INSTITUTO FEDERAL
Fluminense
Campus
Campos Centro

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

GOVERNO FEDERAL BRASIL UNIÃO E RECONSTRUÇÃO

RELATÓRIO DO LEAMAT

UM ESTUDO SOBRE A ORIGEM E AS APLICAÇÕES DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

ENSINO E APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA

CAMILA DOS SANTOS PETERSEN
ESTEFANI BARRETO BARBOSA DE OLIVEIRA
MELISSA FERREIRA MOTA

CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

2023.2

CAMILA DOS SANTOS PETERSEN
ESTEFANI BARRETO BARBOSA DE OLIVEIRA
MELISSA FERREIRA MOTA

RELATÓRIO DO LEAMAT

UM ESTUDO SOBRE A ORIGEM E AS APLICAÇÕES DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

ENSINO E APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA

Trabalho apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, *Campus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão da disciplina Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª Ana Paula Rangel de Andrade

CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

2023.2

SUMÁRIO

1 RELATÓRIO DO LEAMAT I 4

1.1 Atividades desenvolvidas 4

1.2 Elaboração da sequência didática 6

1.2.1 Tema 6

1.2.2 Justificativa 6

1.2.3 Objetivo geral 9

1.2.4 Público-alvo 9

2 RELATÓRIO DO LEAMAT II 10

2.1 Atividades desenvolvidas 10

2.2 Elaboração da sequência didática 11

2.2.1 Planejamento da sequência didática 11

2.2.2 Aplicação da sequência didática na turma do LEAMAT II 21

3 RELATÓRIO DO LEAMAT III 27

3.1 Atividades desenvolvidas 27

3.2 Elaboração da sequência didática 28

3.2.1 Versão final da sequência didática 28

3.2.2 Experimentação da sequência didática na turma regular 38

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS 43

REFERÊNCIAS 45

APÊNDICES 48

Apêndice A: Material didático aplicado na turma do LEAMAT II 49

Apêndice A-I: Notas Históricas sobre a vida de Leonardo de Pisa 50

Apêndice A-II: Apostila 1 - Razões entre dois Números de Fibonacci 53

Apêndice A-III: Apostila 2 - Medidas Áureas no Corpo Humano 55

Apêndice A-IV: Apresentação de Slides 58

Apêndice B: Material didático experimentado na turma regular 70

Apêndice B-I: Notas Históricas sobre a vida de Leonardo de Pisa 71

Apêndice B-II: Apostila 1 - Razões entre dois Números de Fibonacci 74

Apêndice B-III: Apostila 2 - Medidas Áureas no Corpo Humano 76

Apêndice B-IV: Apostila 3 - Problema dos Coelhos e Sequência Recursiva 79

Apêndice B-V: Apresentação de Slides 82

1 RELATÓRIO DO LEAMAT I

1.1 Atividades desenvolvidas

No dia 15 de dezembro de 2022, ocorreu o primeiro encontro do componente curricular Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática I (LEAMAT I) referente à linha de pesquisa de Álgebra, sob orientação da professora Ana Paula Rangel de Andrade. Além de apresentar o componente e discutir sobre os objetivos a serem alcançados, a professora comunicou sobre a forma de avaliação, mostrou trabalhos anteriores, comentou sobre o preenchimento dos campos da folha de fichamento de um artigo e explicou sobre a origem da Álgebra.

Neste mesmo encontro, tratou-se também a respeito da relação da Álgebra com a abstração e a procura por regularidades, a introdução da Álgebra no Ensino Fundamental, a interpretação geométrica dos cálculos algébricos e problemas no ensino. Em seguida, ocorreu a exposição dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Brasil, 1998) e das orientações para que este, junto com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018) e revistas referentes à Educação Matemática fossem usados como fontes para pesquisas acadêmicas. Posteriormente, iniciou-se a discussão sobre referências segundo as normas da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) e foi solicitado um fichamento sobre o artigo "Álgebra é mais do que algebrismo" (Tinoco *et al., 2013*).

Na semana seguinte, no dia 22 de dezembro de 2022, a aula foi iniciada com o fichamento solicitado e houve um debate sobre o artigo. Questões referentes a problemas no ensino da Álgebra foram levantadas, como a mecanização, a falta da explicação teórica que antecede a apresentação dos “macetes”, entre outros assuntos. Na sequência, desencadeou-se uma reflexão sobre maneiras de ensinar os alunos a pensarem em formas distintas de resolver o mesmo problema e como isso seria benéfico. As dúvidas e dificuldades dos alunos em relação às referências e preenchimento de alguns campos da folha de fichamento foram esclarecidas.

A divisão dos grupos ocorreu no dia 02 de fevereiro de 2023. Logo, foi iniciada a discussão sobre os conteúdos que os integrantes teriam interesse em explorar durante o LEAMAT, sugestões, bem como a inclusão e a exclusão de temas para uma posterior escolha definitiva. Inicialmente, as autoras deste trabalho propuseram assuntos para exploração e pesquisa, tais como: Teorema de Tales, Unidades de

Medidas, Frações e Raízes, mas de acordo com as orientações, essas sugestões tinham mais relação com a Aritmética e a Geometria. A professora disponibilizou livros didáticos e revistas para que, por meio destes, as integrantes pudessem, em conjunto, selecionar temas que chamassem a atenção. Posteriormente iniciou-se uma discussão para tentar diminuir as possibilidades de temas.

Na aula de 04 de fevereiro de 2023, a professora fez reuniões individuais com os grupos para que os integrantes apresentassem sugestões. Ela deu orientações que contribuíram para a escolha do tema de estudo.

Posteriormente, no dia 09 de fevereiro de 2023 os grupos foram conduzidos ao espaço do LEAMAT onde puderam realizar mais pesquisas. Depois de decidir o tema, o grupo começou a pensar no objetivo geral do trabalho, na justificativa e motivo pessoal de cada integrante para se chegar ao tema do trabalho. Também foram decididos o público-alvo e mencionados alguns métodos que poderiam ser utilizados durante a aplicação do LEAMAT.

Foi definido pela professora no dia 02 de março de 2023 que as futuras aulas aconteceriam no espaço do LEAMAT, onde os grupos iriam se reunir, debater e efetuar mudanças no relatório. As autoras iniciaram suas pesquisas nos PCN e na BNCC com a finalidade de correlacionar o tema escolhido aos conteúdos abordados no Ensino Médio.

Nas semanas seguintes até o dia 20 de abril, as autoras se reuniram para ajustes no relatório e elaboração da apresentação.

Nos dias 24 e 26 de abril ocorreram as reuniões com a professora de forma on-line para realização dos ensaios.

No dia 27 de abril o grupo apresentou o trabalho do LEAMAT na linha de pesquisa de Álgebra. As professoras sugeriram que o grupo se tranquilizasse mais durante as apresentações e que falassem olhando para o público. Os colegas sugeriram a utilização de vídeos e citaram um filme chamado “Donald no país da Matemágica” com diversos elementos da Sequência de Fibonacci.

No dia 04 de maio, ocorreu a avaliação final do componente curricular LEAMAT I, feita pelas professoras Ana Paula e Schirlane.

1.2 Elaboração da sequência didática

1.2.1 Tema

Origem e aplicações da Sequência de Fibonacci.

1.2.2 Justificativa

Durante suas trajetórias na Educação Básica, as autoras deste trabalho observaram que muitos temas da Matemática são tratados de forma superficial, com repetição de técnicas e exercícios que os alunos não veem sentido. Corroborando com estas observações, Oliveira (2013) classifica esses métodos como cansativos e enfadonhos para os alunos. Por outro lado, ele destaca que atividades bem planejadas desenvolvem a capacidade de interpretar e promovem uma aprendizagem significativa.

No campo da Álgebra, identifica-se que o estudo das sequências na Educação Básica foca apenas nas Progressões Aritméticas e Geométricas. Entretanto, há uma abordagem mecanizada, com o acúmulo de fórmulas e muitos tipos de sequências não são contemplados, como a Sequência de Fibonacci. Das quatro autoras deste trabalho, apenas uma estudou o tema antes de chegar à graduação.

Logo, por não terem conhecido ou presenciado nenhuma exploração da Sequência de Fibonacci no Ensino Médio, o grupo pretende abordar o tema de forma significativa, apresentar sua origem, aplicações em áreas distintas e, assim, proporcionar uma experiência prazerosa de aprendizado.

Muitas vezes, os professores se deparam com estudantes desinteressados e desatentos aos conteúdos abordados nas aulas de Matemática. Estes problemas podem ser causados pela falta de conexão entre os conteúdos ensinados e a realidade dos alunos (Lara, 2013).

Esta separação entre o cotidiano e a sala de aula acontece por diversos motivos, um deles é a mecanização. Esta repetição de processos não estimula o discente a refletir ou questionar o que está estudando, uma vez que ele apenas repete as técnicas sem entender os conceitos envolvidos (Monteiro, 2012).

Deste modo, Silveira (2016) afirma que é necessário que o professor pesquise métodos para trabalhar os conteúdos de forma diferenciada e aponta caminhos que auxiliam nesta busca, sendo um deles a contextualização. O autor enfatiza que contextualizar os conteúdos permite que o aluno seja mais ativo, deixando de ser apenas um observador dentro e fora do ambiente da sala de aula. Ele discorre que assim, a escola possibilita uma construção maior do senso crítico do discente e desenvolve um pensamento que faz conexões entre a teoria e a prática. Esta abordagem torna o ensino mais significativo e o processo de aprendizado mais agradável e interessante, uma vez que auxilia na compreensão e na aplicação dos conceitos matemáticos aprendidos em sala de aula (Silveira, 2016).

Em concordância, Alves (2016) também indica possíveis soluções para os problemas anteriormente citados. Dentre tantas possibilidades, existe uma que vem ganhando visibilidade no meio acadêmico: a História da Matemática (Alves, 2016).

Por meio de pesquisas, foi comprovado que contextualizar os conteúdos utilizando a História da Matemática instiga a curiosidade dos alunos, fazendo-os se interessarem mais pelos assuntos vistos em sala de aula (Lara, 2013). Seguindo por este mesmo viés, a discussão sobre a Sequência de Fibonacci pode ser iniciada em sala de aula por meio da contextualização histórica, abordando a origem do tema.

Em seu primeiro livro, Leonardo Fibonacci propôs a seguinte situação:

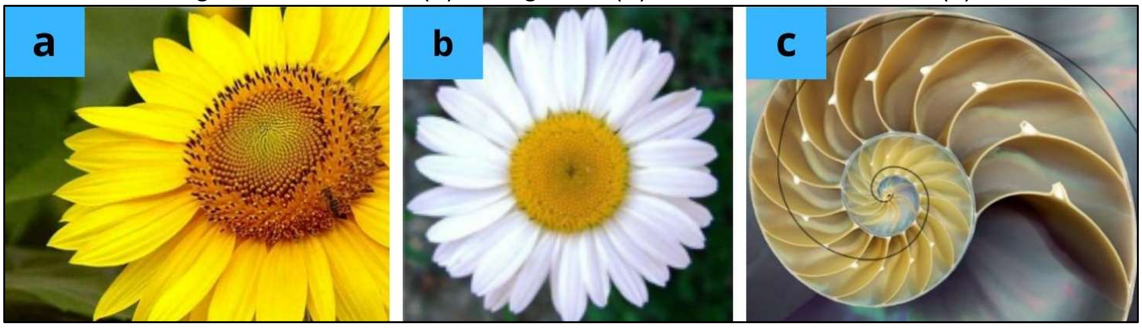
> Se em um recinto fechado for colocado um casal de coelhos, que demore um mês para estar pronto para o cruzamento e mais um mês para reproduzir. Supondo que esse casal tenha outro casal de coelhos, quantos casais terão nesse recinto ao final de um ano, desconsiderando a mortalidade? (Rocha; Daude, 2021, p. 102).

Adiante, na resolução do problema, observou-se determinado padrão, o qual originou a famosa Sequência de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144… Diante disso, sabe-se que a quantidade de casais de coelhos ao decorrer de cada mês é a soma das quantidades de casais existentes nos dois meses anteriores (Cardoso; Quaresma, 2012).

Em anos posteriores à sua criação e depois de ser estudada por outros matemáticos, a Sequência foi percebida em inúmeras áreas que até então não aparentavam ter ligação alguma entre si e menos ainda com a Matemática (Silva; Almeida, 2020).

A Sequência de Fibonacci favorece a interdisciplinaridade entre a Matemática e as Ciências da Natureza, de modo que a mesma aparece em incontáveis situações, seja na forma de sequência numérica propriamente dita ou por meio da espiral de Fibonacci. Esta ocorrência é perceptível ao tomar exemplos como folhas, troncos de árvores, frutos, número de pétalas de flores e até mesmo animais e seres humanos (Pacheco, 2021) (Figura 1).

Figura 1 - Girassol (a), margarida (b) e concha do Nautilus (c)



Fontes: (a) Barbosa (2017, p. 65).
(b) Pacheco (2021, p. 53).
(c) Belini (2015, p. 28).

Uma propriedade fascinante da Sequência de Fibonacci é a da Razão Áurea, conhecida também como Número de Ouro. Este, é obtido a partir da divisão de um Número de Fibonacci por seu antecessor. Ao repetir esta operação, os valores encontrados serão cada vez mais próximos do número $\varphi \cong 1{,}618$ (Barbosa, 2017).

O estudo da Razão Áurea favorece a prática da interdisciplinaridade, visto que se relaciona com diferentes áreas como a Matemática e a Arquitetura, podendo ser verificado em diversas construções, sendo elas antigas, como as Pirâmides de Gizé e o Partenon, ou contemporâneas, como a sede da ONU (Barbosa, 2017).

Ainda sobre a interdisciplinaridade, a Razão Áurea relaciona também a Matemática e as Artes. Muitas obras do período Renascentista apresentam esta razão, como "O nascimento de Vênus", a "Mona Lisa" e o "Homem Vitruviano" (Leopoldino, 2016).

Neste contexto, a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018) destaca as habilidades dos alunos de relacionar situações cotidianas a conhecimentos matemáticos adquiridos, ou seja, que os discentes vejam possibilidades de aplicar o que aprenderam (Brasil, 2018). Isto seria possível de diversas maneiras e um dos caminhos é utilizar a contextualização (Silveira, 2016).

No campo da Álgebra, ainda são destacadas outras importantes habilidades, tais como identificar e investigar regularidades e padrões em sequências numéricas; construir e completar sequências utilizando normas pré-estabelecidas (Brasil, 2018).

A partir dos fatos apresentados anteriormente, conclui-se que o estudo da Sequência de Fibonacci é de suma importância. Verifica-se que o tema possibilita diversas aplicações, o que pode proporcionar aulas mais significativas e interessantes, tanto para alunos, quanto para professores.

1.2.3 Objetivo geral

Apresentar a Sequência de Fibonacci, bem como a sua origem, a fórmula de recorrência associada, sua importância e presença no cotidiano.

1.2.4 Público-alvo

Alunos do Ensino Médio que tenham estudado Sequências Numéricas.

2 RELATÓRIO DO LEAMAT II

2.1 Atividades desenvolvidas

A primeira aula do componente curricular LEAMAT II ocorreu no dia 30 de maio de 2023. A professora Ana Paula Rangel de Andrade apresentou o plano de ensino, os objetivos a serem alcançados, comentou que a primeira semana seria destinada a fazer correções no relatório, tendo como data limite de entrega o dia 02 de junho de 2023 e enfatizou que a entrega do relatório com as correções seria de suma importância e um critério de avaliação.

Em seguida, explicou resumidamente como seria o andamento do semestre, que uma sequência didática seria elaborada e aplicada na própria turma do LEAMAT em que os colegas poderiam sugerir mudanças, contribuindo para o aprimoramento da mesma. Foi levantada a possibilidade de publicar o trabalho em revistas e apresentá-lo em eventos de nível nacional ou internacional.

No dia 06 de junho de 2023, a professora explicou que as alterações referentes ao relatório do LEAMAT I seriam feitas na entrega do relatório do LEAMAT II. Foi enfatizado que a sequência didática preparada tem como objetivo ser uma aula diferenciada, portanto, deve ser especial.

Na conversa com o grupo destacou-se a importância do conhecimento do tema por parte de todos os integrantes e dois textos sobre o assunto foram disponibilizados no Google Classroom. Foi proposta como tarefa para a próxima aula, ler os textos e recortar partes destes que o grupo julgasse adequado estar em uma sequência didática.

Na semana seguinte, dia 13 de junho, o grupo iniciou a aula comentando sobre os textos lidos e deu andamento à tarefa proposta na semana anterior, marcando os trechos importantes.

Na aula do dia 20 de junho, a professora esclareceu algumas dúvidas acerca do Triângulo de Pascal e solicitou que o grupo, com base nos artigos lidos, colocasse no papel as ideias que considerasse interessantes para uma sequência didática. Após estas instruções, as professoras em formação reuniram-se para elaborar um quadro com o “desenho” da aula contendo a sequência que o grupo gostaria de seguir, descrevendo as etapas e os seus respectivos objetivos.

No dia 27 de junho, as autoras se reuniram e, a pedido da professora, começaram a selecionar trechos dos artigos lidos para utilizar na sequência didática.

Inicialmente, o grupo selecionou trechos referentes à história de Leonardo Fibonacci, ao Liber Abaci e ao problema dos coelhos. Também foram solicitados slides com os itens citados anteriormente.

Do dia 04 de julho até o dia 22 de agosto, as professoras em formação reuniram-se no laboratório de Informática para elaborar a sequência didática.

Do dia 29 de agosto até o dia 26 de setembro ocorreram as apresentações dos trabalhos das duas linhas de pesquisa, em que o grupo aplicou o trabalho no dia 19 de setembro na turma do LEAMAT II. A aplicação ocorreu de forma satisfatória, contando com a participação da turma, sugestões de melhorias e elogios.

No dia 03 de outubro ocorreu a avaliação deste componente curricular com as orientadoras das duas linhas de pesquisa. Alguns pontos foram destacados: a falta de atenção do grupo nas aulas do componente causada por conversas desconexas do tema central; a importância da escolha de roupas confortáveis para a apresentação do próximo LEAMAT, já que neste foi notório o desconforto resultante da vestimenta de uma das alunas, limitando assim a sua movimentação; a evolução na desenvoltura da fala por parte de algumas integrantes do grupo, porém com urgência de melhorias; a falta de ensaio individual do grupo, o que acabou influenciando na fluidez da aula ministrada. Por fim, foi comentado a falta de uma das integrantes do grupo, o que acarretou mais trabalho para cada participante.

2.2 Elaboração da sequência didática

2.2.1 Planejamento da sequência didática

A Sequência Didática está dividida em sete partes (Quadro 1).

Quadro 1 - Etapas e objetivos da Sequência Didática

Etapas	Objetivos
Quem foi Fibonacci?	Tecer comentários sobre a história de Leonardo Fibonacci e do Liber Abaci.
O Problema dos Coelhos	Apresentar a sequência por meio do crescimento populacional dos coelhos.
Dos Coelhos à Sequência	Deduzir a fórmula de recorrência e definir formalmente a Sequência e a notação da Sequência de Fibonacci.
Um Número que vale Ouro	Investigar as razões entre dois números consecutivos da sequência e relacioná-las ao Número de Ouro.
Vídeo	Observar a presença da Sequência de Fibonacci na natureza.
Medidas Áureas no Corpo Humano	Relacionar as razões entre partes do corpo com o Número de Ouro.
Desafio	Avaliar alguns assuntos tratados na aula por meio de um quiz sobre a Sequência de Fibonacci.

Fonte: Elaboração própria.

As notas históricas referentes à vida de Leonardo de Pisa se encontram no Apêndice A-I, a Apostila 1 com as razões relacionadas ao Número de Ouro se encontra no Apêndice A-II e a Apostila 2 com as medidas áureas no corpo humano se encontra no Apêndice A-III.

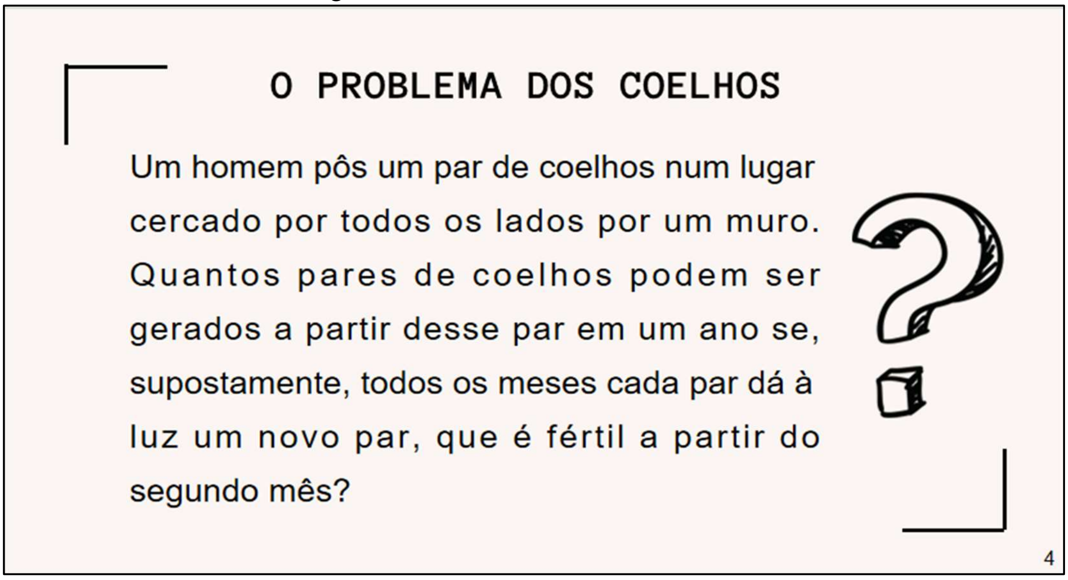
A primeira etapa, “Quem foi Fibonacci”, consiste em uma abordagem histórica sobre a vida de Leonardo de Pisa, o século e a cidade em que nasceu, as viagens que fez e as obras que escreveu, destacando o Liber Abaci. Tal abordagem é feita de forma oral com a apresentação de dois slides (Figura 2).

Figura 2 - Leonardo Fibonacci e o Liber Abaci

Fonte: Elaboração própria.

Após a explicação da história de Fibonacci e de sua obra Liber Abaci, as professoras em formação iniciam a segunda etapa, “Dos Coelhos à Sequência”, apresentando o famoso problema que deu origem à Sequência de Fibonacci (Figura 3).

Figura 3 - O Problema dos Coelhos



Fonte: Elaboração própria.[1]

Para auxiliar na resolução do problema, os casais de coelhos são impressos, desenhados e recortados em Etil, Vinil e Acetato (E.V.A.), recebendo cores e tamanhos diferentes para representar filhotes e adultos. É utilizado um TNT como fundo para colar os coelhos e montar a resolução do problema (Figura 4).

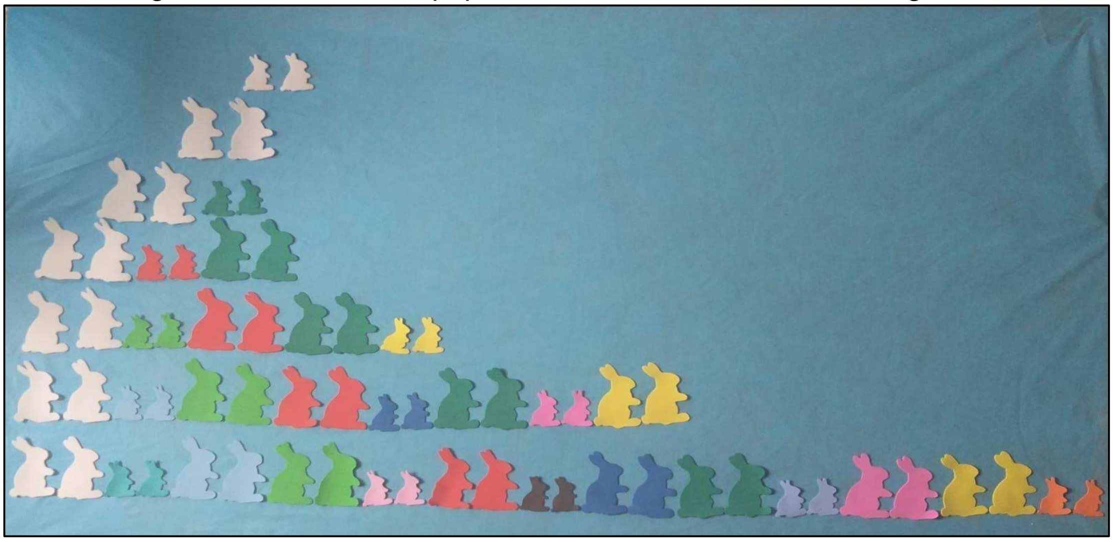
[1] O enunciado do problema foi retirado da seguinte referência: Barbosa (2017).

Figura 4 - Coelhos em E.V.A

Fonte: Elaboração própria.

A sequência é deduzida com os alunos, sendo solicitado que os mesmos participem da resolução, indo à frente colar as figuras e calculando a quantidade de casais de coelhos do próximo mês (Figura 5).

Figura 5 - Crescimento populacional dos coelhos em um diagrama



Fonte: Elaboração própria.

Após os alunos calcularem as quantidades de pares de coelhos em cada mês, é construída a tabela com a resolução do problema até o décimo segundo mês na lousa (Tabela 1). Na sequência, é requisitada a identificação do padrão existente, o qual se dá de forma recursiva, pois cada Número de Fibonacci, a partir do terceiro, é resultado da soma dos dois anteriores.

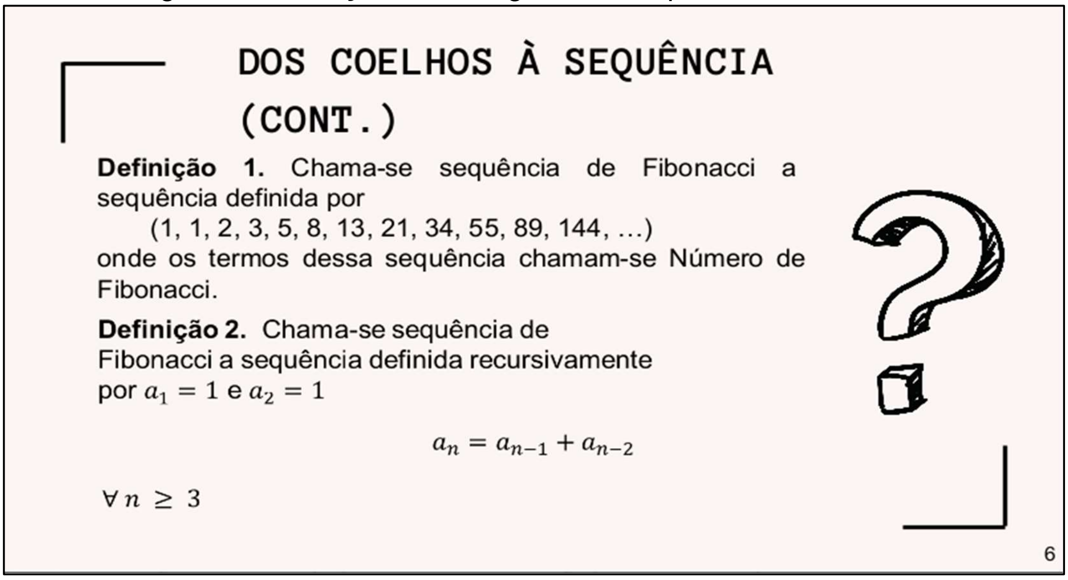
Tabela 1 - Crescimento populacional dos coelhos

Mês	Nº de pares de adultos	Nº de pares de filhotes	Total
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	2
4	2	1	3
5	3	2	5
6	5	3	8
7	8	5	13
8	13	8	21
9	21	13	34
10	34	21	55
11	55	34	89
12	89	55	144

Fonte: Elaboração própria.

Na terceira etapa, "Dos Coelhos à Sequência", são apresentadas duas definições da Sequência de Fibonacci e o termo geral da mesma (Figura 6).

Figura 6 - Definição e termo geral da Sequência de Fibonacci

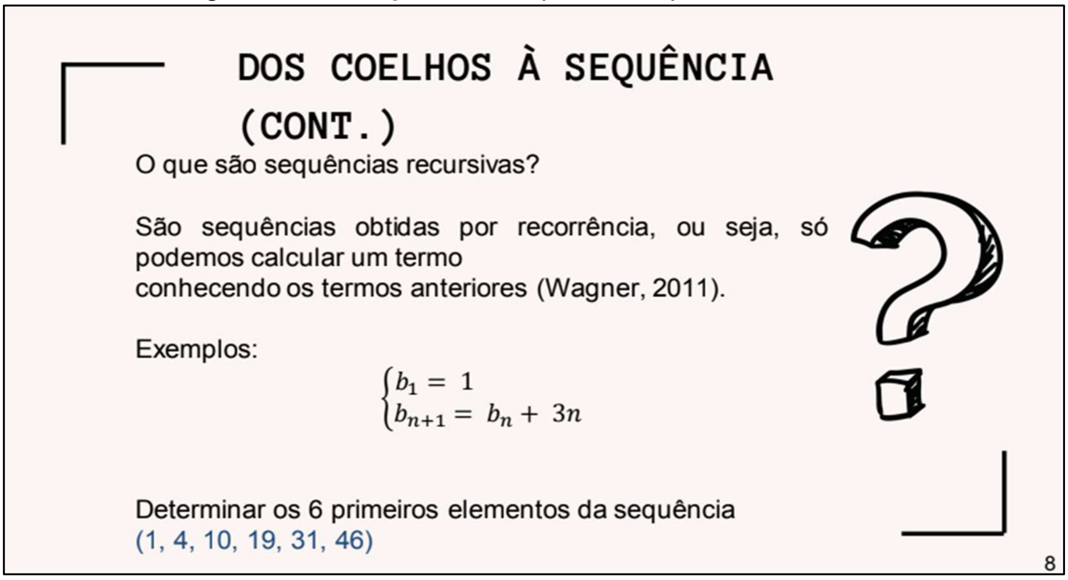


Fonte: Elaboração própria.[2]

[2] As definições foram retiradas da seguinte referência: Oliveira (2013).

A seguir, as professoras em formação explicam sobre a recursividade, uma das principais características da Sequência de Fibonacci e solicitam que os alunos encontrem os seis primeiros termos de uma determinada sequência de exemplo utilizando este conceito (Figura 7).

Figura 7 - Definição e exemplo de sequência recursiva



Fonte: Elaboração própria.

Na quarta etapa, “Um Número que vale Ouro”, os alunos recebem a Apostila 1, na qual há uma questão (Figura 8). Nesta, é solicitado que dividam um Número de Fibonacci pelo seu antecessor utilizando uma calculadora, preencham a tabela com os resultados e, em seguida, verifiquem de que número os resultados se aproximam.

Figura 8 - Razões entre dois Números de Fibonacci

1- Calcule as razões entre os números de Fibonacci:

$\frac{a_2}{a_1} =$

$\frac{a_3}{a_2} =$

$\frac{a_4}{a_3} =$

$\frac{a_5}{a_4} =$

$\frac{a_6}{a_5} =$

$\frac{a_7}{a_6} =$

$\frac{a_8}{a_7} =$

$\frac{a_9}{a_8} =$

$\frac{a_{10}}{a_9} =$

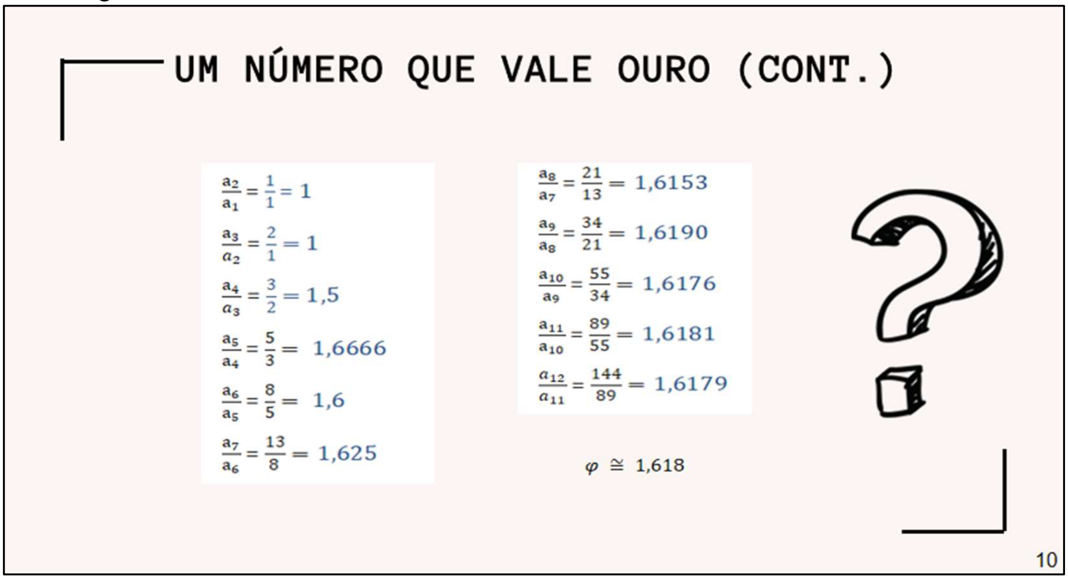
$\frac{a_{11}}{a_{10}} =$

$\frac{a_{12}}{a_{11}} =$

Fonte: Elaboração própria.

É dado um tempo para que os alunos façam as divisões e, em seguida, é feita uma discussão com a turma sobre os resultados encontrados. Posteriormente, é apresentada a solução das divisões e mostrado o valor aproximado do Número de Ouro (Figura 9).

Figura 9 - Razões entre os Números de Fibonacci e o Número de Ouro



Fonte: Elaboração própria.

Após apresentar o Número de Ouro, são mostrados dois exemplos na natureza em que possivelmente há a presença da Sequência de Fibonacci, os quais são a concha do Nautilus marinho e as espirais das sementes do girassol (Figura 10).

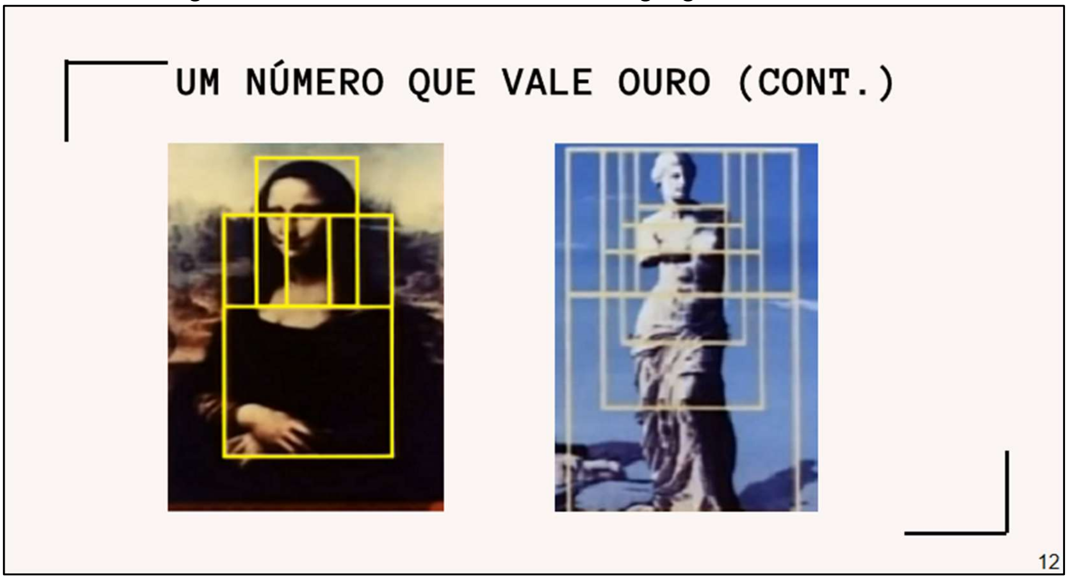
Figura 10 - A Concha do Nautilus Marinho e as Espirais do Girassol

Fonte: Elaboração própria.[3]

Há algumas obras de arte com a possível presença do Número de Ouro, como a Mona Lisa, de Leonardo da Vinci e a estátua grega “Vênus de Milo” (Figura 11).

[3] As imagens foram retiradas das seguintes referências: Silva e Almeida (2020) e Barbosa (2017).

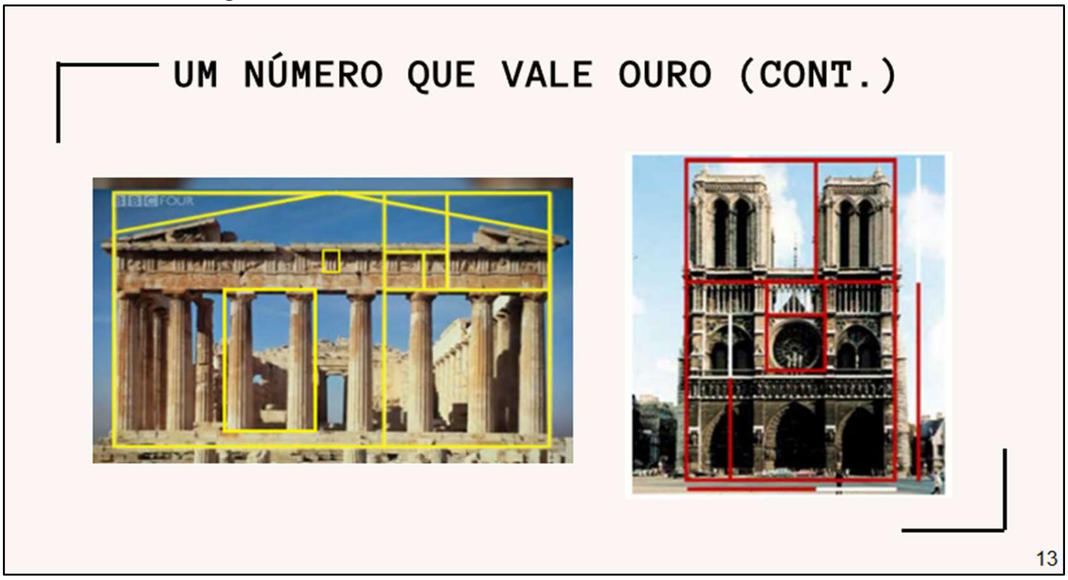
Figura 11 - A Mona Lisa e a estátua grega Vênus de Milo



Fonte: Elaboração própria.[4]

Há também monumentos com a possível presença do Número de Ouro, como o Partenon e a Catedral de Notre Dame (Figura 12).

Figura 12 - O Partenon e a Catedral de Notre Dame



Fonte: Elaboração própria.[5]

No entanto, muitos autores e pesquisadores questionam a presença do Número de Ouro nos exemplos mostrados anteriormente.

[4] As imagens foram retiradas da seguinte referência: Barbosa (2017).
[5] As imagens foram retiradas da seguinte referência: Barbosa (2017).

Após estes exemplos, inicia-se a quinta etapa: “Medidas Áureas no Corpo Humano”, em que os alunos recebem a Apostila 2 contendo medições que devem ser efetuadas no corpo (Figura 13) e escolhem dois pares de colegas para realizá-las.

Figura 13 - Razões entre as medidas de algumas partes do corpo

Medidas Áureas no corpo humano

1- Faça as seguintes medições e, em seguida, calcule as razões pedidas:

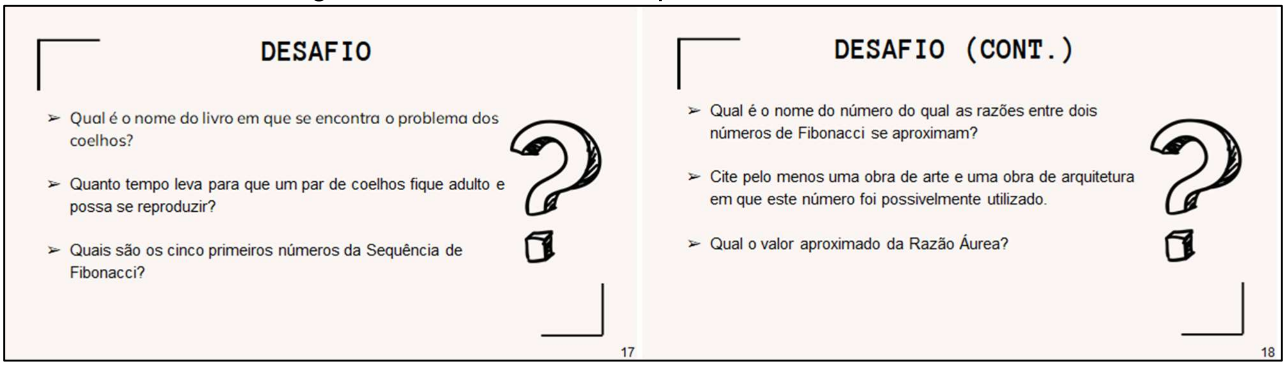
Medidas	**Aluno(a)**
Da altura - *a*	
Do umbigo até o chão - *b*	
Do ombro até a ponta do dedo médio - *c*	
Do cotovelo até a ponta do dedo médio - *d*	
Da perna - *e*	
Do joelho até o chão - *f*	
Do queixo ao alto da testa - *g*	
Razões	**Resultados**
$\frac{a}{b}$	
$\frac{c}{d}$	
$\frac{e}{f}$	
$\frac{g}{h}$	
Média aritmética das 4 razões	

Fonte: Elaboração própria.

Feito isto, os alunos efetuam as razões entre as medidas corporais obtidas, comparam os resultados da média entre elas e, posteriormente, indica-se a pessoa que possui as razões entre as dimensões corporais mais próximas do Número de Ouro.

Por fim, inicia-se a sexta etapa: "Desafio". Neste momento, é realizado um quiz referente ao tema da aula como uma forma de avaliar o aprendizado (Figura 14).

Figura 14 - Quiz sobre a Sequência de Fibonacci



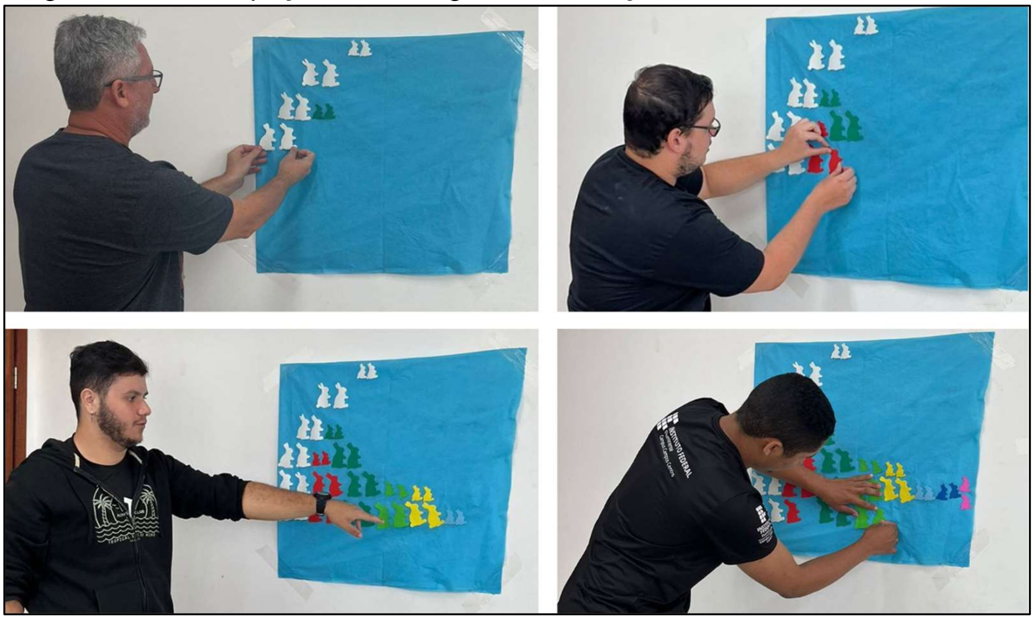
Fonte: Elaboração própria.

2.2.2 Aplicação da sequência didática na turma do LEAMAT II

A aplicação na turma de LEAMAT II ocorreu no dia 19 de setembro de 2023, contando com uma ótima participação e interação dos colegas (Figura 15), elogios e sugestões de melhorias no trabalho.

Os alunos da turma do LEAMAT II comentaram que o tema é muito interessante, visual e atrativo e elogiaram o uso do material concreto.

Figura 15 - Participação dos colegas na resolução do Problema dos Coelhos



Fonte: Protocolo de pesquisa.

As professoras em formação foram elogiadas pela calma e foi notada uma evolução das componentes (Figura 16), já que o nervosismo diminuiu desde a apresentação do LEAMAT I.

Foi sugerido que uma das professoras em formação falasse mais alto, pois em uma turma de Educação Básica isso seria necessário, uma vez que os alunos estarão em maior quantidade e podem ser mais agitados.

Figura 16 - Leitura e explicação do Problema dos Coelhos

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Segundo as complementações feitas pelos colegas da turma do LEAMAT II referentes ao material didático, foi abordado que seria necessário fazer uma modificação na cor do tecido (T.N.T.) de fundo (Figura 17), já que esta não destaca as cores dos coelhos, especialmente os azuis. Também foi definido que o quadro deve estar de frente para a turma, não ao lado, visando uma melhor distribuição, organização e visualização do material.

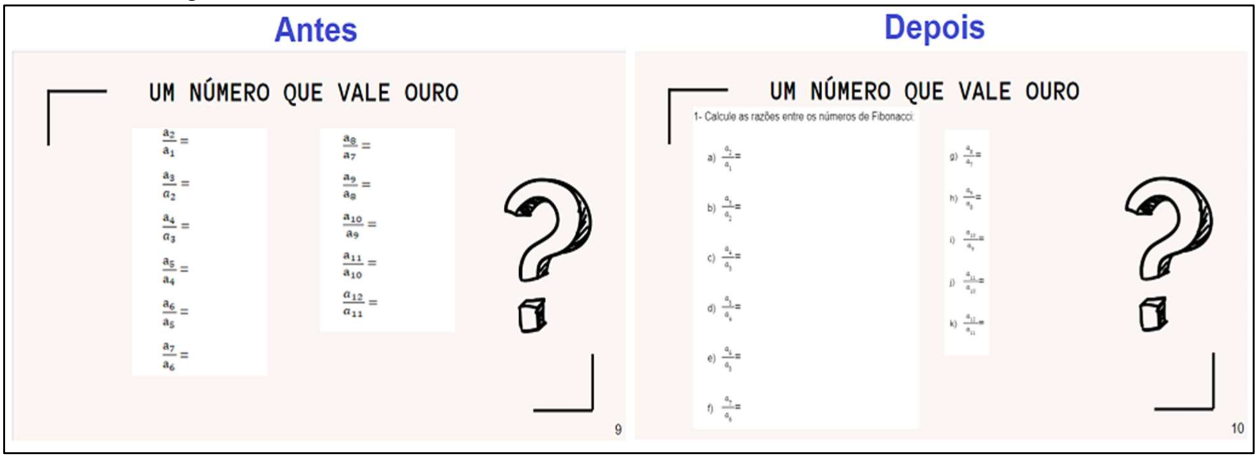
Figura 17 - Alteração no quadro com a resolução do Problema dos Coelhos

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Outro ponto levantado foi o uso do projetor. Existe a possibilidade da escola de Educação Básica em que o trabalho será aplicado, não dispor de tal recurso, embora possa ter uma televisão. Isto possibilitaria um melhor proveito do quadro.

Em relação à Apostila 1, a qual contém as razões a serem feitas entre os Números de Fibonacci, foi observado que os itens deveriam ser nomeados por a, b, c,… (Figura 18).

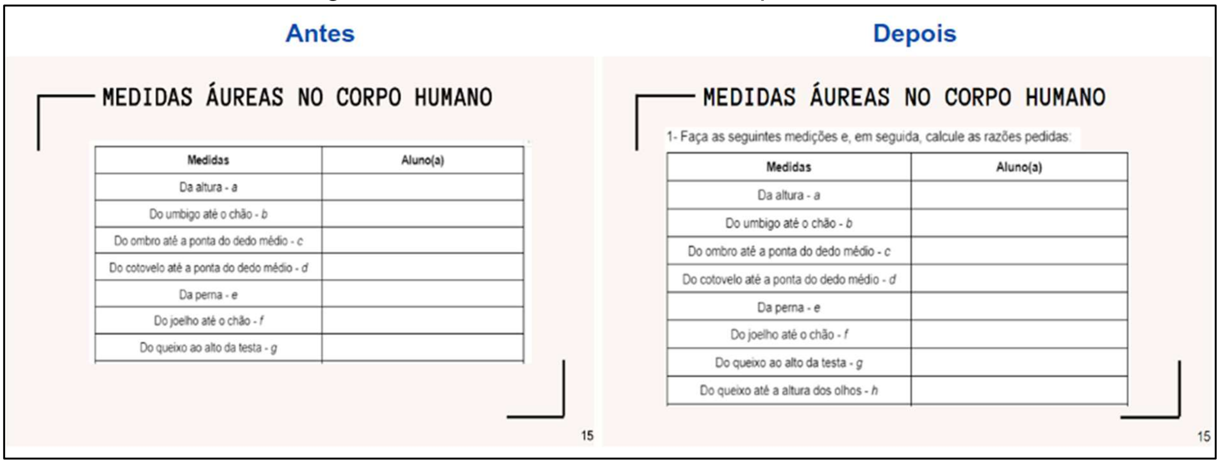
Figura 18 - Acréscimo de itens nas razões entre dois Números de Fibonacci



Fonte: Elaboração própria.

Quanto à Apostila 2, que contém as medições e razões entre as dimensões corporais, foi notado que a medida h não foi atribuída a nenhuma parte do corpo. Deste modo, a razão $\frac{g}{h}$ não seria possível de ser calculada e, por esta razão, os alunos sugeriram utilizar três razões em vez de quatro (Figura 19).

Figura 19 - Medidas Áureas no Corpo Humano



Fonte: Elaboração própria.

Além disso, foi recomendado que a quantidade de casas decimais desejada ficasse explícita na folha e que os professores em formação explicassem como fazer as aproximações durante o processo das medições (Figura 20).

Figura 20 - Medições nos colegas para realizar a atividade

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Foi recomendado que o desafio ao final da sequência didática fosse mais rápido, com perguntas curtas e com a possibilidade de ser realizado em duplas. Além disso, foi comentado que, em vez de uma das professoras em formação responder com a turma, os alunos podem resolver a questão e responder às perguntas.

Outra observação feita foi que as perguntas poderiam ficar em um mesmo slide, sem a necessidade de um outro slide com as respostas.

No que diz respeito ao vídeo escolhido para complementar a aula, os colegas recomendaram que na aplicação em uma escola de Educação Básica, o vídeo fosse utilizado no início da Sequência Didática (Figura 21). Isto mudaria a organização cronológica da aula, no entanto, poderia despertar a curiosidade dos alunos logo no início.

Figura 21 – Ajuste na ordem das etapas da aula

Antes

Quadro 1 - Etapas e objetivos da Sequência Didática

Etapas	Objetivos
Quem foi Fibonacci?	Tecer comentários sobre a história de Leonardo Fibonacci e do Liber Abaci.
O Problema dos Coelhos	Apresentar a sequência por meio do crescimento populacional dos coelhos.
Dos Coelhos à Sequência	Deduzir a fórmula de recorrência e definir formalmente a Sequência e a notação da Sequência de Fibonacci.
Um Número que vale Ouro	Investigar as razões entre dois números consecutivos da sequência e relacioná-las ao Número de Ouro.
Vídeo	Observar a presença da Sequência de Fibonacci na natureza.
Medidas Áureas no Corpo Humano	Relacionar as razões entre partes do corpo com o Número de Ouro.
Desafio	Avaliar alguns assuntos tratados na aula por meio de um quiz sobre a Sequência de Fibonacci.

Fonte: Elaboração própria.

Depois

Quadro 2 - Etapas e objetivos da Sequência Didática

Etapas	Objetivos
Vídeo: Matemática e Natureza	Observar a presença da Sequência de Fibonacci na natureza e despertar a curiosidade e o interesse pelo tema.
Quem foi Fibonacci?	Tecer comentários sobre a história de Leonardo Fibonacci e do Liber Abaci.
Dos Coelhos à Sequência	Apresentar a sequência por meio do crescimento populacional dos coelhos.
Formalizando o conceito	Deduzir a fórmula de recorrência e definir formalmente a Sequência de Fibonacci e notação.
Um Número que vale Ouro	Investigar as razões entre dois números consecutivos da sequência e perceber que o número de ouro pode estar associado à elas
Medidas Áureas no Corpo Humano	Relacionar as razões entre partes do corpo com o Número de Ouro
Desafio	Avaliar alguns assuntos tratados na aula por meio de um quiz sobre a Sequência de Fibonacci

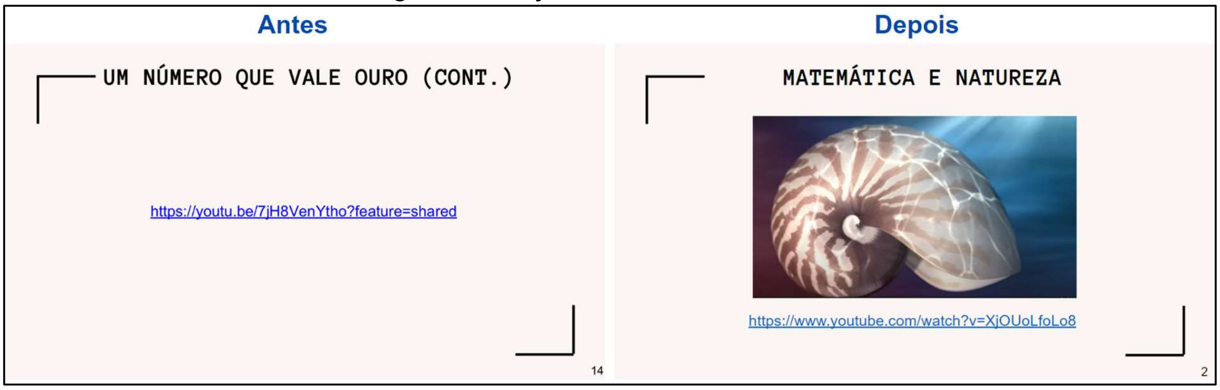
Fonte: Elaboração própria.

Fonte: Elaboração própria.

Após, recomendou-se a utilização de um recorte do vídeo "Donald no país da Matemágica", utilizando a parte em que o Número de Ouro e a Razão Áurea são mostrados. No entanto, foi sugerido que uma das professoras em formação explicasse o vídeo ou que o grupo selecionasse um com uma melhor explicação, uma vez que a fala do Pato Donald nem sempre é compreendida.

Em conversa com a professora orientadora, optou-se pelo vídeo “Matemática e Natureza - Sequência de Números de Fibonacci e demais leis que regem o mundo” no início da Sequência (Figura 22).

Figura 22 - Ajustes no slide do vídeo

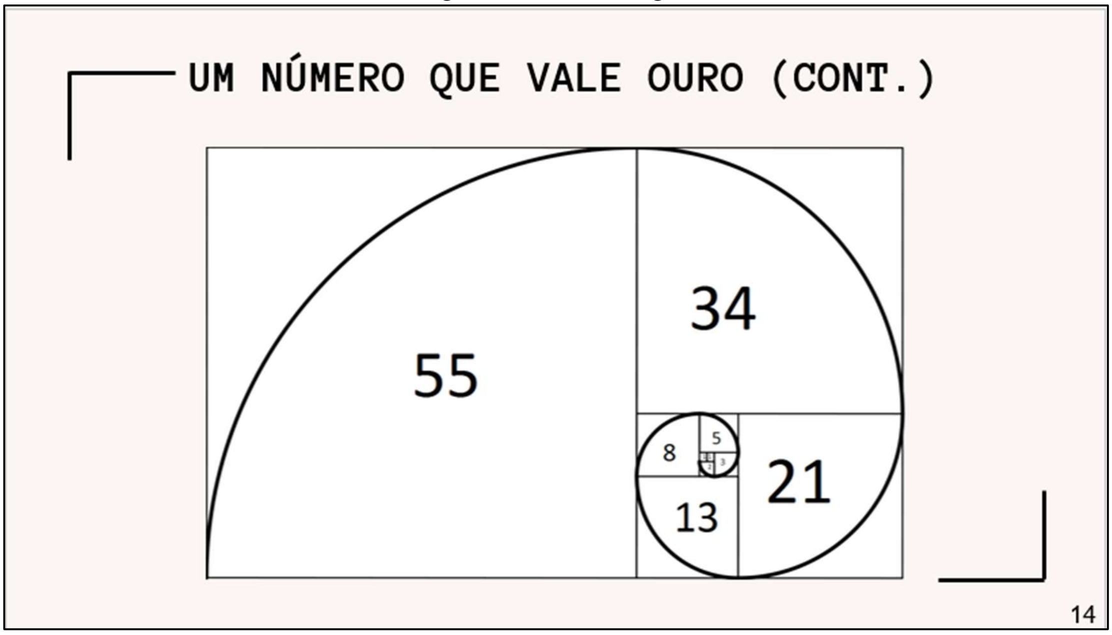


Fonte: Elaboração própria.

A professora orientadora deste trabalho sugeriu que as professoras em formação colocassem como parte da aula perguntas que visem a participação da turma de maneira mais efetiva. Uma das opções para promover maior participação é perguntar como os alunos fizeram, engenhando assim uma participação baseada na resposta e na linha de raciocínio dos educandos.

Foi necessário confeccionar um novo slide com a figura de um Retângulo Áureo (Figura 23), para que os alunos pudessem entender melhor sua relação com as obras mostradas a seguir. O slide foi adicionado após a figura do girassol e da concha do Nautilus Marinho.

Figura 23 – Retângulo Áureo



Fonte: Elaboração própria.[6]

Além disso, foi necessário adicionar os autores das definições utilizadas nos slides 6, 7, 8 e 9 e referenciar a obra da qual o enunciado do problema dos coelhos foi retirado.

[6] A imagem foi retirada da seguinte referência: https://atitudereflexiva.wordpress.com/tag/retangulo-de-ouro/

3 RELATÓRIO DO LEAMAT III

3.1 Atividades desenvolvidas

A primeira aula do componente curricular LEAMAT III ocorreu no dia 19 de outubro, em que foram dadas orientações sobre o andamento do semestre, explicações sobre a aplicação do trabalho em uma escola de Educação Básica e ajustes nos relatórios do LEAMAT I e II.

No dia 09 de novembro ocorreu a revisão nos relatórios do LEAMAT I e II e foram feitos mais ajustes nos mesmos de acordo com as observações da orientadora deste trabalho. Além disso, foi ajustado que a aplicação do trabalho em uma escola de Ensino Básico seria feita no ano de 2024, uma vez que o ano letivo dessas escolas se encerraria em 2023 antes que a nova sequência didática estivesse pronta.

No dia 16 de novembro a orientadora conversou com o grupo para sanar as dúvidas referentes às observações feitas nos relatórios do LEAMAT I e II. Em seguida, foram esclarecidas as diferenças entre o LEAMAT II e III, em que o grupo recebeu orientações para escrever a nova Sequência Didática com os ajustes necessários. Foi comentado também que o prazo para finalizar os ajustes nos relatórios I e II seria o dia 23 de novembro.

Na aula do dia 23 de novembro, o grupo recebeu orientações para iniciar a escrita da nova Sequência Didática com mudanças e melhorias. Em seguida, a escrita da mesma foi iniciada.

Do dia 30 de novembro até o dia 14 de dezembro o grupo se concentrou na escrita da nova Sequência Didática e em fazer as alterações solicitadas no relatório.

Na aula do dia 21 de dezembro ocorreu a entrega do relatório final do LEAMAT I e II. Em conjunto, foram finalizadas as comparações de antes e depois da Sequência Didática, em especial, nos pontos em que os colegas da turma do LEAMAT II sugeriram mudanças. Além disso, ajustes nos Apêndices e no Sumário também foram feitos.

Nos dias 01 e 08 de fevereiro, o grupo se concentrou em fazer correções no relatório e nas folhas a serem entregues no dia da aplicação na turma de Educação Básica. Além disso, as datas do ensaio e da aplicação do trabalho do LEAMAT III em uma turma de educação básica foram marcadas.

No dia 14 de fevereiro o grupo se reuniu no laboratório de informática para fazer ajustes no relatório e nas atividades.

Nos dias 27 de fevereiro e 04 de março, ocorreram os ensaios com a orientadora deste trabalho.

A aplicação da Sequência Didática em uma turma de Educação Básica ocorreu no dia 07 de março, em uma Instituição Federal de Ensino. A aula foi aplicada em uma turma de primeira série do Ensino Médio.

Nas aulas dos dias 14 e 21 de março, o grupo se reuniu no laboratório de informática para escrever sobre a aplicação do trabalho e as considerações finais.

A avaliação do componente curricular LEAMAT III com as orientadoras das duas linhas de pesquisa ocorreu no dia 04 de abril de 2024.

3.2 Elaboração da sequência didática

3.2.1 Versão final da sequência didática

A Sequência Didática está dividida em sete partes (Quadro 2).

Quadro 2 - Etapas e objetivos da Sequência Didática

Etapas	Objetivos
Vídeo: Matemática e Natureza	Observar a presença da Sequência de Fibonacci na natureza e despertar a curiosidade e o interesse pelo tema.
Quem foi Fibonacci?	Tecer comentários sobre a história de Leonardo Fibonacci e do Liber Abaci.
Dos Coelhos à Sequência	Apresentar a sequência por meio do crescimento populacional dos coelhos.
Formalizando o conceito	Deduzir a fórmula de recorrência e definir formalmente a Sequência de Fibonacci e notação.
Um Número que vale Ouro	Investigar as razões entre dois números consecutivos da sequência e perceber que o Número de Ouro pode estar associado a elas.
Medidas Áureas no Corpo Humano	Relacionar as razões entre partes do corpo com o Número de Ouro.
Desafio	Avaliar alguns assuntos tratados na aula por meio de um quiz sobre a Sequência de Fibonacci.

Fonte: Elaboração própria.

As notas históricas referentes à vida de Leonardo de Pisa se encontram no Apêndice B-I, a Apostila 1 com as razões relacionadas ao Número de Ouro no Apêndice B-II, a Apostila 2 com as Medidas Áureas no Corpo Humano no Apêndice B-III, a Apostila 3 com o Problema dos Coelhos e uma Sequência Recursiva no Apêndice B-III e a Apresentação de Slides se encontra no Apêndice B-V.

Para iniciar a aula, é apresentado um vídeo (Figura 24) denominado "Matemática e Natureza - Sequência de Números de Fibonacci e demais leis que regem o mundo". Este, tem por objetivo despertar a curiosidade e o interesse dos alunos pelo tema, mostrando como diferentes elementos da natureza se relacionam por meio de um padrão.

Figura 24 - Matemática e Natureza

Fonte: Elaboração própria.

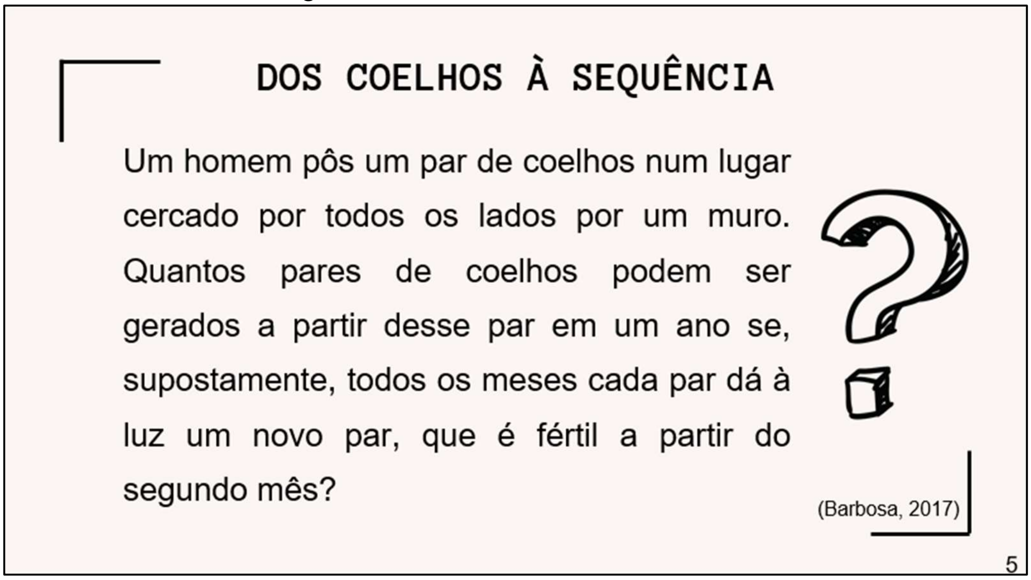
A segunda etapa, "Quem foi Fibonacci", consiste em uma abordagem feita de forma oral sobre a vida de Leonardo de Pisa, o século e a cidade em que nasceu, as viagens que fez e as obras que escreveu, destacando o Liber Abaci (Figura 2).

Figura 2 - Leonardo Fibonacci e o Liber Abaci

Fonte: Elaboração própria.

Após a explicação da história de Fibonacci e de sua obra Liber Abaci, as professoras em formação iniciam a terceira etapa, “Dos Coelhos à Sequência”, apresentando o famoso problema que deu origem à Sequência de Fibonacci (Figura 25).

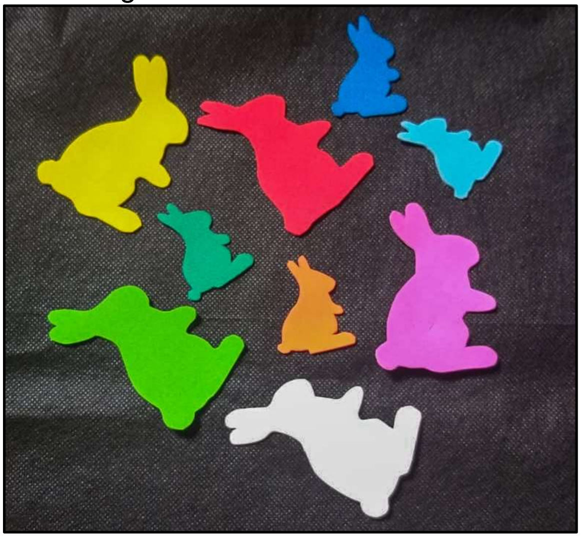
Figura 25 - O Problema dos Coelhos



Fonte: Elaboração própria.

Para auxiliar na resolução do problema, os casais de coelhos são impressos, desenhados e recortados em E.V.A., recebendo cores e tamanhos diferentes para representar filhotes e adultos. É utilizado um TNT como fundo para colar os coelhos e montar a resolução do problema (Figura 26).

Figura 26 - Coelhos em E.V.A



Fonte: Elaboração própria.

A sequência é deduzida com os alunos, sendo solicitado que estes participem da resolução, indo à frente colar as figuras e calculando a quantidade de casais de coelhos do próximo mês. Ao final, tem-se o seguinte desenho (Figura 27).

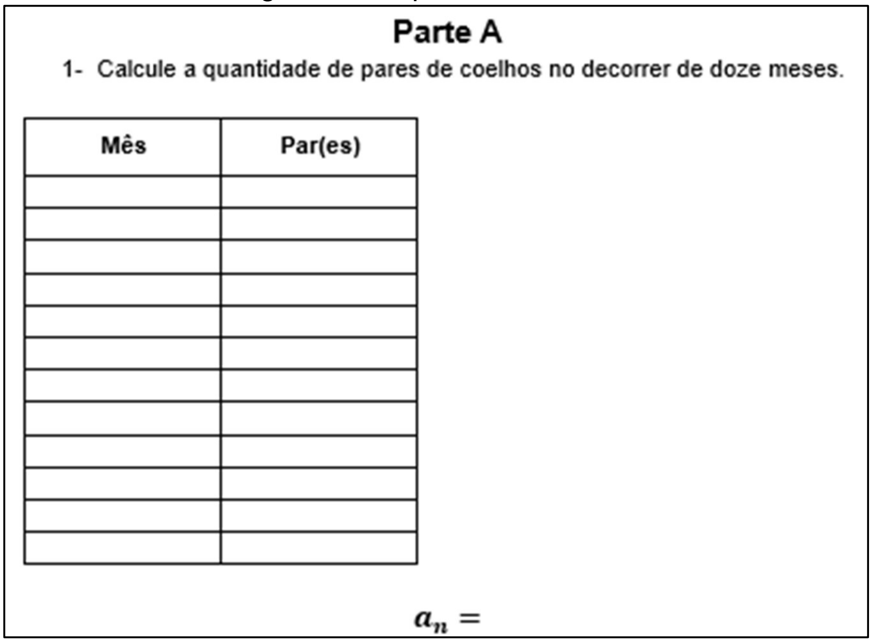
Figura 27 - Crescimento populacional dos coelhos em um diagrama

Fonte: Elaboração própria**.**

Na sequência, é requisitada a identificação do padrão existente, o qual se dá de forma recursiva, isto é, pelo fato de cada Número de Fibonacci, a partir do terceiro, ser a soma dos dois anteriores.

Em seguida, os discentes recebem a Apostila 3 (Figura 28) para completarem a resolução do problema até o décimo segundo mês.

Figura 28 – Apostila 3: Parte A



Parte A

1- Calcule a quantidade de pares de coelhos no decorrer de doze meses.

Mês	Par(es)

$a_n =$

Fonte: Elaboração própria.

Após este cálculo, é construída na lousa, com a participação dos alunos, a tabela com a resolução do problema até o décimo segundo mês (Tabela 1).

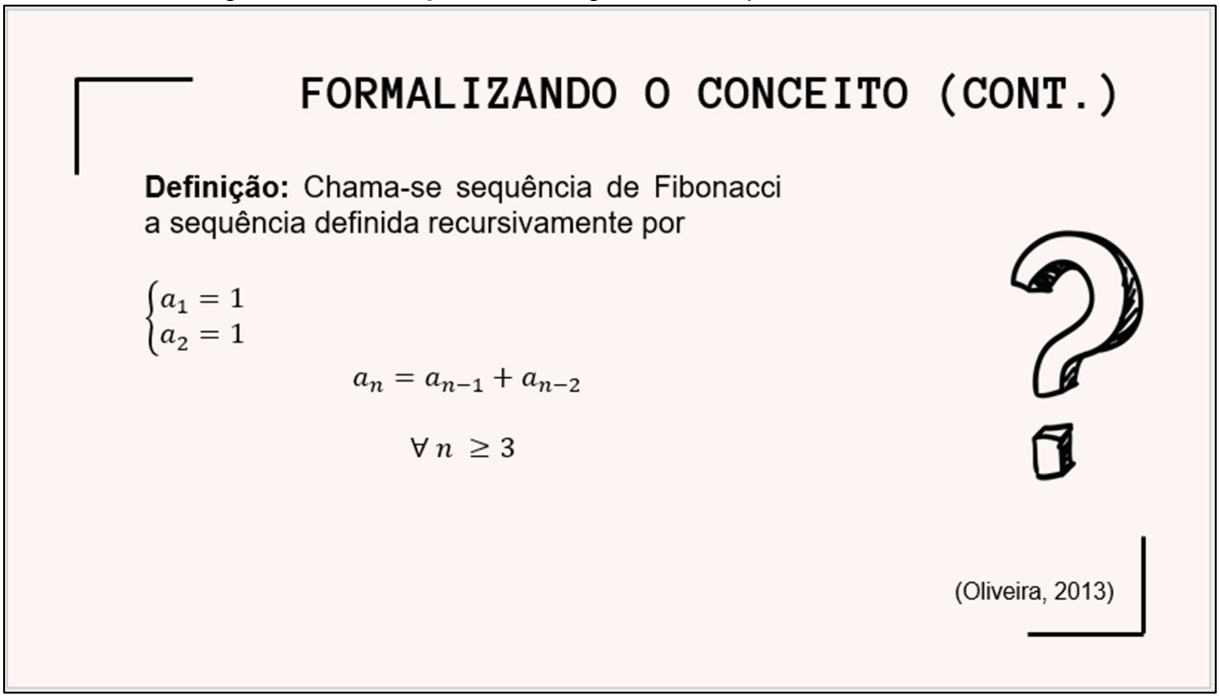
Tabela 1 - Crescimento populacional dos coelhos

Mês	Nº de pares de adultos	Nº de pares de filhotes	Total
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	2
4	2	1	3
5	3	2	5
6	5	3	8
7	8	5	13
8	13	8	21
9	21	13	34
10	34	21	55
11	55	34	89
12	89	55	144

Fonte: Elaboração própria.

Na quarta etapa, “Formalizando o Conceito”, é apresentada uma definição da Sequência de Fibonacci e o termo geral da mesma (Figura 29).

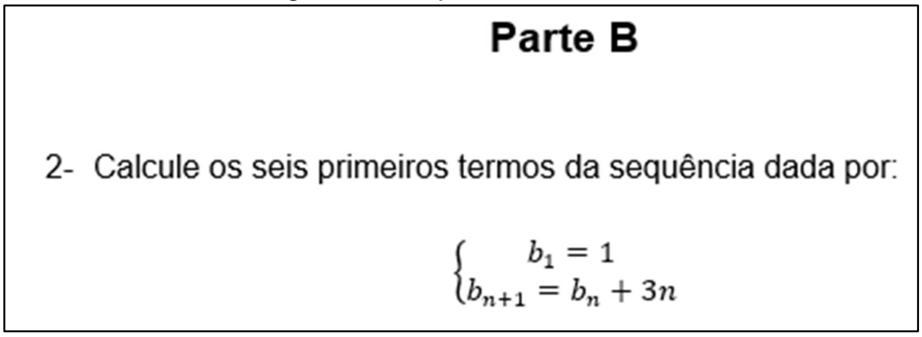
Figura 29 - Definição e termo geral da Sequência de Fibonacci



Fonte: Elaboração própria.

A seguir, as professoras em formação explicam sobre a recursividade, uma das principais características da Sequência de Fibonacci e solicitam que os alunos encontrem os seis primeiros termos de uma determinada sequência, a qual se encontra na parte B da Apostila 3, a qual foi distribuída anteriormente (Figura 30).

Figura 30 – Apostila 3: Parte B



Parte B

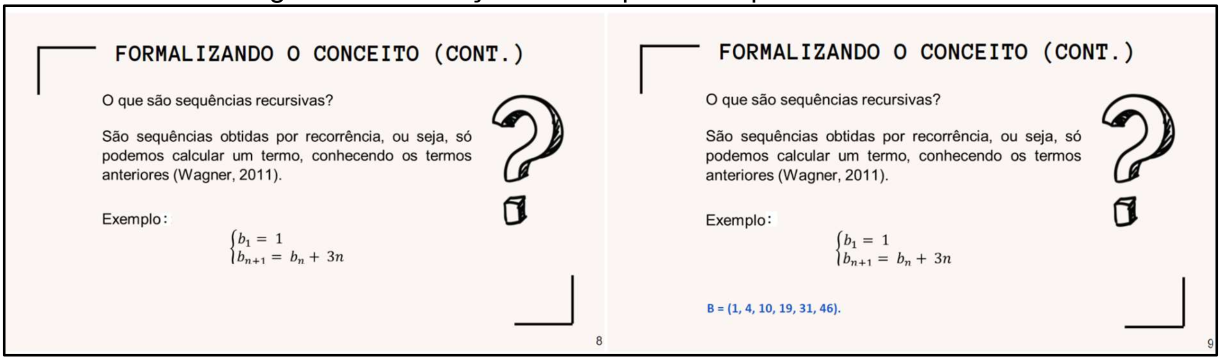
2- Calcule os seis primeiros termos da sequência dada por:

$$\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_{n+1} = b_n + 3n \end{cases}$$

Fonte: Elaboração própria.

A questão é corrigida com os alunos (Figura 31), em que estes explicam como fizeram os cálculos. É explicado sobre a notação própria utilizada para as sequências.

Figura 31 - Definição e exemplo de sequência recursiva



Fonte: Elaboração própria.

Na quinta etapa, "Um Número que vale Ouro", os alunos recebem a Apostila 1, na qual há uma questão (Figura 32). Nesta, é solicitado que dividam um Número de Fibonacci pelo seu antecessor utilizando uma calculadora, preencham a tabela com os resultados encontrados e, em seguida, verifiquem de que número os resultados se aproximam.

Figura 32 - Razões entre dois Números de Fibonacci

1- Calcule as razões entre os números de Fibonacci:

a) $\frac{a_2}{a_1} =$

b) $\frac{a_3}{a_2} =$

c) $\frac{a_4}{a_3} =$

d) $\frac{a_5}{a_4} =$

e) $\frac{a_6}{a_5} =$

f) $\frac{a_7}{a_6} =$

g) $\frac{a_8}{a_7} =$

h) $\frac{a_9}{a_8} =$

i) $\frac{a_{10}}{a_9} =$

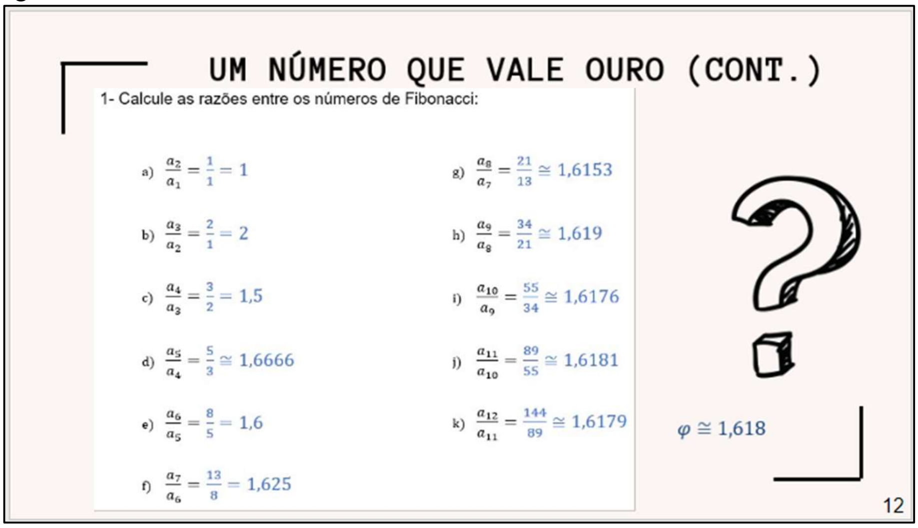
j) $\frac{a_{11}}{a_{10}} =$

k) $\frac{a_{12}}{a_{11}} =$

Fonte: Elaboração própria.

É dado um tempo para que os alunos façam as divisões, sendo solicitada a utilização de quatro casas decimais. Em seguida, é feita uma discussão com a turma sobre os resultados encontrados e mostrado o valor aproximado do Número de Ouro (Figura 33).

Figura 33 - Razões entre os Números de Fibonacci e o Número de Ouro



Fonte: Elaboração própria.

Em seguida, mostram-se alguns exemplos de elementos da natureza em que possivelmente há a presença da Sequência de Fibonacci, tais como a concha do Nautilus marinho e as espirais das sementes do girassol (Figura 10). Entretanto, é comentado que alguns pesquisadores contestam essas afirmações.

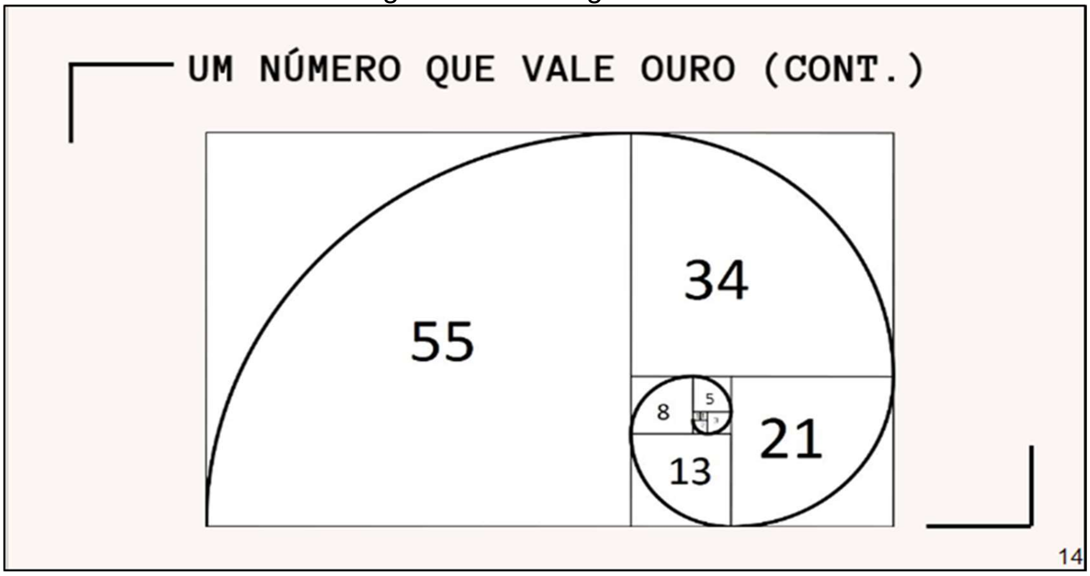
Figura 10 - A Concha do Nautilus Marinho e as Espirais do Girassol

Fonte: Elaboração própria.[7]

Na sequência, é explicado sobre a formação do Retângulo Áureo (Figura 23), bem como sua relação com os números da Sequência de Fibonacci.

[7] As imagens foram retiradas das seguintes referências: Silva e Almeida (2020) e Barbosa (2017).

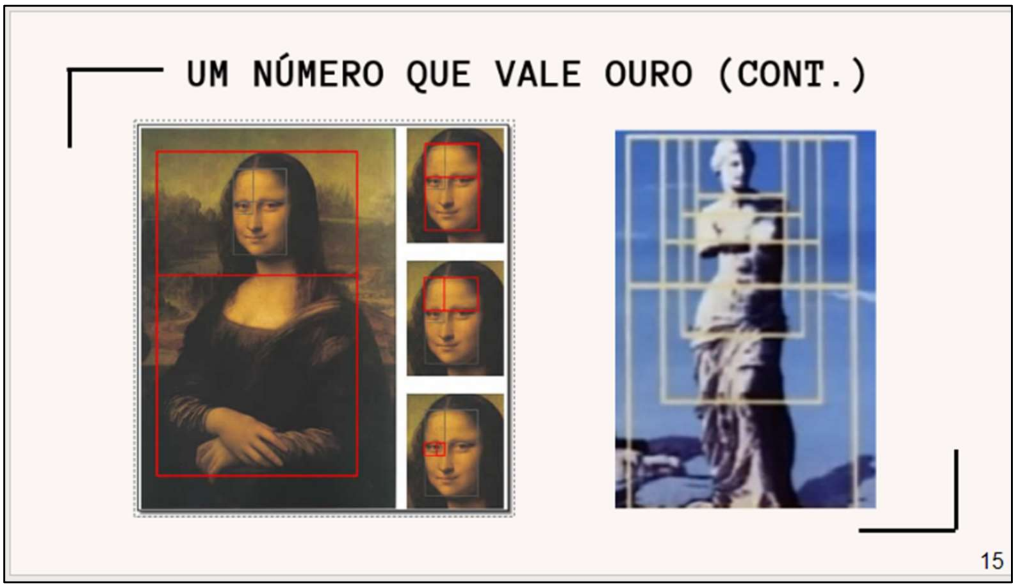
Figura 23 - Retângulo Áureo



Fonte: Elaboração própria.[8]

Também são mostrados exemplos de obras de arte em que o Número de Ouro foi possivelmente utilizado, como a Mona Lisa, do famoso pintor Leonardo da Vinci e a estátua grega "Vênus de Milo" (Figura 34).

Figura 34 - A Mona Lisa e a estátua grega Vênus de Milo



Fonte: Elaboração própria.[9]

---

[8] A imagem foi retirada da seguinte referência: https://atitudereflexiva.wordpress.com/tag/retangulo-de-ouro/

[9] As imagens foram retiradas da referência Barbosa (2017).

Igualmente, há monumentos em que o Número de Ouro foi possivelmente utilizado, como o Partenon e a Catedral de Notre Dame (Figura 12).

Figura 12 - O Partenon e a Catedral de Notre Dame

Fonte: Elaboração própria.[10]

Na sequência, inicia-se a sexta etapa: “Medidas Áureas no Corpo Humano”, em que os alunos recebem a Apostila 2 contendo medições que devem ser efetuadas no corpo (Figura 35) e escolhem dois pares de colegas para realizá-las.

Figura 35 - Razões entre as medidas de algumas partes do corpo

Medidas	**Aluno(a)**
Da altura - *a*	
Do umbigo até o chão - *b*	
Do ombro até a ponta do dedo médio - *c*	
Do cotovelo até a ponta do dedo médio - *d*	
Da perna - *e*	
Do joelho até o chão - *f*	
Do queixo ao alto da testa - *g*	
Do queixo até a altura dos olhos - *h*	
Razões	**Resultados**
$\frac{a}{b}$	
$\frac{c}{d}$	
$\frac{e}{f}$	
$\frac{g}{h}$	
Média aritmética das 4 razões	

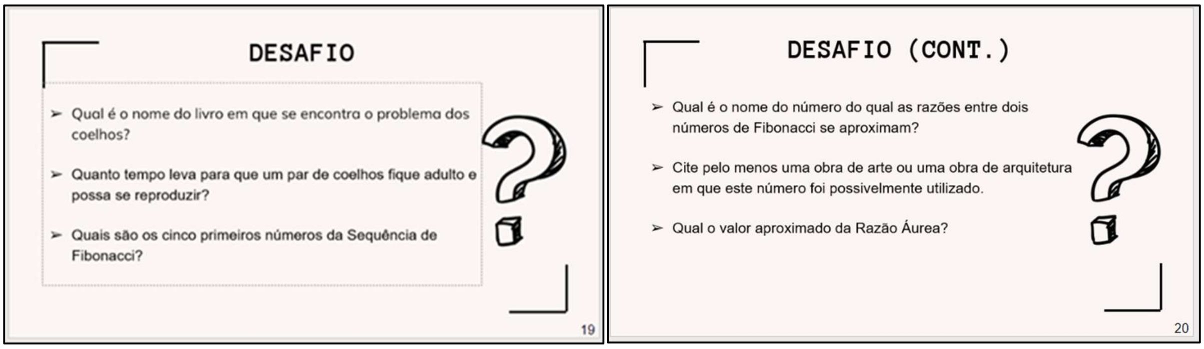
Fonte: Elaboração própria.

[10] As imagens foram retiradas da seguinte referência: Barbosa (2017).

Após, os alunos efetuam as razões entre as medidas corporais obtidas, comparam os resultados e, a seguir, indica-se a pessoa que possui as razões entre as dimensões corporais mais próximas do Número de Ouro.

Na sétima etapa, "Desafio", é realizado um quiz referente ao tema da aula é (Figura 36).

Figura 36- Quiz sobre a Sequência de Fibonacci



Fonte: Elaboração própria.

3.2.2 Experimentação da sequência didática na turma regular

A Sequência Didática foi aplicada em uma turma de 1ª. série do Ensino Médio de uma Instituição Federal de Educação no dia 07 de março de 2024, com carga horária de 2 horas-aula.

Percebeu-se a grande importância de o professor chegar pelo menos 30 minutos antes do horário da aula, pois é necessário organizar os materiais (Figura 37), como o quadro de T.N.T. em que os coelhos ficarão, assim como desenhar a tabela com os meses e a quantidade de pares de coelhos que seria preenchida com a participação dos alunos.

Figura 37 – Organização dos materiais utilizados em aula

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Observou-se a ausência de um dos filhotes de coelhos brancos. No decorrer da aula e mesmo após o término, o coelho não foi encontrado. Dessa forma, a resolução do problema foi feita sem um coelho.

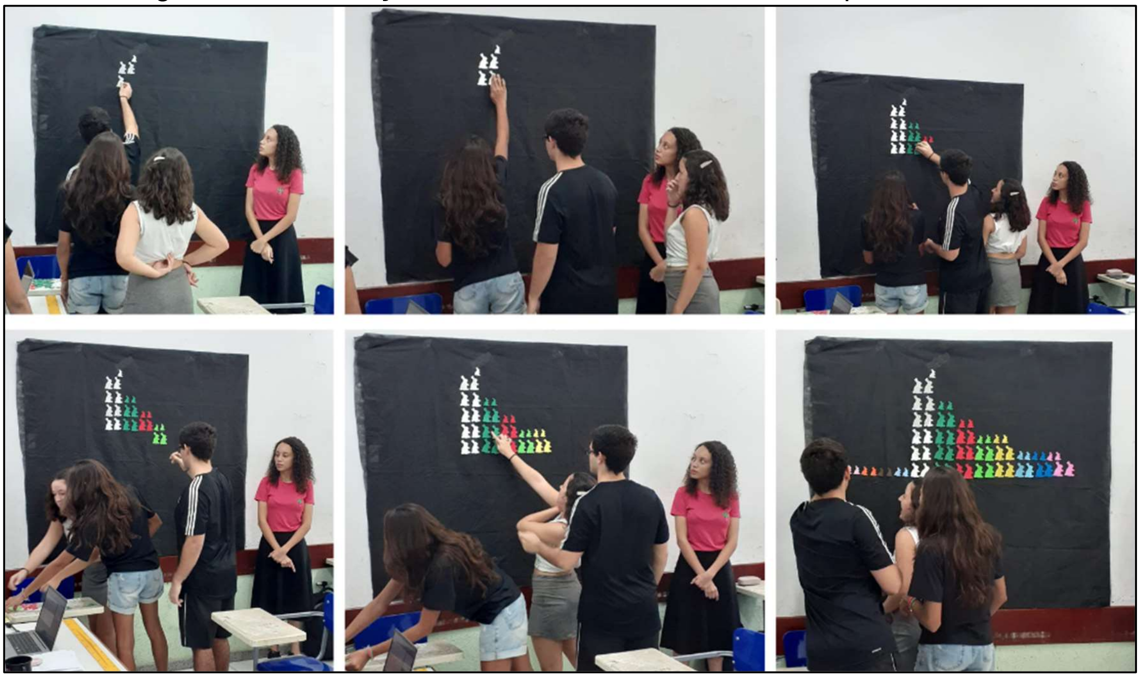
A turma apresentou facilidade com o tema, e observou-se que alguns alunos recorreram à internet antes do início da aula para entender do que se tratava a Sequência de Fibonacci.

Os alunos ficaram bem intrigados e interessados no tema, pois houve uma grande interação dos alunos durante o seguimento da aula.

A participação da turma aumentou de forma exponencial na terceira etapa, “Dos coelhos à Sequência”, em que três alunos foram à frente colar os coelhos no T.N.T.

Embora tenha sido escolhida esta pequena quantidade de alunos para colar os coelhos no quadro, o restante da turma auxiliou com observações e comentários durante a resolução do problema (Figura 38).

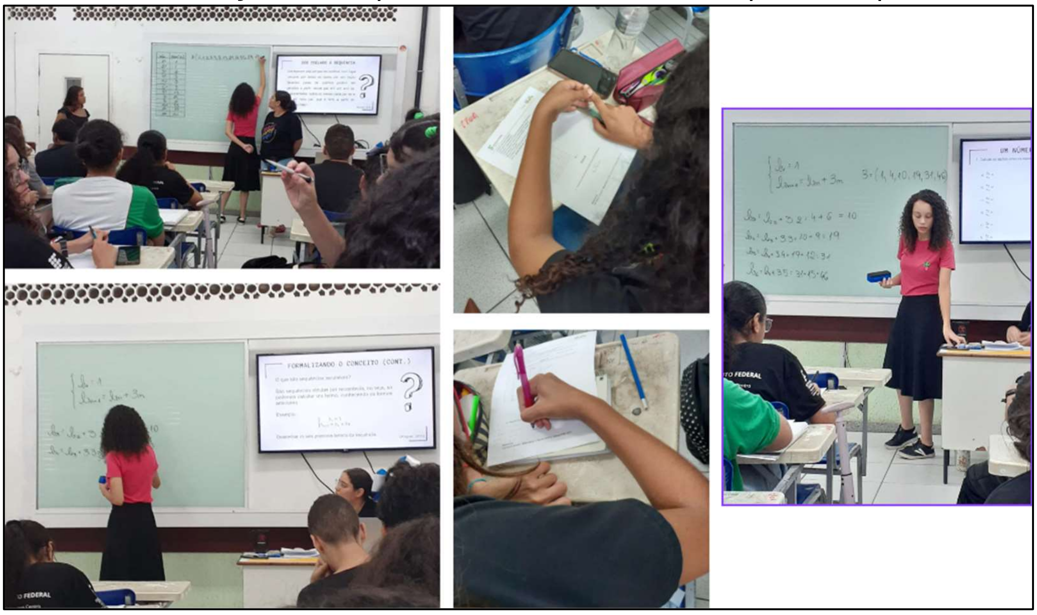
Figura 38 – Resolução do Problema dos Coelhos feita pelos alunos



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na quarta etapa, “Formalizando o Conceito” (Figura 39), os alunos não apresentaram dificuldades na dedução da lei de formação da Sequência de Fibonacci.

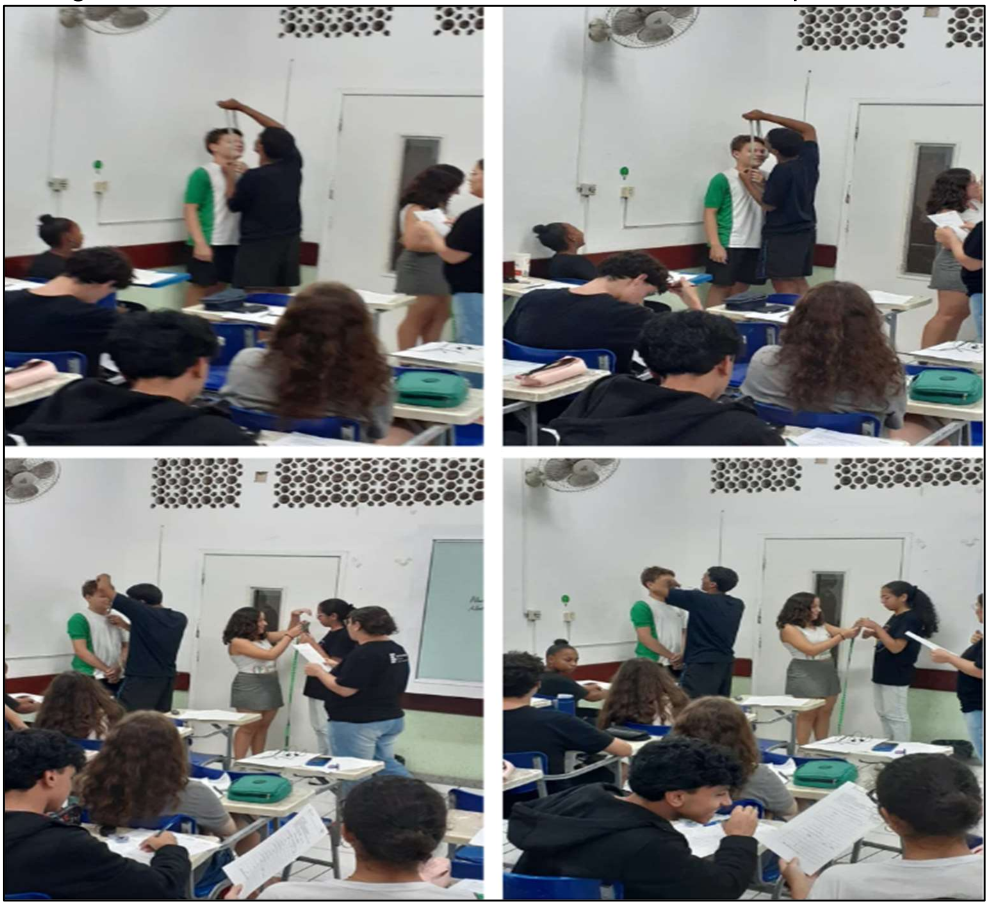
Figura 39 – Lei de formação da Sequência de Fibonacci e exemplo de sequência recursiva



Fonte: Protocolo de pesquisa.

No que se diz respeito à quinta etapa, “Medidas Áureas no Corpo Humano” (Figura 40), os alunos se mostraram bastante entusiasmados e surpresos com as ligações do número de ouro com as proporções humanas.

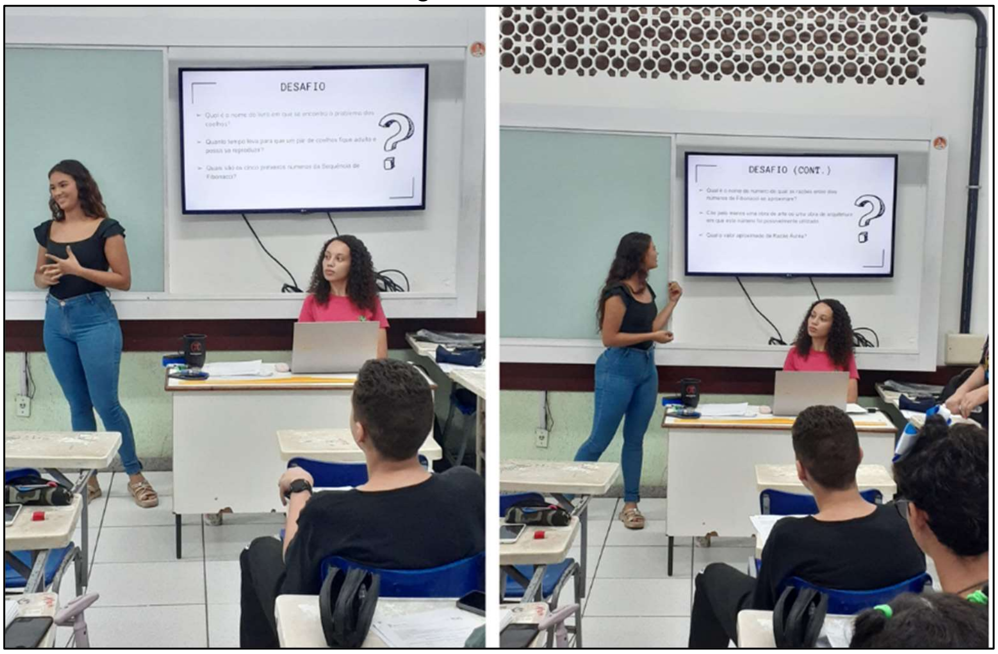
Figura 40 – Alunos realizando as Medidas Áureas no Corpo Humano



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Na sexta etapa, “Desafio” (Figura 41), os alunos revelaram-se bastante empolgados com as perguntas trazidas no quiz, respondendo-as de maneira rápida e correta, mostrando que houve uma satisfatória atenção por parte dos alunos no decorrer da aula.

Figura 41 – Quiz



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Ao final da aula, a palavra foi dada aos alunos para que estes dessem opiniões e sugestões de melhora. Os discentes avaliaram a aula positivamente, destacando que a mesma foi interessante, proveitosa e agregou conhecimento.

A aplicação ocorreu de forma satisfatória, os alunos se mostraram bastante interessados e participativos durante toda a aula. Percebeu-se no início da aula, que alguns alunos recorreram à internet para saber do que se tratava a Sequência de Fibonacci. Apesar do risco deles diminuírem a sensação de estarem aprendendo algo novo, observou-se que adquiriram novos e aprofundados conhecimentos sobre o tema.

A professora responsável pela turma da aplicação parabenizou o grupo pelo trabalho e comentou que os alunos estavam iniciando o conteúdo de sequências numéricas naquela aula, o que proporcionaria um aprendizado mais efetivo do assunto.

Deste modo, a aula foi proveitosa para ambos, alunos da turma de Educação Básica e Professoras em Formação.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

De forma geral, o objetivo foi cumprido, pois a aula despertou o interesse e atraiu a atenção dos alunos, além de proporcionar uma aprendizagem significativa e aprofundada sobre a Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro.

Novamente enfatiza-se a necessidade do professor que for aplicar esta Sequência Didática chegar, pelo menos, 30 minutos antes do início da aula, devido à necessidade de organizar os materiais.

A aplicação do trabalho foi uma experiência muito rica, tanto para os alunos, quanto para as professoras em formação, no entanto, no momento da organização dos materiais, foi notada a ausência de um filhote de coelho branco, um dos quais iria iniciar a Sequência. Apesar desta dificuldade, as professoras em formação compreenderam que a situação auxiliou no desenvolvimento da capacidade de lidar com imprevistos e de contornar os diversos contratempos que podem surgir durante uma aula.

O trabalho construído desde o LEAMAT I contribuiu significativamente para a trajetória das professoras em formação, uma vez que acrescentou conhecimento sobre a elaboração de um trabalho acadêmico, sobre maneiras de selecionar e filtrar bons trabalhos acadêmicos para leitura e pesquisa e a forma correta de referenciar autores de diferentes tipos de trabalhos segundo as normas da ABNT.

Além disso, as professoras em formação puderam desenvolver uma fala mais clara e segura durante apresentações de trabalhos e melhorias na escrita acadêmica das integrantes foram observadas.

Um importante ponto observado foi a capacidade das integrantes de trabalhar em grupo, pois alguns grupos de semestres anteriores do LEAMAT relatam muitas brigas e desentendimentos durante o trabalho, entretanto, isto não aconteceu neste grupo.

As componentes não brigaram ou discutiram durante o desenvolvimento do trabalho, pelo contrário, a amizade foi aperfeiçoada e fortalecida durante todo o componente curricular.

O processo durante os três semestres da disciplina foi muito difícil e árduo, o qual proporcionou grande desgaste, principalmente mental, e preocupação nas componentes, mas trouxe também grandes aprendizados e possibilitou o início de uma grande amizade entre as integrantes.

REFERÊNCIAS

ALVES, J. S. C. **Novas perspectivas para o uso da História da Matemática**. 2016. 75 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016. Disponível em: https://www.bdtd.uerj.br:8443/handle/1/17530. Acesso em: 03 abr. 2023.

BARBOSA, F. A. **Proposta de abordagem da Sequência de Fibonacci e razão áurea no ensino médio**: teoria e aplicações. 2018. 83 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade de Brasília, Brasília, 2017. Disponível em: https://repositorio.unb.br/handle/10482/31430. Acesso em: 21 abr. 2023.

BELINI, M. M. **A razão áurea e a sequência de Fibonacci**. 2015. 67 f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015. Disponível em: https://pdfs.semanticscholar.org/df30/d1a84022c8e224f00ad844d54d9e2ef5c044.pdf?_gl=1*12kqoiy*_ga*MjExMTE3MTk2NS4xNjkwNzI1ODg1*_ga_H7P4ZT52H5*MTY5. Acesso em: 22 abr. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 09 fev. 2023.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. 1998. Brasília: MEC, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf. Acesso em: 22 abr. 2023.

CARDOSO, L. V. M; QUARESMA, O. M. **Buriti**: relação entre sequência de Fibonacci, razão áurea e a geometria fractal. 2012. 48 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade do Estado do Pará, Moju, 2012. Disponível em: https://proativa.virtual.ufc.br/sipemat2012/papers/200/submission/director/200.pdf. Acesso em 04 abr. 2023.

LARA, I. C. M. O ensino da Matemática por meio da História da Matemática: Possíveis articulações com a Etnomatemática. **VIDYA**, Santa Maria, v. 33, n. 2, p. 51-62, jul./dez., 2013. Disponível em: https://repositorio.pucrs.br/dspace/bitstream/10923/11704/2/O_ensino_da_Matematica_por_meio_da_Historia_da_Matematica_possiveis_articulacoes_com_a_Etnomatematica.pdf. Acesso em: 03 abr. 2023.

LEOPOLDINO, K. S. M. **Sequências de Fibonacci e a Razão Áurea** - Aplicações no Ensino Básico. 2016. 103 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2016. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/jspui/handle/123456789/21244. Acesso em: 26 abr. 2023.

MONTEIRO, W. **Alguns elementos que reforçam a importância da história da matemática na formação de professores**. 2012. 116 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/10924. Acesso em: 26 abr. 2023.

OLIVEIRA, J.J. **Sequências de Fibonacci:** Possibilidades de aplicações no ensino básico. 2013. 28 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2013. Disponível em: https://repositorio.ufba.br/handle/ri/22821. Acesso em: 20 mar. 2023.

PACHECO, G, F. **Sequência de Fibonacci:** história, propriedades e aplicações. 2021. 90 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática - PROFMAT) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2021 Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/229061. Acesso em: 31 mar. 2023.

RAMOS, M. G. O. **A Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro**. 2013. 93 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2013. Disponível em: http://www.biblioteca.uesc.br/biblioteca/bdtd/201160277D.pdf. Acesso em: 6 jun. 2023.

ROCHA, R. S.; DAUDE, R. B. Sequência de Fibonacci no ensino da matemática. **Revista de Educação Matemática da UEG**, Goiás, v. 2, n. 1, p. 98-121, ago./dez., 2021. Disponível em: https://www.revista.ueg.br/index.php/reema/article/view/12815. Acesso em: 21 mar. 2023.

SILVA, R, L.; ALMEIDA, R. L. S. A fantástica sequência de Fibonacci e o enigmático número de ouro: contexto histórico, definições, propriedades e aplicações. **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 18, n. 6, p. 77-88, jul. 2020. Disponível em: https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v18a06ic-a-fantastica-sequencia-de-fibonacci-e-o-enigmatico.pdf. Acesso em: 03 abr. 2023.

SILVEIRA, A. J. **A Contextualização no Ensino da Matemática**. 2016. 54 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2016. Disponível em: https://ri.ufs.br/handle/riufs/6494. Acesso em: 06 abr. 2023.

TINOCO, L. A. A. *et al*. Álgebra é mais do que algebrismo. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., Curitiba. **Anais eletrônicos** [...]. Curitiba: PUC, 2013. p. 1-8. Disponível em: http://www.sbemrevista.com.br/files/XIENEM/pdf/1429_422_ID.pdf. Acesso em 16 dez. 2022.

WAGNER, E. **Matemática 1**. Rio de Janeiro: Editora FGV, 2011.

APÊNDICES

Apêndice A: Material didático aplicado na turma do LEAMAT II

Apêndice A-I: Notas históricas sobre a vida de Leonardo de Pisa

Leonardo de Pisa ou Leonardo Fibonacci, nasceu na cidade de Pisa, Itália, por volta da década de 1170 (Pacheco, 2021), sendo o ano de seu nascimento tema de debate entre alguns autores (Silva; Almeida, 2020). Fibonacci, como também é conhecido, era filho de um próspero mercador da cidade de Pisa, Guilielmo Bonacci (Pacheco, 2021), com quem fez diversas viagens pela costa do Mar Mediterrâneo (Oliveira, 2013).

Durante a adolescência de Leonardo, Guilielmo assumiu o cargo de diretor da alfândega em Bugia, colônia comercial de Pisa localizada na costa Norte da África (Pacheco, 2021). Anos depois, Fibonacci se juntou a seu pai em Bugia e iniciou os estudos para se tornar mercador (Pacheco, 2021).

Enquanto viajava com seu pai, Fibonacci foi educado por instrutores muçulmanos e por professores das cidades mediterrâneas, com o objetivo de se tornar um mercador (Pacheco, 2021). Por esta razão, o jovem aprendeu diversas atribuições, como fazer conversões de uma moeda para outra e isto lhe permitiu se familiarizar com o sistema de numeração indo-arábico utilizado pelos mercadores árabes e perceber sua praticidade em relação ao sistema romano (Pacheco, 2021).

Posteriormente, no ano de 1200, Leonardo retorna para sua cidade e em 1202 publica seu primeiro livro, o *Liber Abaci*, que continha os conhecimentos adquiridos durante as viagens e que futuramente se tornaria sua obra mais famosa (Oliveira, 2013). Nos anos seguintes, o autor escreveu outras obras, sendo elas *Practica Geometriae*, em 1220, *Flos* e *Liber Quadratorum*, ambas em 1225 (Oliveira, 2013).

O Liber Abaci, em tradução, “Livro do Ábaco”, possui um título que não condiz com o seu conteúdo, uma vez que os primeiros capítulos são referentes ao sistema de numeração indo-arábico e não aos ábacos (Ramos, 2013). A obra possui 15 capítulos contendo quase todo o conhecimento algébrico e aritmético da época, os quais apresentam a importância do novo sistema de numeração, tratando de temas como a conversão de pesos e medidas, os critérios de divisibilidade e a decomposição em fatores primos (Oliveira, 2013)

Referências:

OLIVEIRA, J.J. **Sequências de Fibonacci:** Possibilidades de aplicações no ensino básico. 2013. 28 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2013. Disponível em: https://repositorio.ufba.br/handle/ri/22821. Acesso em: 20 mar. 2023.

PACHECO, G, F. **Sequência de Fibonacci:** história, propriedades e aplicações. 2021, p. 90. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática - PROFMAT) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2021 Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/229061. Acesso em: 31 mar. 2023.

RAMOS, M. G. O. **A Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro**. 2013, p. 93. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2013. Disponível em: http://www.biblioteca.uesc.br/biblioteca/bdtd/201160277D.pdf. Acesso em: 6 jun. 2023.

Apêndice A-II: Apostila 1 - Razões entre dois Números de Fibonacci

INSTITUTO FEDERAL
Fluminense

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
GOVERNO FEDERAL
BRASIL
UNIÃO E RECONSTRUÇÃO

Diretoria de Ensino Superior
Licenciatura em Matemática
Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática
Linha de Pesquisa: Ensino e Aprendizagem em Álgebra
Licenciandos: Camila dos Santos Petersen, Estefani Barreto Barbosa de Oliveira e Melissa Ferreira Mota
Orientadora: Profª. Ana Paula Rangel de Andrade
Nome: ____________________________________ Data: ___ / ___ / 2023.

1- Calcule as razões entre os números de Fibonacci:

$$\frac{a_2}{a_1} =$$

$$\frac{a_3}{a_2} =$$

$$\frac{a_4}{a_3} =$$

$$\frac{a_5}{a_4} =$$

$$\frac{a_6}{a_5} =$$

$$\frac{a_7}{a_6} =$$

$$\frac{a_8}{a_7} =$$

$$\frac{a_9}{a_8} =$$

$$\frac{a_{10}}{a_9} =$$

$$\frac{a_{11}}{a_{10}} =$$

$$\frac{a_{12}}{a_{11}} =$$

Apêndice A-III: Apostila 2 - Medidas Áureas no Corpo Humano

INSTITUTO FEDERAL Fluminense

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

GOVERNO FEDERAL BRASIL UNIÃO E RECONSTRUÇÃO

Diretoria de Ensino Superior
Licenciatura em Matemática
Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática
Linha de Pesquisa: Ensino e Aprendizagem em Álgebra
Licenciandos: Camila dos Santos Petersen, Estefani Barreto Barbosa de Oliveira e Melissa Ferreira Mota
Orientadora: Profª. Ana Paula Rangel de Andrade
Nome: ___________________________________ Data: ___ / ___ / 2023.

Medidas Áureas no corpo humano

1- Faça as seguintes medições e, em seguida, calcule as razões pedidas:

Medidas	**Aluno(a)**
Da altura – *a*	
Do umbigo até o chão – *b*	
Do ombro até a ponta do dedo médio – *c*	
Do cotovelo até a ponta do dedo médio – *d*	
Da perna – *e*	
Do joelho até o chão - *f*	
Do queixo ao alto da testa – *g*	
Razões	**Resultados**
$\frac{a}{b}$	
$\frac{c}{d}$	
$\frac{e}{f}$	
$\frac{g}{h}$	
Média aritmética das 4 razões	

Referências

RAMOS, M. G. O. **A Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro**. 2013, p. 93. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2013. Disponível em: http://www.biblioteca.uesc.br/biblioteca/bdtd/201160277D.pdf. Acesso em: 6 jun. 2023.

Apêndice A-IV: Apresentação de Slides

INSTITUTO FEDERAL
Fluminense

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

GOVERNO FEDERAL
BRASIL
UNIÃO E RECONSTRUÇÃO

SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Camila dos Santos Petersen
Estefani Barreto Barbosa de Oliveira
Melissa Ferreira Mota

Orientadora: Profª Ana Paula Rangel de Andrade

Setembro/2023

QUEM FOI FIBONACCI?

2

LIBER ABACI

- SÉC XIII



Fonte: https://www.museogalileo.it/IT/ARCHIVIO-NEWS/148-ARCHIVIO-NEWS-2020/2030-ONLINE-IL-LIBER-ABACI-DI-LEONARDO-FIBONACCI.HTML?HIGHLIGHT=WYJSAWJLCIJD

O PROBLEMA DOS COELHOS

Um homem pôs um par de coelhos num lugar cercado por todos os lados por um muro. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todos os meses cada par dá à luz um novo par, que é fértil a partir do segundo mês?

DOS COELHOS À SEQUÊNCIA

5

DOS COELHOS À SEQUÊNCIA (CONT.)

Definição 1. Chama-se sequência de Fibonacci a sequência definida por

(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, …)

onde os termos dessa sequência chamam-se Número de Fibonacci.

Definição 2. Chama-se sequência de Fibonacci a sequência definida recursivamente por $a_1 = 1$ e $a_2 = 1$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

$\forall\, n \geq 3$

6

DOS COELHOS À SEQUÊNCIA (CONT.)

O que são sequências recursivas?

São sequências obtidas por recorrência, ou seja, só podemos calcular um termo conhecendo os termos anteriores (Wagner, 2011).

Exemplos:

$$\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_{n+1} = b_n + 3n \end{cases}$$

7

DOS COELHOS À SEQUÊNCIA (CONT.)

O que são sequências recursivas?

São sequências obtidas por recorrência, ou seja, só podemos calcular um termo conhecendo os termos anteriores (Wagner, 2011).

Exemplos:

$$\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_{n+1} = b_n + 3n \end{cases}$$

8

UM NÚMERO QUE VALE OURO

$\frac{a_2}{a_1} =$

$\frac{a_3}{a_2} =$

$\frac{a_4}{a_3} =$

$\frac{a_5}{a_4} =$

$\frac{a_6}{a_5} =$

$\frac{a_7}{a_6} =$

$\frac{a_8}{a_7} =$

$\frac{a_9}{a_8} =$

$\frac{a_{10}}{a_9} =$

$\frac{a_{11}}{a_{10}} =$

$\frac{a_{12}}{a_{11}} =$

9

UM NÚMERO QUE VALE OURO (CONT.)

$\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{1} = 1$

$\frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{1} = 1$

$\frac{a_4}{a_3} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

$\frac{a_5}{a_4} = \frac{5}{3} = 1{,}6666$

$\frac{a_6}{a_5} = \frac{8}{5} = 1{,}6$

$\frac{a_7}{a_6} = \frac{13}{8} = 1{,}625$

$\frac{a_8}{a_7} = \frac{21}{13} = 1{,}6153$

$\frac{a_9}{a_8} = \frac{34}{21} = 1{,}6190$

$\frac{a_{10}}{a_9} = \frac{55}{34} = 1{,}6176$

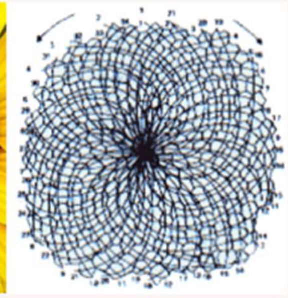
$\frac{a_{11}}{a_{10}} = \frac{89}{55} = 1{,}6181$

$\frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{144}{89} = 1{,}6179$

$\varphi \cong 1{,}618$

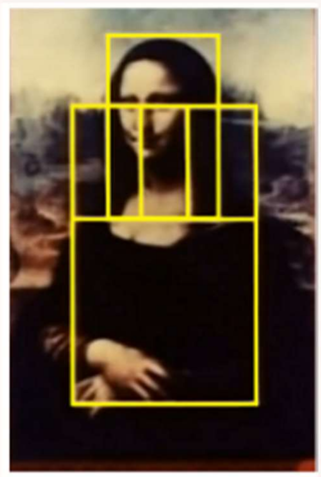
10

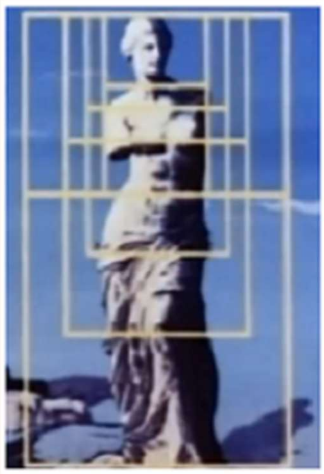
UM NÚMERO QUE VALE OURO (CONT.)



11

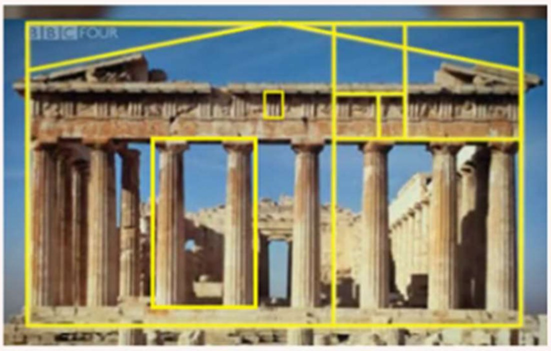
UM NÚMERO QUE VALE OURO (CONT.)

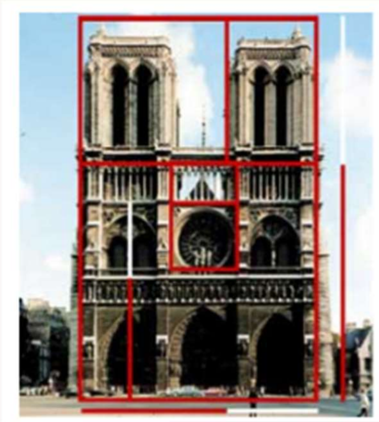




12

UM NÚMERO QUE VALE OURO (CONT.)





13

UM NÚMERO QUE VALE OURO (CONT.)

https://youtu.be/7jH8VenYtho?feature=shared

14

MEDIDAS ÁUREAS NO CORPO HUMANO

Medidas	Aluno(a)
Da altura - *a*	
Do umbigo até o chão - *b*	
Do ombro até a ponta do dedo médio - *c*	
Do cotovelo até a ponta do dedo médio - *d*	
Da perna - *e*	
Do joelho até o chão - *f*	
Do queixo ao alto da testa - *g*	

MEDIDAS ÁUREAS NO CORPO HUMANO

Razões	Resultados
$\frac{a}{b}$	
$\frac{c}{d}$	
$\frac{e}{f}$	
$\frac{g}{h}$	
Média aritmética das 4 razões	

DESAFIO

- Qual é o nome do livro em que se encontra o problema dos coelhos?
- Quanto tempo leva para que um par de coelhos fique adulto e possa se reproduzir?
- Quais são os cinco primeiros números da Sequência de Fibonacci?

17

DESAFIO (CONT.)

- Qual é o nome do número do qual as razões entre dois números de Fibonacci se aproximam?
- Cite pelo menos uma obra de arte e uma obra de arquitetura em que o Número de Ouro foi possivelmente utilizado
- Cite pelo menos uma obra de arte e uma obra de arquitetura em que o Número de Ouro foi possivelmente utilizado

18

REFERÊNCIAS

DANTE, L. R.; VIANA, F. **Matemática em contextos**: função exponencial, função logarítmica e sequências. São Paulo: Ática, 2020. Disponível em: https://storage.googleapis.com/edocente-content-production/PNLD/PNLD_2021_OBJETIVO_2/Obra-123b1578-44c9-40ac-8007-80c5ab019007/123b1578-44c9-40ac-8007-80c5ab019007.pdf. Acesso em: 04 jul. 2023.

OLIVEIRA, J.J. **Sequências de Fibonacci**: Possibilidades de aplicações no ensino básico. 2013. 28 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2013. Disponível em: https://l1nq.com/Q466R. Acesso em: 20 mar. 2023.

19

REFERÊNCIAS

PACHECO, G, F. **Sequência de Fibonacci**: história, propriedades e aplicações. 2021, p. 90. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática - PROFMAT), Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2021 Disponível em: https://encr.pw/AaRLr. Acesso em: 31 mar. 2023.

RAMOS, M. G. O. **A Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro**. 2013, p. 93. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT), Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2013. Disponível em: http://www.biblioteca.uesc.br/biblioteca/bdtd/201160277D.pdf. Acesso em: 6 jun. 2023.

20

REFERÊNCIAS

WAGNER, Eduardo. **Matemática 1**. Rio de Janeiro: Editora FGV, 2011.

Obrigada!

Apêndice B: Material didático experimentado na turma regular

Apêndice B-I: Notas históricas sobre a vida de Leonardo de Pisa

Leonardo de Pisa ou Leonardo Fibonacci, nasceu na cidade de Pisa, Itália, por volta da década de 1170 (Pacheco, 2021), sendo o ano de seu nascimento tema de debate entre alguns autores (Silva; Almeida, 2020). Fibonacci, como também é conhecido, era filho de um próspero mercador da cidade de Pisa, Guilielmo Bonacci (Pacheco, 2021), com quem fez diversas viagens pela costa do Mar Mediterrâneo (Oliveira, 2013).

Durante a adolescência de Leonardo, Guilielmo assumiu o cargo de diretor da alfândega em Bugia, colônia comercial de Pisa localizada na costa Norte da África (Pacheco, 2021). Anos depois, Fibonacci se juntou a seu pai em Bugia e iniciou os estudos para se tornar mercador (Pacheco, 2021).

Enquanto viajava com seu pai, Fibonacci foi educado por instrutores muçulmanos e por professores das cidades mediterrâneas, com o objetivo de se tornar um mercador (Pacheco, 2021). Por esta razão, o jovem aprendeu diversas atribuições, como fazer conversões de uma moeda para outra e isto lhe permitiu se familiarizar com o sistema de numeração indo-arábico utilizado pelos mercadores árabes e perceber sua praticidade em relação ao sistema romano (Pacheco, 2021).

Posteriormente, no ano de 1200, Leonardo retorna para sua cidade e em 1202 publica seu primeiro livro, o *Liber Abaci*, que continha os conhecimentos adquiridos durante as viagens e que futuramente se tornaria sua obra mais famosa (Oliveira, 2013). Nos anos seguintes, o autor escreveu outras obras, sendo elas *Practica Geometriae*, em 1220, *Flos* e *Liber Quadratorum*, ambas em 1225 (Oliveira, 2013).

O Liber Abaci, em tradução, “Livro do Ábaco”, possui um título que não condiz com o seu conteúdo, uma vez que os primeiros capítulos são referentes ao sistema de numeração indo-arábico e não aos ábacos (Ramos, 2013). A obra possui 15 capítulos contendo quase todo o conhecimento algébrico e aritmético da época, os quais apresentam a importância do novo sistema de numeração, tratando de temas como a conversão de pesos e medidas, os critérios de divisibilidade e a decomposição em fatores primos (Oliveira, 2013)

Referências:

OLIVEIRA, J.J. **Sequências de Fibonacci:** Possibilidades de aplicações no ensino básico. 2013. 28 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2013. Disponível em: https://repositorio.ufba.br/handle/ri/22821. Acesso em: 20 mar. 2023.

PACHECO, G, F. **Sequência de Fibonacci:** história, propriedades e aplicações. 2021, p. 90. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática - PROFMAT) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2021 Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/229061. Acesso em: 31 mar. 2023.

RAMOS, M. G. O. **A Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro**. 2013, p. 93. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2013. Disponível em: http://www.biblioteca.uesc.br/biblioteca/bdtd/201160277D.pdf. Acesso em: 06 jun. 2023.

Apêndice B-II: Apostila 1 - Razões entre dois Números de Fibonacci

INSTITUTO FEDERAL Fluminense

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO — GOVERNO FEDERAL BRASIL UNIÃO E RECONSTRUÇÃO

Diretoria de Ensino Superior
Licenciatura em Matemática
Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática
Linha de Pesquisa: Ensino e Aprendizagem em Álgebra
Licenciandas: Camila dos Santos Petersen, Estefani Barreto Barbosa de Oliveira e Melissa Ferreira Mota
Orientadora: Profª. Ana Paula Rangel de Andrade
Nome: ____ Data: ___ / ___ / 2024.

1- Calcule as razões entre os Números de Fibonacci:

a) $\frac{a_2}{a_1} =$

b) $\frac{a_3}{a_2} =$

c) $\frac{a_4}{a_3} =$

d) $\frac{a_5}{a_4} =$

e) $\frac{a_6}{a_5} =$

f) $\frac{a_7}{a_6} =$

g) $\frac{a_8}{a_7} =$

h) $\frac{a_9}{a_8} =$

i) $\frac{a_{10}}{a_9} =$

j) $\frac{a_{11}}{a_{10}} =$

k) $\frac{a_{12}}{a_{11}} =$

Apêndice B-III: Apostila 2 - Medidas Áureas no Corpo Humano

INSTITUTO FEDERAL
Fluminense

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

GOVERNO FEDERAL
BRASIL
UNIÃO E RECONSTRUÇÃO

Diretoria de Ensino Superior
Licenciatura em Matemática
Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática
Linha de Pesquisa: Ensino e Aprendizagem em Álgebra
Licenciandas: Camila dos Santos Petersen, Estefani Barreto Barbosa de Oliveira e Melissa Ferreira Mota
Orientadora: Profª. Ana Paula Rangel de Andrade

Nome: ____ Data: ___ / ___ /___

Medidas Áureas no corpo humano

1- Faça as seguintes medições e, em seguida, calcule as razões pedidas:

Medidas	**Aluno A**	**Aluno B**
Da altura - a		
Do umbigo até o chão - b		
Do ombro até a ponta do dedo médio - c		
Do cotovelo até a ponta do dedo médio - d		
Da perna - e		
Do joelho até o chão - f		
Do queixo ao alto da testa - g		
Do queixo até a altura dos olhos - h		
Razões	**Resultado A**	**Resultado B**
$\frac{a}{b}$		
$\frac{c}{d}$		
$\frac{e}{f}$		
$\frac{g}{h}$		
Média aritmética das 4 razões		

Referências

RAMOS, M. G. O. **A Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro**. 2013, p. 93. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2013. Disponível em: http://www.biblioteca.uesc.br/biblioteca/bdtd/201160277D.pdf. Acesso em: 6 jun. 2023.

Apêndice B-IV: Apostila 3 – Problema dos Coelhos e Sequência Recursiva

INSTITUTO FEDERAL
Fluminense

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
GOVERNO FEDERAL
BRASIL
UNIÃO E RECONSTRUÇÃO

Diretoria de Ensino Superior
Licenciatura em Matemática
Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática
Linha de Pesquisa: Ensino e Aprendizagem em Álgebra
Licenciandas: Camila dos Santos Petersen, Estefani Barreto Barbosa de Oliveira e Melissa Ferreira Mota
Orientadora: Profª. Ana Paula Rangel de Andrade
Nome: ____
Data: __/__/__

Parte A

1- Calcule a quantidade de pares de coelhos no decorrer de doze meses.

Mês	Par(es)

$$a_n =$$

Parte B

2- Calcule os seis primeiros termos da sequência dada por:

$$\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_{n+1} = b_n + 3n \end{cases}$$

Referência

WAGNER, E. **Matemática 1**. Rio de Janeiro: Editora FGV, 2011.

Apêndice B-V: Apresentação de Slides

INSTITUTO FEDERAL
Fluminense

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

GOVERNO FEDERAL BRASIL UNIÃO E RECONSTRUÇÃO

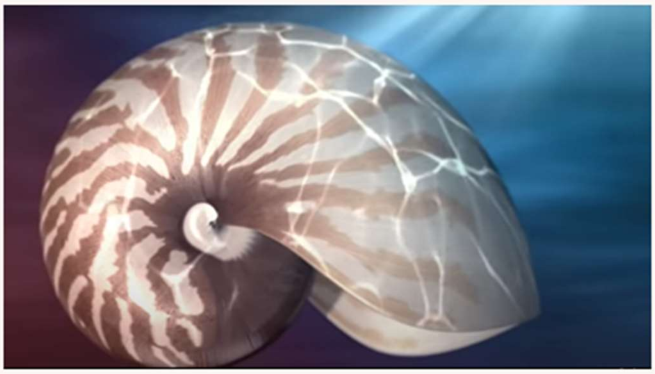
SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Camila dos Santos Petersen
Estefani Barreto Barbosa de Oliveira
Melissa Ferreira Mota

Orientadora: Profª Ana Paula Rangel de Andrade

Março/2024

MATEMÁTICA E NATUREZA



https://www.youtube.com/watch?v=XjOUoLfoLo8

2

QUEM FOI FIBONACCI?

3

LIBER ABACI

- Publicado no SÉC XIII

Fonte: https://www.museogalileo.it/IT/ARCHIVIO-NEWS/148-ARCHIVIO-NEWS-2020/2030-ONLINE-IL-LIBER-ABACI-DI-LEONARDO-FIBONACCI.HTML?HIGHLIGHT=WYJSAWJLCIJD

4

DOS COELHOS À SEQUÊNCIA

Um homem pôs um par de coelhos num lugar cercado por todos os lados por um muro. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todos os meses cada par dá à luz um novo par, que é fértil a partir do segundo mês?

(Barbosa, 2017)

5

FORMALIZANDO O CONCEITO

Definição: Chama-se Sequência de Fibonacci a sequência definida recursivamente por

$a_1 = 1$
$a_2 = 1$
$a_3 = 2$
$a_4 = 3$
$a_5 = 5$

$$a_n = ?$$

(Oliveira, 2013).

6

FORMALIZANDO O CONCEITO (CONT.)

Definição: Chama-se Sequência de Fibonacci a sequência definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \end{cases}$$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

$$\forall\, n \geq 3$$

(Oliveira, 2013).

7

FORMALIZANDO O CONCEITO (CONT.)

O que são sequências recursivas?

São sequências obtidas por recorrência, ou seja, só podemos calcular um termo, conhecendo os termos anteriores

Exemplo:

$$\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_{n+1} = b_n + 3n \end{cases}$$

Determinar os seis primeiros termos da sequência.

(Wagner, 2011).

8

FORMALIZANDO O CONCEITO (CONT.)

O que são sequências recursivas?

São sequências obtidas por recorrência, ou seja, só podemos calcular um termo, conhecendo os termos anteriores

Exemplo:

$$\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_{n+1} = b_n + 3n \end{cases}$$

Determinar os seis primeiros termos da sequência.

B = (1,4,10,19,31,46)

(Wagner, 2011).

9

UM NÚMERO QUE VALE OURO

1- Calcule as razões entre os números de Fibonacci:

a) $\frac{a_2}{a_1} =$

b) $\frac{a_3}{a_2} =$

c) $\frac{a_4}{a_3} =$

d) $\frac{a_5}{a_4} =$

e) $\frac{a_6}{a_5} =$

f) $\frac{a_7}{a_6} =$

g) $\frac{a_8}{a_7} =$

h) $\frac{a_9}{a_8} =$

i) $\frac{a_{10}}{a_9} =$

j) $\frac{a_{11}}{a_{10}} =$

k) $\frac{a_{12}}{a_{11}} =$

10

UM NÚMERO QUE VALE OURO (CONT.)

1- Calcule as razões entre os números de Fibonacci:

a) $\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{1} = 1$

b) $\frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{1} = 2$

c) $\frac{a_4}{a_3} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

d) $\frac{a_5}{a_4} = \frac{5}{3} \cong 1{,}6666$

e) $\frac{a_6}{a_5} = \frac{8}{5} = 1{,}6$

f) $\frac{a_7}{a_6} = \frac{13}{8} = 1{,}625$

g) $\frac{a_8}{a_7} = \frac{21}{13} \cong 1{,}6153$

h) $\frac{a_9}{a_8} = \frac{34}{21} \cong 1{,}619$

i) $\frac{a_{10}}{a_9} = \frac{55}{34} \cong 1{,}6176$

j) $\frac{a_{11}}{a_{10}} = \frac{89}{55} \cong 1{,}6181$

k) $\frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{144}{89} \cong 1{,}6179$

11

UM NÚMERO QUE VALE OURO (CONT.)

1- Calcule as razões entre os números de Fibonacci:

a) $\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{1} = 1$

b) $\frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{1} = 2$

c) $\frac{a_4}{a_3} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

d) $\frac{a_5}{a_4} = \frac{5}{3} \cong 1{,}6666$

e) $\frac{a_6}{a_5} = \frac{8}{5} = 1{,}6$

f) $\frac{a_7}{a_6} = \frac{13}{8} = 1{,}625$

g) $\frac{a_8}{a_7} = \frac{21}{13} \cong 1{,}6153$

h) $\frac{a_9}{a_8} = \frac{34}{21} \cong 1{,}619$

i) $\frac{a_{10}}{a_9} = \frac{55}{34} \cong 1{,}6176$

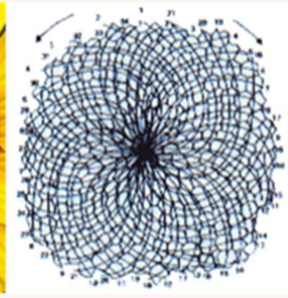
j) $\frac{a_{11}}{a_{10}} = \frac{89}{55} \cong 1{,}6181$

k) $\frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{144}{89} \cong 1{,}6179$

$\varphi \cong 1{,}618$

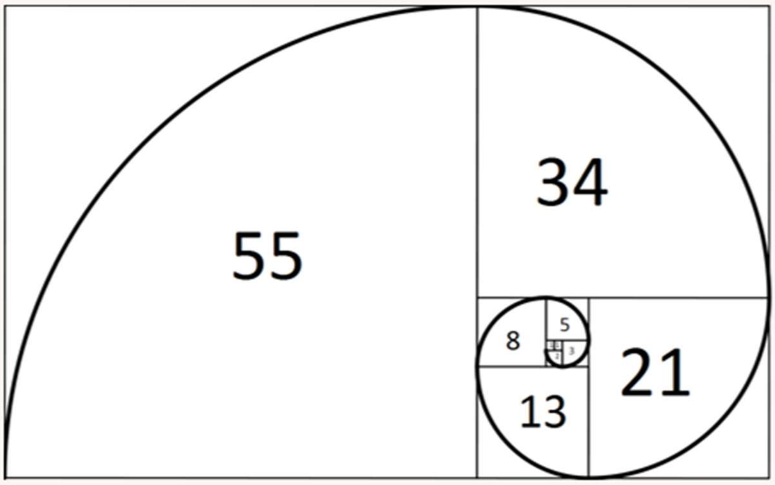
12

UM NÚMERO QUE VALE OURO (CONT.)



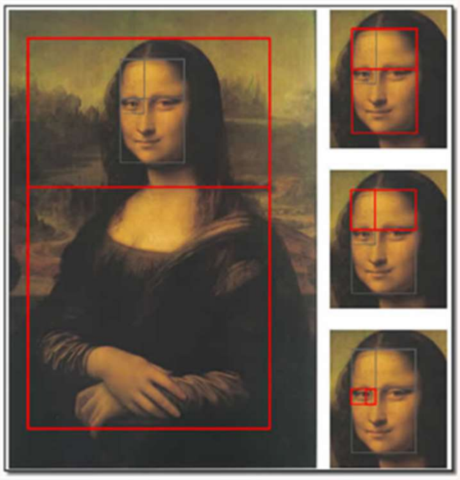
13

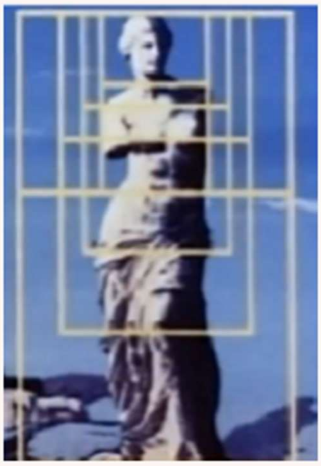
UM NÚMERO QUE VALE OURO (CONT.)



14

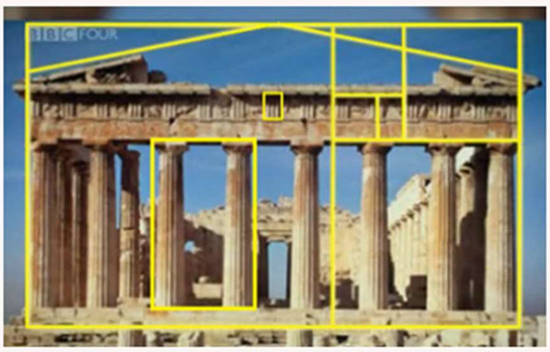
UM NÚMERO QUE VALE OURO (CONT.)

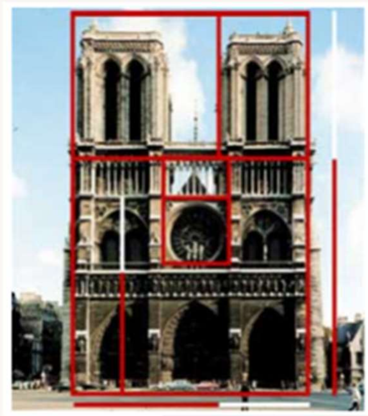




15

UM NÚMERO QUE VALE OURO (CONT.)





16

MEDIDAS ÁUREAS NO CORPO HUMANO

1- Faça as seguintes medições e, em seguida, calcule as razões pedidas:

Medidas	**Aluno A**	**Aluno B**
Da altura - a		
Do umbigo até o chão - b		
Do ombro até a ponta do dedo médio - c		
Do cotovelo até a ponta do dedo médio - d		
Da perna - e		
Do joelho até o chão - f		
Do queixo ao alto da testa - g		
Do queixo até a altura dos olhos - h		

17

MEDIDAS ÁUREAS NO CORPO HUMANO (CONT.)

Razões	**Resultado A**	**Resultado B**
$\frac{a}{b}$		
$\frac{c}{d}$		
$\frac{e}{f}$		
$\frac{g}{h}$		
Média aritmética das 4 razões		

18

DESAFIO

- Qual é o nome do livro em que se encontra o problema dos coelhos?
- Quanto tempo leva para que um par de coelhos fique adulto e possa se reproduzir?
- Quais são os cinco primeiros números da Sequência de Fibonacci?

19

DESAFIO (CONT.)

- Qual é o nome do número do qual as razões entre dois números de Fibonacci se aproximam?
- Cite pelo menos uma obra de arte ou uma obra de arquitetura em que este número foi possivelmente utilizado.
- Qual o valor aproximado da Razão Áurea?

20

REFERÊNCIAS

WAGNER, E. **Matemática 1**. Rio de Janeiro: Editora FGV, 2011.

OLIVEIRA, J.J. **Sequências de Fibonacci**: Possibilidades de aplicações no ensino básico. 2013. 28 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2013. Disponível em: https://repositorio.ufba.br/handle/ri/22821. Acesso em: 20 mar. 2023.

Obrigada!