INSTITUTO FEDERAL
Fluminense
Campus
Campos Centro

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
GOVERNO FEDERAL
BRASIL
UNIÃO E RECONSTRUÇÃO

RELATÓRIO DO LEAMAT

PRODUTOS NOTÁVEIS E COMPLETAMENTO DE QUADRADOS NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DE 2º. GRAU

ENSINO E APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA

ANA DANIELA DE SOUZA LEITE

RODRIGO DAS CHAGAS FONSECA

WESLLEY MARINS DE SOUZA

CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

2024.2

ANA DANIELA DE SOUZA LEITE

RODRIGO DAS CHAGAS FONSECA

WESLLEY MARINS DE SOUZA

RELATÓRIO DO LEAMAT

PRODUTOS NOTÁVEIS E COMPLETAMENTO DE QUADRADOS NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DE 2º. GRAU

ENSINO E APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA

Trabalho apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, *Campus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão da disciplina Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Leandro Sopeletto Carreiro

CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

2024.2

SUMÁRIO

1 RELATÓRIO DO LEAMAT I

1.1 Atividades desenvolvidas

No primeiro encontro na linha de pesquisa de Álgebra e, também em Geometria, ocorreu no dia 19/10/2023 com a apresentação do componente curricular LEAMAT, suas competências e métodos avaliativos.

No encontro seguinte, no dia 16/11/2023, retomamos as discussões sobre a disciplina e seu funcionamento e demos início aos debates quanto à primeira atividade trabalhada na linha de pesquisa de Álgebra relativo ao texto “Álgebra é mais do que algebrismo” (Tinoco et al., 2013), que em resumo o artigo teve por finalidade realizar pesquisas e promover debates quanto ao ensino mecanizado de álgebra, que tende a desvalorizar a compreensão por parte do aluno.

Apesar da consciência do autor quanto a dificuldade da prática do ensino de álgebra na escola básica, o mesmo infere a importância de dedicar maior tempo e atenção a um ensino mais significativo e reflexivo que promova o desenvolvimento do raciocínio do aluno. Tendo em vista que, o entendimento "flui" a partir do momento que se consegue associar a aplicação e utilidade da matemática com a realidade, por se tratar de um assunto abstrato que exige maior apreensão do indivíduo.

Para alcançar esse objetivo de conscientização, alertam a importância do ensino algébrico e os malefícios da prática monótona desse aprendizado, buscando auxiliar professores a tornarem esse ensino mais enriquecedor, estimulando a sua percepção na diversidade de possibilidades desse tópico e a aplicação de novas abordagens desse tema.

É proposto então atividades de reflexão aos educadores quanto a transição da aritmética para a álgebra em tópicos, por exemplo, quanto ao uso da "igualdade", "propriedade distributiva", "simbologia e linguagem algébrica" e "regularidade e generalização" em nível fundamental, apontando as dificuldades encontradas e a relevância de atribuir sentido a essa linguagem matemática em relação ao cotidiano do aluno, para que este não tenha uma visão restrita quanto a sua utilidade.

No dia 30/11/2023, finalizamos as conversas referente ao texto “Álgebra é mais do que algebrismo” (Tinoco et al., 2013) e comentamos vários tópicos pertinentes a realidade da educação. Logo em seguida, concluímos as discussões e iniciamos breves reflexões sobre o assunto com o texto “As dificuldades do professor de matemática no ensino da álgebra” (Pacheco; Bezerra, 2019), que tem como temática compreender as possíveis razões para as dificuldades enfrentadas pelos alunos quanto ao ensino de Álgebra. Ele recorre a analisar como a Álgebra é aplicada em sala de aula, percebendo como nos anos escolares iniciais não é reforçado ideias sobre o assunto, sendo assim, quando o aluno se separa com esses conteúdos no começo do fundamental II, apresentam dificuldades na compreensão, implicando em resolver seus problemas matemáticos de forma descontextualizada e mecanicamente, sem entender a sua relevância.

Esse entrave no primeiro contato com a Álgebra, tem por motivação a qualidade da formação do educador e a forma como é regido a sua aplicação de acordo com os documentos oficiais, como PCN e BNCC, que não são padronizados de fato com qual idade o aluno deveria aprender tal conceito envolvendo algebrismo.

Com isso, tendo em vista que o professor em formação durante a sua graduação se depara com conteúdos que deverão ser aplicados em sala de aula posteriormente, mas não lhes é apresentado a maneira pela qual ensinarão, ou seja, não lhes oferece suporte pedagógico suficiente. Compilam na dificuldade da introdução para os assuntos a serem tratados e atraso no processo de ensino, principalmente por lhes serem apresentados disciplinas de cunho matemático desassociado da pedagogia e suas metodologias durante a licenciatura.

Seguindo nos encontros, no dia 14/12/2023, realizamos uma discussão quanto a possível escolha do tema para a referida linha de pesquisa de Álgebra, em que finalizamos nosso encontro acessando os antigos trabalhos presentes na sala do LEAMAT.

Finalizamos o ano de 2023 definindo os temas para as linhas de pesquisa de Álgebra e Geometria no dia 21/12 e seus possíveis materiais para serem utilizados na sequência didática, para assim darmos seguimento às pesquisas e suas justificativas.

Iniciamos o ano de 2024, no dia 01/02, elaborando o relatório e sanando dúvidas referentes ao projeto. Finalizamos ao longo da semana e, no dia 08/02, entregamos para correção.

1.2 Elaboração da sequência didática

1.2.1 Tema

Equações de segundo grau

1.2.2 Justificativa

A ideia do tema surgiu a partir da experiência vivenciada em conjunto pelo grupo durante uma aula ministrada sobre o assunto de função quadrática, no qual foi apresentado o método de completamento de quadrados para resolução das equações de segundo grau e foi despertado um interesse em entender o porquê, na grande maioria das vezes, essa forma de ensino não é trabalhada em ambiente escolar durante o ensino básico regular.

Avançado no ensino superior, durante as aulas do componente curricular LEAMAT, foram disponibilizados textos como reflexão para a escolha do tema para cada linha de pesquisa que a envolve, em que alguns na sua essência tratavam do ensino mecanizado e seus prejuízos no processo de aprendizagem, apontando que "historicamente, o ensino de Matemática de forma geral ainda está muito atrelado ao repasse de informações e à reprodução mecânica e sem significado dos conteúdos formativos[...]” (Lopes; Oliveira, 2023, p.2).

Tendo em vista disso, os autores se sentiram motivados em escolher o método de completamento de quadrados (também conhecido como método de Al-Khwarizmi) para a resolução das equações do segundo grau como meio de tornar o ensino aprendizagem mais eficiente através do seu entendimento, desvinculando a forma limitada e mecanizada que é ensinada nas escolas, já que entende-se que

> [...] quando as equações do 2° grau são ensinadas aplicando apenas as regras do conteúdo, torna-se algo desagradável para o aluno, impossibilitando uma compreensão mais crítica sobre as atuais tendências matemáticas[...] pautada pelo cálculo mecanizado (Soares, 2023, p.105).

Ademais, “[...] trabalhar somente com as fórmulas não proporciona um aprendizado amplo; pelo contrário, só condiciona o aluno a resolver as equações por esse método, e isso não conduz ao aprendizado – e sim à memorização” (Ourives Filho; Santos; Neilla, 2010, n.p.).

Por isso analisamos que é de grande importância apresentar aos alunos diferentes formas de resolução e, principalmente, aquelas que instigam o desenvolvimento do raciocínio por meio do entendimento da usabilidade de tal ferramenta matemática.

> Acreditamos que o método de al-khawarizmi como algo prático, dinâmico e investigativo para professores atuantes no ensino da matemática e para os estudantes, pois estimula a busca positiva em relação à matemática, o gosto em aprender equações, a persistência na busca de soluções, a construção do saber com compreensão dos conceitos, procedimentos e habilidades matemáticas; a curiosidade e a autonomia” (Soares, 2023, p.111).

Nesse sentido, um dos objetivos deste trabalho com esse tema é apresentar uma alternativa geométrica para facilitar a visualização e compreensão da complexibilidade da álgebra e seus símbolos, já que para autores como Neto e Carvalho (2021, p.194) “uma das dificuldades encontradas no ensino da álgebra é a de que os alunos têm de fazer a relação entre o simbolismo algébrico com o que ele representa” (apud Souza; Panossian; Cedro, 2014), além do mais

> Entendemos que essa técnica resolutiva de completar o quadrado proporciona uma melhor compreensão ao estudante, uma vez que até mesmo partindo de uma equação escrita sem contexto, podemos fazer associações de seus termos com figuras geométricas, tornando o processo matematicamente mais abrangente, uma vez que relaciona aspectos operatórios, algébricos, geométricos e pedagogicamente muito mais compreensível [...] (Neto; Carvalho, 2021, p.202, apud Souza; Panossian; Cedro, 2014).

Para alcançar esse objetivo será empregado o uso do recurso tecnológico Geogebra, importante para envolver os alunos na aula, além de ser uma ferramenta interativa que permite explorar tanto a álgebra quanto a geometria (Seloraji; Eu, 2017, p.65)

Assim, o presente artigo tem a pretensão de prover meios para resolver equações de 2° grau de forma mais lúdica, permitindo a compreensão do aluno.

1.2.3 Objetivo geral

Fornecer meios para interpretar e resolver equações de 2° grau de forma não mecanizada, desenvolvendo o raciocínio do aluno por meio do método de completamento de quadrados.

1.2.4 Público-alvo

1°. ano do Ensino Médio.

2 RELATÓRIO DO LEAMAT II

2.1 Atividades desenvolvidas

Retomamos as atividades no dia 05/07/2024 com uma revisão dos tópicos principais dos temas de cada trabalho, foi feito, também, algumas discussões sobre ideias quanto às sequências didáticas.

No dia 19/07/2024 analisamos, junto ao orientador, o primeiro esboço da sequência didática. Foram definidos alguns ajustes necessários e uma análise da viabilidade do uso de um applet do geogebra durante a sequência.

No encontro seguinte, dia 26/07/2024, foi apresentado ao orientador o conteúdo dos slides que seriam utilizados durante a sequência didática. Na semana seguinte, dia 02/08/2024, acatamos as sugestões do orientador e foram feitos os ajustes necessários.

As semanas dos dias 09/08/2024 e 16/08/2024, foram dedicadas para a elaboração dos materiais necessários para os testes das sequências didáticas, finalização dos slides e a construção dos applets do geogebra, que teriam início no dia 22/08/2024.

A aplicação teste da sequência didática se deu no dia 30/08/2024, nela conseguimos ter um panorama da nossa sequência e com ela realizaremos as alterações necessárias a partir das críticas e sugestões apontadas.

2.2 Elaboração da sequência didática

A aula será separada por três etapas, respectivamente: expositiva (definições de variável e incógnita, funções e equações e equação de 2°. grau), interativa (participação dos alunos ao completar o quadrado) e dialógica (aluno interagindo com o professor na resolução da equação proposta).

A primeira etapa consistirá em apresentar as diferenças entre variável e incógnita, trabalhando como esses termos estão associados às equações e funções, bem como a noção de equivalência entre os membros de uma equação e de uma função. Em seguida, será apresentado o tema das equações de 2° grau, sua definição e possíveis métodos para ser efetuado seus cálculos.

Será efetuado os cálculos para uma dada equação de acordo com os métodos usualmente utilizados pelos discentes (supostamente soma e produto e fórmula resolutiva de equações do 2°. grau), para então, ser apresentado como a mesma equação seria resolvida pelo método de completamento de quadrados.

Antes disso, na segunda etapa, será apresentada a configuração geométrica do método de completamento de quadrados, em que alguns alunos serão convidados a ir à lousa completar o quadrado a partir da dinâmica proposta do tipo quebra-cabeça no applet do Geogebra, com o objetivo de guiar o aluno na representação geométrica do método proposto, para então utilizá-lo como auxiliador na realização dos cálculos.

Para a terceira etapa, o professor realizará a mesma equação antes resolvida por outras formas mencionadas pelos alunos, agora pelo método de completamento de quadrados, relembrando conceitos quanto ao produto notável, já que esse tema matemático será tratado na resolução.

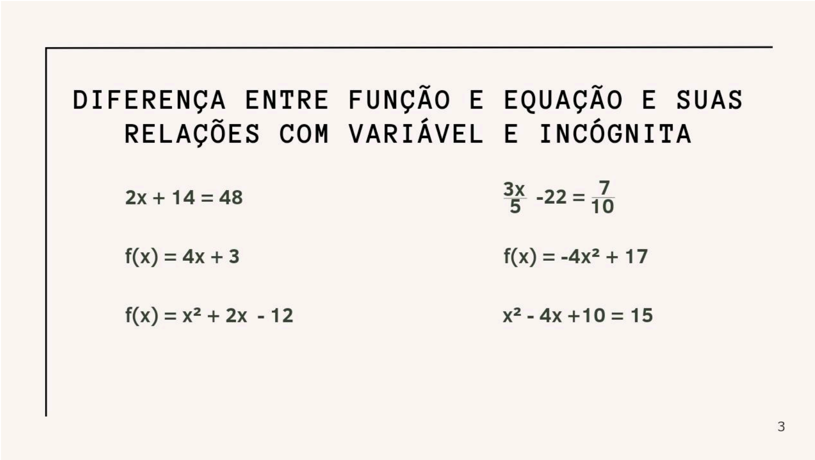
Por fim, será entregue aos alunos uma apostila com exercícios a serem realizados em sala e um material de apoio que irá auxiliá-los na realização dos cálculos.

2.2.1 Planejamento da sequência didática.

A sequência didática tem como um dos seus objetivos a apresentação do completamento de quadrados como ferramenta de auxílio para a resolução de equações de segundo grau. Para isso será utilizada como ferramenta a lousa digital, que permite utilizar a caneta como mouse sem perder a funcionalidade de caneta.

A primeira etapa da sequência será destinada a um breve resumo sobre a diferença entre função e equação, além de variável e incógnita com atenção especial para a noção de equivalência entre os dois membros da equação. Essa diferenciação será feita por meio da exposição de diferentes expressões algébricas e funções, como na figura 1, para os alunos. O objetivo será avaliar os conhecimentos prévios dos alunos ao questioná-los se saberiam dizer a diferença entre equação e função, o que servirá como uma revisão dessa diferença.

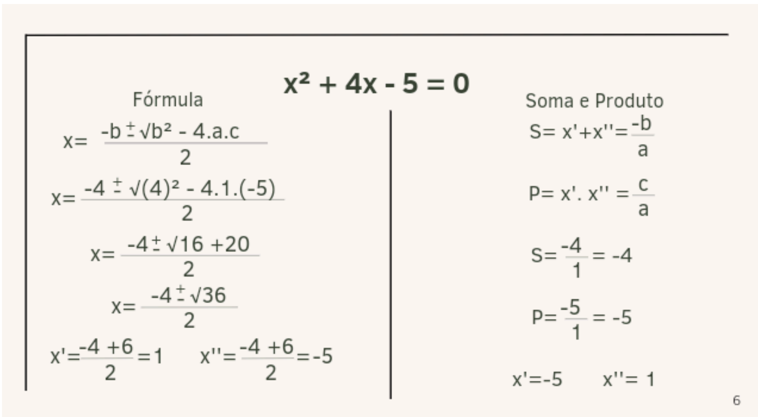
Figura 1 - Diferença entre função e equação e suas relações com variável e incógnita



Fonte: Elaboração própria.

Em um segundo momento, será definido o que se entende por equações de segundo grau, através da definição de $ax^2 + bx + c = 0$, sendo indagado a turma quais métodos eles conhecem para resolução de problemas de equações de segundo grau. O próximo tópico será a resolução de uma equação de segundo grau, previamente definida, pelos possíveis métodos expostos pelos alunos (figura 2).

Figura 2 - Resolução da equação $x^2+4x-5=0$ pela fórmula resolutiva e por soma e produto



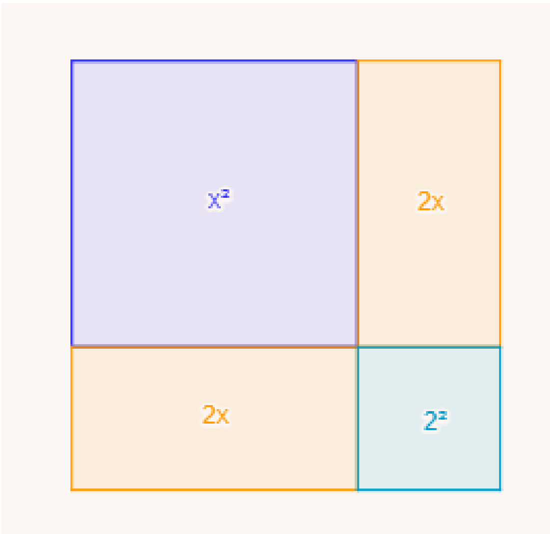
Fonte: Elaboração própria.

A seguir, será introduzido brevemente o assunto do método de completamento de quadrados como uma alternativa para a resolução de problemas desse tipo. Essa introdução será feita primeiro por uma exemplificação da representação geométrica de uma expressão algébrica, como ilustrado na figura 3 e 4 a seguir.

Figura 3 - Representação geométrica do método de completamento de quadrados

Fonte: Elaboração própria.

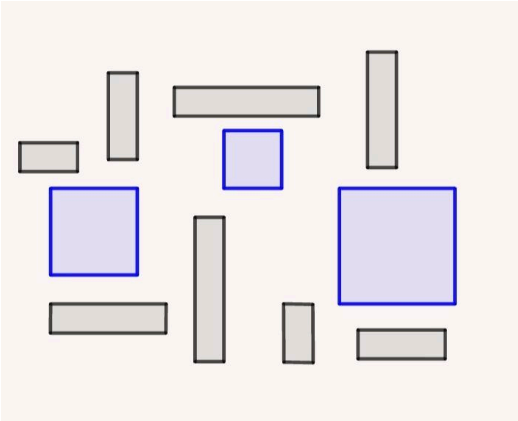
Figura 4 - Representação geométrica do método de completamento de quadrados a partir de uma equação



Fonte: Elaboração própria.

Após esse momento, na segunda etapa, será feita dinâmica do tipo quebra-cabeça, que será realizada em um applet do Geogebra (figura 5), em que os alunos serão convidados a irem à lousa, o que os permitirá realizar manipulações em tempo real para chegar na configuração geométrica do método de completamento de quadrado. Tendo como objetivo fixar os conceitos básicos do completamento, através da explicação da configuração geométrica desse método.

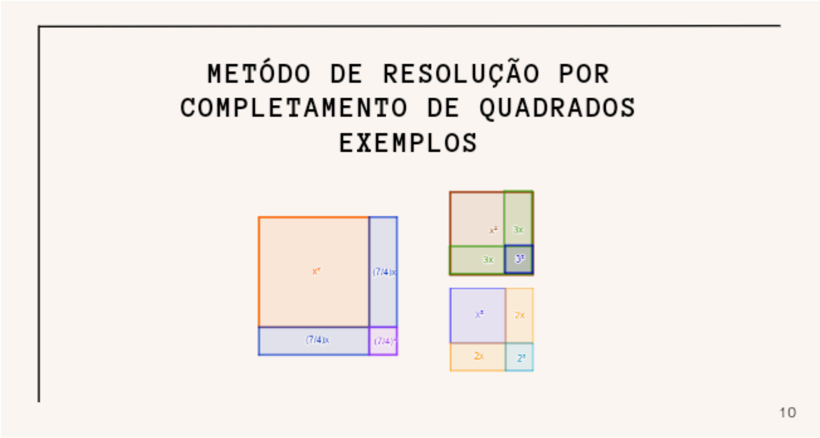
Figura 5- Dinâmica do tipo quebra-cabeça no applet do Geogebra



Fonte: Elaboração própria

Será utilizado um segundo applet do Geogebra (figura 6) para exemplificar como resolver equações por meio desse método de forma algébrica, apresentando para os alunos os paralelos entre os processos algébricos e os processos geométricos. Desse modo, será relembrado os produtos notáveis “quadrado da soma” e "quadrado da diferença”, ferramentas importantes para a resolução algébrica.

Figura 6 - Equações de segundo grau a serem resolvidas pelo método de completamento de quadrados



Fonte: Elaboração própria

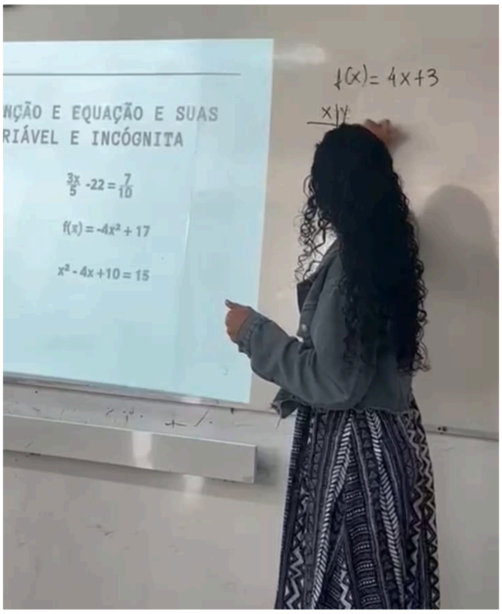
O exemplo será a mesma equação efetuada anteriormente, $x^2+4x-5=0$, agora resolvida pelo método de completamento de quadrados, que se utiliza de uma construção como referência geométrica para um melhor entendimento do processo algébrico a ser utilizado. Demonstrando aos alunos que, mesmo sendo utilizados métodos diferentes, é possível chegar a uma mesma conclusão/resultado.

Ao final da aula será disponibilizado um material de apoio (APÊNDICE A2) composto por uma revisão do método de completamento junto a uma lista de exercícios de equações quadráticas (APÊNDICE A2), em que será escolhido um para ser resolvido junto dos alunos e o restante serão realizadas por eles a partir do método de completamento de quadrados.

2.2.2 Aplicação da sequência didática na turma do LEAMAT II

Solicitada a divisão da turma em três grupos, a aula foi iniciada apresentando o tema e o sumário e, em seguida, foi definido a diferença entre funções e equações e suas relações com variáveis e incógnitas a partir de exemplos e a resolução de dois deles (um sobre equação e outro sobre função) para exemplificar. (figura 7)

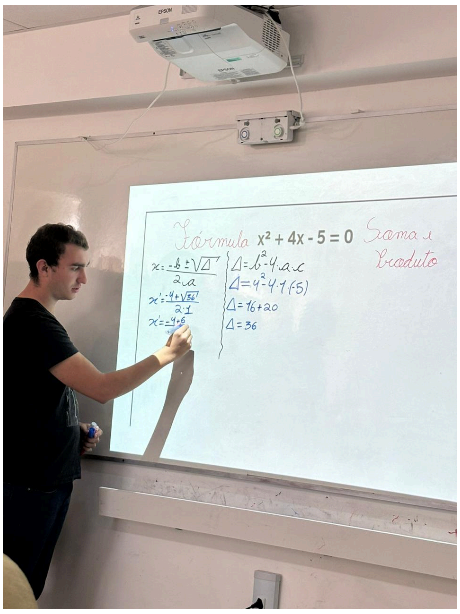
Figura 7 - Exemplos com valores estipulados para definir o que é função e equação



Fonte: Protocolo de pesquisa.

No assunto de equações, foi definido quanto a equação de segundo grau e, posteriormente, questionado a turma quais são os métodos utilizados por eles para resolver esse tipo de equação, obtendo como resposta a fórmula resolutiva e a soma e o produto. Com isso, tomamos como exemplo a equação $x^2+4x-5=0$ para ser realizada os cálculos de acordo com os métodos indicados por eles. (figura 8)

Figura 8 - Resolução da equação $x^2+4x-5=0$ pela fórmula resolutiva e por soma e produto

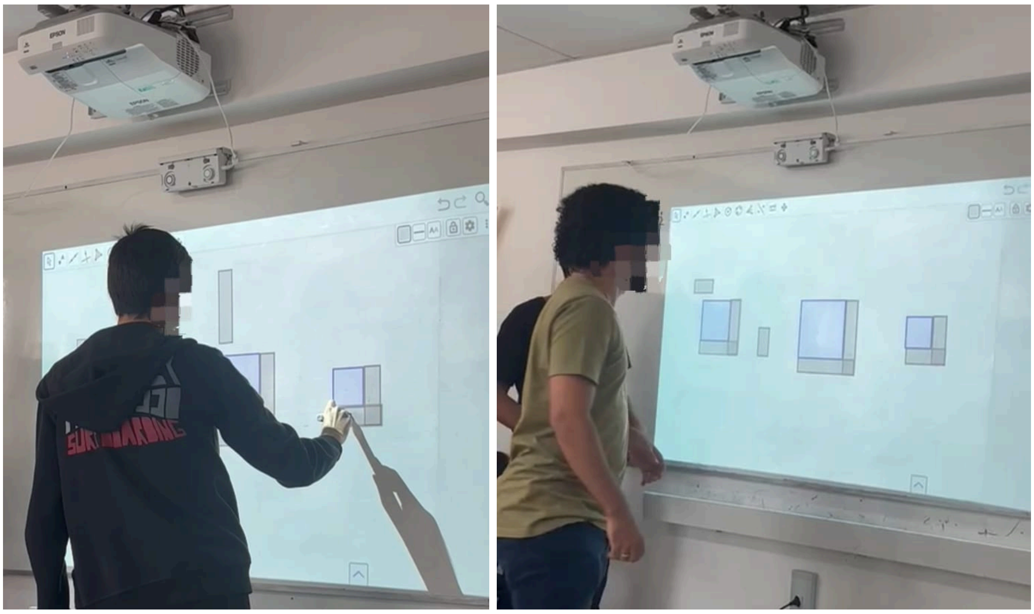


Fonte: Protocolo de pesquisa.

Foi apresentado em seguida o método de completamento de quadrados como outra alternativa de resolução para esse tipo de equação, reforçando que esse método conta com representações geométricas para facilitar na compreensão da resolução e por isso seria apresentado sua configuração geométrica a partir do applet do Geogebra.

A partir disso, foi introduzida uma dinâmica na qual um aluno de cada grupo ia a lousa digital montar o “quebra-cabeça” cujo objetivo era organizar os retângulos a um quadrado que seria completado. No entanto, todos os alunos não compreenderam a configuração do método e realizaram essa dinâmica de forma equivocada, por isso um dos professores em formação que estava lecionando o assunto apontou como deveria ter sido realizada a atividade.(figura 9)

Figura 9 - Resolução da equação $x^2+4x-5=0$ pela fórmula resolutiva e por soma e produto



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Feito isso e compreendido a real configuração desse método, foi retomado a mesma equação resolvida anteriormente, $x^2+4x-5=0$, para ser efetuada pelo método de completamento de quadrados. Foi explicado o método e relembrado o conceito de produto notável, que é utilizado como ferramenta na resolução desse método.

Ao final, foi entregue o material de apoio junto a lista de exercícios para serem resolvidos pelos alunos, que apresentaram algumas dúvidas quanto à resolução desse método, principalmente, quando o coeficiente b é negativo.

No geral, a aplicação da sequência didática na turma do LEAMAT II foi satisfatória e foi alcançado o objetivo.

Algumas sugestões foram levantadas, além do surgimento de uma dificuldade perante a resolução de equações por meio do método de completamento a partir da situação em que o coeficiente *b* é negativo.

As sugestões foram as seguintes: A diminuição do tempo na explicação da diferença entre função/equação; Resolver exemplos nos quais o coeficiente *b* é negativo, além de uma explicação mais voltada para esses casos; Algumas correções na fala durante a explicação.

3 RELATÓRIO DO LEAMAT III

3.1 Atividades desenvolvidas

As atividades referentes ao LEAMAT III foram iniciadas no dia 19/11/2024. A partir deste dia foram realizadas discussões para realização das mudanças a partir das sugestões realizadas após a experimentação da sequência didática na turma do Leamat II.

No dia 09/12/2024 foi realizada a primeira aplicação da proposta de sequência didática relatada neste trabalho.

No retorno do ano letivo, do dia 28/01/2025 ao dia 18/03/2025, foram efetuadas alterações na sequência didática aplicada para a realização de uma nova aplicação.

Uma aplicação teste com o orientador, após as alterações, foi realizada no dia 11/03/2025. Foi orientado mudanças quanto a apresentação oral e detalhes no conteúdo expositivo.

A reaplicação da sequência didática da linha de pesquisa de Álgebra ocorreu no dia 20/03/2025 em uma turma de 1°. ano do Curso Técnico em Eletrotécnica Integrado ao Ensino Médio do Instituto Federal Fluminense - Campus Campos Centro (IFF) que será descrita no tópico 3.2.2 deste capítulo.

Do dia 20/03/2025 a 19/03/2025 foram realizadas alterações no relatório final.

Nos dias 15/04/2025 a 29/04/2025 foram realizadas as apresentações finais com ênfase nas experimentações da sequência didática de cada grupo do LEAMAT e suas linhas de pesquisas.

No dia 06/05/2025 foi realizado a apresentação final deste trabalho na linha de pesquisa de Álgebra.

No dia 20/05/205 foi realizada a avaliação final dos grupos do LEAMAT de cada linha de pesquisa.

3.2 Elaboração da sequência didática

No tópico 3.2.1 será descrito a sequência didática a ser realizada na turma de 1°. ano do Curso Técnico em Eletrotécnica Integrado ao Ensino Médio do Instituto Federal Fluminense - Campus Campos Centro (IFF) e no tópico 3.2.2 constará os relatos da apresentação com fotos e resolução dos alunos aplicadas no dia 20/03/2025.

3.2.1 Versão final da sequência didática

Após as contribuições obtidas no teste exploratório realizado com a turma do componente LEAMAT II do curso de Licenciatura em Matemática, a qual os autores deste trabalho também licenciam, foram adaptados, na apresentação oral, a diminuição do tempo na explicação da diferença entre função e equação, além de correções na fala durante a explicação.

É válido ressaltar que a descrição a seguir refere-se a sequência didática que foi aplicada no dia 09/12/2024 com uma parte da turma 1°. ano do Curso Técnico em Eletrotécnica Integrado ao Ensino Médio do IFF, selecionada a partir da inscrição realizada por eles no formulário disponibilizado pelos autores. Essa restrição em relação a quantidade de alunos participantes se dá devido a limitação da capacidade do laboratório a ser utilizado. Destaca-se que esse ambiente foi escolhido por ter a lousa digital instalada, recurso didático a ser usado para realização de uma das atividades.

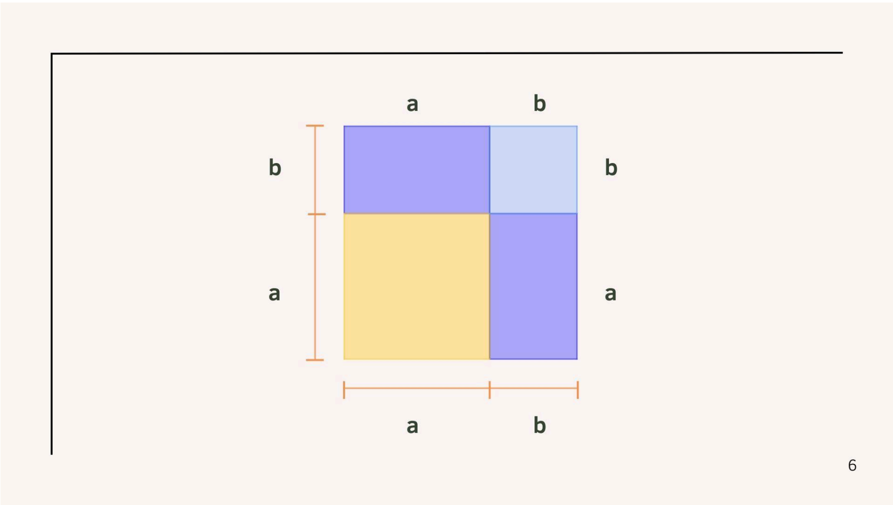
Todavia, foi realizado uma reformulação da sequência didática, detalhada ao final deste tópico a partir do nono parágrafo, para a realização de uma reaplicação descrita no tópico 3.2.2 deste trabalho.

A versão final da sequência didática proposta neste trabalho, após todos os ajustes realizados, será descrita a seguir. Contará com a exposição da aula por meio de slides (APÊNDICE B1) e como material de apoio aos alunos a distribuição de uma apostila (APÊNDICE B2) que contém todo o conteúdo a ser exposto. A apostila também contém os exemplos a serem resolvidos como método avaliativo, mantendo o material de apoio anterior quanto ao passo a passo do método de completamento de quadrados (APÊNDICE A2).

A sequência didática será iniciada questionando aos alunos “como determinar a área de um quadrado de lado $a+b$?” a fim de direcioná-los na compreensão da dedução do produto notável do quadrado da soma de dois termos e também do quadrado da diferença de dois termos, tanto com apoio geométrico quanto algébrico.

Para isso, a partir de um quadrado já construído de lados *a+b*. será necessário compreender que em cada segmento existirá uma medida *a* e uma medida *b* que estão contidos em cada lado *a+b*, identificados após a sua segmentação **(**figura 10). Feita a divisão desses lados, serão formados internamente figuras com áreas de dois retângulos de lados *a* e *b*, um quadrado de lados *a* e outro quadrado de lado *b*.

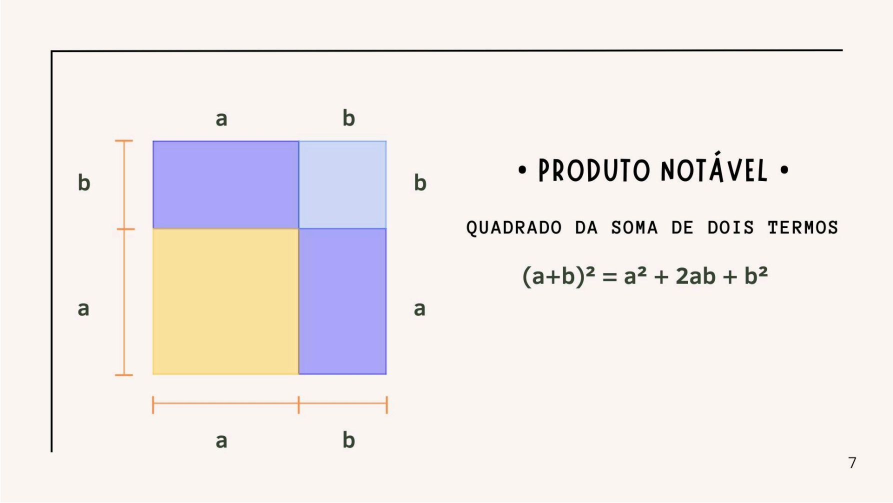
Figura 10 - Divisão dos lados do quadrado de lado *a+b*



Fonte: Elaboração própria

Quando somadas estas áreas, verifica-se a relação “$a^2 + 2.a.b + b^2$”. Em seguida, será relembrado a fórmula da área de um quadrado, que consiste em elevar o valor do lado ao quadrado ($(a+b)^2$). Com isso, os alunos poderão associar a relação encontrada após a divisão dos lados, verificando assim que as áreas são equivalentes, ou seja, que $(a+b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$. A igualdade encontrada é, portanto, o produto notável quadrado da soma de dois termos (figura 11).

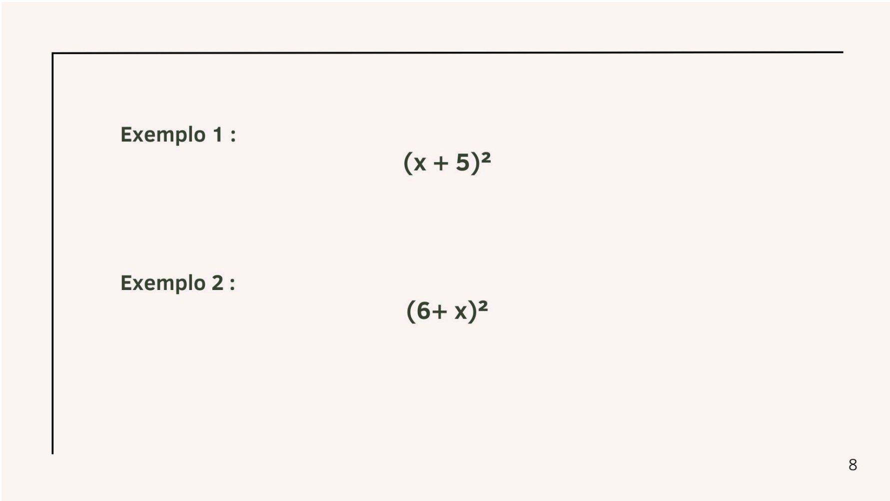
Figura 11 - Produto Notável do quadrado da soma de dois termos



Fonte: Elaboração própria

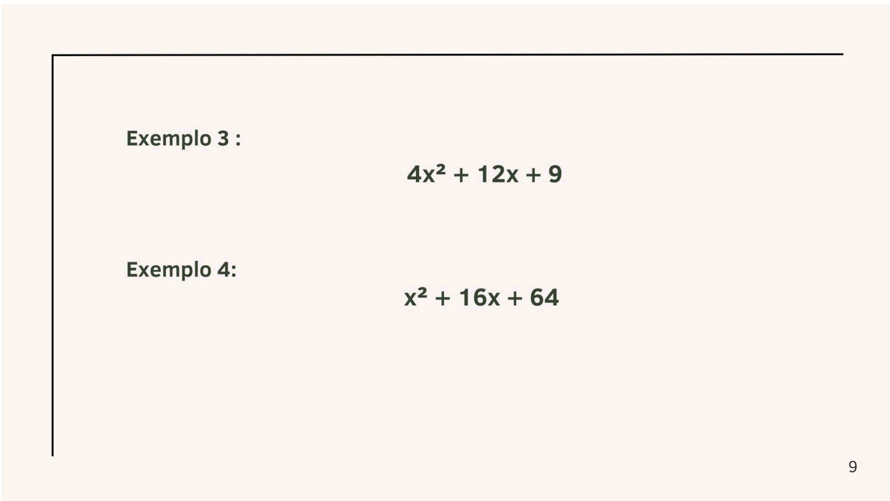
Em seguida, será realizado, junto aos alunos, os exemplos 1 e 2 (figura 12) para desenvolver as expressões matemáticas apresentadas a partir do produto notável. Logo depois, serão resolvidos os exemplos 3 e 4 (figura 13) reduzindo trinômios de segundo grau a um produto notável. Nessas etapas será enfatizada a ideia de extrair a raiz quadrada dos termos acompanhados de x^2 e x elevado a 0 para verificar a existência de um trinômio do quadrado perfeito com os valores encontrados pelas raízes. Encontrados esses valores, eles deverão ser multiplicados por 2 e verificados se equivalem ao valor já encontrado para o termo acompanhado de x.

Figura 12 - Exemplos para desenvolver a um produto notável do quadrado da soma de dois termos



Fonte: Elaboração própria

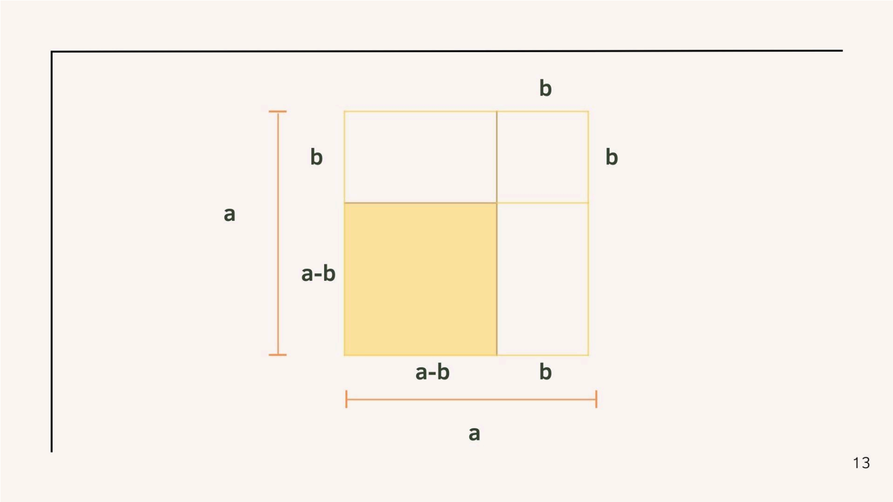
Figura 13 - Exemplos para reduzir a um produto notável do quadrado da soma de dois termos



Fonte: Elaboração própria

O próximo passo será deduzir o produto notável quadrado da diferença de dois termos. Será utilizada uma dinâmica semelhante à que foi utilizada no quadrado da soma. Porém, no caso do quadrado da diferença, deseja-se obter a área de um quadrado de lado *a* subtraído uma medida *b*. Para isso, é preciso subtrair de cada segmento correspondente aos lados do quadrado, uma medida *b*, restando uma medida *a* - *b* (figura 14).

Figura 14 - Divisão dos lados do quadrado *a-b*

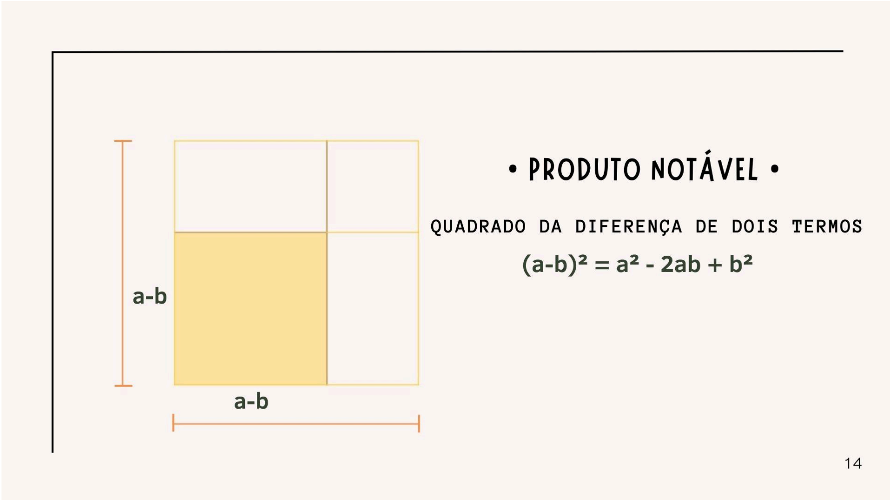


Fonte: Elaboração própria

Realizando essas divisões nos lados, originará internamente figuras de áreas de dois retângulos de lados *a* e *b*, um quadrado de lados (*a* - *b*) e um quadrado de lado *b*. Como se deseja obter apenas a área do quadrado de lado *a* - *b*, todas as áreas restantes serão retiradas do quadrado maior de lado *a*. Entretanto, ao retirar uma medida *b* de cada lado, teremos que considerar que será retirado duas vezes a área do quadrado de lado *b*, implicando num vazio, sendo necessário acrescentar um quadrado de lado *b* para manter a área original.

Diante disso, somando todas as áreas retiradas do quadrado de lado *a* e as alterações necessárias para isso, teremos a relação "$a^2 - 2.a.b + b^2$", que ao ser relacionada com a fórmula da área do quadrado de lado ($a - b$), será obtida a igualdade $(a\text{-}b)^2 = a^2 - 2.a.b + b^2$. Essa relação encontrada é, portanto, o produto notável quadrado da diferença de dois termos (figura 15).

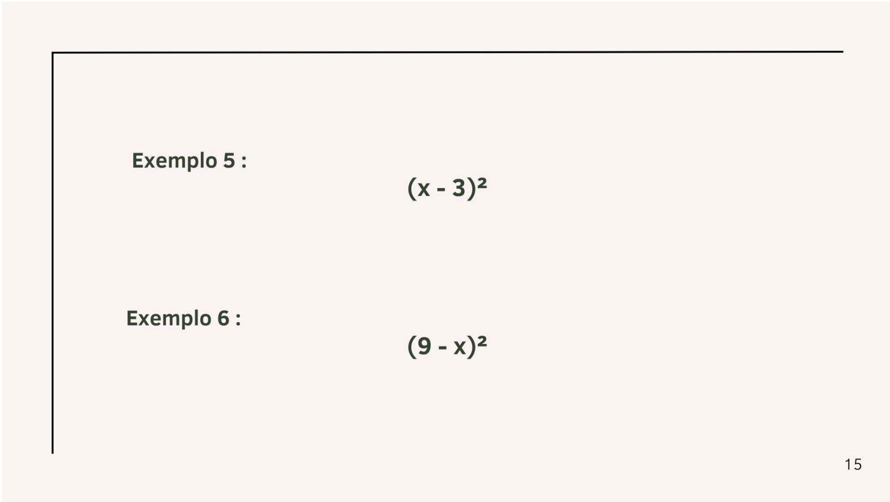
Figura 15 - Produto Notável do quadrado da diferença de dois termos



Fonte: Elaboração própria

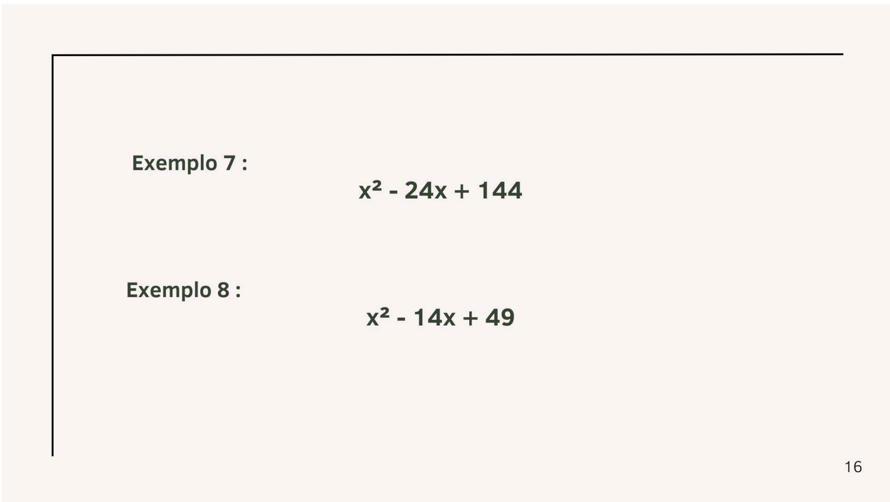
Após a dedução do quadrado da diferença de dois termos, serão realizados os exemplos 5 e 6 (figura 16), a fim de desenvolver produto notável associando-o a um trinômio do quadrado perfeito e os exemplos 7 e 8 (figura 17) para reduzir os trinômios de segundo grau a um produto notável. Para melhor compreensão do processo de resolução de equações de 2º. grau por meio do completamento de quadrados, é imprescindível que os alunos sejam capazes de estabelecer as equivalências entre os trinômios do quadrado perfeito com o quadrado da soma ou da diferença entre dois termos.

Figura 16 - Exemplos para desenvolver a um produto notável do quadrado da diferença de dois termos



Fonte: Elaboração própria

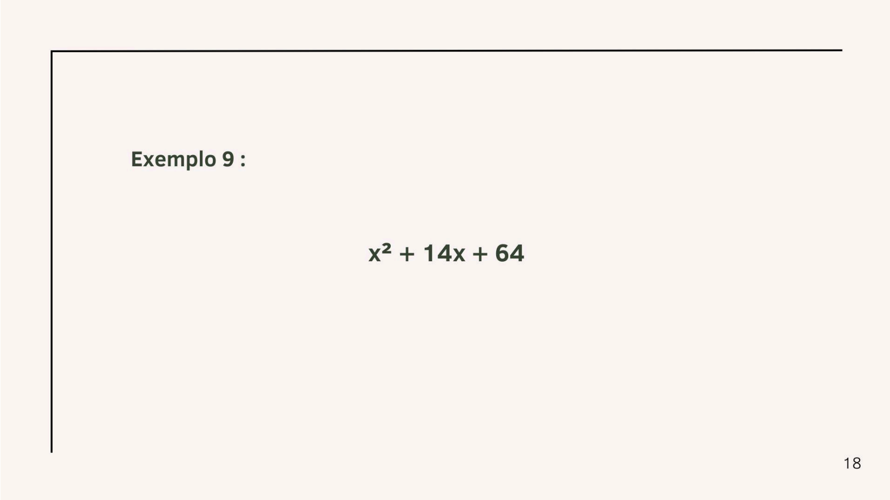
Figura 17 - Exemplos para reduzir a um produto notável do quadrado da diferença de dois termos



Fonte: Elaboração própria

Finalizadas as deduções e exploração dos exemplos, deve-se questionar aos alunos se todo trinômio de 2º. grau possui uma equivalência com o quadrado da soma ou da diferença entre dois termos. Deverá ser verificado, a partir de exemplos tal como o 9 (figura 18), que nem sempre é possível estabelecer essa equivalência.

Figura 18 - Exemplo de um trinômio do segundo grau



Fonte: Elaboração própria

Em seguida deverá ser relatado que através do método de completamento de quadrados é possível transformar um trinômio de 2º. grau qualquer em um trinômio do quadrado perfeito adicionado de uma constante.

Para isso, será necessário definir o que são equações de segundo grau e que o método de completamento de quadrados é umas das formas pela qual pode-se obter as soluções dessas equações.

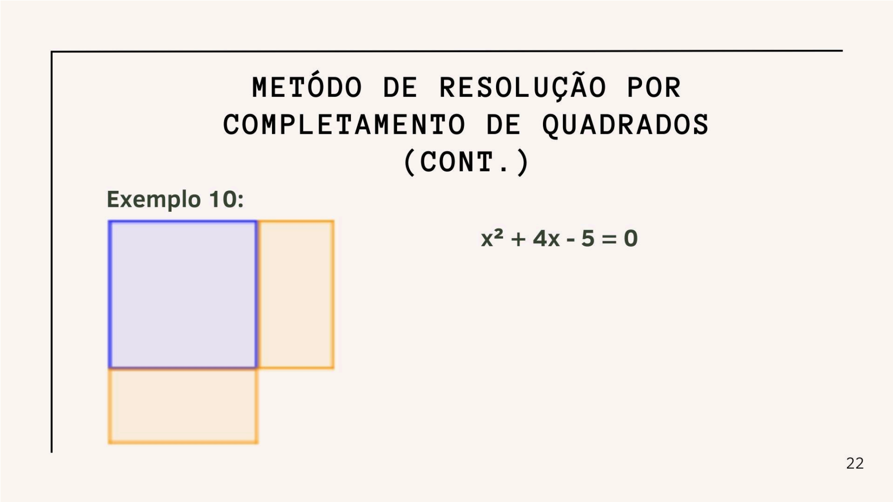
Em seguida, será apresentada a configuração do método de completamento de quadrados e realizada uma dinâmica com o Software do Geogebra, a qual três alunos voluntários formaram a configuração deste método utilizando a lousa digital (figura 19).

Figura 19 - Dinâmica no Software do Geogebra

Fonte: Elaboração própria

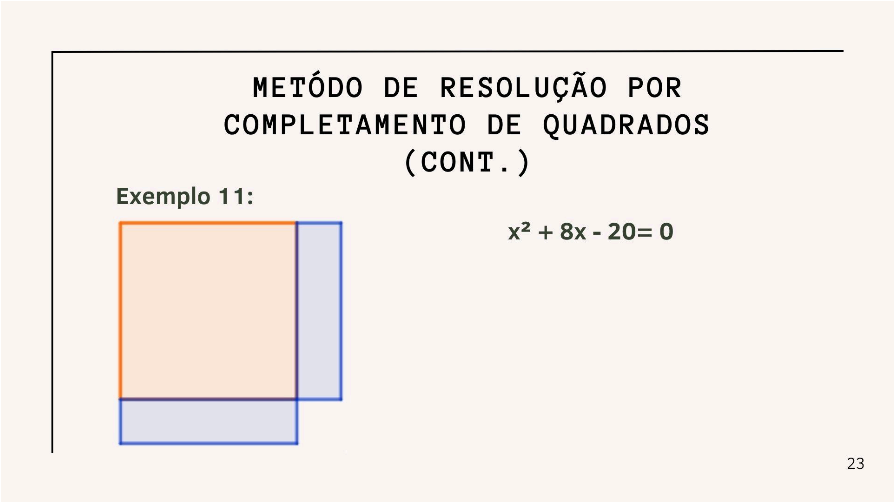
Posteriormente, junto à participação dos alunos, serão realizados exemplos 10 e 11 (figura 20 e figura 21) utilizando o método de completamento de quadrados a partir do apoio algébrico e geométrico, permitindo que o exemplo 11 seja solucionado pelos alunos e, posteriormente, corrigidos pelos docentes em formação.

Figura 20 - Exemplo sobre método de completamento de quadrados



Fonte: Elaboração própria

Figura 21 - Exemplo a ser solucionado pelos alunos



Fonte: Elaboração própria

3.2.2 Experimentação da sequência didática na turma regular

Destaca-se que o presente grupo realizou duas aplicações ao longo do componente Leamat III. A sequência didática da primeira aplicação iniciou relembrando conceitos de funções e equações, apontando suas distinções e as suas relações com variáveis e incógnitas, apresentando exemplos para pontuar a definição de cada item anteriormente citado.

Seguindo nesse contexto de equações, foi mencionado a existência de diferentes equações, mas que o foco do trabalho era as equações do tipo 2°. grau.

Portanto, foi apresentado um exemplo de equação de 2°. grau, com o objetivo de questionar aos alunos quais métodos utilizados por eles na resolução de equações de 2°. grau, tendo como pretensão que as respostas sejam a fórmula resolutiva e método da soma e produto.

Após, foi introduzido o tema do método de completamento de quadrados e pontuado a sua configuração geométrica a fim de guiar os alunos na dinâmica a ser realizada em seguida. Dinâmica essa que contou com a participação de três alunos voluntários, da qual foi obtido um resultado satisfatório.

Em seguida foram realizados o exemplo solicitado anteriormente e demais exemplos com coeficientes *b* positivo e negativo, *a* igual e diferente de 1, além de conceitos geométricos envolvendo fração.

Finalizada a resolução dos exemplos, os alunos iniciaram a lista de exercícios (A2), na qual os discentes apresentaram dúvidas pertinentes sobre o método apresentado, sendo analisadas a partir da dificuldade de identificação do valor a ser adicionado para transformar em um trinômio do quadrado perfeito, para então utilizar a ferramenta do produto notável. Ou seja, as dificuldades apresentadas foram advindas, principalmente, pela não compreensão do tema de completamento de quadrados e da não compreensão ou conhecimento do tema de produtos notáveis e sobre o trinômio do quadrado perfeito.

Essas dúvidas e a baixa participação dos alunos durante a aula, evidenciaram a não compreensão do tema proposto quanto ao método de completamento de quadrados e, portanto, não foi atingido o objetivo dos autores.

Diante disto, em conversa entre os autores e o orientador, foi decidido a realização de uma nova aplicação após a realização de ajustes na sequência didática e sua reformulação, a fim de atingir os objetivos e expectativas deste trabalho.

A aplicação da sequência didática a ser detalhada a seguir trata-se da segunda aplicação, realizada após as alterações. As mudanças realizadas tiveram como base a dificuldade dos alunos em relação aos conceitos envolvendo produto notável e trinômio do quadrado perfeito, o que implicou na alteração do título, anteriormente nomeado por “Resolução de equações de segundo grau por método de completamento de quadrados”, para “Produtos notáveis e completamento de quadrados na resolução de equações de 2º. grau”.

Com isso, foi implementada a dedução do produto notável do quadrado da soma e do quadrado da diferença de dois termos com apoio geométrico a partir de um quadrado, inserindo exemplos do produto notável na sua forma desenvolvida e reduzida. Também foi adicionado um questionamento se todo trinômio de 2º. grau possui uma equivalência com quadrado da soma ou da diferença, verificando a partir de exemplos que não é sempre possível, mas que é possível obter essa equivalência através do método de completamento de quadrados.

Seguindo com a aula, foi apresentada a definição de equação de segundo grau para iniciar o método de completamento de quadrados, elucidando dois exemplos com coeficientes sendo *a* igual a 1, *b* positivo e *c* diferente de 0.

Feitas estas alterações, a reaplicação da sequência ocorreu no dia 20/03/2025 no Curso do 1°. ano do Curso Técnico em Eletrotécnica Integrado ao Ensino Médio no Instituto Federal Fluminense - Campus Campos Centro (IFF) em Campos dos Goytacazes-RJ, para um quantitativo inicial de 12 alunos com início às 16h30min e duração de 1h20min.

Devido a imprevistos com a apostila e com o horário de intervalo da turma, a aula iniciou com um atraso de 20 minutos em relação ao horário previsto às 16h10min.

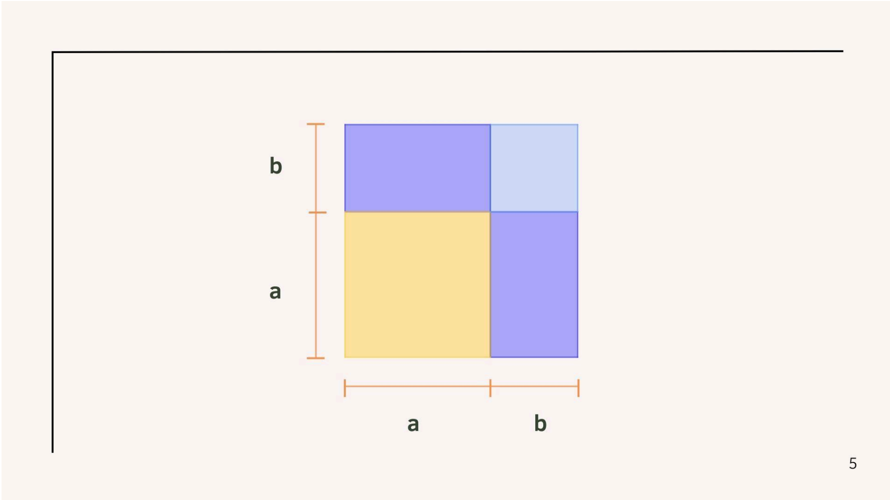
Para exposição dos conteúdos contidos nos slides (APÊNDICE B1) foi utilizada a lousa digital disponibilizada pelo laboratório da instituição a qual ocorreu a aplicação. Foram distribuídas as apostilas (APÊNDICE B2) como material de apoio.

O início da aplicação foi marcada pela apresentação do título, dos licenciandos participantes, do componente curricular e do orientador. O sumário não foi detalhado para não induzir os alunos, no primeiro momento, a mencionar mecanicamente as formas do produto notável.

Prosseguindo, foi indagado aos docentes sobre como determinar a área de um quadrado de lado *a* + *b* e, para isso, foi preciso relembrar algumas propriedades geométricas do quadrado como o paralelismo e congruência de seus lados, bem como sua área. Os questionamentos foram respondidos de forma satisfatória pelos alunos.

Em seguida, com apoio da geometria, foi mencionado que se o lado do quadrado é obtido a partir da soma de duas medidas, nesse caso denominadas de *a* e *b*, seria necessário demarcá-las em cada lado da figura geométrica, ressaltando que seria tomado a medida *a* maior que *b* (figura 22).

Figura 22 - Dinâmica no Software do Geogebra

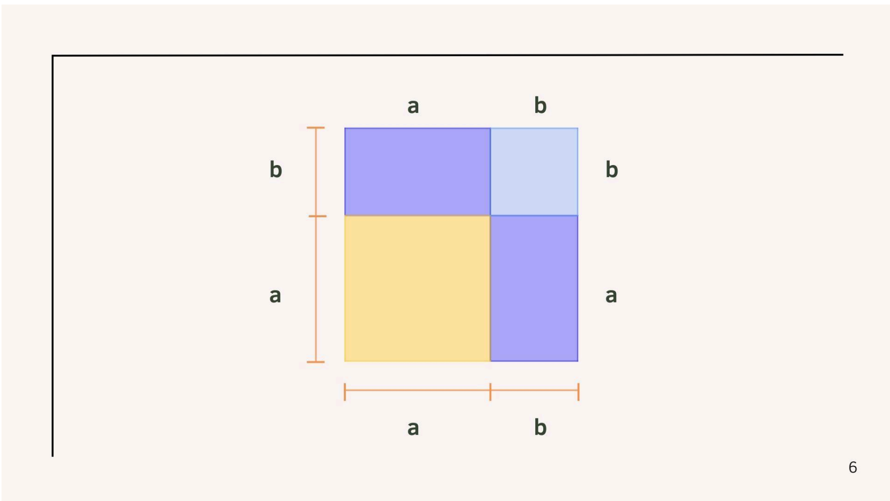


Fonte: Elaboração própria

Feito isso, obtivemos, por paralelismo, novas figuras geométricas com áreas contidas no interior do quadrado maior, de lados *a* + *b.* Os alunos acompanharam o raciocínio e foram indagados sobre quais seriam essas novas figuras, sendo identificados quadrados e retângulos. Em seguida, foi discutido juntamente com a turma sobre como determinar a área dessas novas figuras formadas.

Os discentes observaram o surgimento de áreas de diferentes figuras geométricas, sendo elas um quadrado menor de lado *a* e de outro quadrado de lado *b*, além de dois retângulos de lados *a* e *b* (figura 23).

Figura 23 - Dinâmica no Software do Geogebra



Fonte: Elaboração própria

Com isso, foi retomada a ideia de que a junção de todas as áreas das figuras menores resultava no quadrado maior de lados *a + b*, sendo possível estabelecer uma relação de equivalência entre as áreas. A área do quadrado de lado *a + b*, denominada no momento da explicação como Aqm (área do quadrado maior), seria igual a soma das áreas dos quadrados de lados *a* (a^2) com as áreas de dois retângulos de lados *a* e *b* (2.a.b) e do quadrado de lado *b* (b^2), configurando assim a forma desenvolvida do quadrado da soma de dois termos.

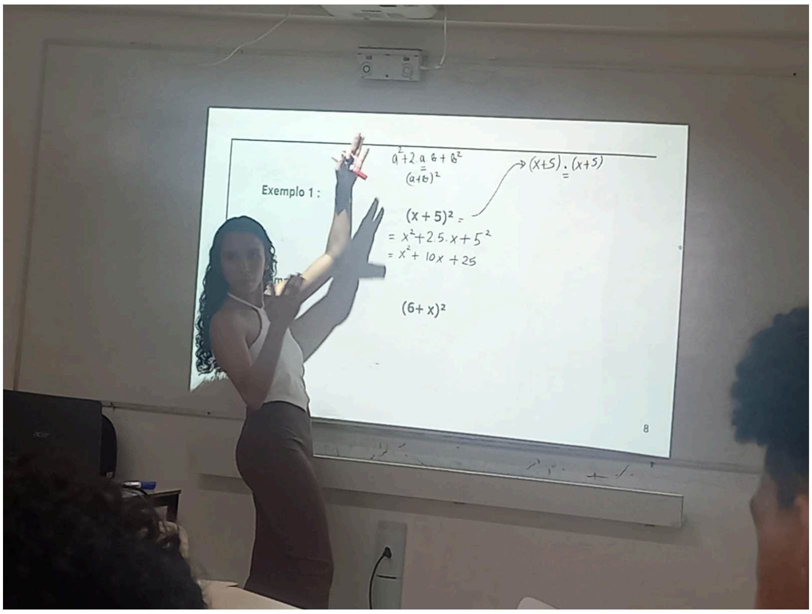
Entretanto, antes de relacionar a forma desenvolvida, foi retomada a ideia do questionamento inicial de que era necessário determinar a área do quadrado de lado *a + b*, e como mencionado por eles, a área desta figura corresponde ao lado elevado ao quadrado, o que portanto induz a compreender que a área do quadrado *a + b* é igual a $(a+b)^2$.

Nesse sentido, foi afirmado que ambas relações estabelecidas para determinar as áreas do quadrado maior eram equivalentes, percebendo que se tratava do produto notável quadrado da soma de dois termos reduzido equivalente ao desenvolvido.

Em seguida, foram apresentados exemplos e contou com a participação ativa dos alunos, respondendo como fariam para desenvolver e reduzir as expressões matemáticas a um produto notável. Contudo, um dos alunos, mesmo após apresentados que a partir de um quadrado era possível deduzir o produto notável quadrado da soma de dois termos, não compreendeu como resolver os exemplos que solicitaram o desenvolvimento do produto notável de uma dada expressão algébrica.

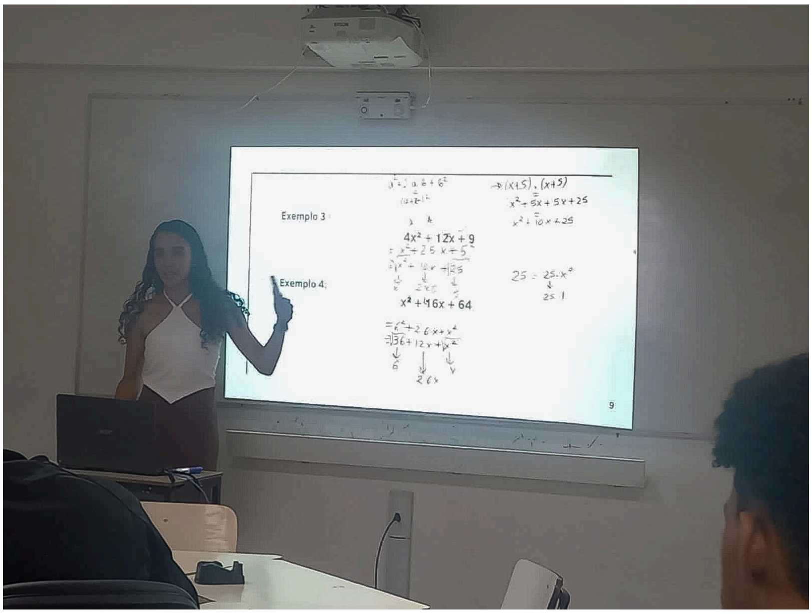
Para compreender como realizar essa tarefa foi preciso apresentar a ideia da propriedade distributiva, em que $(a+b)^2 = (a+b).(a+b)$. Essa maneira de associar o produto notável a propriedade distributiva foi mencionada por uma aluna na tentativa de ajudar o seu colega a compreender a relação deduzida apresentada. Após a compreensão do produto notável e sua relação com a propriedade distributiva, o aluno que apresentou a dúvida conseguiu prosseguir realizando os demais exemplos (figura 24 e figura 25).

Figura 24 - Relação do produto notável com a propriedade distributiva



Fonte: Protocolo de pesquisa

Figura 25 - Resolução dos exemplos 3 e 4



Fonte: Protocolo de pesquisa

Nos exemplos da redução de um trinômio de 2º. grau a um produto notável, foi enfatizada a ideia de extrair raiz dos termos das extremidades (do termo acompanhado da variável elevada ao quadrado e do termo independente) para apontar os termos do produto notável reduzido. Como verificação e validação, os alunos tiveram que observar se o termo central (elemento numérico acompanhado pela variável de expoente igual a 1), equivalia ao dobro do produto dos valores das extremidades. Foi mencionado então que, quando comprovada essa relação entre os termos a partir do método apresentado, a expressão analisada corresponderia a um trinômio do quadrado perfeito.

Em seguida, foi explicado que o termo “trinômio do quadrado perfeito” está associado a uma expressão algébrica que pode ser obtida a partir do quadrado da soma ou da diferença de dois termos. Para elucidar, foi apresentado um exemplo associando um caso de produto notável desenvolvido já resolvido e, se apoiando na visualização geométrica, buscar a equivalência com o produto notável.

Dando sequência à aula, foi questionado aos alunos sobre como determinar a área de um quadrado de lado *a* subtraído uma medida *b* de seus lados, com o objetivo de deduzir o produto notável quadrado da diferença de dois termos (figura 26). Para isso, foi delimitado no quadrado uma medida *b*, restando de cada lado uma medida *a - b*, que por paralelismo foram obtidas quatros novas figuras geométricas, que também foram identificadas pelos discentes.

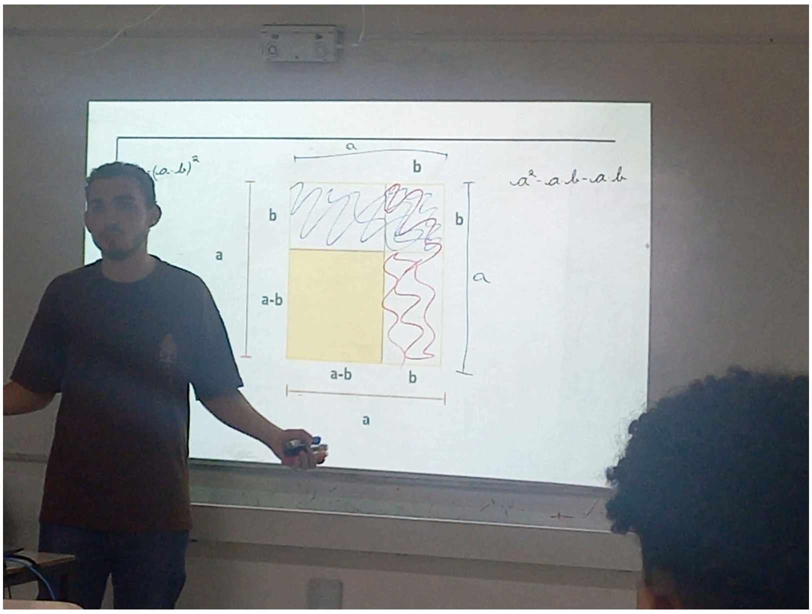
Os alunos demonstraram estar compreendendo a dedução, já que respondiam corretamente os questionamentos realizados durante toda a sequência didática.

Figura 26 - Explicação do produto notável quadrado da diferença

Fonte: Protocolo de pesquisa

Foi apresentada a decomposição da área do quadrado de lado *a - b* em dois retângulos de área igual *a.b* cada um, necessitando para isso adicionar um quadrado de lado *b* (figura 27).

Figura 27 - Explicação do produto notável quadrado da diferença quanto às áreas



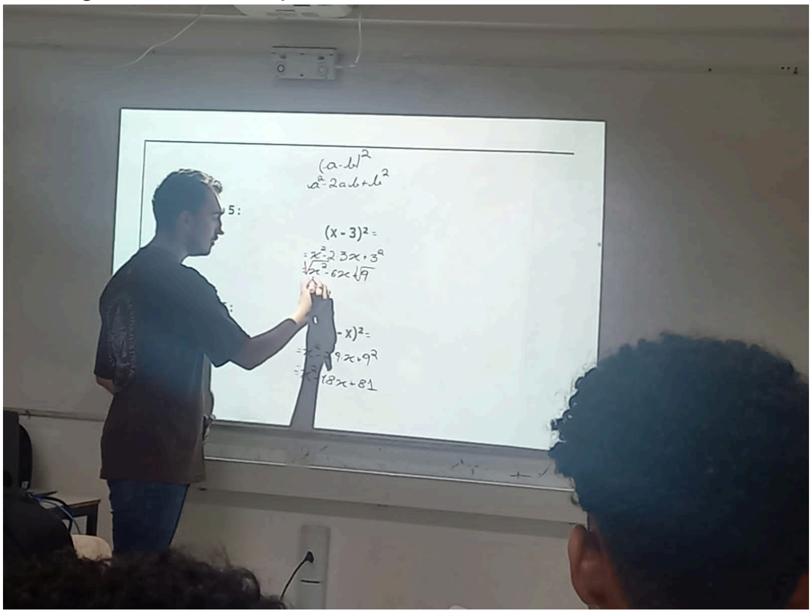
Fonte: Protocolo de pesquisa

Retomando o questionamento inicial sobre determinar a área de um quadrado de lado *a - b*, foi afirmado que ao tomar o quadrado maior de lados *a* retirando as áreas dos dois retângulos e adicionado a área do quadrado de lado *b*, seria obtida a área desejada.

A ideia para determinar a área do quadrado desejado também foi induzida a partir da fórmula da área de um quadrado na forma geral (a medida do lado elevado ao quadrado). O objetivo era encontrar a área do quadrado de lado *a* subtraído de uma medida *b*, resultando em um quadrado de lados *a - b*. Ao aplicar essa fórmula a área seria $(a-b)^2$. Esta relação (produto notável reduzido) com a anterior afirmada a partir do somatório das áreas contidas (produto notável desenvolvido), foi concluída como relações equivalentes, das quais se pode deduzir o produto notável do quadrado da diferença de dois termos. Os alunos ficaram mais concentrados e participativos aos questionamentos realizados durante essa etapa.

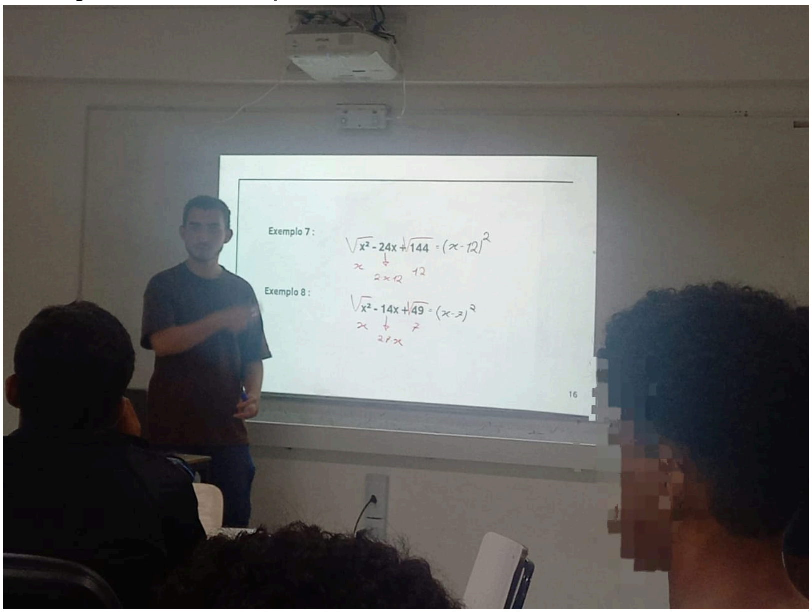
Dando continuidade, foi posto em prática como desenvolver um produto notável partindo do quadrado da diferença de dois termos (figura 28) e, em seguida, foi realizada a redução dos trinômios do quadrado perfeito a um produto notável (figura 29). Em ambos os casos, os discentes participaram ativamente e foi reafirmada a ideia inicialmente apresentada de extrair raiz das extremidades e verificar validade a partir do termo central do trinômio do quadrado perfeito.

Figura 28 - Exemplos de Produtos Notáveis reduzidos



Fonte: Protocolo de pesquisa

Figura 29 - Exemplos de Produto Notável desenvolvido



Fonte: Protocolo de pesquisa

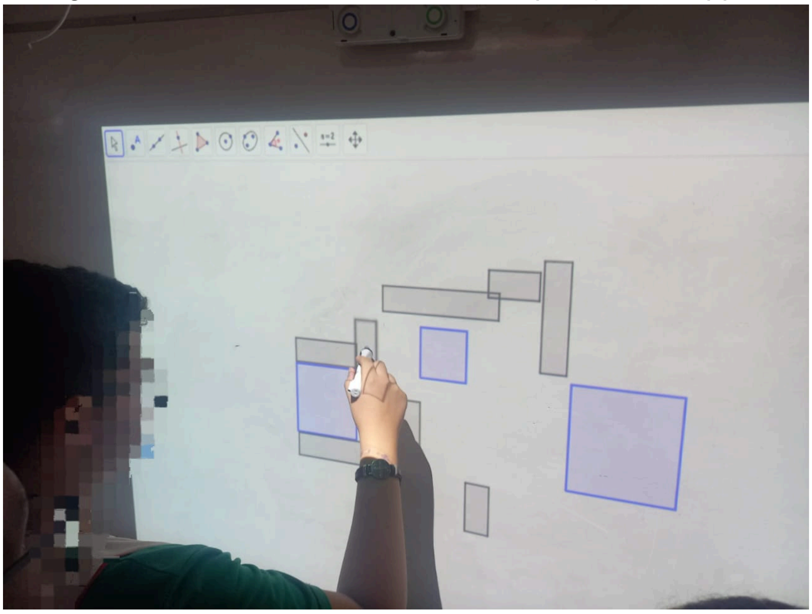
Foi indagado se qualquer trinômio do segundo grau possuía uma equivalência com o quadrado da soma ou da diferença de dois termos, ou seja, se sempre seria possível encontrar nas expressões um trinômio do quadrado perfeito. Os alunos responderam que não seria possível. Foi justificado pelos autores a partir de um exemplo, que a partir da tática apresentada de extrair raízes dos termos das extremidades e verificar com o termo central sua existência. Os alunos notaram a não equivalência, apontando não ser um trinômio do quadrado perfeito, mas que precisaria ser adicionado um valor de modo a torná-lo um trinômio do quadrado perfeito.

Concluída a etapa de explicações sobre produtos notáveis, foi feita uma breve exposição do método de completamento de quadrados, comentando que era mais uma ferramenta para a resolução de equações de segundo grau. Foi ressaltado que esse método não era uma substituição de outros métodos já conhecidos pelos alunos, nem objetivamente melhor ou pior, apenas uma outra alternativa para resolução de equações de segundo grau.

Como a partir desse momento seria trabalhado o método de completamento de quadrados, antes, porém, foi necessário definir equação de segundo grau, ressaltando sua restrição e parâmetros.

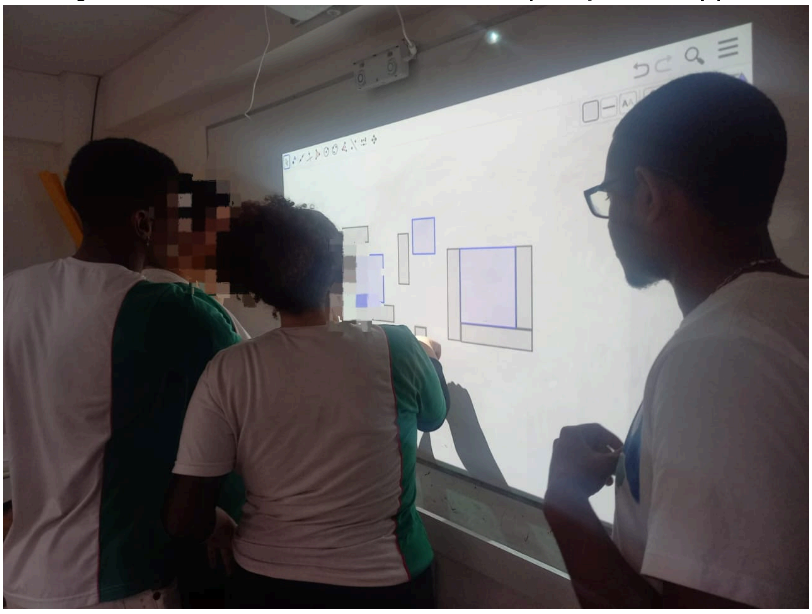
Foi apresentada a configuração geométrica do método de completamento de quadrados, sendo solicitado aos alunos que três voluntários viessem à lousa digital para participarem da dinâmica, que consistia em arrastar os quadrados e retângulos de modo a formar um quadrado maior. Em seguida deveriam compor as figuras de modo a deixar o novo quadrado incompleto ilustrando, com isso, geometricamente o completamento de quadrados. Nesta dinâmica os alunos foram bem participativos e conseguiram efetuar com precisão o que foi solicitado pelos autores (figura 30, figura 31 e figura 32).

Figura 30 - Aluno A realizando a manipulação do Applet



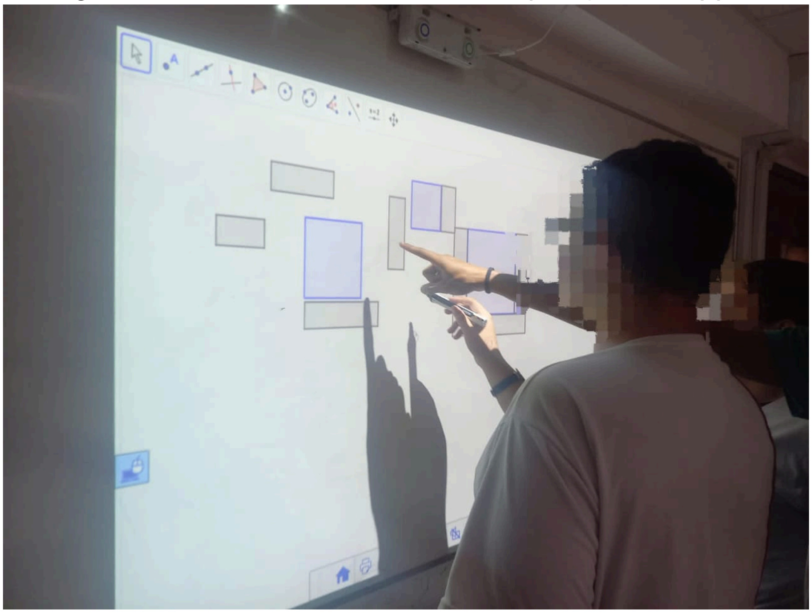
Fonte: Protocolo de pesquisa

Figura 31 - Alunos realizando a manipulação do Applet



Fonte: Protocolo de pesquisa

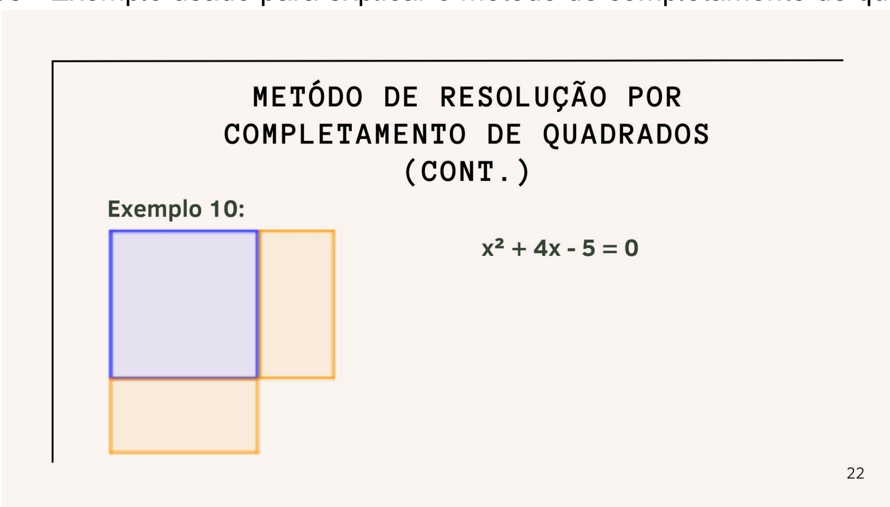
Figura 32 - Alunos realizando a manipulação do Applet



Fonte: Protocolo de pesquisa

Para apresentar o método de completamento de quadrados, foi realizado, junto aos alunos, um exemplo de uma equação do segundo grau (figura 33) que foi identificada pelos discentes, por meio das estratégias mencionadas anteriormente, que não se travava de um trinômio do quadrado perfeito. Foi informado aos alunos que poderiam aplicar o método de completamento de quadrados a fim de encontrar um produto notável desenvolvido em um dos membros da equação para, em seguida, reduzi-lo a um quadrado da soma ou da diferença entre dois termos.

Figura 33 - Exemplo usado para explicar o método de completamento de quadrados



Fonte: Elaboração própria

Em seguida, foram apresentados os passos para se resolver equações de segundo grau a partir do método de completamento de quadrados. O primeiro passo consistiu em isolar os termos acompanhados de incógnitas em um lado da igualdade para, na sequência, identificar os dois termos do produto notável.

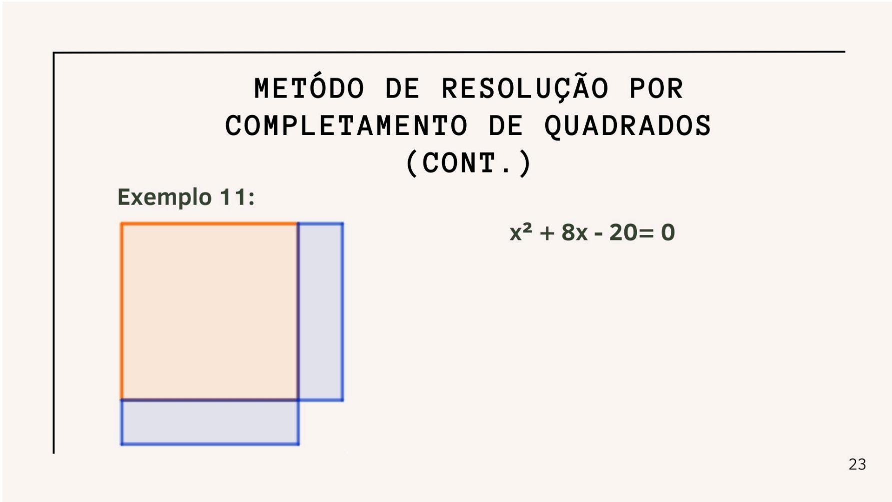
Para isso, foi mencionado que um dos termos já seria o x, pois estava elevado ao quadrado e poderia ser representado geométricamente como um quadrado de lado x. Para o segundo termo, bastaria dividir o termo numérico acompanhado da incógnita por 2, configurando geometricamente em dois retângulos de lados x e da outra medida encontrada a partir da divisão. Entretanto, foi ressaltado que no apoio geométrico faltaria um quadrado menor de lado descoberto, cujo valor é o mesmo do segundo termo para completar um quadrado, enquanto que, algebricamente faltaria elevar o segundo termo ao quadrado para obter um produto notável desenvolvido, sendo necessário acrescentar esse valor em ambos membros para manter a igualdade.

Durante essa etapa da aula, os alunos ficaram mais concentrados para compreender o método e nos momentos de questionamentos demonstravam a compreensão sobre o que estava sendo abordado.

Em seguida, foi apresentada a possibilidade de reduzir o produto notável desenvolvido obtido de modo a investigar os valores que elevados ao quadrado correspondem ao valor do outro membro da igualdade. Desse modo, foram obtidos dois valores mencionados pelos alunos, um positivo e outro negativo, finalizando a resolução.

Para diagnosticar se os alunos compreenderam o método apresentado, foi solicitado que resolvessem o último exemplo (figura 34) a partir do método de completamento de quadrados. Para isso, teriam a liberdade de resolver tanto algericamente quanto geometricamente, com ambos ou ainda utilizando da manipulação realizada na dinâmica.

Figura 34 - Exemplo usado para diagnóstico



Fonte: Elaboração própria

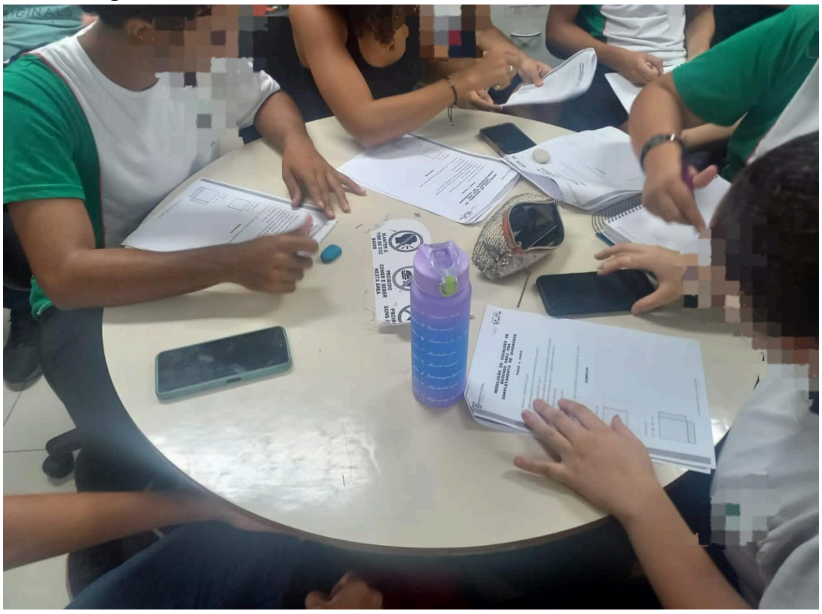
Nesse momento, os alunos demonstraram interesse ao realizarem a atividade (figura 35, figura 36 e figura 37). Alguns alunos apresentaram dificuldades pontuais que foram sanadas pelos autores. Por exemplo, quando demonstraram um pouco de dificuldade para reconhecer qual deveria ser o segundo termo do produto notável além do *x*, mas no sentido de como reconhecer de forma puramente algébrica. No entanto, ao fim conseguiram resolver utilizando o método de completamento de quadrados.

Em um caso específico um aluno apresentou dificuldades quanto a operações aritméticas básicas, o que acabou atravancando um melhor desenvolvimento na compreensão do método.

Figura 35 - Alunos resolvendo a lista de exercícios

Fonte: Protocolo de pesquisa

Figura 36 - Alunos resolvendo a lista de exercícios



Fonte: Protocolo de pesquisa

Figura 37 - Alunos resolvendo a lista de exercícios

Fonte: Protocolo de pesquisa

Por fim, o exemplo foi resolvido pelos autores e os alunos apresentaram resultados equivalentes, o que denota sua compreensão da proposta de sequência deste trabalho.

A aplicação da sequência didática foi finalizada às 17h50 com um quantitativo de 5 alunos, justificados por condições de transporte e horários, mas que não trouxeram prejuízo à sequência.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante o percurso da elaboração da presente sequência didática foi percebido pelos autores a importância de apresentar diferentes métodos ao aluno para que este consiga identificar qual melhor lhe convém. Além disso, proporcionar outras possibilidades de representação de um mesmo objeto matemático, potencializando o processo de ensino e aprendizagem.

Foi vivenciada a importância de se planejar uma sequência didática que leve em consideração os temas que são requisitos para o assunto que se deseja tratar, permitindo uma melhor compreensão do aluno. Além disso, deve-se definir de forma criteriosa os mecanismos que serão disponibilizados para consulta, qual será a linguagem levada ao público-alvo, o objetivo a qual se deseja atingir, bem como os caminhos que devem ser traçados para alcançá-los.

A realização de um aplicação teste é vista como uma importante ferramenta para diagnosticar possíveis mudanças, tanto no conteúdo como na sua apresentação. A partir dela foi possível identificar a necessidade da abordagem de temas fundamentais para a compreensão do método de completamento de quadrados, tais como os produtos notáveis e trinômios do quadrado perfeito.

A participação ativa dos discentes foi algo valorizado e visto a sua magnificência, percebendo como a falta dela interfere na interação do aluno com o tema e na progressão do conhecimento. É a partir da interação constante com os discentes que se torna possível constatar a dificuldade dos alunos frente ao conteúdo abordado, além de possibilitar a identificação de lacunas em fundamentos prévios.

O retorno dos questionamentos realizados pelos autores ao público-alvo chamou a atenção de como é importante que o aluno esteja envolvido, destacando a relevância dessa interação como forma de diagnóstico para o docente.

Notamos a grande relevância da apresentação da visualização geométrica dos produtos notáveis, bem como do completamento de quadrados, sendo complementada com a representação algébrica como ferramentas de auxílio aos discentes para compreensão do conteúdo proposto.

Ao final, a partir da participação ativa dos alunos e das dúvidas sanadas, foi constatado o alcance dos objetivos, proporcionando um novo conhecimento aos discentes.

Como sugestão é indicado pelos autores a realização de exemplos de completamento de quadrados que apresentem coeficientes fracionários, coeficientes negativos e diferentes de um, proporcionando maior amplitude no conhecimento.

REFERÊNCIAS

SELORAJI, Pavethira; EU, Leong Kwan. **Students' Performance in Geometrical Reflection Using GeoGebra**. Malaysian Online Journal of Educational Technology, v. 5, n. 1, p. 65-77, 2017. Disponível em: https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1125133.pdf Acesso em: 17 out. 2024

LOPES, Anielly Ildefonso Santos; OLIVEIRA, Carloney Alves de. **Literatura de Cordel como recurso didático no ensino de Matemática**. Revista Devir Educação, Lavras, vol.7, n.1, e-686 2023. Disponível em: https://devireducacao.ded.ufla.br/index.php/DEVIR/article/view/686. Acesso em: 07 fev. 2024.

NETO, Alexandre Maicher; CARVALHO, Túlio Oliveira de. **O tema das equações do segundo grau como espaço para a generalização**. Ensin@ UFMS, ISSN 2525-7056, Revista ENSIN@ UFMS, Três Lagoas/MS, v. 2, número especial, p. 186-209, Dezembro 2021. Edição Temática - Profmat: Contribuições para o Ensino de Matemática. Disponível em: https://periodicos.ufms.br/index.php/anacptl/article/view/14370. Acesso em: 07 fev. 2024.

OURIVES FILHO, Nasser Almeida; SANTOS, Luing Argolo; NIELLA, Givaldo Rocha. **Equação do segundo grau: O que não deu certo?**. Educação Pública, ISSN: 1984-6290, 2010. Disponível em: https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/10/6/equaccedilatildeo-do-segundo-grau-o-que-natildeo-deu-certo. Acesso em: 07 fev. 2024.

SOARES, Caio César. **Oficina Pedagógica utilizando processos geométricos nas equações do 2° grau**. O saber e o conhecimento: um olhar multidisciplinar, Editora Epitaya, ISBN: 978-65-87809-78-6, Rio de Janeiro, p.101-112, 2023. Disponível em: https://portal.epitaya.com.br/index.php/ebooks/article/view/765. Acesso em: 07 fev. 2024.

Campos dos Goytacazes (RJ), ____ de ______________ de 2024.

____

____

____

____

____

APÊNDICES

Apêndice A: Material didático aplicado na turma do LEAMAT II

- **Apêndice A1: Slide**

DIRLIC DIRETORIA DE ENSINO SUPERIOR DAS LICENCIATURAS

INSTITUTO FEDERAL
Fluminense
Campus Campos Centro

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DE SEGUNDO GRAU POR COMPLETAMENTO DE QUADRADOS

Linha de Pesquisa: Álgebra

Autores: Ana Daniela de Souza, Rodrigo Fonseca e Weslley Marins

Orientador: Leandro Sopeletto Carreiro

SUMÁRIO

DIFERENÇA ENTRE FUNÇÃO E EQUAÇÃO E SUAS RELAÇÕES COM VARIÁVEL E INCÓGNITA

$2x + 14 = 48$

$\frac{3x}{5} - 22 = \frac{7}{10}$

$f(x) = 4x + 3$

$f(x) = -4x^2 + 17$

$f(x) = x^2 + 2x - 12$

$x^2 - 4x + 10 = 15$

3

EQUAÇÃO DE 2° GRAU

Denomina-se equação de 2° grau na incógnita x toda equação da forma **$ax^2+bx+c=0$**, onde a,b,c são números reais e $a \neq 0$.

(Giovanni, Benedito, Giovanni JR, 1992)

4

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

5

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

Fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4.1.(-5)}}{2}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$$x' = \frac{-4 + 6}{2} = 1 \qquad x'' = \frac{-4 + 6}{2} = -5$$

Soma e Produto

$$S = x' + x'' = \frac{-b}{a}$$

$$P = x' . x'' = \frac{c}{a}$$

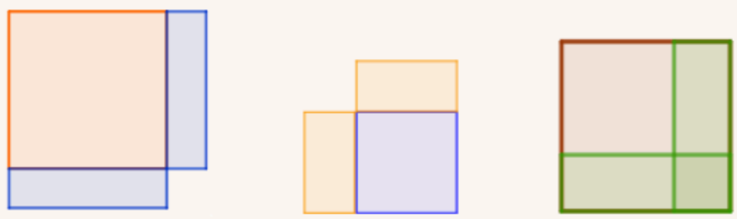
$$S = \frac{-4}{1} = -4$$

$$P = \frac{-5}{1} = -5$$

$$x' = -5 \qquad x'' = 1$$

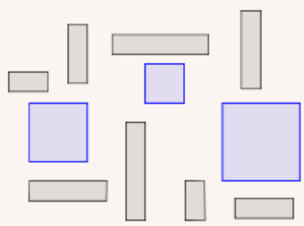
6

METÓDO DE RESOLUÇÃO POR COMPLETAMENTO DE QUADRADOS



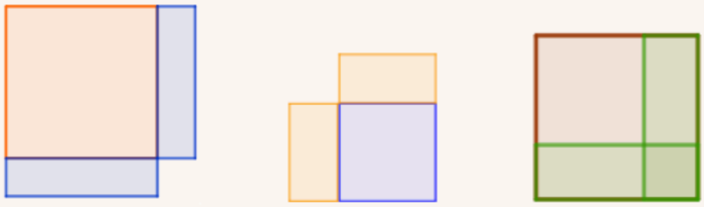
7

METÓDO DE RESOLUÇÃO POR COMPLETAMENTO DE QUADRADOS DINÂMICA



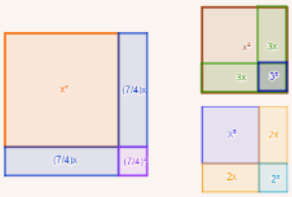
8

METÓDO DE RESOLUÇÃO POR COMPLETAMENTO DE QUADRADOS



9

METÓDO DE RESOLUÇÃO POR COMPLETAMENTO DE QUADRADOS EXEMPLOS



10

REFERÊNCIAS

- Iezzi, Gelson et.al; Matemática 1; 2° grau; São Paulo; Atual Editora LTDA; 1991
- Giovanni, José Ruy; Castrucci, Benedito; Giovanni JR, José Ruy; São Paulo; FTD; 1992

11

- **Apêndice A2: Material de apoio e lista de exercícios**

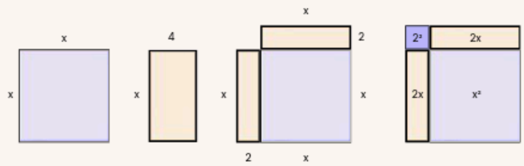
INSTITUTO FEDERAL
Fluminense

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

GOVERNO FEDERAL BRASIL UNIÃO E RECONSTRUÇÃO

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DE SEGUNDO GRAU POR COMPLETAMENTO DE QUADRADOS

$x^2+4x-5=0$



Para realizarmos a resolução por completamento de quadrado, primeiramente identificaremos e isolaremos os termos associados a x na equação dada ($x^2+4x=5$).
Dividiremos o valor do coeficiente b pela metade, somando esse novo valor associado ao x duas vezes ao termo elevado ao quadrado ($x^2+2.2x=5$).
Para completarmos o quadrado faltante, adicionaremos a metade de b elevado ao quadrado aos dois membros ($x^2+2.2x+2^2=5+2^2$), tal como foi descoberto pela representação geométrica (2^2).
Ao analisarmos, podemos identificar no primeiro membro que se trata de um produto notável desenvolvido, em que os termos a e b são, respectivamente, x e 2. No entanto, para facilitarmos a resolução da equação, podemos reduzir esse produto à expressão $(a+b)^2$, tendo então $(x+2)^2=5+2^2$.
Isso é o mesmo que pensarmos na área desse novo quadrado, sabendo que, para isso calculamos o valor do lado elevado ao quadrado ($(x+2)^2$).
É válido ressaltar que, se o coeficiente a é diferente de 1, antes de iniciarmos a resolução, é preciso dividir toda equação pelo valor de a, fazendo com que o termo que acompanha o x^2 seja sempre 1.

INSTITUTO FEDERAL
Fluminense

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

GOVERNO FEDERAL
BRASIL
UNIÃO E RECONSTRUÇÃO

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DE SEGUNDO GRAU POR COMPLETAMENTO DE QUADRADOS

PASSO A PASSO

1- Reduza o coeficiente *a* para 1

2- Isole a incógnita em um dos membros da equação

3- Divida o coeficiente *b* por 2

4- Identifique os valores dos termos do produto notável reduzido: o primeiro termo sempre será *x* e o segundo a metade de *b*

5- Resolva a equação

EXERCÍCIOS

a) $3x^2+9x-12=0$

b) $5x^2+15x-20=0$

c) $2x^2+3x+1=0$

d) $3x^2+2x-8=0$

e) $5x^2-15x-50=0$

f) $7x^2-21x-28=0$

Apêndice B: Material didático experimentado na turma regular

- **Apêndice B1: Slides**

https://www.canva.com/design/DAGdgk57uRQ/KgbgxDGZJaraqOLQRPFoLQ/edit?utm_content=DAGdgk57uRQ&utm_campaign=designshare&utm_medium=link2&utm_source=sharebutton

DIRLIC DIRETORIA DE ENSINO SUPERIOR DAS LICENCIATURAS — INSTITUTO FEDERAL Fluminense *Campus* Campos Centro — MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

PRODUTOS NOTÁVEIS E COMPLETAMENTO DE QUADRADOS NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DE 2º. GRAU

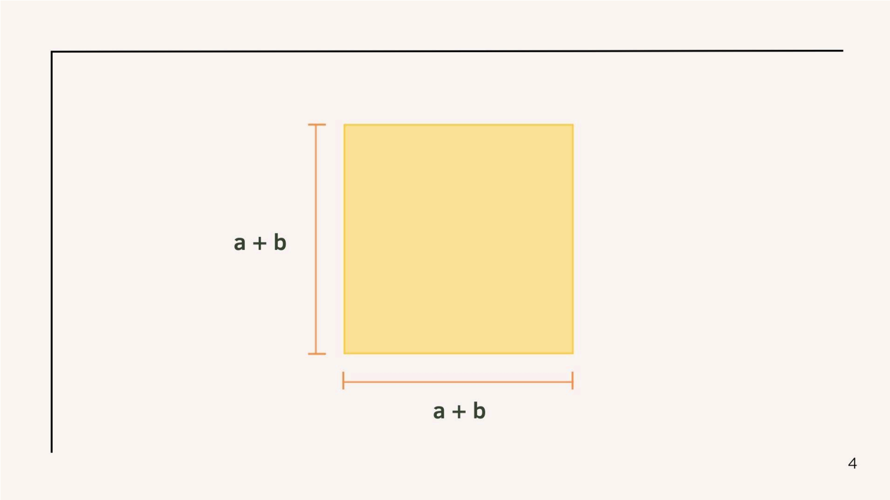
Linha de Pesquisa: Álgebra

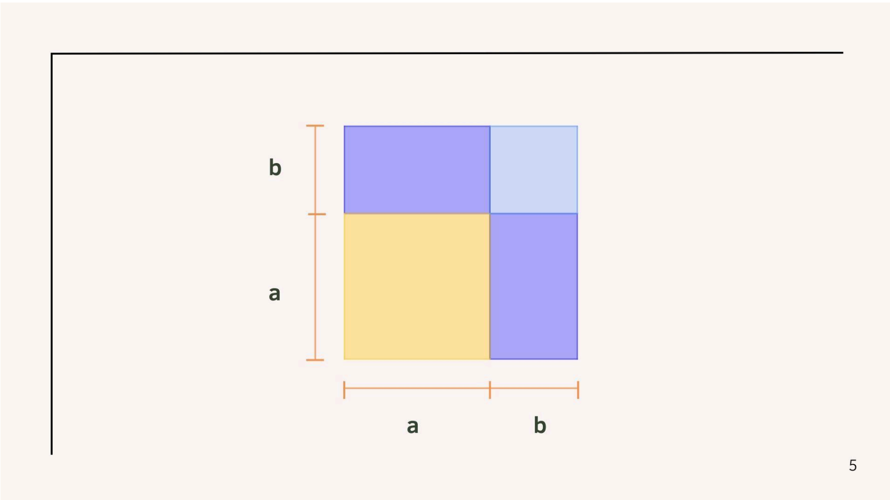
Autores: Ana Daniela de Souza, Rodrigo Fonseca e Weslley Marins

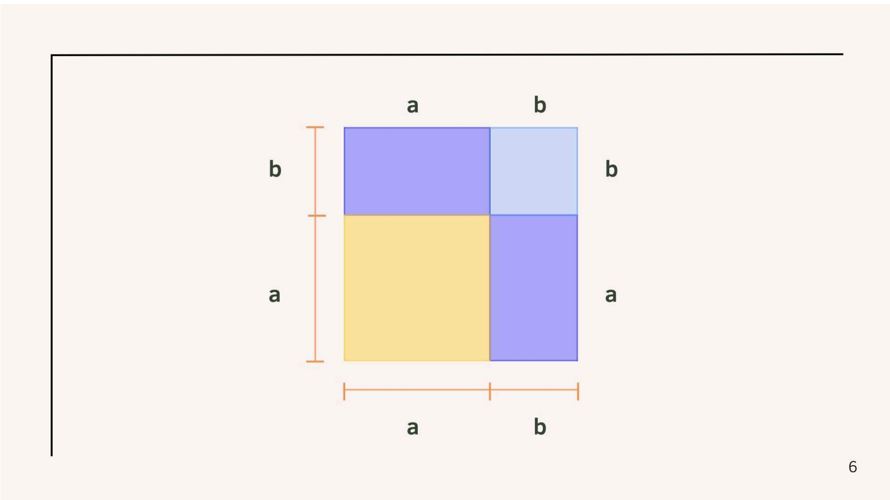
Orientador: Leandro Sopeletto Carreiro

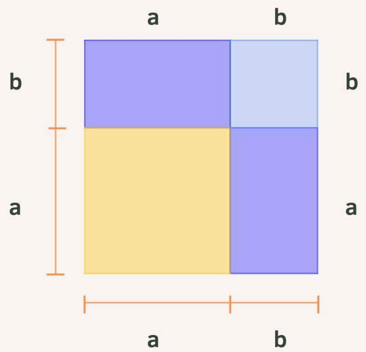
SUMÁRIO

COMO DETERMINAR A ÁREA DE UM QUADRADO DE LADO a+b ?


a + b
a + b
4


b
a
a
b
5


a
b
b
b
a
a
a
b
6



• PRODUTO NOTÁVEL •

QUADRADO DA SOMA DE DOIS TERMOS

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Exemplo 1 :

$$(x + 5)^2$$

Exemplo 2 :

$$(6+ x)^2$$

Exemplo 3 :

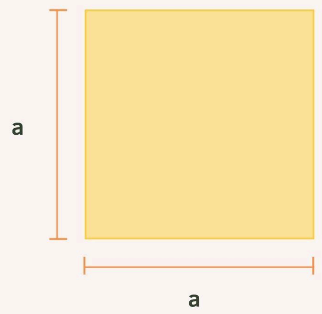
$$4x^2 + 12x + 9$$

Exemplo 4:

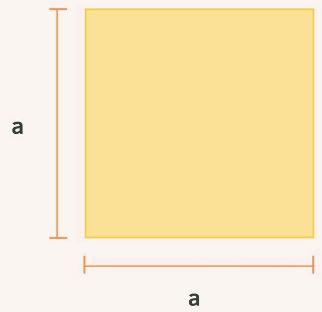
$$x^2 + 16x + 64$$

COMO DETERMINAR A ÁREA DE UM QUADRADO DE LADO a QUANDO SUBTRAÍDO UMA MEDIDA b DE SEUS LADOS?

10

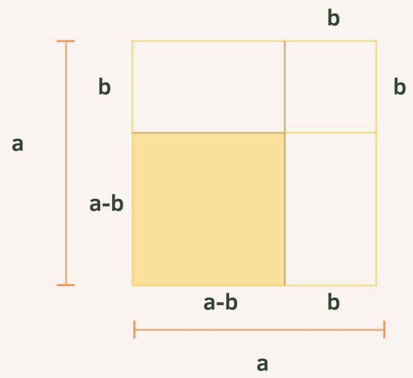


11

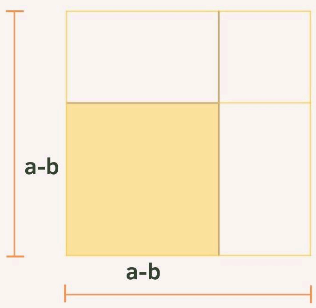


a - b?

12



13



• PRODUTO NOTÁVEL •

QUADRADO DA DIFERENÇA DE DOIS TERMOS

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

14

Exemplo 5 :

$$(x - 3)^2$$

Exemplo 6 :

$$(9 - x)^2$$

15

Exemplo 7 :

$$x^2 - 24x + 144$$

Exemplo 8 :

$$x^2 - 14x + 49$$

16

SERÁ QUE TODO TRINÔMIO DE 2º. GRAU POSSUI UMA EQUIVALÊNCIA COM QUADRADO DA SOMA OU DA DIFERENÇA?

17

Exemplo 9 :

$$x^2 + 14x + 64$$

18

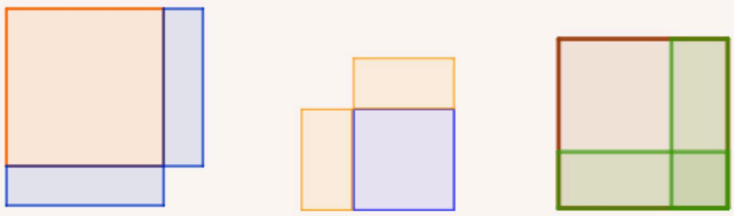
EQUAÇÃO DE 2° GRAU

Denomina-se equação de 2° grau na incógnita x toda equação da forma **$ax^2+bx+c=0$**, onde a,b,c são números reais e $a\neq 0$.

(Giovanni; Castrucci; Giovanni JR, 2002, p.70)

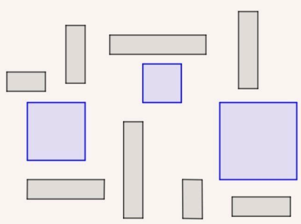
19

METÓDO DE RESOLUÇÃO POR COMPLETAMENTO DE QUADRADOS



20

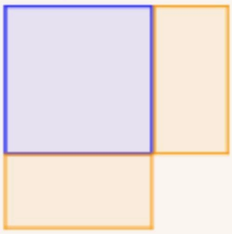
METÓDO DE RESOLUÇÃO POR COMPLETAMENTO DE QUADRADOS DINÂMICA



21

METÓDO DE RESOLUÇÃO POR COMPLETAMENTO DE QUADRADOS (CONT.)

Exemplo 10:

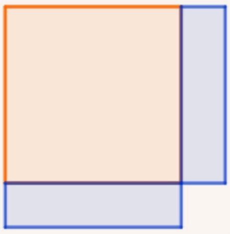


$x^2 + 4x - 5 = 0$

22

METÓDO DE RESOLUÇÃO POR COMPLETAMENTO DE QUADRADOS (CONT.)

Exemplo 11:



$x^2 + 8x - 20 = 0$

23

REFERÊNCIAS

- IEZZI, Gelson et.al; **Matemática 1**; Atual Editora LTDA, 1991.

- GIOVANNI, José Ruy; CASTRUCCI, Benedito; GIOVANNI JR, José Ruy; **A Conquista da Matemática**; Ftd, 2002.

SLIDES

APOSTILA

- **Apêndice B2: Apostila / Material de Apoio**

https://www.canva.com/design/DAGO-c5QxOY/uoVpQEg3p-Y_2eyuwaZMOQ/edit?utm_content=DAGO-c5QxOY&utm_campaign=designshare&utm_medium=link2&utm_source=sharebutton

INSTITUTO FEDERAL
Fluminense

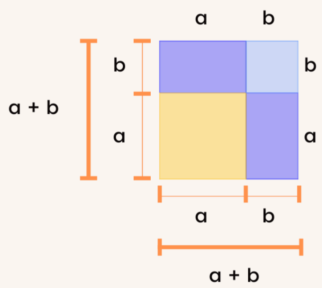
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

GOVERNO FEDERAL
BRASIL
UNIÃO E RECONSTRUÇÃO

PRODUTOS NOTÁVEIS E COMPLETAMENTO DE QUADRADOS NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DE 2°. GRAU

COMO DETERMINAR A ÁREA DE UM QUADRADO DE LADO a+b ?

Se o quadrado possui lado total (a+b), significa que cada lado é subdividido em medidas menores de (a) e de (b). Isso torna a seguinte configuração:



Ao unir as informações geradas pela subdivisão, veremos que são formadas quatro figuras geométricas, que nos remete a soma de diferentes áreas que compõem o quadrado de lado maior (a+b): a área de quadrados menores de lado (a) e outro de lado (b) somados a área de dois retângulos de lados (a) e (b).

Somando essas áreas, teremos:

Área do quadrado de lado (a) = a^2
Área do quadrado de lado (b) = b^2
Área do retângulo de lados (a) e (b) = $a . b$,
como teremos dois retângulos de mesmo lado e mesma área, ao final teremos como resultado:

$$a^2 + 2 . a . b + b^2$$

Reduzida, origina a fórmula equivalente ao Produto Notável do quadrado da soma de dois termos:

$$(a+b)^2$$

PRODUTOS NOTÁVEIS E COMPLETAMENTO DE QUADRADOS NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DE 2°. GRAU

Pensando essa situação de forma algébrica, ao tomarmos o quadrado de lado $(a+b)$, para descobrirmos a sua área, faremos: lado ao quadrado, logo, $(a+b)^2$.

Distribuindo essa expressão e operando, teremos:

$(a+b)^2$
$(a+b) . (a+b)$
$a^2 + a . b + b . a + b^2$
$a^2 + 2 . a . b + b^2$,
o que nada mais é que a forma desenvolvida do Produto Notável: quadrado da soma de dois termos.

• PRODUTO NOTÁVEL •

QUADRADO DA SOMA DE DOIS TERMOS

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Exemplo 1 : $(x + 5)^2$

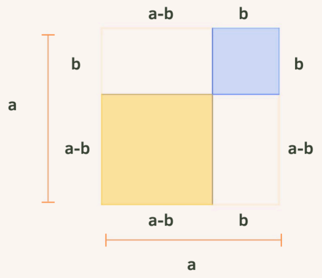
Exemplo 2 : $(6 + x)^2$

Exemplo 3 : $4x^2 + 12 + 9$

Exemplo 4 : $x^2 + 16x + 64$

QUAL SERÁ A ÁREA DE UM QUADRADO DE LADO (a-b) QUE ESTÁ CONTIDO EM UM QUADRADO DE LADO (a)?

Se o quadrado possui lado total (a) e é retirado de cada lado uma medida (b), resultará a seguinte configuração:

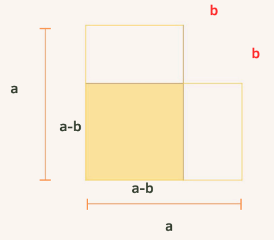


INSTITUTO FEDERAL
Fluminense

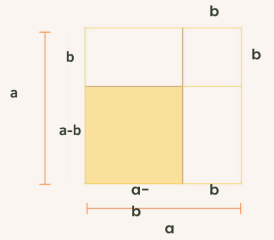
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
GOVERNO FEDERAL
UNIÃO E RECONSTRUÇÃO

PRODUTOS NOTÁVEIS E COMPLETAMENTO DE QUADRADOS NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DE 2°. GRAU

Entretanto, ao retirar uma medida (b) de cada lado, teremos que considerar que será retirado duas vezes a área do quadrado de lado (b), implicando num vazio:



Por esse motivo deverá ser acrescido essa medida faltante novamente (+b²), afim de não alterar a área inicial do quadrado que o contém (quadrado lado (a)).



Como resultado teremos um quadrado de lados (a-b), resultante da diferença entre a área do quadrado de lado (a) e as áreas de dois retângulos de lados (a) e (b). Lembrando que foi necessário adicionar a área de um quadrado de lado (b) para manter a área do quadrado inicial de lado (a), não desconfigurando -o.

INSTITUTO FEDERAL
Fluminense

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
GOVERNO FEDERAL
UNIÃO E RECONSTRUÇÃO

PRODUTOS NOTÁVEIS E COMPLETAMENTO DE QUADRADOS NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DE 2°. GRAU

Pensando isso algebricamente, teremos:

$(a-b)^2$
$(a-b) . (a-b)$
$a^2 - a . b - b . a + b^2$
$a^2 - 2 . a . b + b^2$,
o que nada mais é que a forma desenvolvida do Produto Notável: quadrado da diferença de dois termos.

• PRODUTO NOTÁVEL •

QUADRADO DA DIFERENÇA DE DOIS TERMOS

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Exemplo 5 : $(3 - x)^2$

Exemplo 6 : $(9 - x)^2$

Exemplo 7 : $x^2 - 24x + 144$

Exemplo 8 : $x^2 - 14x + 49$

SERÁ QUE TODO TRINÔMIO DE 2º. GRAU POSSUI UMA EQUIVALÊNCIA COM QUADRADO DA SOMA OU DA DIFERENÇA?

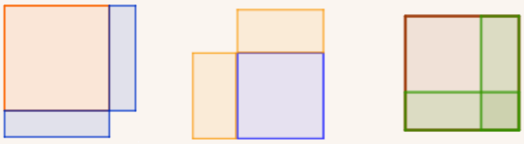
Exemplo 9 : $x^2 + 14x + 64$

EQUAÇÃO DE 2º. GRAU

Denomina-se equação de 2º grau na incógnita x toda equação da forma $ax^2+bx+c=0$, onde a,b,c são números reais e $a \neq 0$.

(Giovanni; Castrucci; Giovanni JR, 2002, p.70)

MÉTODO DE RESOLUÇÃO POR COMPLETAMENTO DE QUADRADOS



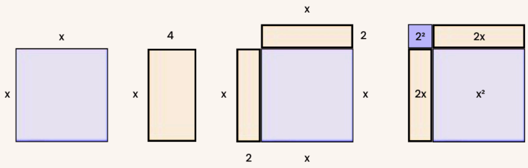
INSTITUTO FEDERAL
Fluminense

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

GOVERNO FEDERAL
BRASIL
UNIÃO E RECONSTRUÇÃO

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DE SEGUNDO GRAU POR COMPLETAMENTO DE QUADRADOS

$x^2+4x-5=0$



Para realizarmos a resolução por completamento de quadrado, primeiramente identificaremos e isolaremos os termos associados a *x* na equação dada ($x^2+4x=5$).

Dividiremos o valor do coeficiente *b* pela metade, somando esse novo valor associado ao *x* duas vezes ao termo elevado ao quadrado ($x^2+2.2x=5$).

Para completarmos o quadrado faltante, adicionaremos a metade de *b* elevado ao quadrado aos dois membros ($x^2+2.2x+2^2=5+2^2$), tal como foi descoberto pela representação geométrica (2^2).

Ao analisarmos, podemos identificar no primeiro membro que se trata de um produto notável desenvolvido, em que os termos *a* e *b* são, respectivamente, ***x*** e 2. No entanto, para facilitarmos a resolução da equação, podemos reduzir esse produto à expressão $(a+b)^2$, tendo então $(x+2)^2=5+2^2$.

Isso é o mesmo que pensarmos na área desse novo quadrado, sabendo que, para isso calculamos o valor do lado elevado ao quadrado ($(x+2)^2$).

É válido ressaltar que, se o coeficiente *a* é diferente de 1, antes de iniciarmos a resolução, é preciso dividir toda equação pelo valor de *a*, fazendo com que o termo que acompanha o $\boldsymbol{x}^2$ seja sempre 1.

INSTITUTO FEDERAL
Fluminense

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

GOVERNO FEDERAL
BRASIL
UNIÃO E RECONSTRUÇÃO

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DE SEGUNDO GRAU POR COMPLETAMENTO DE QUADRADOS

PASSO A PASSO

1- Reduza o coeficiente *a* para 1

2- Isole a incógnita em um dos membros da equação

3- Divida o coeficiente *b* por 2

4- Identifique os valores dos termos do produto notável reduzido: o primeiro termo sempre será *x* e o segundo a metade de *b*

5- Resolva a equação

Considerando que em:

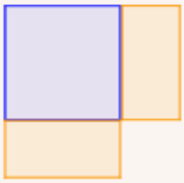
$ax^2 + bx + c$,

os termos a, b, c são coeficientes de uma equação de 2º. grau.

EXEMPLOS

Exemplo 10 :

$x^2 + 4x - 5 = 0$



Exemplo 11 :

$x^2 + 8x - 20 = 0$