caligrafia no quadro;
- Ajustar o tamanho dos índices da matriz C no exemplo dado no Slide 12 (Figura 24);

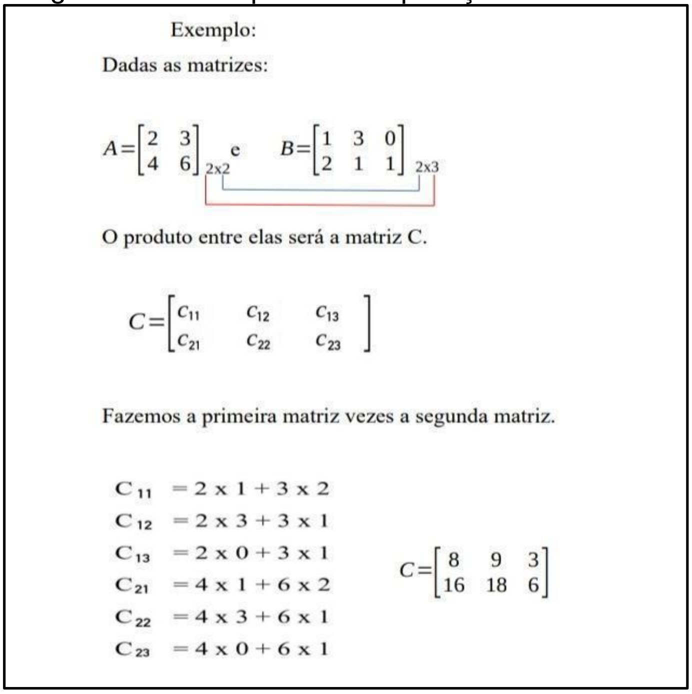
Figura 24 - Alteração nos índices



Fonte: Elaboração própria.

- Incluir um exemplo pronto de multiplicação entre matrizes na Apostila II, ou seja, o processo de resolução de multiplicação entre matrizes, passo a passo (Figura 25);

Figura 25 - Exemplo de multiplicação de matrizes



Exemplo:

Dadas as matrizes:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}_{2x2} \text{ e } B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2x3}$$

O produto entre elas será a matriz C.

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

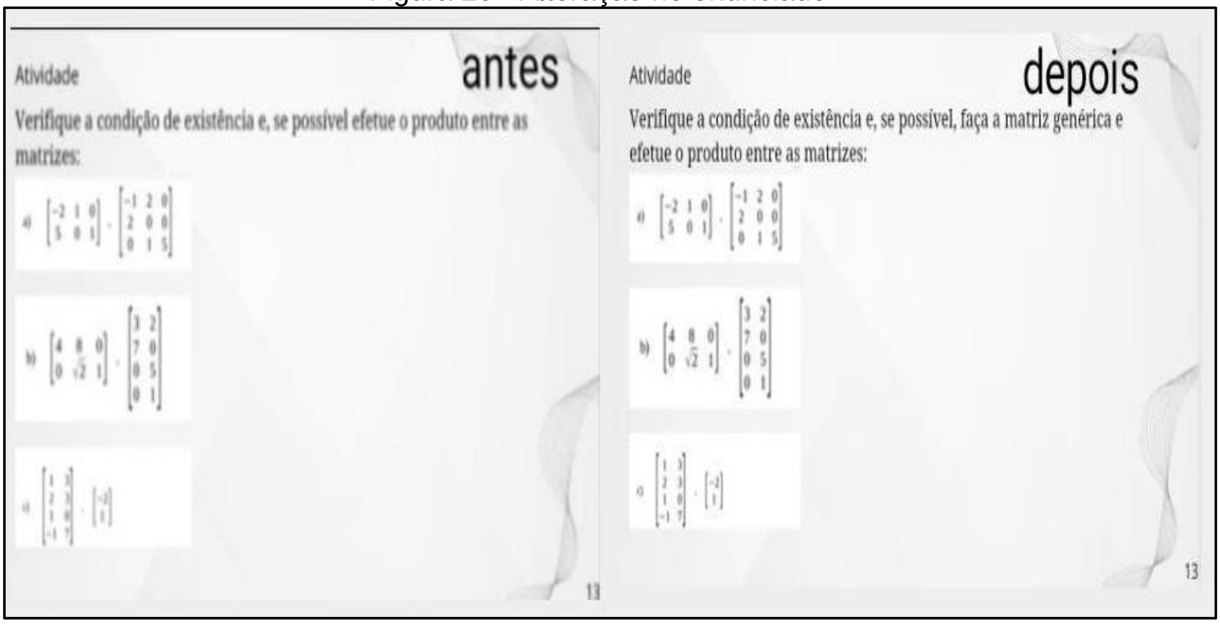
Fazemos a primeira matriz vezes a segunda matriz.

$$\begin{aligned} C_{11} &= 2 \times 1 + 3 \times 2 \\ C_{12} &= 2 \times 3 + 3 \times 1 \\ C_{13} &= 2 \times 0 + 3 \times 1 \\ C_{21} &= 4 \times 1 + 6 \times 2 \\ C_{22} &= 4 \times 3 + 6 \times 1 \\ C_{23} &= 4 \times 0 + 6 \times 1 \end{aligned} \qquad C=\begin{bmatrix} 8 & 9 & 3 \\ 16 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

Fonte: Elaboração própria.

- Incluir no enunciado da questão sobre produto entre matrizes que é para indicar a matriz genérica antes de se efetuar os produtos (Figura 26);

Figura 26 - Alteração no enunciado

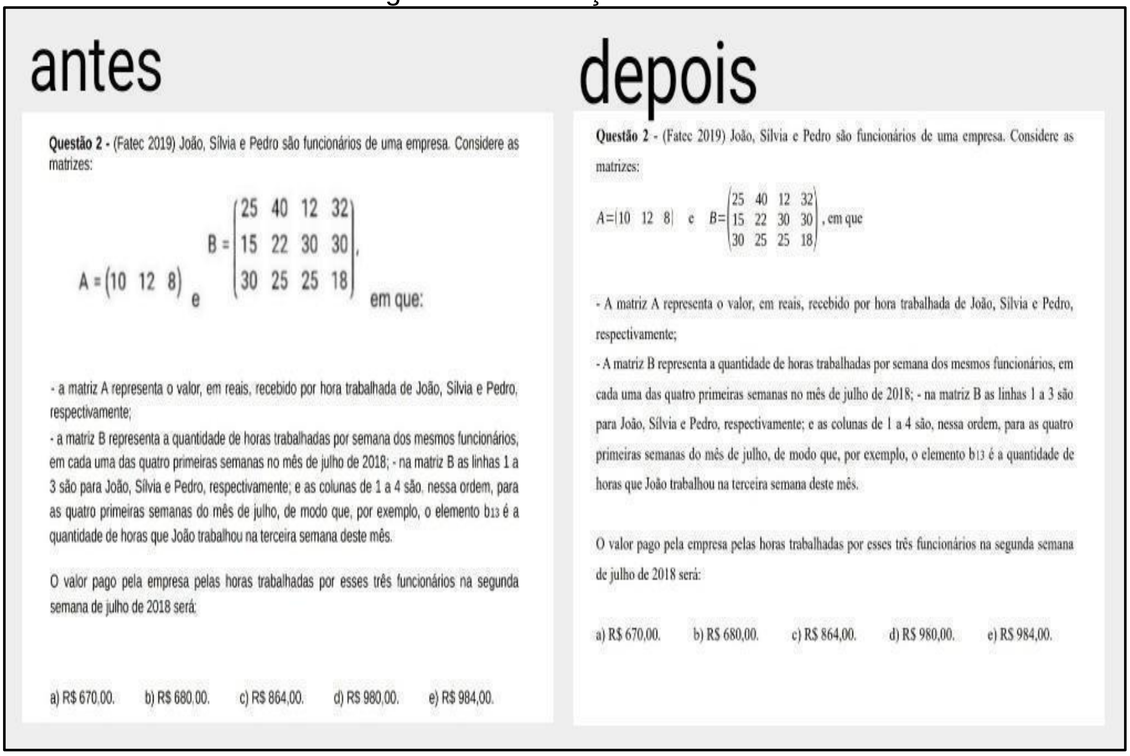


Fonte: Elaboração própria.

- Tecer comentários sobre a presença das matrizes na mídia, e que a mesma é uma tabela simplificada;

- Na Questão 1 da Apostila II, no momento da explicação, escrever as tabelas como matrizes na resolução da questão;
- Não corrigir de maneira precipitada o aluno que se dispôs a solucionar a questão no quadro;
- Corrigir o tamanho desproporcional da matriz B, da lista de exercícios (Figura 27);

Figura 27 - Alteração nas matrizes



antes

Questão 2 - (Fatec 2019) João, Sílvia e Pedro são funcionários de uma empresa. Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 8 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 25 & 40 & 12 & 32 \\ 15 & 22 & 30 & 30 \\ 30 & 25 & 25 & 18 \end{pmatrix}, \text{ em que:}$$

- a matriz A representa o valor, em reais, recebido por hora trabalhada de João, Sílvia e Pedro, respectivamente;
- a matriz B representa a quantidade de horas trabalhadas por semana dos mesmos funcionários, em cada uma das quatro primeiras semanas no mês de julho de 2018; - na matriz B as linhas 1 a 3 são para João, Sílvia e Pedro, respectivamente; e as colunas de 1 a 4 são, nessa ordem, para as quatro primeiras semanas do mês de julho, de modo que, por exemplo, o elemento b_{13} é a quantidade de horas que João trabalhou na terceira semana deste mês.

O valor pago pela empresa pelas horas trabalhadas por esses três funcionários na segunda semana de julho de 2018 será:

a) R$ 670,00. b) R$ 680,00. c) R$ 864,00. d) R$ 980,00. e) R$ 984,00.

depois

Questão 2 - (Fatec 2019) João, Sílvia e Pedro são funcionários de uma empresa. Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 8 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 25 & 40 & 12 & 32 \\ 15 & 22 & 30 & 30 \\ 30 & 25 & 25 & 18 \end{pmatrix}, \text{ em que}$$

- A matriz A representa o valor, em reais, recebido por hora trabalhada de João, Sílvia e Pedro, respectivamente;
- A matriz B representa a quantidade de horas trabalhadas por semana dos mesmos funcionários, em cada uma das quatro primeiras semanas no mês de julho de 2018; - na matriz B as linhas 1 a 3 são para João, Sílvia e Pedro, respectivamente; e as colunas de 1 a 4 são, nessa ordem, para as quatro primeiras semanas do mês de julho, de modo que, por exemplo, o elemento b_{13} é a quantidade de horas que João trabalhou na terceira semana deste mês.

O valor pago pela empresa pelas horas trabalhadas por esses três funcionários na segunda semana de julho de 2018 será:

a) R$ 670,00. b) R$ 680,00. c) R$ 864,00. d) R$ 980,00. e) R$ 984,00.

Fonte: Elaboração própria.

- Pontuar de maneira mais significativa a propriedade comutativa quando explicar o produto de matrizes (Apostila II, página 1);
- Incluir a autoria do texto da Apostila II (Figura 28);

Figura 28 - Inclusão da autoria

Antes:

1. Produto de matrizes

A multiplicação entre matrizes exige uma técnica mais elaborada que as operações de adição e subtração; não basta multiplicar os elementos correspondentes. Para realizar tal operação é necessário analisar as ordens das matrizes. Fazendo isso, obteremos duas informações importantes:

- Se o produto das matrizes é possível ou não. Se o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda matriz, existirá uma matriz resultante do produto dessas matrizes. Se não, não existirá a matriz produto.
- Sendo possível o produto, descobriremos a ordem da matriz produto.

A ordem da matriz produto será igual ao número de linhas da primeira matriz, pelo número de colunas da segunda matriz.

Depois:

1. Produto de matrizes

A multiplicação entre matrizes exige uma técnica mais elaborada que as operações de adição e subtração; não basta multiplicar os elementos correspondentes. Para realizar tal operação é necessário analisar as ordens das matrizes. Fazendo isso, obteremos duas informações importantes:

- Se o produto das matrizes é possível ou não. Se o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda matriz, existirá uma matriz resultante do produto dessas matrizes. Se não, não existirá a matriz produto.
- Sendo possível o produto, descobriremos a ordem da matriz produto.
  A ordem da matriz produto será igual ao número de linhas da primeira matriz, pelo número de colunas da segunda matriz. (Wagner, 2011).

Fonte: Elaboração própria.

- Disponibilizar um maior tempo para a realização da aplicação;
- Corrigir as referências segunda as normas da ABNT (Apostilas I e II);

Em suma, os alunos gostaram de participar da sequência didática, e elogiaram a explicação clara, que ocorreu de maneira participativa e dialogada. Também aprovaram o uso do gabarito, a atenção dispensada nas carteiras individualmente, e a existência de um aumento gradativo em relação ao nível de dificuldade das questões apresentadas.

3 RELATÓRIO DO LEAMAT III

3.1 Atividades desenvolvidas

Iniciou-se no dia 9 de novembro de 2023 as atividades do LEAMAT III. Neste dia, a professora orientadora Ana Paula Rangel de Andrade, expôs:

- O cronograma do componente curricular;
- O plano de ensino;
- As observações sobre os relatos presentes no relatório do LEAMAT II.

Em relação ao cronograma e ao plano de ensino, o primeiro aspecto a ser considerado foi o fato do componente curricular fazer parte de um semestre diferenciado e desafiador, pois possui uma grande quantidade de feriados, férias coletivas, recesso de carnaval, e não tem um calendário letivo alinhado com a escola da Educação Básica. Sendo assim, foi confirmada a impossibilidade de se realizar as experimentações das sequências didáticas no ano de 2023, pois as mesmas necessitam de ajustes, aprimoramento e da inserção de melhorias sugeridas no semestre anterior.

Diante de tal cenário, a professora orientadora propôs aos licenciandos a aplicação, dentro do possível, nas turmas de Ensino Médio de uma Instituição Federal de Educação, devido ao uso do mesmo calendário e portanto, de uma maior facilidade de agendamento e aplicação das sequências didáticas. No caso deste trabalho, haverá a necessidade de se repensar o público-alvo.

Em síntese, em relação ao cronograma foi abordado que, em novembro e dezembro de 2023 seriam executados o aprimoramento da sequência didática: em janeiro de 2024 ocorreriam os ensaios; em fevereiro as experimentações e; em março as apresentações sobre as vivências finais referentes ao LEAMAT I, II, e III, com ênfase na exposição dos relatos da aplicação na Educação Básica (Quadro 2).

Quadro 2 - Cronograma

<table>
<tr><th colspan="3">Cronograma - LEAMAT III</th></tr>
<tr><th>Mês</th><th colspan="2">Tarefas</th></tr>
<tr><td>Novembro e Dezembro</td><td>Ajustes da sequência didática</td><td rowspan="4">Escrita do relatório</td></tr>
<tr><td>Janeiro</td><td>Ensaios</td></tr>
<tr><td>Fevereiro</td><td>Experimentações</td></tr>
<tr><td>Março</td><td>Apresentação sobre todo o trabalho realizado</td></tr>
</table>

Fonte: Elaboração própria.

O compartilhamento dessa experimentação com os demais licenciados, será muito enriquecedor, haja vista que, os alunos que cursam o LEAMAT lll não estarão presentes na aplicação dos trabalhos. Também é válido citar que a escrita deste relatório ocorreu simultaneamente a essas atividades, documentando todas as etapas.

A professora também ressalta a importância de se ter uma boa estratégia de trabalho neste LEAMAT III, dentro e fora das aulas. Cada integrante do grupo deve participar de forma responsável, e saber gerenciar o tempo de trabalho principalmente no tempo de aula presencial, junto com a professora orientadora.

Com relação às observações referente aos relatos presentes no relatório do LEAMAT II, citou-se a necessidade de se adicionar as sugestões de melhoria da sequência didática que passaram despercebidas pelos licenciandos, no LEAMAT II. Posto isso, a professora orientadora, enviou um compilado com suas observações por e-mail. Também foram compartilhados alguns comentários com sugestões sobre o aprimoramento na escrita do relatório.

Por fim, ficou acordado a necessidade de se realizar tais aprimoramentos para dar entrada na próxima etapa, a de ajustes da sequência didática. Sendo assim, foi deixado como tarefa o ajuste sobre a organização dos apêndices, e a realização de uma melhor organização nos comentários finais do relatório do LEAMAT II.

O dia 16 de novembro de 2023, foi dedicado ao aperfeiçoamento dos registros elaborados durante o LEAMAT II. Ajustes em relação a sua formatação, erros gramaticais, e relatos incompletos ou em excesso foram feitos com o auxílio da professora orientadora, tendo por intuito, torná-lo de mais fácil compreensão. Essa atividade antecedeu aos ajustes da sequência didática, que ficou programada para a semana seguinte.

Do dia 23 de novembro ao dia 21 de dezembro de 2023 os acertos da nova sequência didática foram elaborados, a partir das sugestões encaminhadas na aplicação anterior.

No dia 1 de fevereiro de 2024, ajustes em relação ao cronograma foram efetuados. Sua reformulação, se apresentou da seguinte forma:

Quadro 3 - Cronograma 2

<table>
<tr><th colspan="4">Cronograma 2 - LEAMAT III</th></tr>
<tr><th>Mês</th><th>Datas</th><th colspan="2">Tarefas</th></tr>
<tr><td>Novembro, Dezembro e Janeiro</td><td>02/11/2023 a 31/01/2024</td><td>Ajustes da sequência didática</td><td rowspan="3">Escrita do Relatório</td></tr>
<tr><td>Fevereiro</td><td>26/02/2024 e 28/02/2024</td><td>Ensaios</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Março</td><td>09/03/2024</td><td>Aplicação da sequência didática na turma da Educação Básica</td></tr>
<tr><td>04/04/2024</td><td colspan="2">Conclusão da escrita do Relatório e avaliação final com as orientadoras</td></tr>
</table>

Fonte: Elaboração Própria.

Portanto, deste dia em diante, as aulas foram destinadas ao cumprimento dessas novas diretrizes.

3.2 Elaboração da sequência didática

Nesta seção, será detalhada a versão final da sequência didática “Definição, elementos e produto de matrizes: aplicações em questões de vestibular” que será aplicada em uma turma da Educação Básica.

Destaca-se que a aplicação não ocorreu em uma turma do pré-vestibular, conforme planejado na sequência didática elaborada, devido ao fato de que as aulas das turmas dessa Modalidade estavam previstas para março. Diante desse cenário, a atividade foi adaptada para 3° série no Ensino Médio com dependência em Matemática na 2° série do Ensino Médio, que já haviam estudado este conteúdo de matrizes.

3.2.1 Versão final da sequência didática

A sequência didática exposta a seguir, destina-se a estudantes que frequentam cursos de pré-vestibulares sociais. É importante ressaltar essa informação para destacar sua valiosa contribuição na seleção do tema e validar as escolhas das questões incluídas nessa sequência didática.

Abaixo, encontra-se o quadro que explica sua divisão em três etapas. Na primeira, utilizou-se a Apostila I (Apêndice B-I); na segunda, a Apostila II (Apêndice B-II); e na terceira, a lista de exercícios (Apêndice B-III). Durante todo o percurso didático, também foram empregados slides criados no Canva (Apêndice B-IV).

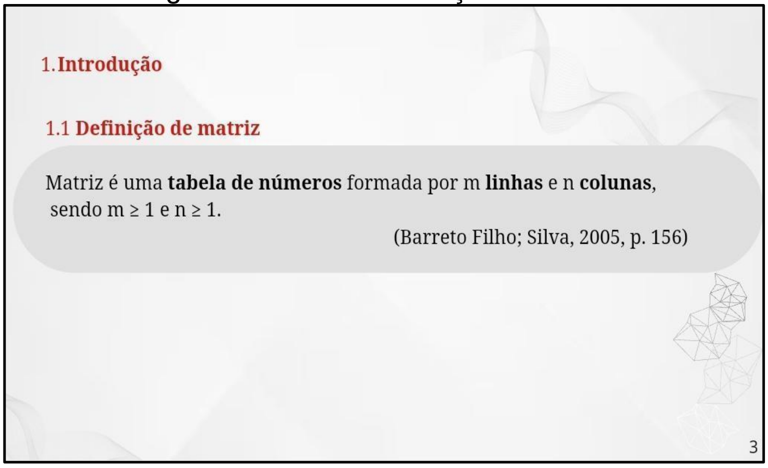
Quadro 1 - Etapas, títulos e objetivos

Etapas	Títulos	Objetivos
1	**Definição e elementos de uma matriz**	Definir uma matriz, apresentar os seus elementos e sua representação genérica.
	Exercício - I	Aplicar os conhecimentos da parte teórica em uma questão contextualizada, de vestibular.
2	**Produto de matrizes**	Apresentar a operação de produto entres matrizes, enfatizando sua condição de existência e seu desenvolvimento aritmético.
	Exercício - II	Aplicar os conhecimentos da parte teórica em uma questão contextualizada, de vestibular.
3	**Lista de exercícios**	Aplicar os conhecimentos das duas etapas anteriores em questões contextualizadas, de vestibulares.

Fonte: Elaboração própria.

A sequência didática inicia com a distribuição da Apostila I (Apêndice B-I). De forma dialogada, visando promover a participação dos alunos e reconhecer seus conhecimentos prévios, um dos professores em formação os questiona sobre o que entendem por matriz. Após ouvir seus relatos, o professor define matriz (Figura 1), haja vista, que cada indivíduo compreende este conceito de forma diferente.

Figura 1 - Slide 3: definição de matriz

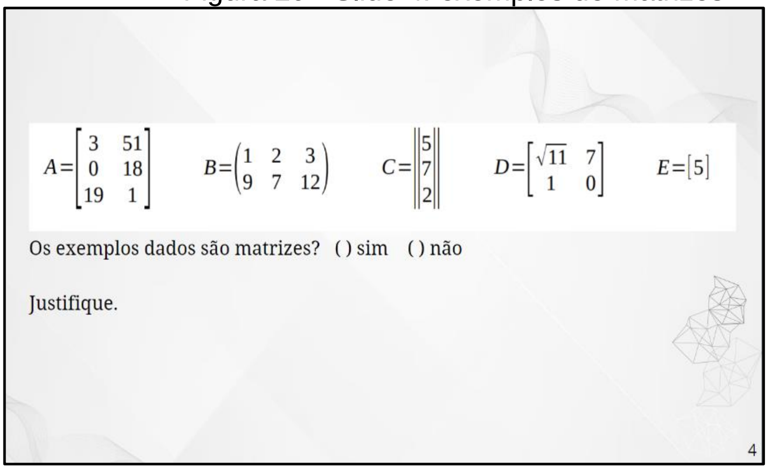


Fonte: Elaboração própria.

Além disso, é valioso ressaltar a importância da definição na Matemática, pois a mesma faz com que todos tenham um ponto de partida comum, e bem fundamentado, desmistificando assim as definições como algo a ser decorado, mas sim uma ferramenta importante e significativa. Segundo Rodrigues (2015), “Dar uma aula, é escolher qual definição será desenvolvida”.

Com o intuito de verificar o entendimento da definição abordada, um dos professores em formação propõe a questão do Slide 4 (Figura 29).

Figura 29 - Slide 4: exemplos de matrizes



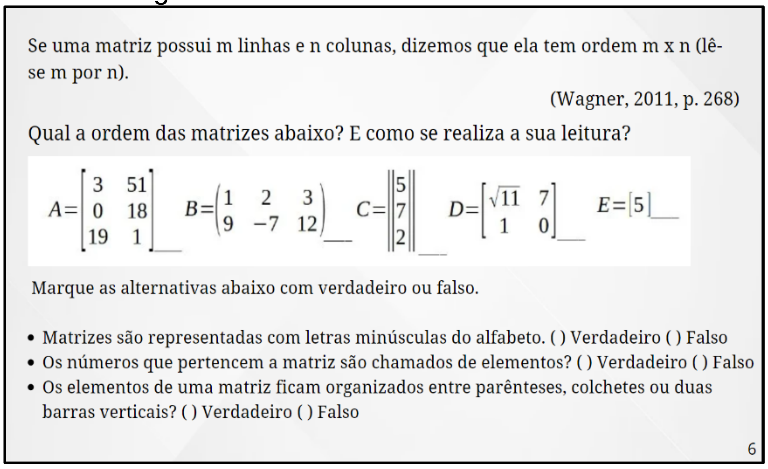
Fonte: Elaboração própria.

A resposta certa só é colocada no quadro, após os alunos responderem, a fim de instigar a participação e o engajamento de todos. Como bem nos assegura Zabala (1998), as relações interativas no ambiente escolar oportunizam uma atividade mental auto estruturante.

Adiante, realiza-se mais algumas indagações, em relação à ordem e à leitura das matrizes. De maneira análoga, escuta-se atentamente as respostas dos alunos.

Após este momento, explica-se como executar de forma adequada a leitura das matrizes, e é feito o preenchimento das ordens das matrizes junto com os alunos (Figura 30).

Figura 30 - Slide 6: leitura das matrizes



Fonte: Elaboração própria.

Seguidamente, discute-se se as alternativas apresentadas são verdadeiras ou falsas. Sendo assim, é necessário instigar os alunos a observarem:

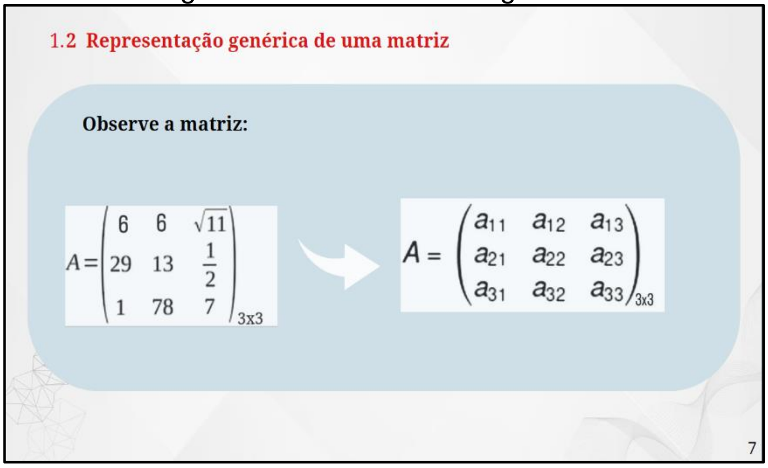
a) que nos exemplos dados as matrizes, são representadas por letras maiúsculas do alfabeto;

b) que as matrizes podem ser simbolizadas com parênteses, colchetes ou barra duplas verticais; e

c) que os números pertencentes a matriz são nomeados de elementos. Durante a aula, os professores em formação conversam sobre as dúvidas e esclarecem pontos que ainda não estão compreendidos.

Finalizadas as explanações, inicia-se os apontamentos sobre sua representação genérica (Figura 31).

Figura 31 - Slide 7: matriz genérica

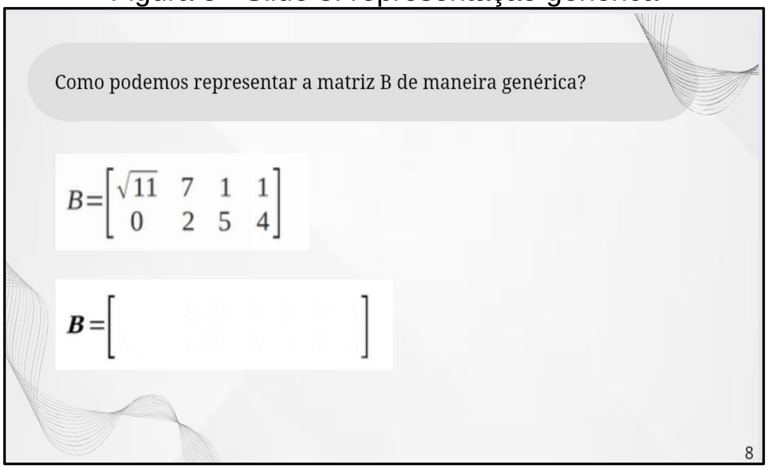


Fonte: Elaboração própria.

Com o propósito de estar alinhada ao posicionamento defendido pelo PCN (Brasil, 1998, p.60) que incentiva: "O desenvolvimento do pensamento algébrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem", é indispensável que se apresente a simbologia a_{ij}, reforçando assim, que todos os números pertencentes a matriz são considerados elementos e podem ser representados de maneira genérica com uma letra minúscula do alfabeto acompanhada de dois valores. Esses valores tornam cada elemento único. Eles indicam sua posição na matriz em relação a linha e coluna que se encontram, respectivamente.

Com a finalidade de verificar a compreensão do aluno, em relação a representação genérica de uma matriz, os mesmos, de forma participativa, executam o preenchimento da matriz genérica B (Figura 5).

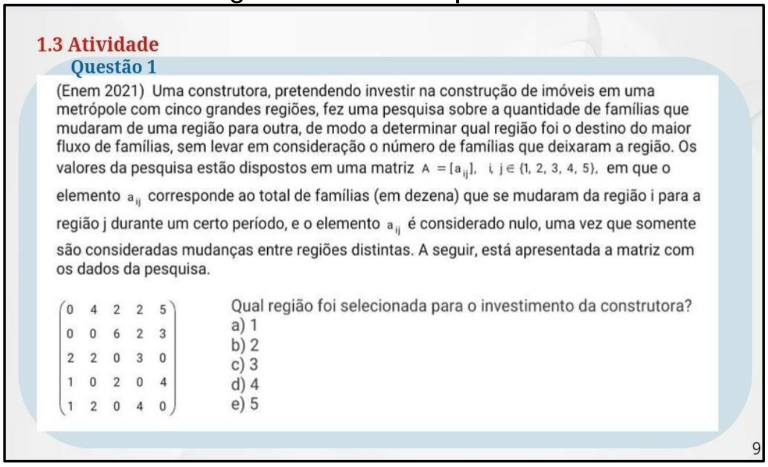
Figura 5 - Slide 8: representação genérica



Fonte: Elaboração própria.

Para encerrar, a primeira etapa da sequência didática, um dos professores em formação discute uma questão de vestibular (Figura 6).

Figura 6 - Slide 9: questões

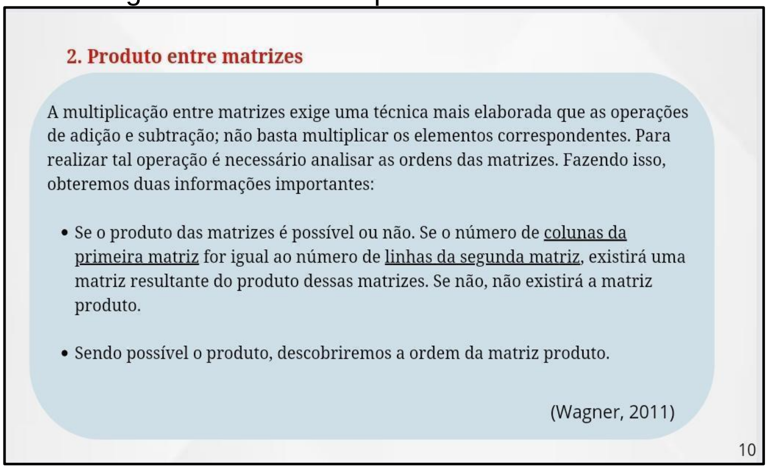


Fonte: Elaboração própria.

Nesta ocasião, instiga os alunos a analisar as colunas, pois elas indicam o número total de dezenas de famílias que se mudaram. Como o objetivo da questão é descobrir a região selecionada para o investimento, basta encontrar a coluna que obteve a maior pontuação, pois a mesma apontará a região escolhida pela construtora.

A segunda etapa da sequência didática inicia com a distribuição da Apostila II (Apêndice B-II). Inicialmente, apresenta o produto de matrizes e sua condição de existência (Figura 32).

Figura 32 - Slide 10: produto entre matrizes



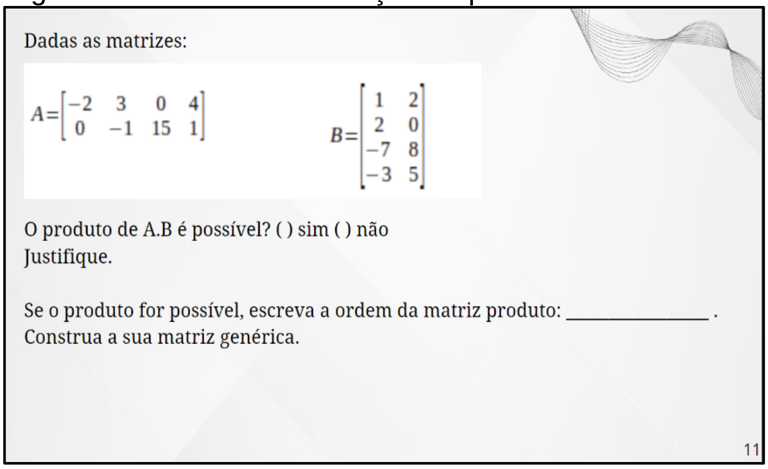
Fonte: Elaboração própria.

Explica-se que o produto de matrizes só é possível quando o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda matriz.

Em sequência, destaca-se que, sendo atendida a condição de existência para a efetivação de seu produto, pode-se obter outra informação relevante, que é a ordem da matriz resultante dessa multiplicação. Para isso, é preciso observar a linha da primeira matriz e a coluna da segunda matriz. Elas irão compor a ordem desta nova matriz. Ciente de sua ordem, é possível elaborar a matriz genérica. Consequentemente a mesma facilitará a multiplicação, que é realizada em seguida.

A fim de verificar o entendimento dessa explicação, referente à condição de existência do produto entre matrizes e a construção da matriz produto genérica, os alunos são convidados a refletirem sobre a possibilidade de existir ou não a matriz produto (Figura 33).

Figura 33 - Slide 11: verificação do produto entre matrizes

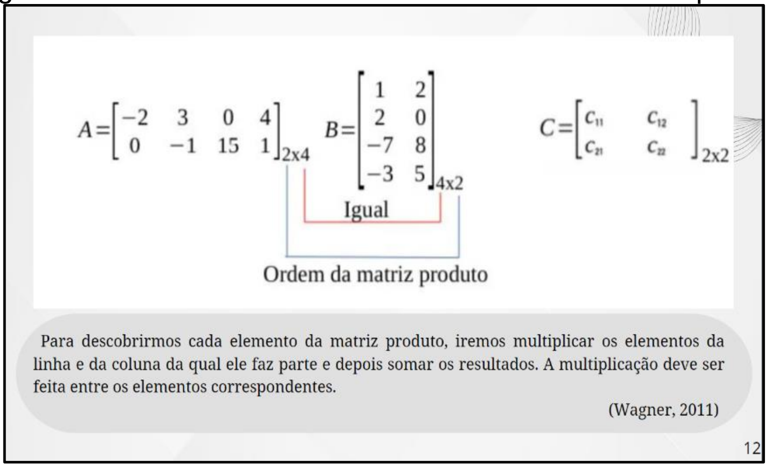


Fonte: Elaboração própria.

Após ouvir as respostas dadas verbalmente pelos alunos, um dos professores em formação preenche os espaços das respostas. Portanto, afirma que é possível o produto, pois o número de linhas da primeira matriz é igual ao número de colunas da segunda matriz. Também é possível obter a ordem da matriz produto, que é dada pelo número de linhas da primeira matriz, acompanhado pelo número de colunas da segunda matriz. Sendo assim, constrói-se a matriz genérica da matriz produto, que terá a ordem dois por dois, ou seja, uma matriz quadrada de ordem dois.

Sem demora, é exposto no Slide 12 (Figura 34), a resposta das perguntas feitas no slide anterior.

Figura 34 - Slide 12: elementos da matriz resultante do produto

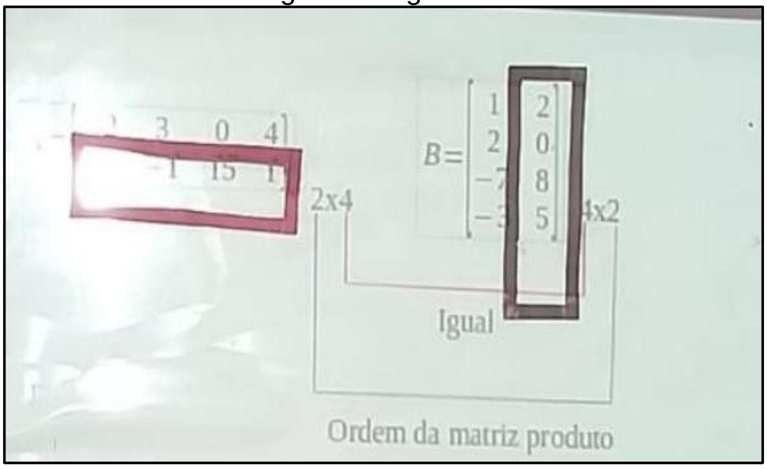


Fonte: Elaboração própria.

E é destacado que para se realizar o produto entre matrizes, é preciso multiplicar os elementos correspondentes da linha e da coluna da qual os elementos genéricos fazem parte e depois somar os resultados.

Compreendido isso, um dos professores em formação, efetua o produto dos quatros elementos que pertencem a essa matriz dois por dois, com o auxílio dos gabaritos (Figura 10).

Figura 10 - gabarito



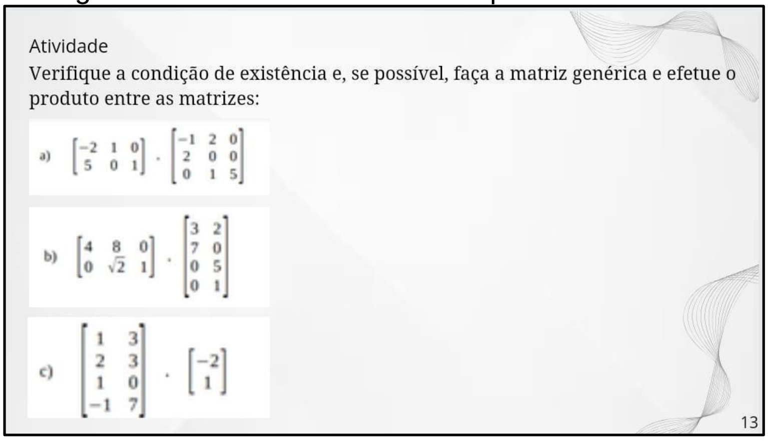
Fonte: Elaboração própria

Os mesmos foram confeccionados com o objetivo de enfatizar que linha e que coluna estão sendo multiplicadas, auxiliando assim, na visualização da multiplicação desempenhada.

Por fim, constrói-se a matriz produto juntamente com a turma.

Para dar continuidade a sequência, alguns minutos são dispensados aos alunos para a realização de uma atividade (Figura 35), segunda página da Apostila II.

Figura 35 - Slide 13: atividade de produto de matriz



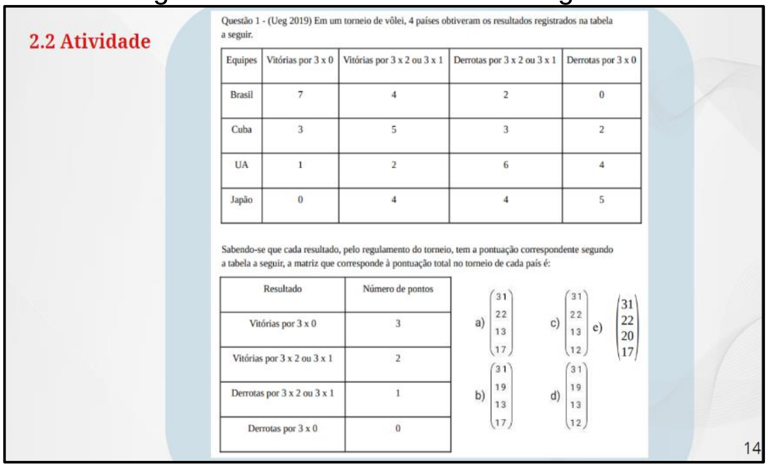
Fonte: Elaboração própria.

Três alternativas são expostas e em apenas uma (alternativa b), não é possível a realização do produto. Neste tempo, o professor em formação indaga os alunos sobre suas dúvidas. Freire (1995) compartilha do ideal de que para se ocorrer uma aprendizagem significativa é muito relevante o aluno aprender a perguntar. Com esse contato individual, o aluno se sente mais à vontade para realizar esclarecimentos e dúvidas que talvez não faça em público.

Ao término do tempo estabelecido, o professor em formação convida um aluno a vir ao quadro, expor a todos como sucedeu a solução. Aqui, são feitas orientações e intervenções, caso sejam necessárias. Após, soluciona juntamente com a turma, as duas questões restantes.

Em sequência, é exposto uma atividade de exame vestibular (Figura 36).

Figura 36 - Slide 14: atividade sugerida



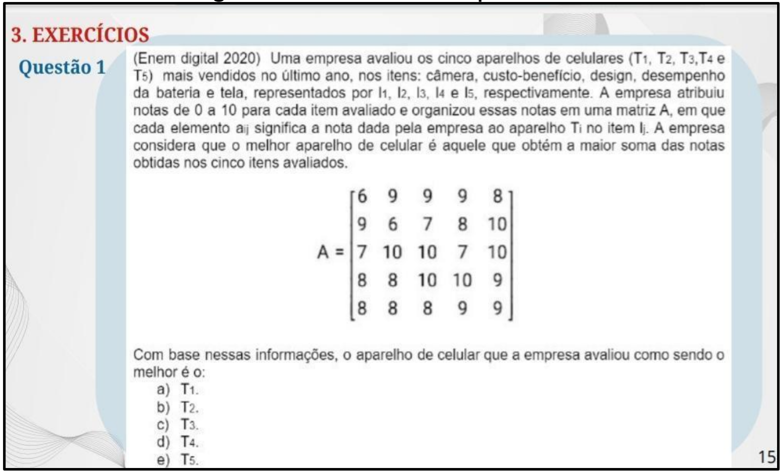
Fonte: Elaboração própria.

Neste caso, é exigido um nível de interpretação mais profundo. Deve-se salientar que a atividade expõe duas tabelas que podem ser representadas de maneira mais simplificada, ou seja, como matrizes. Para tal, destaca-se a extração da informação dada pelo enunciado da questão, que afirma que há uma relação de correspondência entre as matrizes (a multiplicação) haja vista, que as colunas da primeira matriz relacionam-se diretamente com as linhas da segunda matriz. Assim, para se obter a resposta correta, é imprescindível realizar o produto das matrizes apresentadas.

O professor em formação junto à turma, dialoga a efetivação deste produto, analisando a condição de existência, pontuando a ordem da matriz produto, elaborando sua matriz genérica e multiplicando linha e coluna de cada elemento correspondente, e como sabido, somando ao fim. Deste modo, chega-se a resposta final assinalando a alternativa b.

Agora, a terceira e última etapa se inicia, com a distribuição de uma lista de exercícios que possui duas questões de vestibulares. A primeira refere-se à primeira etapa da sequência (definição, elementos e matriz genérica) (Figura 13).

Figura 13 - Slide 15: questão 1



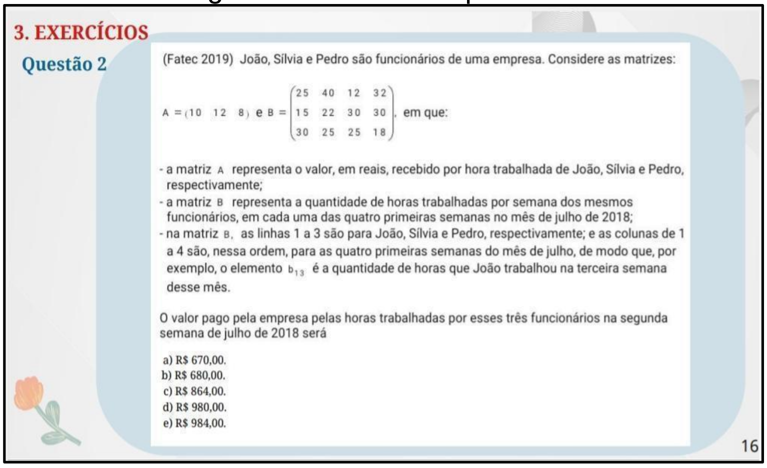
Fonte: Elaboração própria.

Nesta questão, um dos professores em formação destaca inicialmente, que os valores que estão nas linhas indicam os itens que estão sendo avaliados, e os valores que estão nas colunas indicam os aparelhos. Para melhor visualização dos alunos, salienta-se isto, de maneira escrita na matriz. Sendo assim, é enfatizado que o objetivo da questão é descobrir o aparelho celular com maior nota total dos itens. Portanto, basta somar as linhas para ter a solução, descobrindo a alternativa c como correta.

Aqui, pode-se ponderar a importância de se interpretar os enunciados das questões, e de se captar as informações que não podem passar despercebidas. Isso diminui as possibilidades de erro. Outro detalhe que pode ser evidenciado é o fato de que a questão analisada na primeira etapa, diferente desta, enfatiza as colunas.

Na segunda questão, referente ao produto entre matrizes (Figura 14), o professor em formação inicia pontuando que esta atividade apresenta uma tabela simplificada, uma matriz.

Figura 14 - Slide 16: questão 2



Fonte: Elaboração própria.

As informações decorridas no enunciado da questão, auxiliam na sua interpretação. A primeira destaca, que na primeira matriz as linhas indicam salário, e as colunas indicam os funcionários respectivos. A segunda, salienta em suas linhas os funcionários respectivos e as suas colunas destacam o total de horas trabalhadas nas quatro primeiras semanas no mês de junho 2018. A terceira, complementa a veracidade das interpretações dadas acima.

É válido destacar também, o que a questão solicita: saber o valor despendido pela empresa para se pagar esses três funcionários na segunda semana de junho de 2018. E, para isso, é essencial realizar o produto entre essas matrizes, mais especificamente da primeira linha da primeira matriz com a segunda coluna da segunda matriz. Verificada a condição de existência para obtenção de tal resultado, basta multiplicar os elementos correspondentes e ao final somá-lo, chegando assim ao resultado de assinalando a alternativa c.

Alguns minutos são dispensados aos alunos para a resolução da questão. O professor circula pela turma, a fim de analisar o desempenho dos alunos mediante a atividade, efetuando poucas intervenções, a fim de instigá-los a buscarem por conta própria soluções e a consultarem o material disponibilizado junto com as questões anteriores.

Após o tempo estabelecido, professores em formação e alunos respondem às questões. O professor em formação intervém, caso alguma interpretação da questão esteja equivocada, ou efetuação de alguma manipulação tenha obtido alguma falha, fazendo assim complementações significativas sem desprezar os conhecimentos dos alunos. É válido ressaltar que o erro faz parte do processo de aprendizagem. Como cita Freire (1995), o erro é uma forma provisória de saber. (Freire, 1995, p.71).

Ao final, são mostradas as referências em que a aula foi pautada.

3.2.2 Experimentação final da sequência didática na turma regular

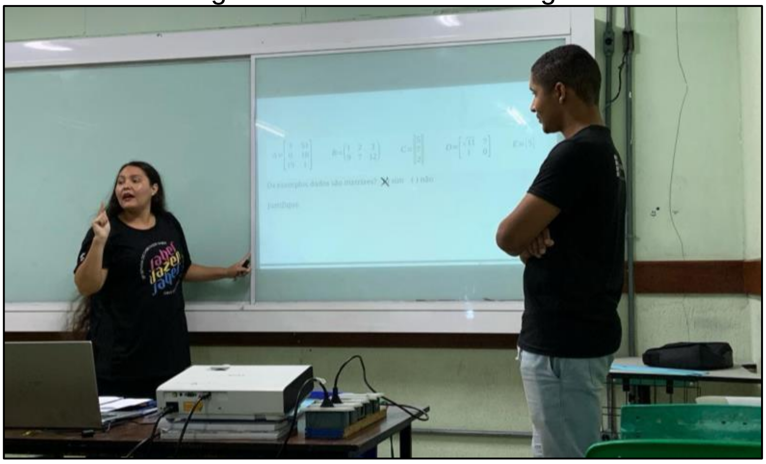
No dia 28 de fevereiro de 2024, das 18h às 20h ocorreu a aplicação da sequência didática intitulada “Definição, elementos e produto de matrizes: Aplicações em questões de vestibular”, em uma Instituição Federal de Educação localizada na cidade de Campos dos Goytacazes. A aplicação contou com a participação de 16 alunos do terceiro ano Do Ensino Médio Integral ao curso de Eletrotécnica. A carga horária referente à aplicação foi de 2 horas.

Inicialmente, houve uma apresentação conduzida pela orientadora Ana Paula, na qual ela proporcionou uma breve contextualização sobre o significado da disciplina LEAMAT e seu propósito dentro do currículo. Destacou-se também a intenção dos professores em formação em realizar uma aula dialogada. Em seguida, os professores em formação se apresentaram e distribuíram a Apostila I, marcando o início da sequência didática.

Durante a aplicação, um dos professores em formação iniciou, questionando os alunos sobre o conceito de matrizes. Respostas como “é uma tabela com linhas e colunas” foram obtidas e a partir disso o professor em formação apresentou uma definição formal sobre matrizes, ressaltando que o número de m linhas e o número de n colunas deve ser maior ou igual a 1.

Posteriormente, exemplos de matrizes foram apresentados aos alunos e eles foram questionados sobre quais deles eram matrizes. Devido à simbologia desconhecida, os alunos inicialmente afirmaram que a matriz c não era uma matriz, mas após a explicação do professor em formação, compreenderam que se tratava de uma matriz. O professor frisou a importância da definição para discernir se algo é ou não uma matriz, além de destacar as possíveis simbologias para matriz (Figura 37).

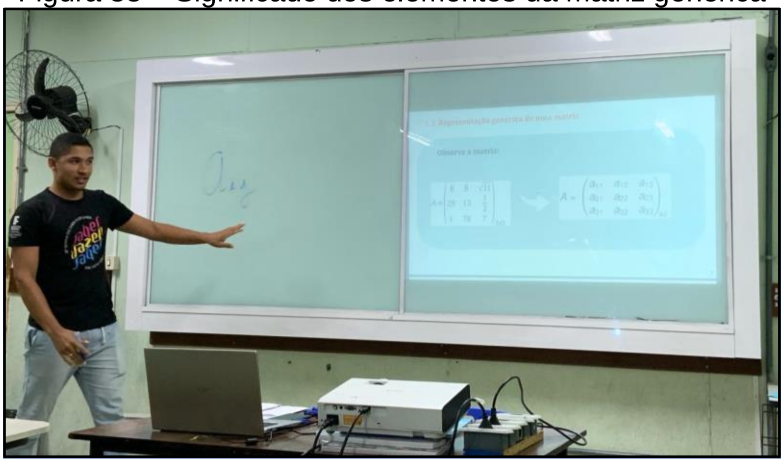
Figura 37 – Matriz: simbologia



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Após esta introdução, os professores em formação apresentaram a representação genérica de uma matriz. Inicialmente, destacaram essa representação como uma forma abstrata de descrever as propriedades e elementos de uma matriz, permitindo uma análise geral das características. Em seguida, explicaram como é feita a associação dos elementos da matriz genérica para uma matriz específica. Posteriormente, os professores em formação questionaram aos alunos: “Vocês notaram que os elementos da matriz genérica possuem uma estrutura padrão?” Em seguida, destacaram que essa estrutura pode ser expressa por a_{ij} onde i refere-se à linha e j à coluna onde esse elemento está localizado (Figura 38).

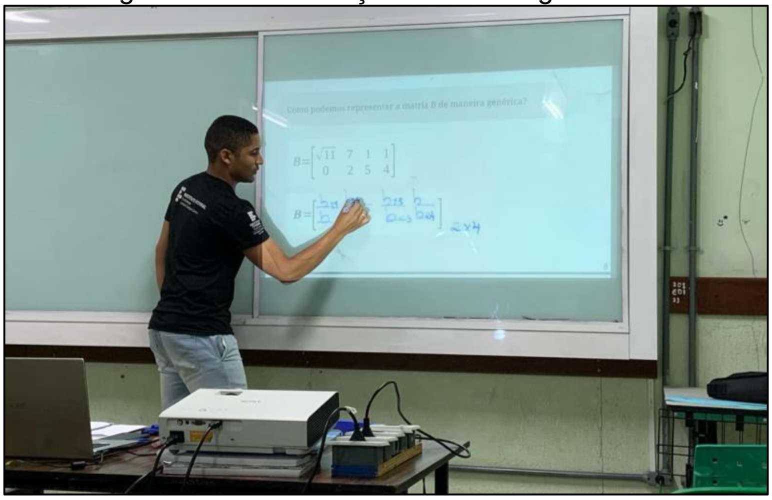
Figura 38 – Significado dos elementos da matriz genérica



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Após essa exposição, os professores em formação solicitaram aos alunos informações sobre a estrutura da matriz genérica B. Os alunos prontamente responderam aos questionamentos e registraram suas respostas na Apostila I que estavam utilizando durante a aula (Figura 39).

Figura 39 – Construção da matriz genérica B

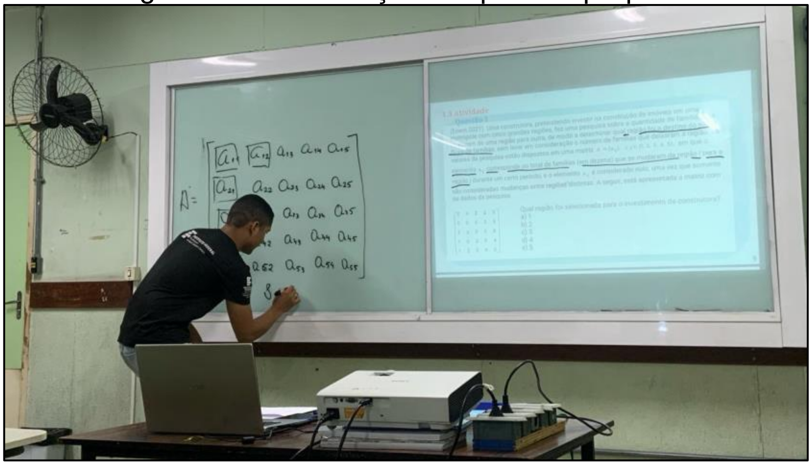


Fonte: Protocolo de pesquisa.

O professor em formação empregou os conceitos discutidos por meio de uma questão de vestibular. Inicialmente, concedeu aos alunos cinco minutos para analisarem o problema e compreenderem as demandas apresentadas. Durante esse intervalo, o professor em formação realizou a construção da matriz genérica correspondente à matriz A, fornecida na questão, visando facilitar a visualização e compreensão do problema.

Em seguida, os alunos foram incentivados e orientados na resolução da questão, através de questionamentos estratégicos, tais como: “O que vocês entenderam pelos elementos dessa matriz A?”, “Qual é o significado dessa diagonal preenchida por zeros?”, “Para responder ao enunciado da questão, deve-se avaliar a linha ou a coluna dessa matriz?” e “Se eu somar os elementos desta coluna, o que iremos obter?” (Figura 40).

Figura 40 - Elaboração da questão proposta

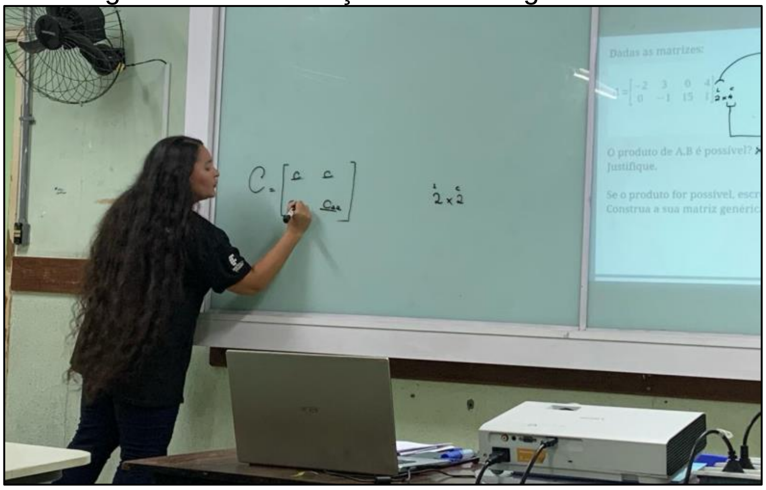


Fonte: Protocolo de pesquisa.

Essas indagações direcionadas visaram estimular o pensamento crítico dos alunos, incentivando-os a analisar e interpretar os elementos da matriz A de forma mais profunda e a aplicar os conceitos discutidos durante a aula.

Após concluir a fase de definição e representação, os professores em formação distribuíram aos alunos a Apostila II, que abordava o tema do “produto de matrizes”. Em seguida, foi apresentado a condição de existência do produto entre matrizes, destacando a importância de avaliar essa condição para obter informações cruciais: a viabilidade do produto e a ordem da matriz resultante, caso seja possível. Para ilustrar esse conceito, foi apresentado um exemplo aos alunos, seguido por questionamentos sobre se o exemplo de produto entre as matrizes atendia à condição estabelecida e, em caso afirmativo, qual seria a ordem da matriz resultante. Após confirmar a viabilidade do produto e identificar a ordem da matriz resultante, prosseguiu-se com a construção da matriz genérica para auxiliar na visualização e compreensão do processo (Figura 41).

Figura 41 – Construção da matriz genérica C

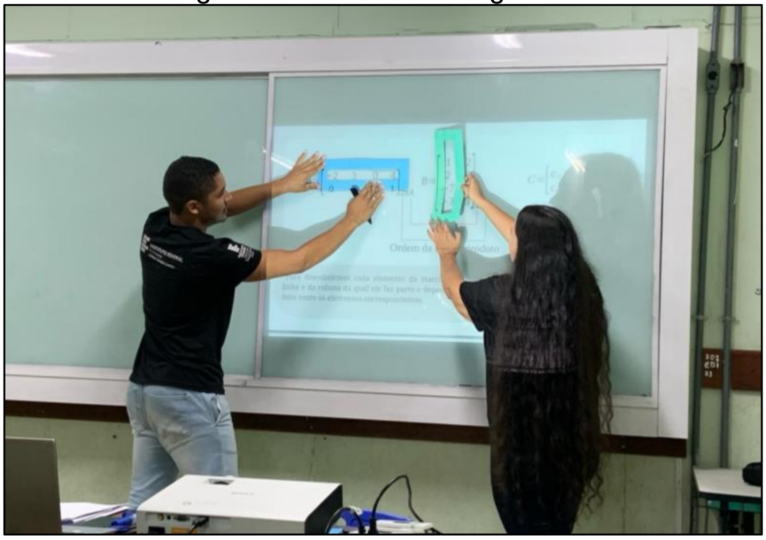


Fonte: Protocolo de pesquisa.

Com a matriz genérica pronta, o próximo passo era determinar os valores correspondentes a cada elemento. Um dos professores em formação explicou como deveria ser feito o produto entre as matrizes, enfatizando que esse produto é realizado multiplicando os elementos correspondentes e somando os resultados. Foi destacado, por exemplo, que o elemento c_{11}, que pertence à matriz resultante desse produto, está localizado na primeira linha e primeira coluna. Para calcular esse elemento, é necessário destacar primeira linha da primeira matriz e a primeira coluna da segunda matriz, multiplicando os elementos correspondentes.

Para facilitar a visualização, os professores em formação utilizaram o gabarito, destacando a linha da matriz A e a coluna da matriz B. A partir disso, os alunos foram orientados a determinar como seria esse produto. Essa abordagem prática e visual contribuiu para uma compreensão mais clara e concreta do processo de multiplicação de matrizes (Figura 42).

Figura 42 – Utilizando o gabarito



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Após essa explicação, foi destinado um tempo para que os alunos tentassem resolver as questões sobre o produto entre as matrizes. Após os, professores em formação prosseguiram resolvendo junto aos alunos essas questões. Durante todo processo, os alunos foram questionados de como eles tinham feito e a partir disso os professores em formação conduziram as resoluções (Figura 43).

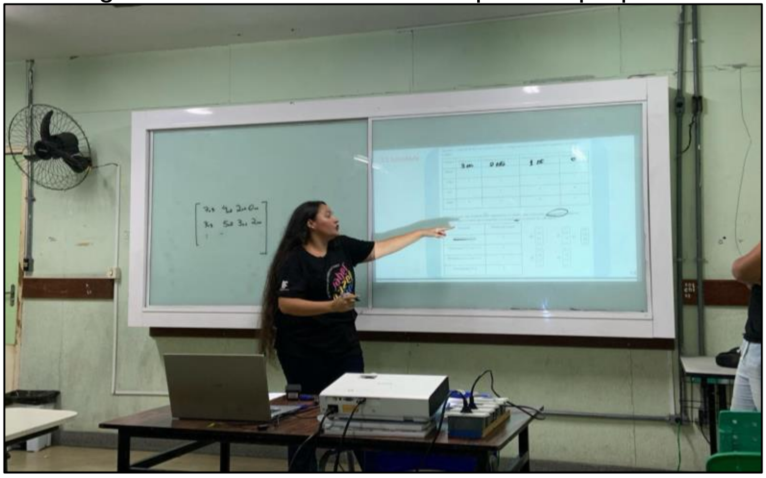
Figura 43 – Alunos resolvendo o produto entre matrizes

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Em seguida, o professor em formação ressaltou que, uma vez que os alunos demonstraram habilidade em verificar a condição de existência do produto entre matrizes e realizar o cálculo desse produto, ele iria ilustrar a relevância desse conhecimento por meio de uma questão do vestibular. Com isso, foi dedicado um tempo para que os alunos pudessem compreender a questão.

Após esse período, o professor em formação conduziu de forma interativa a resolução do problema, fazendo questionamentos e fornecendo orientações para auxiliar os alunos a alcançarem o resultado. Os alunos participantes não demonstraram dificuldades em compreender e acompanhar a resolução (Figura 45).

Figura 45 – Desenvolvendo a questão proposta



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Posteriormente, ao concluir essa etapa, foi solicitado aos alunos que se organizassem em grupos, e o último material referente aos Exercícios foi distribuído. Os professores em formação instruíram os alunos a tentarem resolver a questão 1 desse material, considerando o tempo limitado. Os alunos resolveram rapidamente e com facilidade, demonstrando domínio sobre o assunto, uma vez que todos os grupos acertaram essa questão (Figura 46).

Figura 46 – Alunos resolvendo o exercício final

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Ao final da aplicação, a orientadora Ana Paula conduziu uma discussão com os alunos para avaliar a experiência vivenciada e a performance dos professores em formação durante a apresentação, buscando identificar possíveis áreas de melhorias.

Durante essa conversa, os alunos expressaram diversos pontos de vista. Alguns destacaram a qualidade da performance e da explicação dos professores em formação, ressaltando sua clareza e domínio do conteúdo. Entretanto, alguns admitiram que enfrentam dificuldades na interpretação de questões contextualizadas, não apenas no contexto das matrizes, mas em toda área da Matemática. Além disso, houve relatos de alunos que se confundem ao distinguir linha e coluna em uma matriz.

Por outro lado, a metodologia empregada na apresentação foi elogiada, assim como a organização e o material utilizado. Em particular, o gabarito utilizado para auxiliar na visualização recebeu elogios, embora tenha sido sugerida a possibilidade de ter o gabarito em preto, o que poderia melhorar a legibilidade e facilitar a compreensão. Essas sugestões serão cuidadosamente consideradas para futuras apresentações, com o objetivo de aprimorar ainda mais a experiência de aprendizado dos professores em formação.

Com isso, foi marcado o final da conclusão da aplicação da sequência didática, os professores em formação fizeram os agradecimentos e os alunos foram dispensados. Vale ressaltar que a professora, responsável pela turma em questão, ao final da apresentação elogiou a performance e o material utilizado na aplicação e pediu permissão para utilizar esse material em suas aulas.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A reflexão sobre os objetivos do Laboratório de Ensino e Aprendizagem Matemática (LEAMAT) é essencial para que se compreenda a extensão das considerações finais deste trabalho. Além dos desafios enfrentados na aplicação da sequência didática "Matrizes: definição e produto", é necessário contemplar uma visão ampla que abrange desde os estágios preliminares até o período pós-aplicação.

Antes de adentrar na execução da sequência, houve um processo crítico de seleção do tema, permeado por questionamentos sobre os critérios a serem adotados e o público-alvo a ser alcançado. Esta etapa exigiu não apenas análises matemáticas, mas também reflexões profundas sobre a diversidade humana, resultando em um processo desafiador de construção de consenso.

A fase de elaboração da sequência didática demandou um esforço conjunto para transformar o tema escolhido em uma proposta educacional única e inovadora. As orientadoras desempenharam um papel fundamental, guiando os autores com firmeza e afeto, respeitando a singularidade de cada contribuição. O processo de refinamento foi incessante, marcado por ensaios coletivos e individuais, visando lapidar a sequência até o último momento. Cada revisão resultava em uma nova versão, evidenciando a busca incessante pela excelência educacional.

Na fase de aplicação, os desafios se tornaram tangíveis, confrontando os autores com uma gama de emoções e inseguranças. O planejamento meticuloso de um ano e meio cedeu lugar à realidade imprevisível da sala de aula, exigindo adaptação e resiliência. A experiência foi enriquecedora, proporcionando uma nova perspectiva sobre a prática pedagógica e a complexidade do processo de ensino-aprendizagem.

Sugere-se que, para futuras aplicações, seja considerado um tempo de aplicação mais extenso, permitindo uma imersão mais profunda no conteúdo e uma avaliação mais abrangente dos resultados.

Após a aplicação, o momento de elaboração do relatório permitiu uma profunda reflexão sobre a jornada vivenciada. Cada detalhe da experiência foi revivido, desde as expressões faciais dos alunos até os momentos de autocrítica interna. O trabalho não se encerra com a entrega do relatório; ao contrário, abre-se um novo capítulo de aprendizado e aprimoramento contínuo.

As lições aprendidas extrapolam os limites da sala de aula, visando impactar não apenas os professores em formação, mas também toda a comunidade educacional. O trabalho realizado no LEAMAT não se restringe à ministração de aulas ou à produção de materiais educacionais; é um convite ao aprimoramento constante, transformando cada participante em um "aprendiz de ser professor" melhor.

Nesse contexto, é impossível não reconhecer a complexidade e a riqueza da experiência vivenciada. Os desafios enfrentados são inúmeros, mas são eles que proporcionam oportunidades de crescimento e desenvolvimento pessoal e profissional. O LEAMAT, com sua imperfeição e dinamismo, é o cenário ideal para essa jornada de aprendizado contínuo e evolução constante.

Por fim, este trabalho é mais do que uma simples monografia; é uma celebração das conquistas alcançadas e uma homenagem aos professores, orientadores e colegas que tornaram possível essa jornada. Que os créditos sejam descidos com alegria e gratidão, pois o verdadeiro sucesso reside não apenas na conclusão do trabalho, mas na jornada compartilhada e nas lições aprendidas ao longo do caminho.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Cíntia Soares de. **Dificuldades de aprendizagem em matemática e a percepção dos professores em relação a fatores associados ao insucesso nesta área**. 2006. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Universidade Católica de Brasília, Brasília, 2006. Disponível em: https://repositorio.ucb.br:9443/jspui/handle/10869/1766. Acesso em: 29 de abr. de 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio**: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC/SEF, 2002.

CALDATTO, Marlova Estela.; PAVANELLO, Regina Maria. Um panorama histórico do ensino de geometria no Brasil: de 1500 até os dias atuais. **Quadrante**, São Paulo, v. 240, n.1, p. 103-128, abr. 2015.

FERREIRA, Rosiney de Jesus.; KISTEMANN JUNIOR, Marco Aurélio. **Atividades interdisciplinares envolvendo Matemática e Artes**. 2015. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Minas Gerais, 2015. Disponível em: https://www2.ufjf.br/ppgedumat/wp-content/uploads/sites/134/2011/09/PRODUTO-EDUCACIONAL-Rosiney1.pdf. Acesso em: 29 abr. 2023.

IEZZI, Gerson ; HAZZAN, Samuel.. **Fundamentos de matemática elementar**: sequências, matrizes, determinantes, sistemas. 4. ed. São Paulo: Atual, 2013.

MOURA, Irís Martins de. **Contextualização de Matrizes Para o Ensino Médio**. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Goiás, Goiás, 2014. Disponivel em : https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tede/4866/5/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20-%20Iris%20Martins%20de%20Moura%20-%202014.pdf. Acesso em: 5 de abr. 2023.

NASCIMENTO, Alexandre do. **Movimentos sociais, educação e cidadania**: um estudo sobre os cursos pré-vestibulares populares. 1999. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1999. Disponível em: http://www.bdtd.uerj.br/handle/1/10559. Acesso em: 10 de abr. 2023.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHER OF MATHEMATICS. **Príncipes and standards for school mathematics**: An overview. Reston: NCTM, 2000. ISBN 0-87353-480-8. Disponível em:https://bibliotecadigital.mineduc.cl/bitstream/handle/20.500.12365/17719/Principles%20and%20Standards%20for%20School%20Mathematics.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 19 abr. 2023.

RODRIGUES, Schirlane dos Santos Aguiar. **A teoria de Van Hiele aplicada aos triângulos:** uma sequência didática para o 8º ano do ensino fundamental. 2015. Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Estadual do Norte Fluminense, Rio de Janeiro, 2015. Disponível em: https://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/24072015Schirlane-dos-Santos-Aguiar-Rodrigues.pdf. Acesso em: 14 abr. 2023.

ROQUE, Tatiana. **Reescrevendo a história da Matemática.** Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012.

SAMPAIO, Ricardo. **Matrizes no estudo e na resolução de sistemas lineares**. 2018. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2018. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/153329/sampaio_r_me_sjrp.pdf?sequence=3. Acesso em: 26 de abr. 2023.Acesso em: 26 de abr. 2023.

TANUS, Vera Lúcia F. Aragão; DARSIE, Marta Maria Pontin. O erro como forma provisória do saber: um tratamento diferenciado no processo ensino-aprendizagem da matemática. **Revista de Educação Pública**, Mato Grosso, ano 2012, p. 169, 28 março 2024. Disponível em: https://periodicoscientificos.ufmt.br/ojs/index.php/educacaopublica/article/view/338. Acesso em: 11 de nov. 2023.

TINOCO, Lúcia Arruda de Albuquerque. et al. Álgebra é mais que algebrismo. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., Curitiba. **Anais eletrônicos** (...). Curitiba: PUC, 2013. p. 1-8. Disponível em: http:/www.sbemrevista.com.br/files/XIENEM/pdf/1429-422-ID.pdf. Acesso em 16 dez. 2002.

ZABALA, Antoni. **A Prática Educativa**: como ensinar. Tradução de Ernani F. da F. Rosa. Porto Allegre: ArtMed, 1998.

APÊNDICES

Apêndice A: Material didático aplicado na turma do LEAMAT II

APÊNDICE A- I: Apostila I

INSTITUTO FEDERAL
Fluminense
Campus
Campos Centro

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
GOVERNO FEDERAL
BRASIL
UNIÃO E RECONSTRUÇÃO

Diretoria de Ensino Superior
Licenciatura em Matemática
Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática
Linha de Pesquisa: Ensino e Aprendizagem em Álgebra
Licenciandos: Maria Roberta Mata Justiniano e Samuel Pereira de Brito.
Orientadora: Profª. Ana Paula Rangel de Andrade
Nome: ____Data: ___ / ___ / 2023

Apostila I

Matrizes

1. Introdução

1.1 Definição de matriz

Matriz é uma tabela de números formada por m linhas e n colunas, sendo $m \geqslant 1$ e $n \geqslant 1$ (Barreto Filho; Silva, 2005, p. 156).

Se uma matriz possui m linhas e n colunas, dizemos que ela tem ordem m x n (lê-se m por n) (Wagner, 2011, p. 268).

Exemplos:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 51 \\ 0 & 18 \\ 19 & 1 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 7 & 12 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{Vmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{Vmatrix} \qquad D=\begin{bmatrix} \sqrt{11} & 7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1.2 Representação genérica de uma matriz:

Observe as matrizes:

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 9 & \sqrt{11} \\ 29 & 13 & \frac{1}{2} \\ 1 & 78 & 7 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} \sqrt{11} & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

O elemento da matriz que está na linha i e na coluna j é representado por a_{ij} (lê-se simplesmente a, i, j). (Wagner, 2011, p. 268).

Dessa forma, podemos reescrever as matrizes acima, de maneira genérica.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3x3} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}$$

2. Exercício

Questão 1 - (Enem 2021) Uma construtora, pretendendo investir na construção de imóveis em uma metrópole com cinco grandes regiões, fez uma pesquisa sobre a quantidade de famílias que mudaram de uma região para outra, de modo a determinar qual região foi o destino do maior fluxo de famílias, sem levar em consideração o número de famílias que deixaram a região. Os valores da pesquisa estão dispostos em uma matriz $A = [a_{ij}]$, $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, em que o elemento a_{ij} corresponde ao total de famílias (em dezena) que se mudaram da região i para a região j durante um certo período, e o elemento a_{ij} é considerado nulo, uma vez que somente são consideradas mudanças entre regiões distintas. A seguir, está representada a matriz com os dados da pesquisa.

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Qual região foi selecionada para o investimento da construtora?

a) 1 b) 2 c) 4 d) 4 d) 5

Referências:

Barreto Filho, B.; Silva, C. X. **Matemática aula por aula.** 2. Ed. São Paulo: FTD, 2005.

Dante, L. V. **Matemática. 1.** Ed São Paulo: Ática, 2009.

Iezzi, G.; Machado, A.; Dolce, O. **Sequências, matrizes, determinantes, sistemas**: conceitos básicos. 2 ed. São Paulo: Atual, 2010.

Wagner, E. **Matemática l**. Rio de Janeiro: FGV, 2011.

Apêndice A-II: Apostila II

INSTITUTO FEDERAL
Fluminense
Campus
Campos Centro

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

GOVERNO FEDERAL
BRASIL
UNIÃO E RECONSTRUÇÃO

Diretoria de Ensino Superior
Licenciatura em Matemática
Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática
Linha de Pesquisa: Ensino e Aprendizagem em Álgebra
Licenciandos: Maria Roberta Mata Justiniano e Samuel Pereira de Brito.
Orientadora: Profª. Ana Paula Rangel de Andrade
Nome: ____Data: ___ / ___ / 2023

Apostila II

1. Produto de matrizes

A multiplicação entre matrizes exige uma técnica mais elaborada que as operações de adição e subtração; não basta multiplicar os elementos correspondentes. Para realizar tal operação é necessário analisar as ordens das matrizes. Fazendo isso, obteremos duas informações importantes:

- Se o produto das matrizes é possível ou não. Se o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda matriz, existirá uma matriz resultante do produto dessas matrizes. Se não, não existirá a matriz produto.

- Sendo possível o produto, descobriremos a ordem da matriz produto.

A ordem da matriz produto será igual ao número de linhas da primeira matriz, pelo número de colunas da segunda matriz.

Dadas as matrizes:

$$A=\begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -7 & 8 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

O produto de A.B é possível? ( ) sim ( ) não

Justifique:

____

____

Se o produto for possível, escreva a ordem da matriz produto: ______________.

Construa a sua matriz genérica.

Para descobrirmos cada elemento da matriz produto, iremos multiplicar os elementos da linha e da coluna da qual ele faz parte e depois somar os resultados. A multiplicação deve ser feita entre os elementos correspondentes, por exemplo, o primeiro elemento da linha com o primeiro elemento da coluna. Depois de multiplicar os elementos correspondentes da linha e da coluna, você ira somar esses resultados para obter o valor do elemento da matriz produto.

1.1 Atividade:

1 - Verifique a condição de existência e, se possível, efetue o produto entre as matrizes:

a) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. Exercício

Questão 1 - (Ueg 2019) Em um torneio de vôlei, 4 países obtiveram os resultados registrados na tabela a seguir.

Equipes	Vitórias por 3 x 0	Vitórias por 3 x 2 ou 3 x 1	Derrotas por 3 x 2 ou 3 x 1	Derrotas por 3 x 0
Brasil	7	4	2	0
Cuba	3	5	3	2
UA	1	2	6	4
Japão	0	4	4	5

Sabendo-se que cada resultado, pelo regulamento do torneio, tem a pontuação correspondente segundo a tabela a seguir, a matriz que corresponde à pontuação total no torneio de cada país é:

Resultado	Número de pontos
Vitórias por 3 x 0	3
Vitórias por 3 x 2 ou 3 x 1	2
Derrotas por 3 x 2 ou 3 x 1	1
Derrotas por 3 x 0	0

a) $\begin{pmatrix} 31 \\ 22 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 31 \\ 19 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 31 \\ 22 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 31 \\ 19 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 31 \\ 22 \\ 20 \\ 17 \end{pmatrix}$

Referências:

Barreto Filho, B.; Silva, C. X. **Matemática aula por aula.** 2. Ed. São Paulo: FTD, 2005.

Dante, L. V. **Matemática. 1.** Ed São Paulo: Ática, 2009.

Iezzi, G.; Machado, A.; Dolce, O. **Sequências, matrizes, determinantes, sistemas**: conceitos básicos. 2 ed. São Paulo: Atual, 2010.

Wagner, E. **Matemática l**. Rio de Janeiro: FGV, 2011.

Apêndice A - III: Exercícios

INSTITUTO FEDERAL
Fluminense
Campus
Campos Centro

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

GOVERNO FEDERAL BRASIL UNIÃO E RECONSTRUÇÃO

Diretoria de Ensino Superior
Licenciatura em Matemática
Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática
Linha de Pesquisa: Ensino e Aprendizagem em Álgebra
Licenciandos: Maria Roberta Mata Justiniano e Samuel Pereira de Brito.
Orientadora: Profª. Ana Paula Rangel de Andrade
Nome: _______________________________________Data: ___ / ___ / 2023

Exercícios

Questão 1 - (Enem digital 2020) Uma empresa avaliou os cinco aparelhos de celulares (T_1, T_2, T_3,T_4 e T_5) mais vendidos no último ano, nos itens: câmera, custo-benefício, design, desempenho da bateria e tela, representados por I_1, I_2, I_3, I_4 e I_5, respectivamente. A empresa atribuiu notas de 0 a 10 para cada item avaliado e organizou essas notas em uma matriz A, em que cada elemento a_{ij} significa a nota dada pela empresa ao aparelho T_i no item I_j. A empresa considera que o melhor aparelho de celular é aquele que obtém a maior soma das notas obtidas nos cinco itens avaliados.

$$\begin{bmatrix} 6 & 9 & 9 & 9 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 8 & 10 \\ 7 & 10 & 10 & 7 & 10 \\ 8 & 8 & 10 & 10 & 9 \\ 8 & 8 & 8 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

Com base nessas informações, o aparelho de celular que a empresa avaliou como sendo o melhor é o:

a) T_1. b) T_2. c) T_3. d) T_4. e) T_5.

Questão 2 - (Fatec 2019) João, Sílvia e Pedro são funcionários de uma empresa. Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 8 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 25 & 40 & 12 & 32 \\ 15 & 22 & 30 & 30 \\ 30 & 25 & 25 & 18 \end{pmatrix},$$

em que:

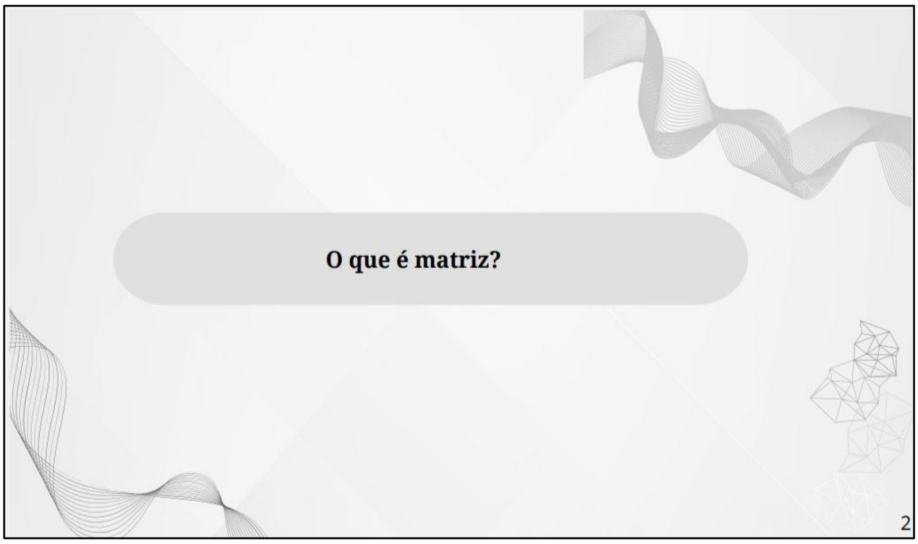
- a matriz A representa o valor, em reais, recebido por hora trabalhada de João, Sílvia e Pedro, respectivamente;
- a matriz B representa a quantidade de horas trabalhadas por semana dos mesmos funcionários, em cada uma das quatro primeiras semanas no mês de julho de 2018; - na matriz B as linhas 1 a 3 são para João, Sílvia e Pedro, respectivamente; e as colunas de 1 a 4 são, nessa ordem, para as quatro primeiras semanas do mês de julho, de modo que, por exemplo, o elemento b_{13} é a quantidade de horas que João trabalhou na terceira semana deste mês.

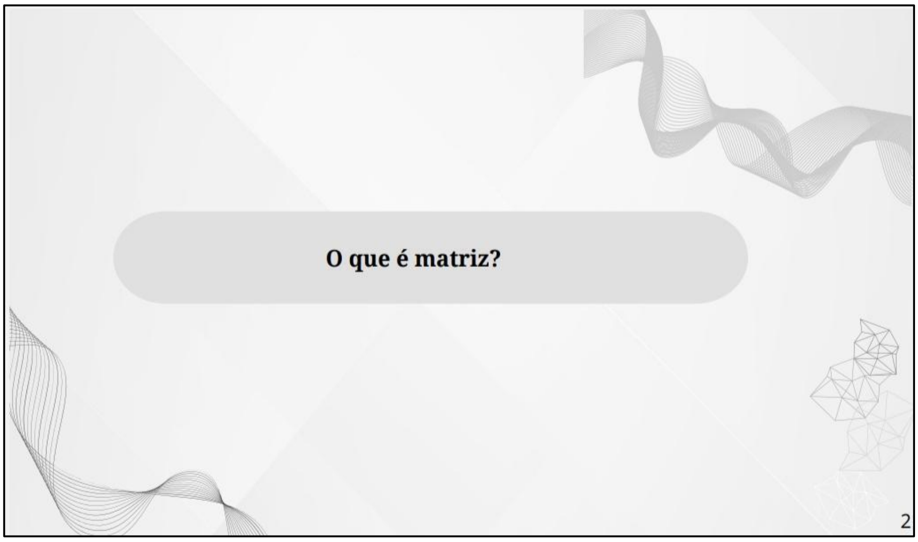
O valor pago pela empresa pelas horas trabalhadas por esses três funcionários na segunda semana de julho de 2018 será:

a) R$ 670,00. b) R$ 680,00. c) R$ 864,00. d) R$ 980,00. e) R$ 984,00.

Apêndice A - IV: Slides


INSTITUTO FEDERAL
Fluminense
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
GOVERNO FEDERAL
BRASIL
UNIÃO E RECONSTRUÇÃO
MATRIZES: DEFINIÇÃO E PRODUTO
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$
Maria Roberta Mata Justiniano
Samuel Pereira de Brito
Orientadora: Profª. Drª. Ana Paula Rangel de Andrade
Agosto / 2023
1


O que é matriz?
2


O que é matriz?
2

1. Introdução

1.1 Definição de matriz

Matriz é uma **tabela de números** formada por m **linhas** e n **colunas**, sendo $m \geq 1$ e $n \geq 1$.

(Barreto Filho; Silva, 2005, p. 156)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 51 \\ 0 & 18 \\ 19 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 7 & 12 \end{pmatrix} \quad C = \begin{Vmatrix} -5 \\ 7 \\ 2 \end{Vmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} \sqrt{11} & 7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Os exemplos dados são matrizes? ( ) sim ( ) não

Justifique: ____

Como se lê uma matriz?

Se uma matriz possui m linhas e n colunas, dizemos que ela tem ordem m x n (lê-se m por n).

(Wagner, 2011, p. 268)

Qual a ordem das matrizes abaixo? E como se realiza a sua leitura?

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 51 \\ 0 & 18 \\ 19 & 1 \end{bmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 7 & 12 \end{pmatrix} \quad C=\begin{Vmatrix} -5 \\ 7 \\ 2 \end{Vmatrix} \quad D=\begin{bmatrix} \sqrt{11} & 7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Diga se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsa.

- Matrizes são representadas com letras minúsculas do alfabeto. ( ) Verdadeiro ( ) Falso
- Os números que pertencem a matriz são chamados de elementos? ( ) Verdadeiro ( ) Falso
- Os elementos de uma matriz ficam organizados entre parênteses, colchetes ou duas barras verticais? ( ) Verdadeiro ( ) Falso

6

1.2 Representação genérica de uma matriz

Observe a matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 9 & \sqrt{11} \\ 29 & 13 & \frac{1}{2} \\ 1 & 78 & 7 \end{pmatrix}_{3x3} \qquad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3x3}$$

7

Como podemos representar a matriz B de maneira genérica?

$$B=\begin{bmatrix} \sqrt{11} & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} \quad & \quad \end{bmatrix}$$

8

1.3 Atividade

Questao 1

(Enem 2021) Uma construtora, pretendendo investir na construção de imóveis em uma metrópole com cinco grandes regiões, fez uma pesquisa sobre a quantidade de famílias que mudaram de uma região para outra, de modo a determinar qual região foi o destino do maior fluxo de famílias, sem levar em consideração o número de famílias que deixaram a região. Os valores da pesquisa estão dispostos em uma matriz $A = [a_{ij}]$, $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, em que o elemento a_{ij} corresponde ao total de famílias (em dezena) que se mudaram da região i para a região j durante um certo período, e o elemento a_{ii} é considerado nulo, uma vez que somente são consideradas mudanças entre regiões distintas. A seguir, está apresentada a matriz com os dados da pesquisa.

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Qual região foi selecionada para o investimento da construtora?

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

9

2. Produto entre matrizes

A multiplicação entre matrizes exige uma técnica mais elaborada que as operações de adição e subtração; não basta multiplicar os elementos correspondentes. Para realizar tal operação é necessário analisar as ordens das matrizes. Fazendo isso, obteremos duas informações importantes:

- Se o produto das matrizes é possível ou não. Se o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda matriz, existirá uma matriz resultante do produto dessas matrizes. Se não, não existirá a matriz produto.
- Sendo possível o produto, descobriremos a ordem da matriz produto.

10

Dadas as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 15 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -7 & 8 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

O produto de A.B é possível? ( ) sim ( ) não

Justifique:

____

____

Se o produto for possível, escreva a ordem da matriz produto: _______________ .

Construa a sua matriz genérica.

11

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 0 & 4\\ 0 & -1 & 15 & 1\end{bmatrix}\ 2\text{x}4 \qquad B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\\ -7 & 8\\ -3 & 5\end{bmatrix}\ 4\text{x}2 \qquad C=\begin{bmatrix}c11 & c12\\ c21 & c22\end{bmatrix}\ 2\text{x}2$$

Igual

Ordem da matriz produto

Para descobrirmos cada elemento da matriz produto, iremos multiplicar os elementos da linha e da coluna da qual ele faz parte e depois somar os resultados. A multiplicação deve ser feita entre os elementos correspondentes.

12

Atividade

Verifique a condição de existência e, se possível efetue o produto entre as matrizes:

a) $\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 5 & 0 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 5\end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix}4 & 8 & 0\\ 0 & \sqrt{2} & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}3 & 2\\ 7 & 0\\ 0 & 5\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 3\\ 1 & 0\\ -1 & 7\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}$

13

2.2 Atividade

Questão 1 - (Ueg 2019) Em um torneio de vôlei, 4 países obtiveram os resultados registrados na tabela a seguir.

Equipes	Vitórias por 3 x 0	Vitórias por 3 x 2 ou 3 x 1	Derrotas por 3 x 2 ou 3 x 1	Derrotas por 3 x 0
Brasil	7	4	2	0
Cuba	3	5	3	2
UA	1	2	6	4
Japão	0	4	4	5

Sabendo-se que cada resultado, pelo regulamento do torneio, tem a pontuação correspondente segundo a tabela a seguir, a matriz que corresponde à pontuação total no torneio de cada país é:

Resultado	Número de pontos
Vitórias por 3 x 0	3
Vitórias por 3 x 2 ou 3 x 1	2
Derrotas por 3 x 2 ou 3 x 1	1
Derrotas por 3 x 0	0

a) $\begin{pmatrix}31\\ 22\\ 13\\ 17\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}31\\ 19\\ 13\\ 17\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}31\\ 22\\ 13\\ 12\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}31\\ 19\\ 13\\ 12\end{pmatrix}$

14

3. EXERCÍCIOS

Questão 1

(Enem digital 2020) Uma empresa avaliou os cinco aparelhos de celulares (T_1, T_2, T_3, T_4 e T_5) mais vendidos no último ano, nos itens: câmera, custo-benefício, design, desempenho da bateria e tela, representados por I_1, I_2, I_3, I_4 e I_5, respectivamente. A empresa atribuiu notas de 0 a 10 para cada item avaliado e organizou essas notas em uma matriz A, em que cada elemento a_{ij} significa a nota dada pela empresa ao aparelho T_i no item I_j. A empresa considera que o melhor aparelho de celular é aquele que obtém a maior soma das notas obtidas nos cinco itens avaliados.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 9 & 9 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 8 & 10 \\ 7 & 10 & 10 & 7 & 10 \\ 8 & 8 & 10 & 10 & 9 \\ 8 & 8 & 8 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

Com base nessas informações, o aparelho de celular que a empresa avaliou como sendo o melhor é o:

a) T_1.
b) T_2.
c) T_3.
d) T_4.
e) T_5.

15

3. EXERCÍCIOS

Questão 2

(Fatec 2019) João, Sílvia e Pedro são funcionários de uma empresa. Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 8 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 25 & 40 & 12 & 32 \\ 15 & 22 & 30 & 30 \\ 30 & 25 & 25 & 18 \end{pmatrix}, \text{ em que:}$$

- a matriz A representa o valor, em reais, recebido por hora trabalhada de João, Sílvia e Pedro, respectivamente;
- a matriz B representa a quantidade de horas trabalhadas por semana dos mesmos funcionários, em cada uma das quatro primeiras semanas no mês de julho de 2018;
- na matriz B, as linhas 1 a 3 são para João, Sílvia e Pedro, respectivamente; e as colunas de 1 a 4 são, nessa ordem, para as quatro primeiras semanas do mês de julho, de modo que, por exemplo, o elemento b_{13} é a quantidade de horas que João trabalhou na terceira semana desse mês.

O valor pago pela empresa pelas horas trabalhadas por esses três funcionários na segunda semana de julho de 2018 será

a) R$ 670,00.
b) R$ 680,00.
c) R$ 864,00.
d) R$ 980,00.
e) R$ 984,00.

16

Referências

BARRETO FILHO, B.; SILVA, C. X. **Matemática aula por aula.** 2. Ed. São Paulo: FTD, 2005.

DANTE, L. V. **Matemática**. 1. Ed São Paulo: Ática, 2009

IEZZI, G.; MACHADO, A.; DOLCE, O. **Sequências, matrizes, determinantes, sistemas:** conceitos básicos. 2. Ed. São Paulo: Atual, 2010.

WAGNER, E. **Matemática I.** FGV, 2011. p. 268.

17

OBRIGADO!
Linha
Coluna
18

Apêndice B: material didático experimentado na turma regular

Apêndice B - I: Apostila I

INSTITUTO FEDERAL Fluminense Campus Campos Centro

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO — GOVERNO FEDERAL BRASIL UNIÃO E RECONSTRUÇÃO

Diretoria de Ensino Superior
Licenciatura em Matemática
Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática
Linha de Pesquisa: Ensino e Aprendizagem em Álgebra
Licenciandos: Maria Roberta Mata Justiniano e Samuel Pereira de Brito
Orientadora: Profª. Ana Paula Rangel de Andradre
Nome: ____Data: 28 / 02 / 2024.

Apostila I

Matrizes

1. Introdução

1.1 Definição de matriz

Matriz é uma tabela de números formada por m linhas e n colunas, sendo $n \geqslant 1$ (Barreto Filho; Silva, 2005, p. 156).

Se uma matriz possui m linhas e n colunas, dizemos que ela tem ordem m x n (lê-se m por n) (Wagner, 2011, p. 268).

Exemplos:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 51 \\ 0 & 18 \\ 19 & 1 \end{bmatrix}\_\_\_ \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 7 & 12 \end{pmatrix}\_\_\_ \quad C=\begin{Vmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{Vmatrix}\_\_\_ \quad D=\begin{bmatrix} \sqrt{11} & 7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\_\_\_ \quad E=[5]\_\_\_$$

1.2 Representação genérica de uma matriz:

Exemplos:

$$A=\begin{bmatrix} 6 & 6 & \sqrt{11} \\ 29 & 13 & \frac{1}{2} \\ 1 & 78 & 7 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} \sqrt{11} & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

O elemento da matriz que está na linha i e na coluna j é representado por aij (lê-se simplesmente a, i, j) (Wagner, 2011, p. 268).

Dessa forma, podemos reescrever as matrizes acima, de maneira genérica.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3x3} \qquad B=\begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}$$

2. Exercícios:

Questão 1 - (Enem 2021) Uma construtora, pretendendo investir na construção de imóveis em uma metrópole com cinco grandes regiões, fez uma pesquisa sobre a quantidade de famílias que mudaram de uma região para outra, de modo a determinar qual região foi o destino do maior fluxo de famílias, sem levar em consideração o número de famílias que deixaram a região. Os valores da pesquisa estão dispostos em uma matriz $A = [a_{ij}]$, $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, em que o elemento a_{ij} corresponde ao total de famílias (em dezenas) que se mudaram da região i para a região j durante um certo período, e o elemento a_{ii} é considerado nulo, uma vez que somente são consideradas mudanças entre regiões distintas. A seguir, está representada a matriz com os dados da pesquisa.

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Qual região foi selecionada para o investimento da construtora?

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

Referências:

Barreto Filho, B.; Silva, C. X. **Matemática aula por aula.** 2. ed. São Paulo: FTD, 2005.
Wagner, Eduardo. **Matemática I.** Rio de Janeiro: FGV, 2011.

Apêndice B - II: Apostila II

INSTITUTO FEDERAL
Fluminense
Campus
Campos Centro

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
GOVERNO FEDERAL
BRASIL
UNIÃO E RECONSTRUÇÃO

Diretoria de Ensino Superior
Licenciatura em Matemática
Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática
Linha de Pesquisa: Ensino e Aprendizagem em Álgebra
Licenciandos: Maria Roberta Mata Justiniano e Samuel Pereira de Brito
Orientadora: Profª. Ana Paula Rangel de Andradre
Nome: ____ Data: 28 / 02 / 2024.

Apostila II

Produto de matrizes

A multiplicação entre matrizes exige uma técnica mais elaborada que as operações de adição e subtração; não basta multiplicar os elementos correspondentes. Para realizar tal operação é necessário analisar as ordens das matrizes. Fazendo isso, obteremos duas informações importantes:

- Se o produto das matrizes é possível ou não. Se o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda matriz, existirá uma matriz resultante do produto dessas matrizes. Se não, não existirá a matriz produto.

- Sendo possível o produto, descobriremos a ordem da matriz produto. A ordem da matriz produto será igual ao número de linhas da primeira matriz, pelo número de colunas da segunda matriz. (Wagner, 2011)

Dadas as matrizes:

$$A=\begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -7 & 8 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

O produto de A.B é possível? ( ) sim ( ) não

Justifique:

____

____

Se o produto for possível, escreva a ordem da matriz produto: ______________.

Construa a sua matriz genérica.

Para descobrirmos cada elemento da matriz produto, iremos multiplicar os elementos da linha e da coluna da qual ele faz parte e depois somar os resultados. A multiplicação deve ser feita entre os elementos correspondentes, por exemplo, o primeiro elemento da linha com o primeiro elemento da coluna. Depois de multiplicar os elementos correspondentes da linha e da coluna, você ira somar esses resultados para obter o valor do elemento da matriz produto. (Wagner, 2011)

Exemplo:

Dadas as matrizes:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}_{2x2} \quad e \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2x3}$$

O produto A x B será a matriz C.

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

Os elementos da matriz C são relações das linhas da primeira matriz com as colunas da segunda matriz.

$$\begin{aligned} C_{11} &= 2 \text{ x } 1 + 3 \text{ x } 2 \\ C_{12} &= 2 \text{ x } 3 + 3 \text{ x } 1 \\ C_{13} &= 2 \text{ x } 0 + 3 \text{ x } 1 \\ C_{21} &= 4 \text{ x } 1 + 6 \text{ x } 2 \\ C_{22} &= 4 \text{ x } 3 + 6 \text{ x } 1 \\ C_{23} &= 4 \text{ x } 0 + 6 \text{ x } 1 \end{aligned}$$

$$C=\begin{bmatrix} 8 & 9 & 3 \\ 16 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

1.1 Atividade

1 - Verifique a condição de existência e, se possível, faça a matriz genérica e efetue o produto entre as matrizes:

a) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

1.2 Exercício

(Ueg 2019) Em um torneio de vôlei, 4 países obtiveram os resultados registrados na tabela a seguir.

Equipes	Vitórias por 3 x 0	Vitórias por 3 x 2 ou 3 x 1	Derrotas por 3 x 2 ou 3 x 1	Derrotas por 3 x 0
Brasil	7	4	2	0
Cuba	3	5	3	2
UA	1	2	6	4
Japão	0	4	4	5

Sabendo-se que cada resultado, pelo regulamento do torneio, tem a pontuação correspondente segundo a tabela a seguir, a matriz que corresponde à pontuação total no torneio de cada país é:

Resultado	Número de pontos
Vitórias por 3 x 0	3
Vitórias por 3 x 2 ou 3 x 1	2
Derrotas por 3 x 2 ou 3 x 1	1
Derrotas por 3 x 0	0

a) $\begin{pmatrix} 31 \\ 22 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 31 \\ 19 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 31 \\ 22 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 31 \\ 19 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 31 \\ 22 \\ 20 \\ 17 \end{pmatrix}$

Referências:

Wagner, E. **Matemática I.** Rio de Janeiro: FGV, 2011.

Apêndice B-III: Exercícios

Diretoria de Ensino Superior
Licenciatura em Matemática
Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática
Linha de Pesquisa: Ensino e Aprendizagem em Álgebra
Licenciandos: Maria Roberta Mata Justiniano e Samuel Pereira de Brito
Orientadora: Profª. Ana Paula Rangel de Andradre
Nome: ____ Data: 28 / 02 / 2024.

Exercícios

Questão 1 - (Enem digital 2020) Uma empresa avaliou os cinco aparelhos de celulares (T_1 ,T_2 T_3,T_4 e T_5) mais vendidos no último ano, nos itens: câmera, custo-benefício, design, desempenho da bateria e tela, representados por l_1, l_2, l_3, l_4 e l_5, respectivamente. A empresa atribuiu notas de 0 a 10 para cada item avaliado e organizou essas notas em uma matriz A, em que cada elemento a_{ij} significa a nota dada pela empresa ao aparelho T_i no item l_j . A empresa considera que o melhor aparelho de celular é aquele que obtém a maior soma das notas obtidas nos cinco itens avaliados.

$$\begin{bmatrix} 6 & 9 & 9 & 9 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 8 & 10 \\ 7 & 10 & 10 & 7 & 10 \\ 8 & 8 & 10 & 10 & 9 \\ 8 & 8 & 8 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

Com base nessas informações, o aparelho de celular que a empresa avaliou como sendo o melhor é o:

a) T_1. b) T_2. c) T_3. d) T_4. e) T_5.

Questao 2 – (Fatec 2019) João, Sílvia e Pedro são funcionários de uma empresa. Considere as matrizes:

$A = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 8 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 25 & 40 & 12 & 32 \\ 15 & 22 & 30 & 30 \\ 30 & 25 & 25 & 18 \end{bmatrix}$, em que

- A matriz A representa o valor, em reais, recebido por hora trabalhada de João, Sílvia e Pedro, respectivamente;

- A matriz B representa a quantidade de horas trabalhadas por semana dos mesmos funcionários, em cada uma das quatro primeiras semanas no mês de julho de 2018;

- Na matriz B as linhas 1 a 3 são para João, Sílvia e Pedro, respectivamente; e as colunas 1 a 4 são, nessa ordem, para as quatro primeiras semanas do mês de julho, de modo que, por exemplo, o elemento b_{13} é a quantidade de horas que João trabalhou na terceira semana deste mês.

O valor pago pela empresa pelas horas trabalhadas por esses três funcionários na segunda semana de julho de 2018 será:

a) R$ 670,00. b) R$ 680,00. c) R$ 864,00. d) R$ 980,00. e) R$ 984,00.

Apêndice B-IV: Slides

INSTITUTO FEDERAL
Fluminense

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

GOVERNO FEDERAL
BRASIL
UNIÃO E RECONSTRUÇÃO

MATRIZES: DEFINIÇÃO E PRODUTO

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Maria Roberta Mata Justiniano
Samuel Pereira de Brito

Orientadora: Profª. Drª. Ana Paula Rangel de Andrade
Fevereiro / 2024

1

O que é matriz?

2

1. Introdução

1.1 Definição de matriz

Matriz é uma **tabela de números** formada por m **linhas** e n **colunas**, sendo m ≥ 1 e n ≥ 1.

(Barreto Filho; Silva, 2005, p. 156)

3

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 51 \\ 0 & 18 \\ 19 & 1 \end{bmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 7 & 12 \end{pmatrix} \quad C=\begin{Vmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{Vmatrix} \quad D=\begin{bmatrix} \sqrt{11} & 7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad E=[5]$$

Os exemplos dados são matrizes? ( ) sim ( ) não

Justifique.

4

Como se lê uma matriz?

5

Se uma matriz possui m linhas e n colunas, dizemos que ela tem ordem m x n (lê-se m por n).

(Wagner, 2011, p. 268)

Qual a ordem das matrizes abaixo? E como se realiza a sua leitura?

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 51 \\ 0 & 18 \\ 19 & 1 \end{bmatrix}\_\_\_ \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & -7 & 12 \end{pmatrix}\_\_\_ \quad C=\begin{Vmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{Vmatrix}\_\_\_ \quad D=\begin{bmatrix} \sqrt{11} & 7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\_\_\_ \quad E=[5]\_\_\_$$

Marque as alternativas abaixo com verdadeiro ou falso.

- Matrizes são representadas com letras minúsculas do alfabeto. ( ) Verdadeiro ( ) Falso
- Os números que pertencem a matriz são chamados de elementos? ( ) Verdadeiro ( ) Falso
- Os elementos de uma matriz ficam organizados entre parênteses, colchetes ou duas barras verticais? ( ) Verdadeiro ( ) Falso

6

1.2 Representação genérica de uma matriz

Observe a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & \sqrt{11} \\ 29 & 13 & \frac{1}{2} \\ 1 & 78 & 7 \end{pmatrix}_{3x3} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3x3}$$

7

Como podemos representar a matriz B de maneira genérica?

$$B = \begin{bmatrix} \sqrt{11} & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

8

1.3 Atividade

Questao 1

(Enem 2021) Uma construtora, pretendendo investir na construção de imóveis em uma metrópole com cinco grandes regiões, fez uma pesquisa sobre a quantidade de famílias que mudaram de uma região para outra, de modo a determinar qual região foi o destino do maior fluxo de famílias, sem levar em consideração o número de famílias que deixaram a região. Os valores da pesquisa estão dispostos em uma matriz $A = [a_{ij}]$, $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, em que o elemento a_{ij} corresponde ao total de famílias (em dezena) que se mudaram da região i para a região j durante um certo período, e o elemento a_{ii} é considerado nulo, uma vez que somente são consideradas mudanças entre regiões distintas. A seguir, está apresentada a matriz com os dados da pesquisa.

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Qual região foi selecionada para o investimento da construtora?

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

9

2. Produto entre matrizes

A multiplicação entre matrizes exige uma técnica mais elaborada que as operações de adição e subtração; não basta multiplicar os elementos correspondentes. Para realizar tal operação é necessário analisar as ordens das matrizes. Fazendo isso, obteremos duas informações importantes:

- Se o produto das matrizes é possível ou não. Se o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda matriz, existirá uma matriz resultante do produto dessas matrizes. Se não, não existirá a matriz produto.

- Sendo possível o produto, descobriremos a ordem da matriz produto.

(Wagner, 2011)

10

Dadas as matrizes:

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 0 & 4\\ 0 & -1 & 15 & 1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\\ -7 & 8\\ -3 & 5\end{bmatrix}$$

O produto de A.B é possível? ( ) sim ( ) não
Justifique.

Se o produto for possível, escreva a ordem da matriz produto: ________________ .
Construa a sua matriz genérica.

11

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 0 & 4\\ 0 & -1 & 15 & 1\end{bmatrix}_{2x4} \quad B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\\ -7 & 8\\ -3 & 5\end{bmatrix}_{4x2} \qquad C=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{bmatrix}_{2x2}$$

Igual

Ordem da matriz produto

Para descobrirmos cada elemento da matriz produto, iremos multiplicar os elementos da linha e da coluna da qual ele faz parte e depois somar os resultados. A multiplicação deve ser feita entre os elementos correspondentes.

12

Atividade

Verifique a condição de existência e, se possível, faça a matriz genérica e efetue o produto entre as matrizes:

a) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

13

2.2 Atividade

Questão 1 - (Ueg 2019) Em um torneio de vôlei, 4 países obtiveram os resultados registrados na tabela a seguir.

Equipes	Vitórias por 3 x 0	Vitórias por 3 x 2 ou 3 x 1	Derrotas por 3 x 2 ou 3 x 1	Derrotas por 3 x 0
Brasil	7	4	2	0
Cuba	3	5	3	2
UA	1	2	6	4
Japão	0	4	4	5

Sabendo-se que cada resultado, pelo regulamento do torneio, tem a pontuação correspondente segundo a tabela a seguir, a matriz que corresponde à pontuação total no torneio de cada país é:

Resultado	Número de pontos
Vitórias por 3 x 0	3
Vitórias por 3 x 2 ou 3 x 1	2
Derrotas por 3 x 2 ou 3 x 1	1
Derrotas por 3 x 0	0

a) $\begin{pmatrix} 31 \\ 22 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 31 \\ 19 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 31 \\ 22 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 31 \\ 19 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 31 \\ 22 \\ 20 \\ 17 \end{pmatrix}$

14

3. EXERCÍCIOS

Questão 1

(Enem digital 2020) Uma empresa avaliou os cinco aparelhos de celulares (T_1, T_2, T_3, T_4 e T_5) mais vendidos no último ano, nos itens: câmera, custo-benefício, design, desempenho da bateria e tela, representados por I_1, I_2, I_3, I_4 e I_5, respectivamente. A empresa atribuiu notas de 0 a 10 para cada item avaliado e organizou essas notas em uma matriz A, em que cada elemento a_{ij} significa a nota dada pela empresa ao aparelho T_i no item I_j. A empresa considera que o melhor aparelho de celular é aquele que obtém a maior soma das notas obtidas nos cinco itens avaliados.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 9 & 9 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 8 & 10 \\ 7 & 10 & 10 & 7 & 10 \\ 8 & 8 & 10 & 10 & 9 \\ 8 & 8 & 8 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

Com base nessas informações, o aparelho de celular que a empresa avaliou como sendo o melhor é o:

a) T_1.
b) T_2.
c) T_3.
d) T_4.
e) T_5.

15

3. EXERCÍCIOS

Questão 2

(Fatec 2019) João, Sílvia e Pedro são funcionários de uma empresa. Considere as matrizes:

$A = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 8 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 25 & 40 & 12 & 32 \\ 15 & 22 & 30 & 30 \\ 30 & 25 & 25 & 18 \end{pmatrix}$, em que:

- a matriz A representa o valor, em reais, recebido por hora trabalhada de João, Sílvia e Pedro, respectivamente;
- a matriz B representa a quantidade de horas trabalhadas por semana dos mesmos funcionários, em cada uma das quatro primeiras semanas no mês de julho de 2018;
- na matriz B, as linhas 1 a 3 são para João, Sílvia e Pedro, respectivamente; e as colunas de 1 a 4 são, nessa ordem, para as quatro primeiras semanas do mês de julho, de modo que, por exemplo, o elemento b_{13} é a quantidade de horas que João trabalhou na terceira semana desse mês.

O valor pago pela empresa pelas horas trabalhadas por esses três funcionários na segunda semana de julho de 2018 será

a) R$ 670,00.
b) R$ 680,00.
c) R$ 864,00.
d) R$ 980,00.
e) R$ 984,00.

16

Referências

BARRETO FILHO, B.; SILVA, C. X. **Matemática aula por aula.** 2. Ed. São Paulo: FTD, 2005.

WAGNER, E. **Matemática I.** FGV, 2011. p. 268.

17

18