CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE CAMPOS

Universidade da Tecnologia e do Trabalho

MEC/SETEC

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

PROGRESSÃO ARITMÉTICA

POR
ALINE PONTES
ELMA PESSANHA
EMANUEL ANGELO ALVES
FERNANDO A. G. BASTOS

CAMPOS DOS GOYTACAZES /RJ

2006-2

ALINE PONTES
ELMA PESSANHA
EMANUEL ANGELO ALVES
FERNANDO A. G. BASTOS

PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Projeto apresentado ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Campos, como parte das exigências da disciplina Laboratório de Ensino do curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Ana Paula Rangel de Andrade

CAMPOS DOS GOYTACAZES/RJ
2006-2

SUMÁRIO

1- INTRODUÇÃO

A disciplina Laboratório de Ensino teve início no 2º semestre da Licenciatura em Matemática perfazendo um total de 3 semestres, onde o professor orientador explicou todos os objetivos dessa disciplina e nos incentivou a pesquisar e escolher um tema a ser abordado no projeto.

Com o objetivo de preparar um projeto que pudesse levar os alunos a uma compreensão do que é uma seqüência e através desse conceito introduzir a definição de Progressão Aritmética, foram feitas diversas pesquisas em livros e internet a fim de podermos desenvolver uma aula construtivista composta por: material concreto visto que os alunos por meio dele e sob nossa orientação puderam formular a Seqüência de Fibonacci; apostila que envolvesse a teoria e uma boa seleção de exercícios.

A progressão aritmética traz como benefício ao estudante o desenvolvimento do raciocínio. O estudo das seqüências e as leis de formação permite ao aluno ampliar seu universo de conhecimento, sendo. Escolhemos Progressão Aritmética como tema a ser abordado, visto que esse tema é bastante abordado nos vestibulares.

> A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas. (PCN, 1999, p. 82)

2- DESENVOLVIMENTO

Após escolhermos o tema passamos a pesquisá-lo em vários livros de autores diferentes, analisando como cada autor abordava o assunto e selecionando os que eram mais interessantes.

O professor orientador também selecionou diversos exercícios que contextualizavam o tema e nos repassou para resolvermos as questões e debater quando surgissem maneiras diferentes de resolução.

Após essa etapa passamos a elaborar como seria a apresentação da aula e quais recursos tecnológicos utilizaríamos.

Elaboramos uma apostila envolvendo todo o conteúdo, transparências e material concreto utilizando emborrachado e papel.

No final do 2º semestre da disciplina já estávamos com o projeto todo elaborado faltando apenas o teste exploratório que foi realizado para um grupo da nossa própria turma.

Esse teste foi realizado com a finalidade de verificarmos falhas na ficha de apresentação e até mesmo na forma como iríamos abordar o conteúdo.

Ao aplicarmos o teste para uma parte da nossa própria turma verificamos que foram muitas as falhas quanto à apresentação e até mesmo quanto a abordagem do tema na apostila.

Essa etapa foi muito importante, pois nos mostrou que ainda não estávamos preparados para aplicar o projeto na turma pretendida. Foi necessário corrigir as falhas e aplicar novamente o teste exploratório.

A aplicação final do projeto foi realizada em uma turma do 1º ano do Ensino Médio do CEFET CAMPOS no dia 18/12/06 onde estavam presentes 16 alunos. Os alunos mostraram uma boa receptividade e interesse no assunto, participando sempre que eram solicitados a interagir.

A finalidade deste projeto foi que ao final da abordagem do tema (Progressão Aritmética) os alunos soubessem resolver algumas atividades envolvendo o assunto proposto.

Inicialmente foi apresentada uma transparência com uma tira de história em quadrinhos onde a ordem dos quadrinhos não acompanhava a seqüência da história.

Ao perguntar aos alunos sobre a tira, o que eles observaram, obtivemos de alguns a resposta de que os quadrinhos não se encontravam na ordem em que aconteciam os fatos.

Estava então introduzida à idéia do que é uma seqüência.

Apresentamos então diversas seqüências e interagindo com os alunos perguntamos sobre as leis de formação e o próximo termo. Também foram utilizadas figuras geométricas em material emborrachado representando uma seqüência onde o aluno deveria observar que a lei de formação dessa seqüência era a repetição de uma figura e não as cores que formavam essa seqüência.

Foi feito um breve relato da parte histórica sobre as Seqüências, mostrando aos alunos o estudo de Fibonacci a respeito da reprodução de coelhos. Para tanto utilizamos coelhos confeccionados em papel de cores diferentes para simbolizar o coelho não apto e o coelho apto a reproduzir. Isso foi muito interessante, pois motivou os alunos a participarem oralmente na construção da tabela. Daí surgiu o nome de Seqüência de Fibonacci.

Distribuímos a apostila que havia sido preparada e resolvemos alguns exercícios sobre seqüências junto com os alunos.

Levamos os alunos a perceberem que existem seqüências que possuem uma razão aritmética entre seus termos, iniciando então a explicação de que essas seqüências recebem o nome de Progressão Aritmética.

A apresentação do restante do conteúdo fluiu muito bem, pois os alunos acompanharam com interesse, participando das questões levantadas.

Finalizamos com a resolução de exercícios, inclusive de vestibulares, dispostos em nível crescente de dificuldade. Estipulamos um tempo para que os alunos pudessem realizar as tarefas e verificamos seu aprendizado.

De modo geral a aula transcorreu de modo esperado quanto a seqüência dos fatos, mas devido levarmos mais tempo que o esperado em questões que já estavam claras para os alunos não pudemos resolver todos os exercícios propostos. Deixamos então o gabarito para que eles resolvessem sozinhos as questões restantes.

3- CONSIDERAÇÕES FINAIS

Devido à falta de experiência em sala de aula e também ao nervosismo inicial começamos a apresentação do projeto um pouco receosos, pois não sabíamos como seria a receptividade da turma. Mas foi muito gratificante perceber que logo eles se interessaram pelo tema e interagiram durante a aula motivados também pelo material concreto utilizado.

Essa disciplina foi muito importante, pois nos mostrou a vivência da sala de aula e como o professor deve pesquisar antes de elaborar um plano de aula de modo a tornar suas aulas cada vez mais atraentes e motivadoras para os alunos.

BIBLIOGRAFIA

BIANCHINI, E.*Matemática*. 1 ed.São Paulo:Moderna,2004

CAVALCANTE,G.L.*Mais MATEMÁTICA*.2ed.São Paulo:Saraiva,2002

FILHO,B.B.*Matemática:aula por aula*.São Paulo:FTD, 2000

IEZZI,G.*Matemática:ciência e aplicações*.2 ed.São Paulo:Atual

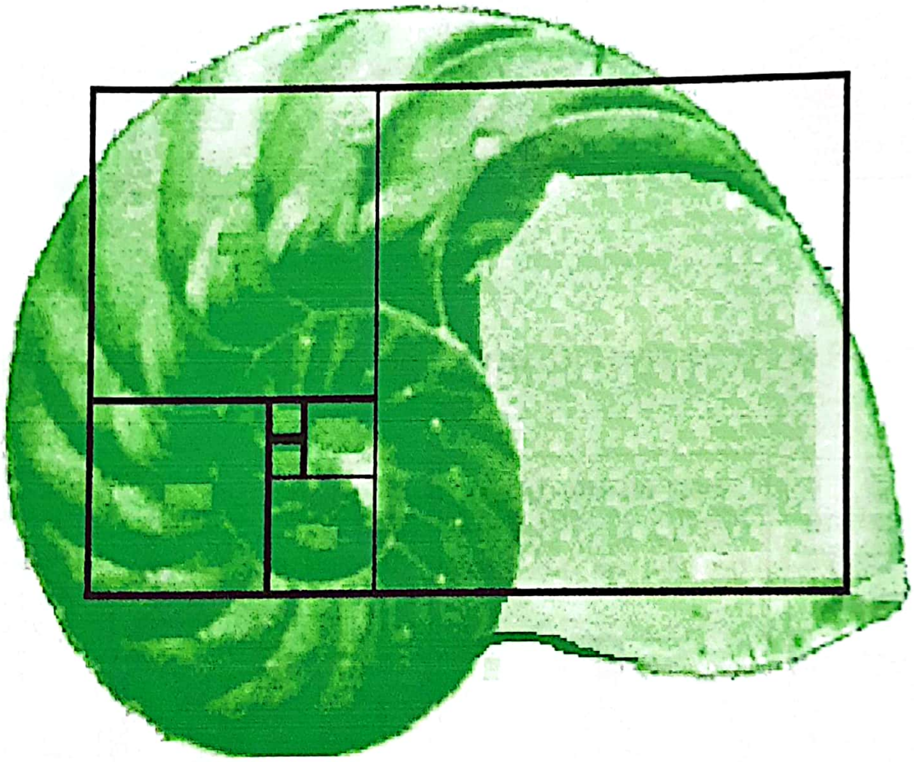
http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/alegria/fibonacci/seqfib2.htm

Brasil, PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) Ensino Médio – Bases Legais, v. 1. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 1999.

ANEXOS

ANEXO 1: APOSTILA

PROGRESSÃO ARITMÉTICA



SEQUÊNCIA

I – INTRODUÇÃO

Observe os quadrinhos abaixo:

Você acha que esses quadrinhos ficariam de mais fácil compreensão se fossem colocados dessa maneira?

Essa ordem chama-se SEQUÊNCIA.

Abaixo temos alguns exemplos de seqüência:

(Janeiro, Fevereiro, Março, Abril, ... , dezembro)

(1, 3, 5, 7, 9, ...)

(Dois, Dez, Doze, Dezesseis, Dezessete, Dezoito, Dezenove, ...)

(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, ...)

(-1, -3, -5, -7, -9, ...)

(A, B, C, D, E, F, G, H, ... , Z)

(1, 4, 9, 16, 25, 36, ...)

II – SEQÜÊNCIAS NUMÉRICAS

Quando estudamos os conjuntos, vemos que não importa a ordem em que os elementos estão dispostos. Assim, por exemplo, o conjunto das estações do ano pode ser representado, dentre outras maneiras, pelos conjuntos:

A = {Verão, Inverno, Outono, Primavera}

B = {Primavera, Verão, Outono, Inverno}

Estes conjuntos são iguais, pois possuem os mesmos elementos. No entanto seus elementos estão dispostos em diferentes ordens, sendo que os elementos do conjunto B possuem uma particularidade, por estarem dispostos exatamente na ordem em que as estações transcorrem durante o ano. Nesse caso o conjunto B poderia ser representado assim:

B = (Primavera, Verão, Outono, Inverno)

Os parênteses, no lugar das chaves, indicam que a ordem dos elementos deve ser respeitada.

Todo conjunto que consideramos os elementos dispostos em determinada ordem é chamado de **sucessão** ou **seqüência.** Se tratando de conjuntos numéricos, são muitos aqueles em que os elementos se sucedem, obedecendo a uma determinada ordem. Esse tipo de conjunto é chamado de **seqüência numérica** ou de **sucessão.**

- Vejamos alguns exemplos de seqüência numérica:
  - seqüência dos números primos: (2, 5, 7, 11, 13, 17,...) **Seqüência infinita**

- seqüência dos números naturais ímpares positivos menores que 10: (2, 4, 6, 8).

Seqüência finita.

- seqüência dos números positivos múltiplos de 3: (3, 6, 9, 12, 15,...).

De modo geral, em uma seqüência representamos:

- o 1º termo por a_1 (lê-se a índice 1)
- o 2º termo por a_2 (lê-se a índice 2)
- o 3º termo por a_3 (lê-se a índice 3)

Dessa forma, uma seqüência de n elementos o primeiro elemento é a_1 e o n-ésimo elemento é representado por a_n.

III - SEQÜENCIA DE FIBONACCI

O matemático Italiano Leonardo Pisa, conhecido como Fibonacci (filho de Bonacci).

Ele escreveu o Liber abaci (livro do ábaco), que é um tratado completo sobre métodos e problemas algébricos.

Nesse livro, foi proposto um problema sobre coelhos que se tornou muito conhecido. Esse foi o primeiro modelo matemático de descrição do crescimento de populações.

Fibonacci considerou um casal de coelhos imaturos que, após um mês estava apto a reproduzir e dar origem, mensalmente a um novo casal. Esse novo casal passava pelo mesmo processo, isto é, levava um mês para amadurecer e, após esse período, originava um outro casal. Supondo que não ocorriam mortes, quantos casais de coelhos foram gerados após seis meses? (Padrões numéricos e seqüências, Maria Cecília Costa e Silva Carvalho).

Observe a situação descrita na tabela abaixo:

Mês	1º (início)	2º	3º	4º	5º	6º
Número de casais	1	1	2	3	5	8

Leonardo de Pisa (* 1175 – Q 1250)

Analisando os termos da seqüência 1, 1, 2, 3, 5, 8,..., percebemos que cada termo, após os dois primeiros, é a soma dos dois imediatamente precedentes. Veja:

$2 = 1 + 1 \quad 3 = 1 + 2 \quad 5 = 2 + 3$ e assim sucessivamente

Dessa forma, temos a seqüência

1, 1, 2, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233...

Conhecida como **seqüência de Fibonacci.**

Essa seqüência pode ser observada em diversas situações, por exemplo, na natureza: na quantidade de sementes no centro de um girassol, na curvatura da concha dos caracóis, etc.

IV - LEI DE FORMAÇÃO DE UMA SEQÜÊNCIA

Existem seqüências cujos elementos se sucedem obedecendo a uma certa lei, chamada Lei de Formação da Seqüência, a qual permite encontrar qualquer um dos seus elementos, conhecendo-se sua posição. Ela fornece o termo geral da seqüência, normalmente indicado por a_n.

Exercícios

1- Escreva os quatro primeiros termos da seqüência definida por $a_n = n^2 - 2n$, $n \in N^*$.

2- Escreva a seqüência dada por:

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{2}{3} \\ a_n = a_{n-1} + \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

3- Dada a seqüência definida por $a_n = 3n - 2$, com $n \in N^*$

a) Determine o valor de a_5

b) Existe algum termo igual a 22? Qual é a sua posição?

4- Determine a lei de formação da seqüência:

(5, 9, 13, 17, 21,...)

PROGRESSÃO ARITMÉTICA (PA)

I – INTRODUÇÃO

Observe a seqüência (4, 7, 10, 13, 16, 19,...).

Notemos que a diferença entre um termo qualquer dessa seqüência e o seu antecedente é sempre igual a 3.

Seqüência como essa que a partir do 2º termo a diferença entre cada termo e seu antecedente é uma constante, são chamadas de progressões aritméticas. A essa constante damos o nome de **razão** da **PA** e a indicamos pela letra **r**.

A representação matemática de uma PA é:

$$(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n, ...)$$

Logo: $a_n = a_{n-1} + r \quad n \in N^*$

Ou $a_2 - a_1 = a_4 - a_{3...} = a_{n+1} - a_n = r$, em que r é a razão da progressão aritmética.

A razão **r** de uma **PA** pode ser positiva, negativa ou nula. Daí classifica-se uma **PA**, respectivamente, em crescente, decrescente, constante.

Exercícios

1- Determine os três primeiros termos da PA, sabendo-se que $a_1 = 4$ e $r = -2$.
2- Determine x ($x \in R$) para que os números x, $4x - 2$ e $3x + 4$ formem, nessa ordem, uma **PA**.
3- Verifique se a seqüência $(4, \frac{9}{2}, 5, \frac{11}{2}, 6)$ é uma **PA**.

II – TERMO GERAL DA PA

Considerando a seqüência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1}, ...)$ como uma **PA de razão r**, podemos escrever:

$a_2 = a_1 + r$

$a_3 = a_2 + r \rightarrow a_3 = a_1 + r + r \rightarrow a_3 = a_1 + 2r$

$a_4 = a_3 + r \rightarrow a_4 = a_1 + r + r + r \rightarrow a_4 = a_1 + 3r$

$a_5 = a_4 + r \rightarrow a_5 = a_1 + r + r + r + r \rightarrow a_5 = a_1 + 4r$

E, sendo a_n um termo qualquer dessa P.A., temos:

$$\mathbf{a_n = a_1 + (n - 1) \bullet r}$$

Essa é a fórmula do Termo Geral de uma **PA**, que nos permite conhecer qualquer termo da **PA** em função de $\mathbf{a_1}$ e **r**.

Obs.:

$$\mathbf{a_n = a_p + (n-p).r}$$

III – PROPRIEDADES DE UMA PA

Numa **PA** finita, o primeiro e o último termo são chamados de extremo da P.A.

Dois termos são chamados de eqüidistantes dos extremos quando o número de termos que precede o 1º é igual ao número de termos que sucede o 2º.

Assim, na **P.A. (3, 9, 15, 21, 27, 33, 39)** os números 3 e 39 são os ***extremos*** e os pares de números 9 e 33, 15 e 27 são termos ***eqüidistantes dos extremos***.

O termo do meio, quando existir, é chamado de termo central.

Na **PA** acima, o número 21 é o termo central.

- A soma de dois termos eqüidistantes dos extremos é igual a soma dos extremos:

$$9 + 33 = 15 + 27 = \mathbf{3 + 39} = 42$$

- O termo central quando existir é a média aritmética entre os extremos:

$$21 = \frac{39+3}{2}$$

- Todo termo, com exceção dos extremos, é a média aritmética entre o termo que o precede e o que o sucede:

$$9 = \frac{3+15}{2} \qquad 21 = \frac{15+27}{2}$$

EXERCÍCIOS

ATIVIDADE 1

Determine os três primeiros termos da seqüência cujo termo geral é: $a_n = n^2 + 1$, $n>0$ $n \in \mathbb{N}$.

ATIVIDADE 2

Quantos são os inteiros positivos múltiplos de 7 e menores que 1000?

ATIVIDADE 3

Uma pessoa que pesa 140 kg submete-se a um regime alimentar, obtendo o seguinte resultado: nas quatro primeiras semanas, perde 3 kg por semana; nas quatro seguintes, 2 kg por semana; daí em diante, apenas ½ kg por semana.

Calcule em quantas semanas a pessoa estará pesando 122 kg. E em quantas semanas a pessoa estará pesando 72 kg?

ATIVIDADE 4

(Uenf-02) Observe a seqüência numérica a seguir:

(0, 3, 8, 15, 24,...)

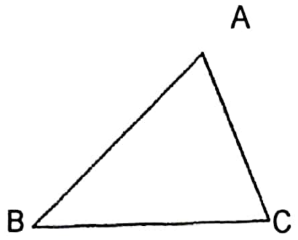
Determine em relação a essa seqüência:

a) seu 6º termo;

b) a expressão do termo de ordem n.

ATIVIDADE 5

(FGV-SP) Em um triângulo, os três ângulos estão em progressão aritmética e o maior ângulo é o dobro do menor. Calcule o menor ângulo desse triângulo.



ATIVIDADE 6

(Cesgranrio-04)

Enquanto no mundo o número de turistas cresce, no Brasil ele diminui. Essa é uma das conclusões do relatório da Organização Mundial de Turismo, divulgado recentemente.

Revista Veja, 05 nov. 2003.

Se as variações anuais no número de turista estrangeiros apresentadas no gráfico acima formassem uma Progressão Aritmética, o número de turistas estrangeiros que visitariam o Brasil em 2003, em milhões, seria igual a:

a) 1,2 b) 2,4 c) 2,6 d) 2,9 e) 3,2

ANEXO 2: FOTOS

FOTOS DA APLICAÇÃO DO PROJETO LABORATÓRIO DE ENSINO