CEFET CAMPOS
CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE CAMPOS
Universidade da Tecnologia e do Trabalho
MEC/SETEC
BRASIL

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

PROBABILIDADE

POR

HELOIZA RANGEL DA SILVA
JOSIE PACHECO DE VASONCELLOS SOUZA
LUIS GUSTAVO MARQUES SOARES
ROSANA RAMOS DE BARCELOS
TATIELE DO NASCIMENTO PEREIRA PESSANHA

CAMPOS DOS GOYTACAZES/RJ

2007-2

Digitalizado com CamScanner

HELOIZA RANGEL DA SILVA

JOSIE PACHECO DE VASCONCELLOS SOUZA

LUIS GUSTAVO MARQUES SOARES

ROSANA RAMOS DE BARCELOS

TATIELE DO NASCIMENTO PEREIRA PESSANHA

PROBABILIDADE

Projeto apresentado no Centro Federal de Educação Tecnológica de Campos, como parte das exigências da disciplina Laboratório de Ensino do curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Ana Paula Rangel de Andrade Especialista em Matemática - FAFIC

CAMPOS DOS GOYTACAZES/RJ

2007-2

Digitalizado com CamScanner

Sumário

Digitalizado com CamScanner

1- INTRODUÇÃO

O presente trabalho teve o intuito de realizar um estudo sobre probabilidade, utilizando questões do cotidiano e trabalhando com deduções com os alunos.

O objetivo foi fazer com que os alunos estivessem aptos a resolver questões que envolvam probabilidade no cotidiano, além de mostrar como esse conteúdo está sendo aplicado nos últimos vestibulares.

A escolha desse tema se deve a sua grande presença no dia-a dia, e também em questões de vestibulares. É bom ressaltar que a maioria dos componentes do grupo não aprendeu este conteúdo no Ensino Médio.

O projeto "Probabilidade" foi aplicado à alunos do 3° ano do Ensino Médio da Rede Publica Federal de ensino em 2 tempos/aula.

A teoria das probabilidades é hoje um instrumento muito valioso e utilizado por profissionais de diversas áreas, tais como economistas, administradores, biólogos, entre outros.

Abaixo estão alguns tópicos importantes relacionados com o nosso projeto citados em "Competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática" nos PCN:

- Representação e comunicação: Ler e interpretar textos de matemática;
- Investigação e compreensão: Selecionar estratégias de resolução de problemas;
- Contextualização sócio-cultural:
- Desenvolver a capacidade de utilizar a matemática na interpretação e intervenção no real;
- Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.

Ainda de acordo com os PCNs:

> Neste sentido é preciso que o aluno perceba a matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de idéias e permite modelar a realidade e interpreta - lá. Assim, os números e a álgebra como sistema de códigos, a geometria na leitura e interpretação do espaço, a estática e a probabilidade na compreensão de fenômenos em universos finitos são subáreas da matemática especialmente ligadas as aplicações. (BRASIL, 1998)

Introduzimos o tema pela parte histórica com o intuito dos alunos terem maior motivação em aprender o conteúdo. A seguir fizemos uma atividade de dedução, onde partimos da noção intuitiva dos alunos sobre o tema. A partir daí chegamos a definição de

Digitalizado com CamScanner

probabilidade. Trabalhamos com as definições dos termos utilizados no conteúdo de Probabilidade e relacionamos a Probabilidade com outras áreas, como Biologia e Geometria. Finalizamos a aula com uma atividade contendo questões dos últimos vestibulares.

Abordamos o tema sem questões que envolvessem o conteúdo de Análise Combinatória.

Digitalizado com CamScanner

2 - DESENVOLVIMENTO

2.1 – Preparação do Projeto

Este projeto iniciou-se no 2º período do curso de Licenciatura em Matemática.

Nas primeiras aulas, estudamos sobre o tema escolhido e fizemos vários exercícios.

Demos então início à preparação da aula, onde selecionamos os conteúdos a serem trabalhados, os pré-requisitos necessários e as atividades de aplicação.

Participamos de um teste exploratório, que foi aplicado para nossa turma de laboratório. De acordo com a nossa orientadora e colegas de classe, algumas mudanças foram necessárias, tais como:

- A apostila do aluno, que inicialmente não continha a parte histórica, passou a conter e parte dela foi transmitida para os alunos através de transparências, que continham além da parte histórica, uma abordagem sobre o uso da palavra probabilidade no cotidiano.
- Os exercícios de porcentagem que faziam parte dos pré-requisitos, foram reelaborados, pois não havia aplicação deles nas atividades.
- Após cada definição (item 4 da apostila) foi acrescentado um exemplo para reforçar o conceito trabalhado.
- Acrescentamos mais exemplos sobre a aplicação da probabilidade em outras áreas.
- A seleção dos exercícios de aplicação sofreu uma modificação, pois algumas questões necessitavam de conhecimentos de Análise Combinatória para sua resolução e outras continham itens desnecessários.

Digitalizado com CamScanner

2.2 – Etapas do projeto: [1]

2.2.1 – Parte Histórica

Iniciamos a aula com a parte histórica, a fim de buscar a motivação dos alunos.

Nessa parte mostramos de onde e como iniciou os jogos que deram início a probabilidade. Falamos sobre os matemáticos que se dedicaram a esse tema e como a probabilidade é um assunto que está envolvido em nosso cotidiano.

Apesar de no início da aula haver poucos alunos em sala, mesmo assim obtivemos um bom resultado nessa hora, já que todos mostraram interesse.

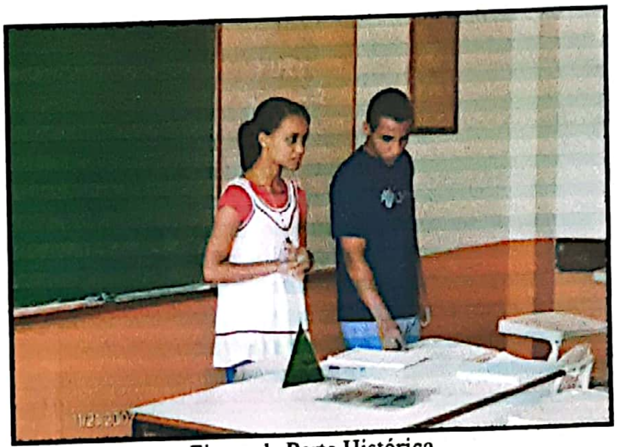


Figura 1: Parte Histórica

2.2.2 – Pré-requisitos

Revisamos o conteúdo de Porcentagem, relembrando o que é razão centesimal e como representá-la de outras formas. Foram feitos três exercícios explorando as várias formas de resolução.

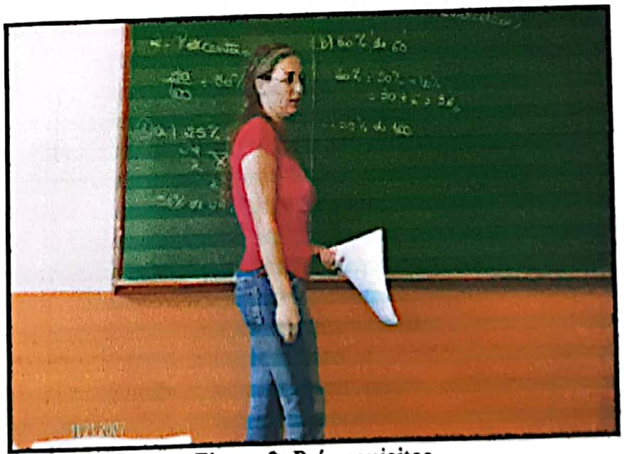


Figura 2: Pré-requisitos

[1] O conteúdo de todas as etapas descritas está contido na apostila do aluno nos anexos do presente trabalho.

Digitalizado com CamScanner

2.2.3 – Atividade de Dedução

Antes de iniciar a atividade de dedução mostramos aos alunos o significado da palavra probabilidade e como ela está bastante inserida no dia-a-dia.

Logo após fizemos a atividade de dedução da fórmula através de uma exposição dialogada com os alunos, utilizando a noção intuitiva que já existe neles sobre probabilidade.

Demos a seguinte questão aos alunos: Qual é a probabilidade de cair um n° par num lançamento de um dado? A maioria conseguiu responder com facilidade que é 50%. Assim, questionamos como que eles chegaram a este resultado. Muitos responderam que a quantidade de números pares contidos em um dado é a metade do total de números.

Em seguida analisamos certos pontos para "chegar" na fórmula de probabilidade. Perguntaremos quais são todas as possibilidades ou casos possíveis que temos num lançamento de um dado, se referindo as faces. Todos responderam: 1,2,3,4,5,6. Depois perguntaremos quantos são essas possibilidades, neste caso, são seis.

Fizemos mais duas perguntas para os alunos, onde os mesmos responderam com facilidade: Quais são os números pares contidos em um dado? E quantos números pares estão contidos em um dado? Assim, dissemos que o número "seis" representa o número de casos possíveis e o número "três" representa o número de casos favoráveis.

Pedimos para eles relacionarem o número de casos possíveis com o número de casos favoráveis com a resposta da pergunta inicialmente feita.

Daí, concluímos que a probabilidade pode ser calculada pela razão do número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis, neste caso: $\frac{3}{6}$, ou seja, 50%.

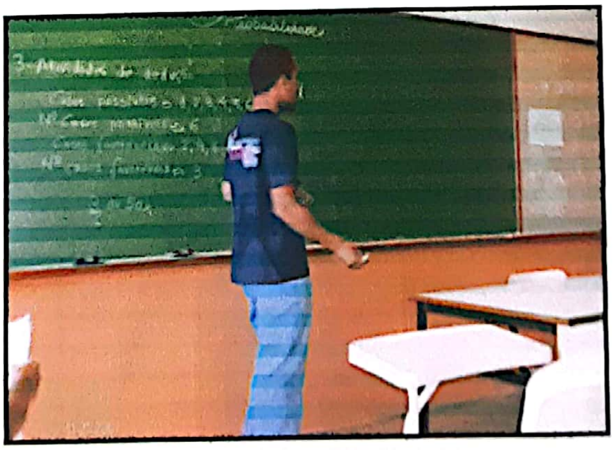


Figura 3: Atividade de dedução

Digitalizado com CamScanner

2.2.4 – Definições

Nesta parte definimos: experimento aleatório, espaço amostral, evento, evento complementar e mostramos também a fórmula de probabilidade.

Após cada definição foram feitos exemplos e logo após um breve exercício, para assim, incentivar também a participação e interação dos alunos.

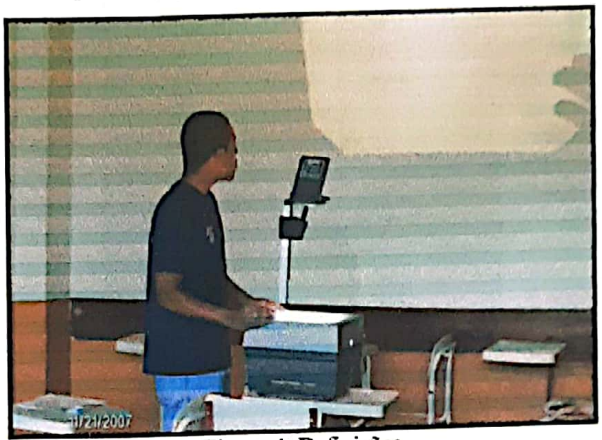


Figura 4: Definições

2.2.5 – Probabilidade em algumas áreas

Um dos objetivos deste trabalho foi relacionar a probabilidade à outras áreas, pois percebemos que ela é bastante utilizada, não só na matemática, mas também em outras disciplinas. Relacionamos assim, a probabilidade com a Biologia, e no próprio ramo da matemática com a Geometria.

Na Geometria, relembramos alguns conceitos como medidas de segmentos, números primos e números de elementos da união de dois conjuntos.

Na Biologia, relacionamos com questões na área de Genética. No exemplo, utilizamos o diagrama da árvore para auxiliar na resolução da questão.

Logo após os alunos fizeram um exercício de cada área. (Questões 1 e 2). Na questão dois, mostramos para eles o diagrama de Ven.

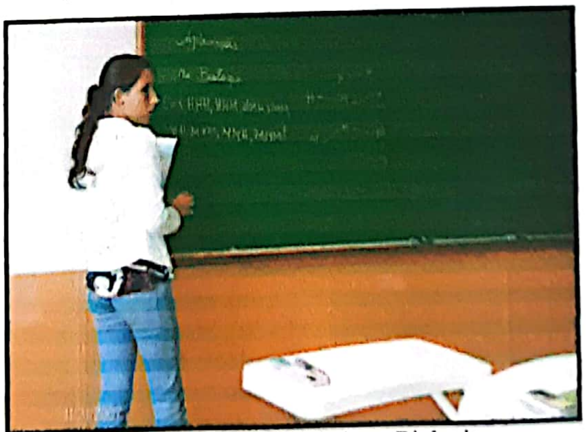


Figura 5: Probabilidade na Biologia

Digitalizado com CamScanner

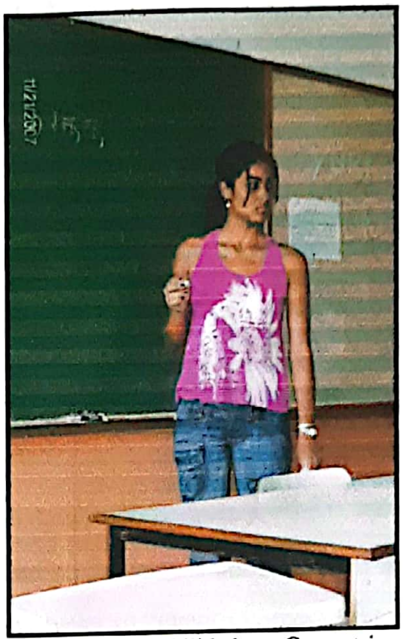


Figura 6: Probabilidade na Geometria

2.2.6 – Exercícios

Selecionamos seis questões dos últimos vestibulares que envolvessem o conteúdo de probabilidade e pedimos para eles resolverem. Discutimos com eles as soluções encontradas. Na 6ª questão, devido ao tempo, pensamos juntos com eles nos possíveis caminhos de resolução.

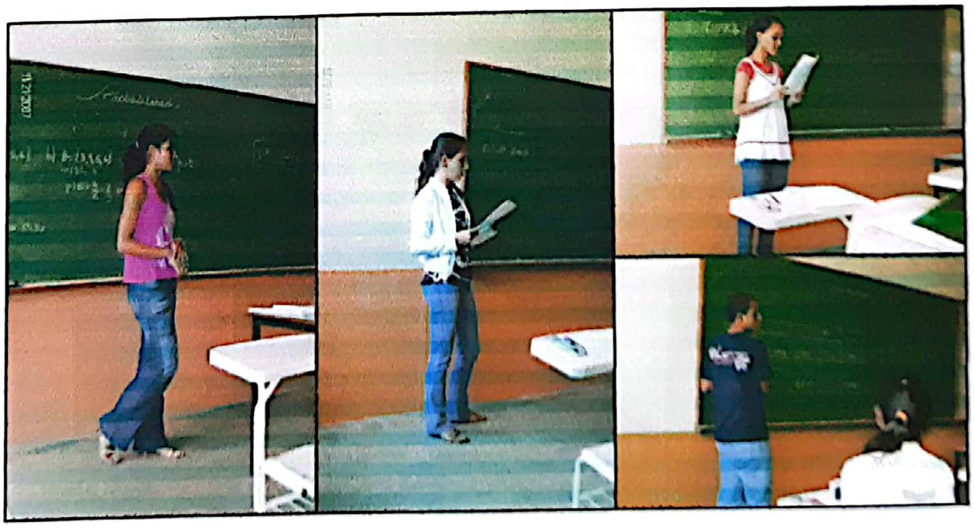


Figura 7: Exercícios

Digitalizado com CamScanner

3 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para realização deste trabalho elaboramos uma aula sobre probabilidade relacionando-a ao cotidiano e a outras áreas. Para os exercícios utilizamos questões dos últimos vestibulares, já que os alunos eram do 3° ano do Ensino Médio.

A aula ocorreu tranqüila e conseguimos aplicar o que havia sido programado. Os alunos se mostraram atentos apesar da pouca participação. Atribuímos a esse fato a falta de percepção do grupo para instigá-los. Outro descuido do grupo durante a apresentação foi interromper os pensamentos dos alunos em alguns momentos.

Ao término da aplicação percebemos que algumas etapas poderiam ter sido mais trabalhadas, como os pré-requisitos onde poderia ser mais explorada a transformação de um número fracionário para um número decimal. Vimos também que aos exercícios, deveriam ser acrescentadas questões que envolvessem "evento complementar", já que o mesmo havia sido discutido anteriormente.

Acreditamos que uma colaboração importante que deixamos para os alunos foram algumas sugestões que pudessem facilitar a resolução de alguns exercícios, como o diagrama de Vem, o diagrama da árvore e a tabela. Tais sugestões podem ser úteis para auxiliá-los nas resoluções de questões de futuros vestibulares.

O tema em questão é bastante amplo e oferece diversas maneiras de ser abordado. Uma delas seria desenvolver um projeto interdisciplinar, explorando outras áreas que não relacionamos em nosso projeto, e outra seria elaborar uma aula dinâmica, onde seriam utilizados jogos como recurso didático-pedagógico.

Sendo assim, vimos que apesar de algumas falhas, conseguimos atingir o nosso objetivo.

Digitalizado com CamScanner

BIBLIOGRAFIA

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; Périgo, Roberto. *Matemática* Volume único. Atual Editora.São Paulo: 1997.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; Périgo, Roberto. *Matemática* Volume único. Atual Editora.São Paulo: 2002.

HAZZAN, Samuel. *Fundamentos de Matemática Elementar combinatória e probabilidade.* Atual Editora.São Paulo: 1993.

BIANCHINI, Edwaldo; PACCOLA, Herval. *Matemática* v. 2 – 1ª ed. São Paulo: Editora Moderna, 1990.

BRASIL, PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais): Ensino Médio – Bases Legais, v.1. Brasília: Ministério da Educação Médio e Tecnológica,1999.

LINDQUIST, Mary M.;SHULTE,Albert. *Aprendendo e Ensinando Geometria.* Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

http://www.ime.unicamp.br/erpm2005/anais/m_cur/mc02_b.pdf
Acesso dia 04/04/07

http://pt.wikipedia.org/wiki/Probabilidade
Acesso dia 16/09/2007

www.mat.ufrg.br/~viali/estatistica/mat2006/material/textos/Hist_Prob.pdf
Acesso dia 27/10/2007

www.geocities.com/guida_cruz200/hisymat.htm
Acesso dia 27/10/2007

Digitalizado com CamScanner

ANEXOS

Digitalizado com CamScanner

ANEXO 1: Apostila

Digitalizado com CamScanner

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE CAMPOS

CEFET CAMPOS Universidade da Tecnologia e do Trabalho

Ministério da Educação

Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

Licenciatura em Matemática – Laboratório de Ensino
Nome: ______________________________ Série: _____
Turma: _________ Data: 21/11/2007

PROBABILIDADE

1- Parte Histórica

O Cálculo das Probabilidades parece ter nascido, enquanto tal, na Idade Média, com as primeiras tentativas de matematização dos jogos de azar, muito difundidos na época. É sabido que desde sempre os jogos foram praticados como apostas mas também para prever o futuro, decidir conflitos, dividir heranças, etc.

Na realidade a palavra "azar" empregado aqui não está utilizado no sentido habitual de "má sorte" e sim como sinônimo de "acaso".

No século XVII, os jogos de azar jogos que envolvem dinheiro eram bastante populares na sociedade francesa. As primeiras manifestações se deram através dos jogos de dados, mais precisamente o Tali (jogo do osso) que era praticado com astrágalos. O astrágalo é o ancestral do dado moderno (hexaedro regular). Ele era formado por um osso de animal (possivelmente carneiro) e semelhante a um tetraedro irregular, isto é, as quatro faces não eram idênticas e nem tampouco mostravam a mesma freqüência de ocorrência. As faces maiores eram numeradas com 3 e 4 e as duas menores por 1 e 6.

Além de apostas este jogo era freqüentemente utilizado para previsões sobre o futuro. Para tal eram jogados cinco ossos ao mesmo tempo. Outra utilização do jogo era na decisão de disputas e, ainda, na divisão de heranças.

Devem-se aos algebristas italianos Pacioli, Cardano e Tartaglia (séc. XVI) as primeiras considerações matemáticas acerca dos jogos e das apostas. Eles limitam-se, no entanto, a resolver alguns problemas concretos mas ainda sem demonstração de teoremas, embora façam já comparação de frequência de ocorrências e estimativas de ganhos.

No entanto, o contributo decisivo para o início da Teoria das Probabilidades foi dado pela correspondência trocada entre os matemáticos franceses **Blaise Pascal** e seu amigo **Pierre de Fermat**, em que ambos, por diferentes caminhos, chegam à solução correta do célebre *problema da divisão das apostas* em 1654. Este problema teria sido posto a Pascal pelo cavaleiro De Méré (considerado por alguns autores jogador inveterado e por outros, filósofo e homem de letras) quando viajava em sua companhia. Sem que Pascal e Fermat o soubessem, este problema era basicamente o mesmo que, um século antes, interessara também Pacioli, Tartaglia e Cardano.

A teoria das probabilidades evoluiu de tal forma que no século XX possui uma axiomática própria dentro da teoria da matemática.

Digitalizado com CamScanner

2- Pré-requisitos

- **Porcentagem**

A razão cujo denominador é 100 recebe o nome de *razão centesimal.*

Por exemplo: $\frac{30}{100}, \frac{27,9}{100}$.

Existe ainda outra forma de representar essas razões centesimais:

$\frac{30}{100} = 30\% = 0,3$; $\frac{27,9}{100} = 27,9\% = 0,279$.

Tais taxas estão expressas em razões centesimais, *taxas percentuais e números decimais*, respectivamente.

➢ Exercícios:

1 - Calcule:

a) 25% de 24
b) 60% de 60
c) 30% de 100
d) 40% de 75
e) 37,5% de 32

2 – Expresse em taxas percentuais:

a) $\frac{4}{5}$

b) $\frac{3}{2}$

c) $\frac{3}{8}$

3 – Em um exame para habilitação de motoristas participaram 380 candidatos, onde a taxa de reprovação foi de 15%. Por outro lado, foram aprovados com nota máxima apenas 76 entre todos os candidatos. Quantos candidatos foram reprovados e qual é a taxa percentual dos candidatos aprovados com nota máxima?

Digitalizado com CamScanner

3- Atividades de dedução

Significado da palavra "probabilidade": *Qualidade do que é provável, aparência de verdade, indício de possibilidade, verossimilhança, probabilismo.* (Fonte: Dicionário O GLOBO).

A palavra probabilidade deriva do latim probare (provar ou testar). Informalmente, provável é uma das muitas palavras utilizadas para eventos incertos ou conhecidos, sendo também substituída por algumas palavras como "sorte", "risco", "azar", "incerteza", "duvidoso", dependendo do contexto.

"A teoria das probabilidades, no fundo, não é mais do que o bom senso traduzido em cálculo; permite calcular com exatidão aquilo que as pessoas sentem por uma espécie de instinto... É notável que tal ciência, que começou nos estudos sobre jogos de azar, tenha alcançado os mais altos níveis do conhecimento humano."

(Pierre Simon Laplace)

Hoje em dia, podemos perceber que a probabilidade está bastante inserida no cotidiano. E apesar de muitos alunos nunca terem estudado o conteúdo, têm uma noção intuitiva do que ele seja.

De acordo com sua noção intuitiva de probabilidade resolva o seguinte problema: Qual é a probabilidade de sair um número par no lançamento de um dado?

____.

Observação: ____.

4- Definições

4.1 – Experimento Aleatório

Quando jogamos um dado, e vemos o número da face de cima, não podemos prever com certeza, qual resultado ocorrerá. Assim como quando sorteamos uma carta de um baralho, não é possível adivinhar qual carta iremos pegar.

Todos esses experimentos são chamados de experimentos aleatórios. São os experimentos que repetidos em condições idênticas apresentam diferentes resultados, ou seja, são todos os experimentos que não conseguimos prever os resultados.

4.2 – Espaço Amostral

É o conjunto de todos os possíveis valores de um experimento aleatório. Indicaremos esse conjunto pela letra E, e o número de elementos que o espaço amostral possui por n(E).

Digitalizado com CamScanner

Exemplo: No exemplo do lançamento do dado, que já vimos:

E={1,2,3,4,5,6}

n(E)=6

Exercício: No lançamento de uma moeda.

E= ________________

n(E)=___________

4.3 – Evento

Chamamos de evento todo subconjunto do espaço amostral.

Iremos representá-lo por qualquer letra do alfabeto, exceto o E. O número de ocorrência deste evento será representado por n(A), n(B), n(C)... dependendo do nome dado ao evento.

Exemplo: No lançamento de um dado queremos o evento A em que a face voltada para cima seja um n° par.

A= {2,4,6}

n(A) =3

Exercício: De uma urna com 10 etiquetas numeradas de 1 à 10 devemos retirar ao acaso uma etiqueta com um número maior do que 7.

B=______________________

n(B) =________

4.4 – Evento complementar

Seja um evento A relativo a um espaço amostral E. Chamamos evento complementar de A o evento que ocorre quando A não ocorre. O evento complementar de A é representado por A^c.

A Y A^c = E

Exemplo: No lançamento de um dado, se o evento A for sair um n° par. O evento complementar A^c será sair um número ímpar.

A = {2,4,6}

A^c= {1,3,5}

Exercício: De uma urna com 10 etiquetas numeradas de 1 à 10 devemos retirar ao acaso uma etiqueta com um número maior do que 7.

B =________________

B^c=________________

4.5 – Fórmula de Probabilidade

Já vimos que a fórmula de probabilidade é a razão do número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis. Podemos dizer que:

$$\boxed{p(A) = \frac{n(A) \rightarrow \text{número de casos favoráveis}}{n(E) \rightarrow \text{número de casos possíveis}}, \text{ onde } 0 \leq p(A) \leq 1}$$

Digitalizado com CamScanner

Exemplo:

- Um dado é lançado e observa-se o número da face voltada para cima. Qual é a probabilidade de sair um número:

a) menor do que 3?

b) maior ou igual a 3?

c) igual a 8?

5- Probabilidade em algumas áreas:

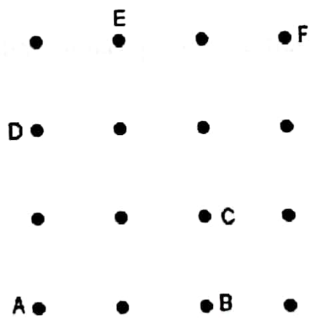
A probabilidade está relacionada à várias áreas. Existem aplicações na Biologia (na Genética), na Física (na Física Nuclear), na Química, Sociologia e etc.

Ela também se relaciona em alguns ramos da matemática, como a Geometria e a Estatística. Mostraremos agora, através de exercícios, algumas dessas áreas.

Na geometria:

Os pontos A, B, C, D, E e F estão indicados no quadro abaixo. Se X e Y são pontos distintos escolhidos aleatoriamente em {C,D,E,F} qual a probabilidade de que:

a) XY = AB b) XY > AB c) $\overleftrightarrow{XY} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ **d)** $\overleftrightarrow{XY} \perp \overleftrightarrow{AB}$



Digitalizado com CamScanner

Na Biologia:

Um casal planeja ter 3 filhos. Admitindo-se que "nascer menino" e "nascer menina" sejam eventos igualmente prováveis, ache a probabilidade de esse casal ter:

a) 3 meninas.
b) no mínimo, 2 meninas.
c) apenas um dos filhos menina.

6- Exercícios:

1) (UERJ-2005 - adaptada)

O poliedro acima, com exatamente trinta faces quadrangulares numeradas de 1 a 30, é usado como um dado, em um jogo.
Admita que esse dado seja perfeitamente equilibrado e que, ao ser lançado, cada face tenha a mesma probabilidade de ser sorteada.

Calcule a probabilidade de obter um número primo ou múltiplo de 5, ao lançar esse dado uma única vez:

Digitalizado com CamScanner

2) (UFF – 2003) Gilbert e Hatcher, em Mathematics Veyond The Numbers, relativamente à população mundial informam que:

- 43% tem sangue tipo O;

- 85% tem Rh positivo;

- 37% tem sangue tipo O com Rh positivo.

Nesse caso, a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso não ter sangue O e não ter Rh positivo é de:

a) 9% b) 15% c) 37% d) 63% e) 91%

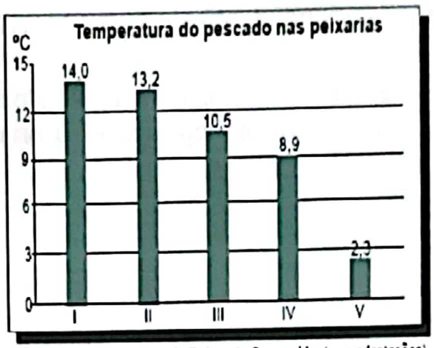
3) (UFRJ-2005) Um novo exame para detectar certa doença foi testado em trezentas pessoas, sendo duzentas sadias e cem portadoras da tal doença.

Após o teste verificou-se que, dos laudos referentes a pessoas sadias, cento e setenta resultaram negativos e, dos laudos referentes a pessoas portadoras da doença, noventa resultaram positivos.

a) Sorteando ao acaso um desses trezentos laudos, calcule a probabilidade de que ele seja positivo.
b) Sorteado um dos trezentos laudos, verificou-se que ele era positivo.
Determine a probabilidade de que a pessoa correspondente ao laudo sorteado tenha realmente a doença.

Digitalizado com CamScanner

4) (ENEM -2007)



Associação Brasileira de Defesa do Consumidor (com adaptações).

Uma das principais causas da degradação de peixes é a contaminação por bactérias. O gráfico apresenta resultados de um estudo acerca da temperatura de peixes frescos vendidos em cinco peixarias. O ideal é que esses peixes sejam vendidos com temperaturas entre 2 °C e 4 °C. Selecionando-se aleatoriamente uma das cinco peixarias pesquisadas, a probabilidade de ela vender peixes frescos na condição ideal é igual a:

a) ½ b) 1/3 c) ¼ d) 1/5 e) 1/6

5) (ENEM – 2007) A queima de cana aumenta a concentração de dióxido de carbono e de material particulado na atmosfera, causa alteração no clima e contribui para o aumento de doenças respiratórias. A tabela abaixo apresenta números relativos a pacientes internados em um hospital num período da queima da cana.

pacientes	problemas respiratórios causados pelas queimadas	problemas respiratórios resultantes de outras causas	outras doenças	total
idosos	50	150	60	260
crianças	150	210	90	450

Escolhendo-se aleatoriamente um paciente internado nesse hospital por problemas respiratórios causados pelas queimadas, a probabilidade de que ele seja uma criança é:

a) 0,26, o que sugere a necessidade de implementação de medidas que reforcem a atenção ao idoso internado com problemas respiratórios.
b) 0,50, o que comprova ser de grau médio a gravidade dos problemas respiratórios que atingem a população nas regiões das queimadas.
c) 0,63, O que mostra que nenhum aspecto relativo a saúde infantil pode ser negligenciado.
d) 0,67, o que indica a necessidade de campanhas de conscientização que objetivem a eliminação das queimadas.
e) 0,75, o que sugere a necessidade de que, em áreas atingidas pelos efeitos das queimadas, o atendimento hospitalar no setor de pediatria seja reforçado.

Digitalizado com CamScanner

6) (UNICAMP – 2006) Uma empresa tem 5000 funcionários. Desses, 48% têm mais de 30 anos, 36% são especializados e 1400 têm mais de 30 anos e são especializados. Com bases nesses dados, pergunta-se:

a) Quantos funcionários têm até 30 anos e não são especializados?

b) Escolhendo um funcionário ao acaso, qual a probabilidade de ele ter até 30 anos e ser especializado?

Digitalizado com CamScanner

ANEXO 2: Apostila respondida pelo aluno

Digitalizado com CamScanner

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE CAMPOS
CEFET CAMPOS Universidade da Tecnologia e do Trabalho
Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

Licenciatura em Matemática – Laboratório de Ensino
Nome: Daniel Tavares Série: ____
Turma: ________ Data: 21/11/2007

PROBABILIDADE

1- Parte Histórica

O Cálculo das Probabilidades parece ter nascido, enquanto tal, na Idade Média, com as primeiras tentativas de matematização dos jogos de azar, muito difundidos na época. É sabido que desde sempre os jogos foram praticados como apostas mas também para prever o futuro, decidir conflitos, dividir heranças, etc.

Na realidade a palavra "azar" empregado aqui não está utilizado no sentido habitual de "má sorte" e sim como sinônimo de "acaso".

No século XVII, os jogos de azar jogos que envolvem dinheiro eram bastante populares na sociedade francesa. As primeiras manifestações se deram através dos jogos de dados, mais precisamente o Tali (jogo do osso) que era praticado com astrágalos. O astrágalo é o ancestral do dado moderno (hexaedro regular). Ele era formado por um osso de animal (possivelmente carneiro) e semelhante a um tetraedro irregular, isto é, as quatro faces não eram idênticas e nem tampouco mostravam a mesma freqüência de ocorrência. As faces maiores eram numeradas com 3 e 4 e as duas menores por 1 e 6.

Além de apostas este jogo era freqüentemente utilizado para previsões sobre o futuro. Para tal eram jogados cinco ossos ao mesmo tempo. Outra utilização do jogo era na decisão de disputas e, ainda, na divisão de heranças.

Devem-se aos algebristas italianos Pacioli, Cardano e Tartaglia (séc. XVI) as primeiras considerações matemáticas acerca dos jogos e das apostas. Eles limitam-se, no entanto, a resolver alguns problemas concretos mas ainda sem demonstração de teoremas, embora façam já comparação de frequência de ocorrências e estimativas de ganhos.

No entanto, o contributo decisivo para o início da Teoria das Probabilidades foi dado pela correspondência trocada entre os matemáticos franceses **Blaise Pascal** e seu amigo **Pierre de Fermat**, em que ambos, por diferentes caminhos, chegam à solução correta do célebre *problema da divisão das apostas* em 1654. Este problema teria sido posto a Pascal pelo cavaleiro De Méré (considerado por alguns autores jogador inveterado e por outros, filósofo e homem de letras) quando viajava em sua companhia. Sem que Pascal e Fermat o soubessem, este problema era basicamente o mesmo que, um século antes, interessara também Pacioli, Tartaglia e Cardano.

A teoria das probabilidades evoluiu de tal forma que no século XX possui uma axiomática própria dentro da teoria da matemática.

Digitalizado com CamScanner

2- Pré-requisitos

- **Porcentagem**

A razão cujo denominador é 100 recebe o nome de *razão centesimal.*

Por exemplo: $\frac{30}{100}$, $\frac{27,9}{100}$.

Existe ainda outra forma de representar essas razões centesimais:

$\frac{30}{100} = 30\% = 0,3$; $\frac{27,9}{100} = 27,9\% = 0,279$.

Tais taxas estão expressas em razões centesimais, *taxas percentuais* e *números decimais*, respectivamente.

- Exercícios:

1 - Calcule:

a) 25% de 24 = 6
b) 60% = 50% + 10%

a) 25% de 24
b) 60% de 60
c) 30% de 100
d) 40% de 75
e) 37,5% de 32

2 – Expresse em taxas percentuais:

a) $\frac{4}{5}$

b) $\frac{3}{2}$

c) $\frac{3}{8}$

3 – Em um exame para habilitação de motoristas participaram 380 candidatos, onde a taxa de reprovação foi de 15%. Por outro lado, foram aprovados com nota máxima apenas 76 entre todos os candidatos. Quantos candidatos foram reprovados e qual é a taxa percentual dos candidatos aprovados com nota máxima?

$\frac{15}{100} \times 380 = \frac{57\cancel{00}}{1\cancel{00}} =$ 57 reprovados.

$38 \times 2 = 76$

$380 - 76$

100% —— 380
x —— 76

$380x = 7600$
$x = 7600 \mid 38$
20

20% aprovados com nota máxima.

0
15
100
30
5700

Digitalizado com CamScanner

3- Atividades de dedução

Significado da palavra "probabilidade": *Qualidade do que é provável, aparência de verdade, indício de possibilidade, verossimilhança, probabilismo.* (Fonte: Dicionário O GLOBO).

A palavra probabilidade deriva do latim probare (provar ou testar). Informalmente, provável é uma das muitas palavras utilizadas para eventos incertos ou conhecidos, sendo também substituída por algumas palavras como "sorte", "risco", "azar", "incerteza", "duvidoso", dependendo do contexto.

"A teoria das probabilidades, no fundo, não é mais do que o bom senso traduzido em cálculo; permite calcular com exatidão aquilo que as pessoas sentem por uma espécie de instinto... É notável que tal ciência, que começou nos estudos sobre jogos de azar, tenha alcançado os mais altos níveis do conhecimento humano."

(Pierre Simon Laplace)

Hoje em dia, podemos perceber que a probabilidade está bastante inserida no cotidiano. E apesar de muitos alunos nunca terem estudado o conteúdo, têm uma noção intuitiva do que ele seja.

De acordo com sua noção intuitiva de probabilidade resolva o seguinte problema: Qual é a probabilidade de sair um número par no lançamento de um dado?

Casos possíveis => 1, 2, 3, 4, 5, 6
Nº Casos possíveis => 6
Casos favoráveis => 2, 4, 6
Nº de casos favoráveis => 3
$3/6$ ou 50%

Observação:
A probabilidade é calculada pela razão do nº de casos favoráveis pelo nº de casos possíveis.

4- Definições

4.1 – Experimento Aleatório

Quando jogamos um dado, e vemos o número da face de cima, não podemos prever com certeza, qual resultado ocorrerá. Assim como quando sorteamos uma carta de um baralho, não é possível adivinhar qual carta iremos pegar.

Todos esses experimentos são chamados de experimentos aleatórios. São os experimentos que repetidos em condições idênticas apresentam diferentes resultados, ou seja, são todos os experimentos que não conseguimos prever os resultados.

4.2 – Espaço Amostral

É o conjunto de todos os possíveis valores de um experimento aleatório. Indicaremos esse conjunto pela letra E, e o número de elementos que o espaço amostral possui por n(E).

Digitalizado com CamScanner

3- Atividades de dedução

<u>Significado da palavra "probabilidade"</u>: *Qualidade do que é provável, aparência de verdade, indício de possibilidade, verossimilhança, probabilismo.* (Fonte: Dicionário O GLOBO).

A palavra probabilidade deriva do latim probare (provar ou testar). Informalmente, provável é uma das muitas palavras utilizadas para eventos incertos ou conhecidos, sendo também substituída por algumas palavras como "sorte", "risco", "azar", "incerteza", "duvidoso", dependendo do contexto.

"A teoria das probabilidades, no fundo, não é mais do que o bom senso traduzido em cálculo; permite calcular com exatidão aquilo que as pessoas sentem por uma espécie de instinto... É notável que tal ciência, que começou nos estudos sobre jogos de azar, tenha alcançado os mais altos níveis do conhecimento humano."

(Pierre Simon Laplace)

Hoje em dia, podemos perceber que a probabilidade está bastante inserida no cotidiano. E apesar de muitos alunos nunca terem estudado o conteúdo, têm uma noção intuitiva do que ele seja.

De acordo com sua noção intuitiva de probabilidade resolva o seguinte problema: Qual é a probabilidade de sair um número par no lançamento de um dado?

Casos possíveis => 1, 2, 3, 4, 5, 6
Nº Casos possíveis => 6
Casos favoráveis => 2, 4, 6
Nº de casos favoráveis => 3
$3/6$ ou 50%

Observação: A probabilidade é calculada pela razão do nº de casos favoráveis pelo nº de casos possíveis.

4- Definições

4.1 – Experimento Aleatório

Quando jogamos um dado, e vemos o número da face de cima, não podemos prever com certeza, qual resultado ocorrerá. Assim como quando sorteamos uma carta de um baralho, não é possível adivinhar qual carta iremos pegar.

Todos esses experimentos são chamados de experimentos aleatórios. São os experimentos que repetidos em condições idênticas apresentam diferentes resultados, ou seja, são todos os experimentos que não conseguimos prever os resultados.

4.2 – Espaço Amostral

É o conjunto de todos os possíveis valores de um experimento aleatório. Indicaremos esse conjunto pela letra E, e o número de elementos que o espaço amostral possui por n(E).

Digitalizado com CamScanner

Exemplo: No exemplo do lançamento do dado, que já vimos:

$E=\{1,2,3,4,5,6\}$

$n(E)=6$

Exercício: No lançamento de uma moeda.

E= cara, coroa

n(E)= 2

4.3 – Evento

Chamamos de evento todo subconjunto do espaço amostral.

Iremos representá-lo por qualquer letra do alfabeto, exceto o E. O número de ocorrência deste evento será representado por n(A), n(B), n(C)... dependendo do nome dado ao evento.

Exemplo: No lançamento de um dado queremos o evento A em que a face voltada para cima seja um n° par.

$A= \{2,4,6\}$

$n(A) =3$

Exercício: De uma urna com 10 etiquetas numeradas de 1 à 10 devemos retirar ao acaso uma etiqueta com um número maior do que 7.

B= {8, 9, 10}

n(B) = 3

4.4 – Evento complementar

Seja um evento A relativo a um espaço amostral E. Chamamos evento complementar de A o evento que ocorre quando A não ocorre. O evento complementar de A é representado por A^c.

$A \cup A^c = E$

Exemplo: No lançamento de um dado, se o evento A for sair um n° par. O evento complementar A^c será sair um número ímpar.

$A = \{2,4,6\}$

$A^c= \{1,3,5\}$

Exercício: De uma urna com 10 etiquetas numeradas de 1 à 10 devemos retirar ao acaso uma etiqueta com um número maior do que 7.

B = {8, 9, 10}

B^c= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

4.5 – Fórmula de Probabilidade

Já vimos que a fórmula de probabilidade é a razão do número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis.

Podemos dizer que:

$$\boxed{p(A) = \frac{n(A) \to \text{número de casos favoráveis}}{n(E) \to \text{número de casos possíveis}}\text{, onde } 0 \leq p(A) \leq 1}$$

Digitalizado com CamScanner

Exemplo:

- Um dado é lançado e observa-se o número da face voltada para cima. Qual é a probabilidade de sair um número:

a) menor do que 3?

$E = \{1,2,3,4,5,6\}$ $\quad A = \{1,2\}$ $\quad p(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 33{,}3\%$

$n(E) = 6$ $\quad n(A) = 2$

b) maior ou igual a 3?

$A = \{3,4,5,6\}$ $\quad p(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0{,}666 \times 100 = 66{,}6\%$

$n(A) = 4$

c) igual a 8?

$p = 0$

5- Probabilidade em algumas áreas:

A probabilidade está relacionada à várias áreas. Existem aplicações na Biologia (na Genética), na Física (na Física Nuclear), na Química, Sociologia e etc.

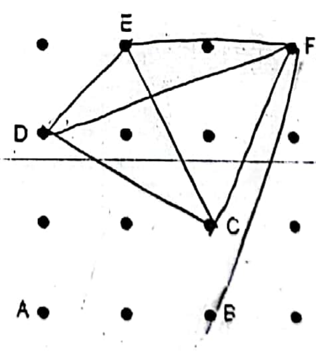
Ela também se relaciona em alguns ramos da matemática, como a Geometria e a Estatística. Mostraremos agora, através de exercícios, algumas dessas áreas.

Na geometria:

Os pontos A, B, C, D, E e F estão indicados no quadro abaixo. Se X e Y são pontos distintos escolhidos aleatoriamente em {C,D,E,F} qual a probabilidade de que:

a) $XY = AB$ b) $XY > AB$ c) $\overleftrightarrow{XY} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ d) $\overleftrightarrow{XY} \perp \overleftrightarrow{AB}$

$E = \{\overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EF}, \overline{FC}, \overline{EC}, \overline{FD}\}$



a) $A = \{\overline{EF}\}$

$n(A) = 1$

$p(A) = \frac{1}{6}$ ou $16{,}6\%$

b) $B = \{\overline{ED}, \overline{CD}, \overline{EC}, \overline{CF}\}$

$n(B) = 4$

$p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 66{,}6\%$

c) $C = \{\overline{EF}\}$

$n(C) = 1$

$p = \frac{1}{6}$

d) $p = 0$

Digitalizado com CamScanner

Na Biologia:

Um casal planeja ter 3 filhos. Admitindo-se que "nascer menino" e "nascer menina" sejam eventos igualmente prováveis, ache a probabilidade de esse casal ter:

a) 3 meninas.
b) no mínimo, 2 meninas.
c) apenas um dos filhos menina.

E = {HHH, HHM, HMH, HMM, MHH, M

a)

b) $n(B) = 4$

$p = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ ou 50%

c) $n(c) = 3$

$p = \frac{3}{8} = 0{,}375$ ou 37,5%

6- Exercícios:

1) (UERJ-2005 - adaptada)

O poliedro acima, com exatamente trinta faces quadrangulares numeradas de 1 a 30, é usado como um dado, em um jogo.
Admita que esse dado seja perfeitamente equilibrado e que, ao ser lançado, cada face tenha a mesma probabilidade de ser sorteada.

Calcule a probabilidade de obter um número primo ou múltiplo de 5, ao lançar esse dado uma única vez:

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30\}$

$n(E) = 30$

$p = \frac{15}{30} = \frac{1}{2} = 50\%$

$A = \{2, 3, \cancel{5}, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$

$n(A) = 10$

$B = \{\cancel{5}, 10, 15, 20, 25, 30\}$

$n(B) = 6 = 5$

Digitalizado com CamScanner

2) (UFF – 2003) Gilbert e Hatcher, em Mathematics Veyond The Numbers, relativamente à população mundial informam que:

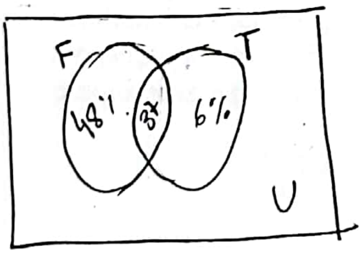
- 43% tem sangue tipo O;

- 85% tem Rh positivo;

- 37% tem sangue tipo O com Rh positivo.

Nesse caso, a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso não ter sangue O e não ter Rh positivo é de:

~~a)~~ 9%   b) 15%   c) 37%   d) 63%   e) 91%



$$\begin{array}{r} 85 \\ -37 \\ \hline 48 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 43 \\ -37 \\ \hline 06 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 48 \\ 37 \\ +6 \\ \hline 91 \end{array}$$

$100\% - 91\% = 9\%$

3) (UFRJ-2005) Um novo exame para detectar certa doença foi testado em trezentas pessoas, sendo duzentas sadias e cem portadoras da tal doença.

Após o teste verificou-se que, dos laudos referentes a pessoas sadias, cento e setenta resultaram negativos e, dos laudos referentes a pessoas portadoras da doença, noventa resultaram positivos.

a) Sorteando ao acaso um desses trezentos laudos, calcule a probabilidade de que ele seja positivo.

b) Sorteado um dos trezentos laudos, verificou-se que ele era positivo.

Determine a probabilidade de que a pessoa correspondente ao laudo sorteado tenha realmente a doença.

a) 200 sadias, 100 doentes.

~~170 neg.~~   90 pos.

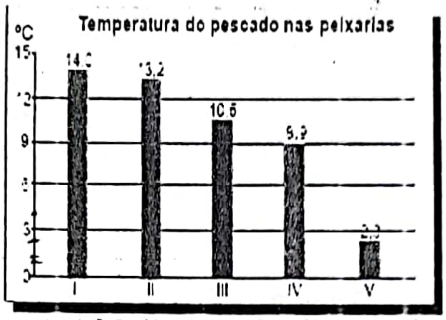
30 pos.

$$P = \frac{90+30}{300} = \frac{12\cancel{0}}{30\cancel{0}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \text{ ou } 0{,}4$$

b) $$\frac{90}{90+30} = \frac{9\cancel{0}}{12\cancel{0}} = \frac{3}{4} \text{ ou } 0{,}75.$$

Digitalizado com CamScanner

4) (ENEM -2007)



Associação Brasileira de Defesa do Consumidor (com adaptações).

Uma das principais causas da degradação de peixes é a contaminação por bactérias. O gráfico apresenta resultados de um estudo acerca da temperatura de peixes frescos vendidos em cinco peixarias. O ideal é que esses peixes sejam vendidos com temperaturas entre 2 °C e 4 °C. Selecionando-se aleatoriamente uma das cinco peixarias pesquisadas, a probabilidade de ela vender peixes frescos na condição ideal é igual a:

a) ½ b) 1/3 c) ¼ d) 1/5 e) 1/6

5) (ENEM – 2007) A queima de cana aumenta a concentração de dióxido de carbono e de material particulado na atmosfera, causa alteração no clima e contribui para o aumento de doenças respiratórias. A tabela abaixo apresenta números relativos a pacientes internados em um hospital num período da queima da cana.

pacientes	problemas respiratórios causados pelas queimadas	problemas respiratórios resultantes de outras causas	outras doenças	total
idosos	50	150	60	260
crianças	150	210	90	450

$p = \frac{150}{200} = \frac{3}{4} = 0,75$

Escolhendo-se aleatoriamente um paciente internado nesse hospital por problemas respiratórios causados pelas queimadas, a probabilidade de que ele seja uma criança é:

a) 0,26, o que sugere a necessidade de implementação de medidas que reforcem a atenção ao idoso internado com problemas respiratórios.
b) ~~0,50, o que comprova ser de grau médio a gravidade dos problemas respiratórios~~ que atingem a população nas regiões das queimadas.
c) 0,63, O que mostra que nenhum aspecto relativo a saúde infantil pode ser negligenciado.
d) 0,67, o que indica a necessidade de campanhas de conscientização que objetivem a eliminação das queimadas.
e) 0,75, o que sugere a necessidade de que, em áreas atingidas pelos efeitos das queimadas, o atendimento hospitalar no setor de pediatria seja reforçado.

Digitalizado com CamScanner

6) (UNICAMP – 2006) Uma empresa tem 5000 funcionários. Desses, 48% têm mais de 30 anos, 36% são especializados e 1400 têm mais de 30 anos e são especializados. Com bases nesses dados, pergunta-se:
a) Quantos funcionários têm até 30 anos e não são especializados?
b) Escolhendo um funcionário ao acaso, qual a probabilidade de ele ter até 30 anos e ser especializado?

a)

Funcionários	especializado	nº especializado	total
+ 30 anos	1400	1000	2400
- 30 anos	400	2200	2600
total	1800	3200	5000

R = 2 200

48% de 5000 = 2400

36% de 5000 = 1800

b) $\frac{400}{5000} = \frac{2}{25} = 0{,}08 = 8\%$.

Digitalizado com CamScanner