INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
FLUMINENSE
Campus Campos-Centro

Secretaria de
Educação Profissional
e Tecnológica

Ministério da
Educação

GOVERNO FEDERAL
BRASIL
PAÍS RICO É PAÍS SEM POBREZA

RELATÓRIO LEAMAT III

ARITMÉTICA SEM FÓRMULAS

ENSINO E APRENDIZAGEM DE ARITMÉTICA

LUCIVÂNIA COUTINHO SOARES

CAMPOS DOS GOYTACAZES/RJ
2013.2

LUCIVÂNIA COUTINHO SOARES

RELATÓRIO LEAMAT III

ARITMÉTICA SEM FÓRMULAS

ENSINO E APRENDIZAGEM DE ARITMÉTICA

Trabalho apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, Campus Campos-Centro, como requisito parcial para conclusão da disciplina Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática III do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof.ª Esp. Ana Paula Rangel de Andrade

CAMPOS DOS GOYTACAZES/RJ
2013.2

SUMÁRIO

Introdução

Dentre os textos lidos e analisados nas aulas do Laboratório de Ensino e Aprendizagem I, dois eram de autoria do professor Sérgio Lorenzato, e despertaram grande interesse pelo trabalho com situações-problema cujas soluções não dependiam do uso de fórmulas ou regras matemáticas complexas.

Neste sentido, num primeiro momento, pensou-se em desenvolver um trabalho usando questões selecionadas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) ou do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) que contemplassem tal característica. Optou-se ao final pelo desenvolvimento de uma Atividade com as questões do ENEM dos últimos dois anos (2011 e 2012), devido ao fato do período pré-estabelecido para a aplicação da Atividade na turma regular ser muito próximo à realização do ENEM, o que poderia ser um fator motivador para os alunos que iriam fazer esta avaliação.

O ENEM avalia o desempenho escolar ao final da Educação Básica, bem como possibilita o acesso de estudantes à programas governamentais. Para essa avaliação são estabelecidas algumas competências a serem alcançadas, a saber: construir significado para os conjuntos numéricos; utilizar o conhecimento geométrico para leitura e representação da realidade; construir noções de grandezas e medidas; modelar problemas que envolvam variáveis; interpretar informações, ler gráficos e tabelas (BRASIL, 2011).

Assim, a Atividade vai ao encontro dessas competências na medida em que propõe questões adequadas à essa verificação. A resolução de problemas, presente em todas as questões do ENEM, assume um papel de grande importância no ensino da Matemática. Segundo Carvalho (1994, p.82):

> Não se aprende Matemática para resolver problemas e, sim, se aprende Matemática resolvendo problemas. Diante dessa perspectiva, qualquer situação que vise favorecer o aprendizado deve constituir-se em situação-problema para o aluno a que se destina, ou seja, a proposta de tarefa feita pelo professor deve ser tão interessante que crie, na classe, um clima de pesquisa, de busca de solução para os problemas que emergirem da proposta (CARVALHO, 1994, p.82).

A Atividade propõe ainda um trabalho contextualizado, possibilitando a interação da Matemática com outras áreas de conhecimento. Esta maneira de perceber a Matemática permite visualizar a sua aplicabilidade em diversas situações, permitindo ao aluno um desenvolvimento cognitivo mais abrangente.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (2002, p. 254), um dos objetivos do ensino da Matemática no nível médio é levar o aluno a aplicar os conhecimentos adquiridos nesta disciplina "[...] a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas". E complementa afirmando que o núcleo comum de um currículo deve ser composto por temas que contemplem o desenvolvimento de atitudes e habilidades nos alunos, destacando ainda a importância de questões contextualizadas:

> O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência (BRASIL, 2002, p.255).

A importância de um ensino contextualizado é ressaltada ainda por Lorenzato (2010, p.60) quando afirma: "... é falacioso pensar que, conhecendo partes do todo, já se conhece o todo. Por isso, todos os campos da matemática previstos no currículo oficial devem ser ensinados, e mais, de modo integrado".

Assim, a Atividade tem a intenção de usar exercícios contextualizados, além de proporcionar um ambiente no qual os conhecimentos ou as formas de resolução de cada questão possam ser compartilhadas pelo grupo. Um ambiente de interação possibilita o surgimento de uma nova visão em relação aos questionamentos levantados como também o amadurecimento de conceitos por meio do exercício coletivo. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio:

> O trabalho ganha então uma nova exigência, que é aprender continuamente em um processo não mais solitário. O indivíduo, imerso em um mar de informações, se liga a outras pessoas, que, juntas, complementar-se-ão em um exercício coletivo de memória, imaginação, percepção, raciocínios e competências para a produção e transmissão de conhecimentos (BRASIL, 2002, p.252).

Percebe-se o quanto é importante estimular o aluno a resolver problemas matemáticos, uma vez que a Matemática possibilita a estruturação do pensamento como também do raciocínio dedutivo no aluno, constituindo-se como importante ferramenta na resolução de diversas situações.

1. Objetivo

Espera-se que ao fim da Atividade os alunos resolvam as questões selecionadas e percebam que muitas situações-problema podem ser solucionadas sem o uso de fórmulas complexas. Espera-se ainda que as questões despertem nos alunos a criatividade e a curiosidade.

2. Atividades desenvolvidas

O público-alvo deste trabalho são os alunos da 3ª série do Ensino Médio. A Atividade será aplicada em duas turmas regulares da rede pública de ensino. O que difere uma da outra é o fato de que o ingresso a uma delas se dá por meio de um processo seletivo. As turmas serão denominadas de A e B, sendo a turma B aquela cuja avaliação é requisito para a entrada.

2.1. Elaboração da sequência didática

Para a elaboração da sequência didática foram selecionadas oito questões do ENEM dos dois últimos anos (2011 e 2012) e duas questões retiradas do livro do professor Sérgio Lorenzato, que foram resolvidas durante o Laboratório de Ensino e Aprendizagem I (APÊNDICE). A sequência didática está dividida em dois momentos.

No primeiro momento, o bloco de questões que compõem a Atividade é distribuído para que os alunos respondam individualmente e sem qualquer tipo de interferência, registrando em cada item o raciocínio utilizado. O tempo de duração previsto para essa aplicação é de duas horas-aula.

A professora em formação analisa as respostas dos alunos e seleciona aquelas cujas resoluções são mais rápidas, mais criativas e que possuem características diferenciadas das da maioria. Essas respostas são comentadas durante o próximo encontro.

No segundo momento, a professora em formação retorna à escola e as questões são resolvidas uma a uma juntamente com os alunos, esclarecendo suas dúvidas como também compartilhando com os demais colegas o raciocínio que utilizaram para chegar às respostas. São comentadas pela professora em formação as resoluções que, em sua análise, mereceram destaque.

Ao final desta etapa são distribuídas as duas questões que estão no livro de autoria do professor Sérgio Lorenzato e após um tempo determinado acontece também à discussão das mesmas.

As questões apresentadas na Atividade foram selecionadas de forma a atender o objetivo do trabalho. Tratam de conceitos como: princípio fundamental da contagem, conversão de medidas, ordem e classe de um número, escalas, área do triângulo, fração, probabilidade, função afim, números decimais, porcentagem, notação científica, razão, proporção e não necessitam de fórmulas complexas para a sua resolução. Em algumas basta um olhar mais minucioso ou simplesmente a utilização de conceitos bem elementares.

2.2. Aplicação da sequência didática na turma do LEAMAT II

As questões do ENEM (2011 e 2012) foram aplicadas na turma do LEAMAT II com a intenção de verificar se as mesmas estavam de acordo com a proposta da Atividade e avaliar se o tempo, inicialmente estipulado, seria suficiente para a resolução de cada uma.

A aplicação da Atividade iniciou-se com a distribuição de quatro questões. Os alunos resolveram individualmente as mesmas e para tanto não foram fornecidas quaisquer explicações. Ao término, tiveram oportunidade de expor a maneira pela qual resolveram os problemas e, verificou-se a semelhança entre as diversas resoluções.

Distribuiu-se mais quatro questões e, mais uma vez não foi feita qualquer interferência por parte da professora em formação. Após, foi percebido que não haveria tempo suficiente para responder todas as questões. Por isso, foram antecipados os comentários a respeito das respostas até então resolvidas e, não foram distribuídas as duas questões retiradas do livro do professor Sérgio Lorenzato.

O trabalho da professora em formação foi de pouca participação, pois a discussão das questões não aconteceu efetivamente. Além disso, não surgiram dúvidas, uma vez que os alunos responderam as questões de maneira satisfatória, apesar do tempo insuficiente.

No decorrer da aula, alunos e professores orientadores propuseram algumas modificações na dinâmica do trabalho. Tais alterações se constituíram em dividir a aplicação em dois momentos de duas horas-aula cada, sendo um para a resolução de todas as questões e o outro para a discussão das respostas.

Outra sugestão foi em relação à atuação da professora em formação, que deveria ser mais participativa. Também foi proposto que deveria haver um tempo entre o primeiro e o segundo momento para que as respostas fossem analisadas e a dinâmica da segunda aula pudesse ser programada tendo como base as soluções apresentadas pelos alunos.

Foi sugerido ainda, que durante a aula na turma regular, a professora em formação desse oportunidade para que os alunos fizessem a exposição das suas resoluções, uma vez que a fala deles seria de grande relevância para se alcançar os objetivos do trabalho.

2.3. Aplicação da Atividade na turma regular

A Atividade foi aplicada em duas escolas da rede pública no município de Campos dos Goytacazes, uma com entrada por processo seletivo (Escola B), outra não (Escola A).

2.3.1. Escola A

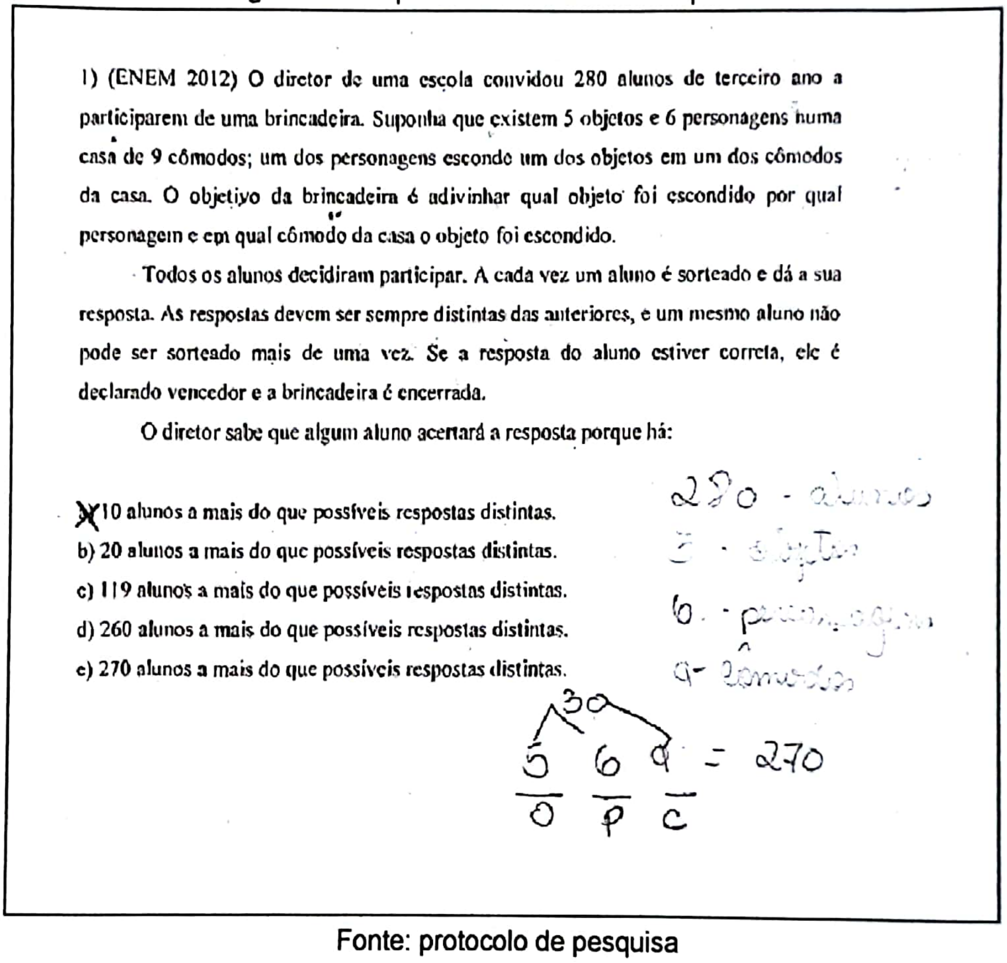
A aplicação foi realizada em dois encontros com duração de duas horas-aula cada e contou com a presença de 16 alunos.

No primeiro encontro, foi apresentada aos alunos a Atividade, seus objetivos e a sua relevância, uma vez que questões como estas estão cada vez mais presentes nas avaliações nacionais. Foi explicada a importância de todas as questões serem respondidas e do registro da resolução estar presente em todas.

No segundo encontro, a professora em formação retorna à escola para esclarecer dúvidas e fazer uma discussão baseada nas resoluções feitas pelos alunos. Ao iniciar este momento, foi perguntado aos alunos o que eles acharam da Atividade; alguns responderam que gostaram, mas a consideraram difícil e outros assumiram que na maioria das questões "chutaram" as respostas. Então, deu-se início a análise das questões.

A primeira questão da Atividade foi compreendida pela maioria dos alunos (Figura 1).

Figura 1: Resposta de um aluno na questão 1



1) (ENEM 2012) O diretor de uma escola convidou 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existem 5 objetos e 6 personagens numa casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido.

Todos os alunos decidiram participar. A cada vez um aluno é sorteado e dá a sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada.

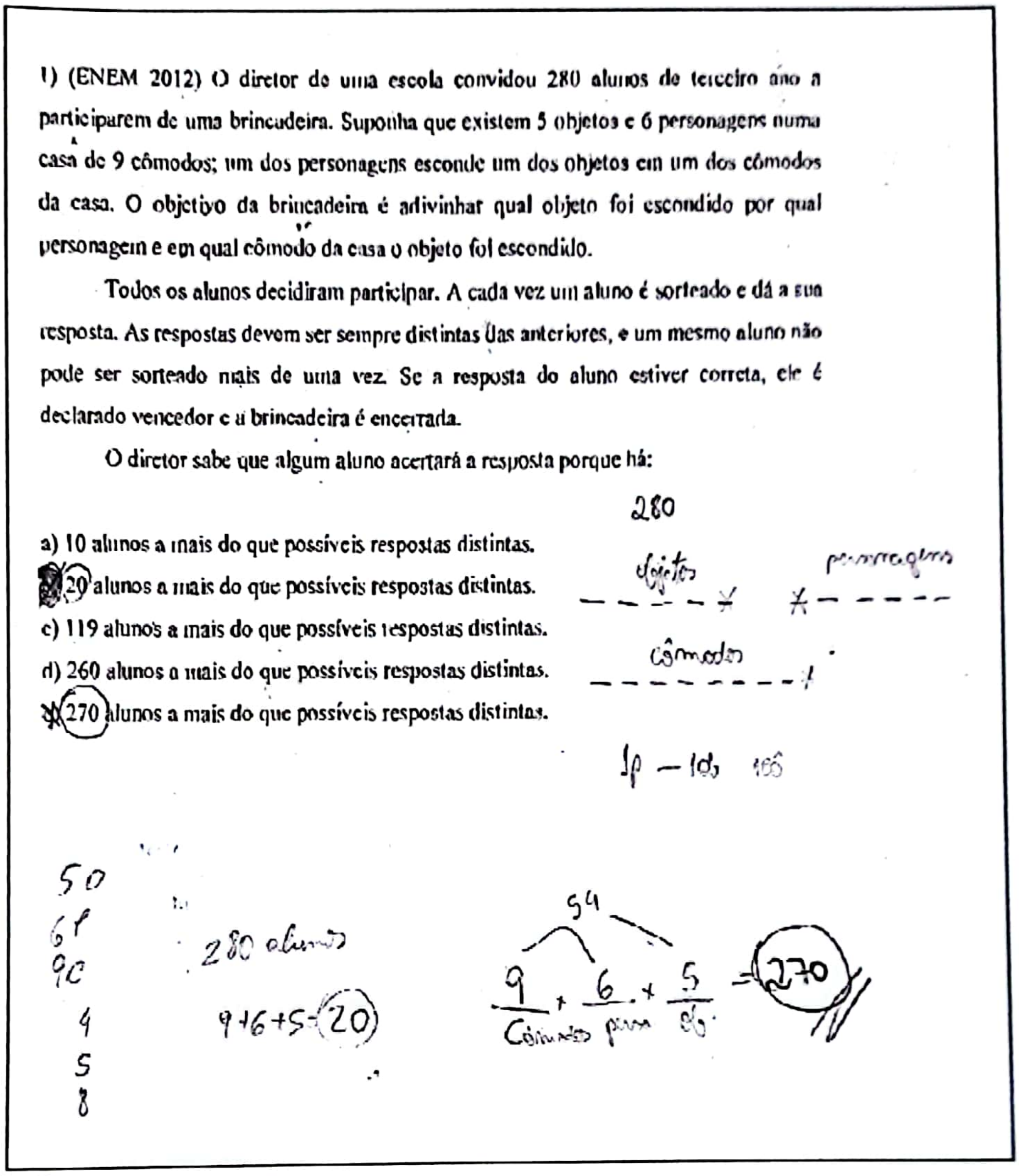
O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há:

a) 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
b) 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
c) 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
d) 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
e) 270 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

Fonte: protocolo de pesquisa

Houve, porém, por parte de alguns, uma falha de interpretação, o que acarretou o erro na resposta (Figura 2). Neste caso, o aluno encontrou em seus cálculos uma das opções e não prestou atenção ao que estava sendo pedido.

Figura 2: Resposta um aluno na questão 1



1) (ENEM 2012) O diretor de uma escola convidou 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existem 5 objetos e 6 personagens numa casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido.

Todos os alunos decidiram participar. A cada vez um aluno é sorteado e dá a sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada.

O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há:

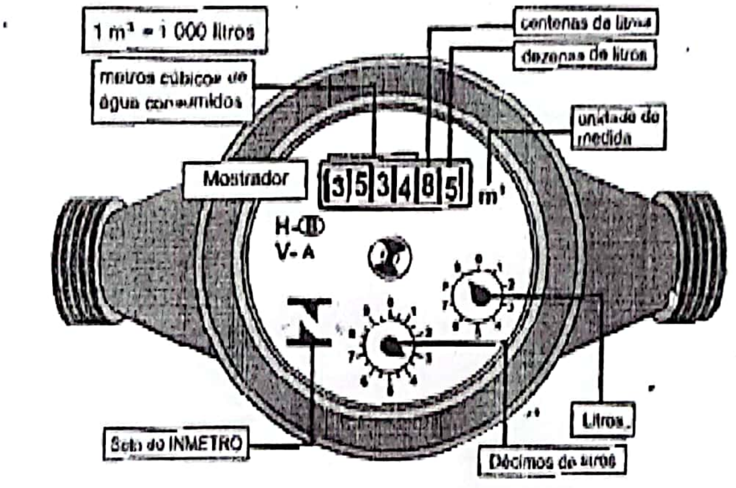
a) 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
b) 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
c) 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
d) 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
e) 270 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

Fonte: protocolo de pesquisa

Na segunda questão, foi constatado o acerto de apenas um aluno (Figura 3). Pela análise realizada neste exercício percebeu-se que os alunos apresentaram dúvidas em relação ao conceito de ordem e classes de um número (Figura 4). Ignoraram também a presença dos dois relógios de ponteiro, o que mostra que ocorreu uma falha na interpretação do enunciado.

Figura 3: Resposta de um aluno na questão 2

2) (ENEM 2012) Os hidrômetros são marcadores de consumo de água em residências e estabelecimentos comerciais. Existem vários modelos de mostradores de hidrômetros, sendo que alguns deles possuem uma combinação de um mostrador e dois relógios de ponteiro. O número formado pelos quatro primeiros algarismos do mostrador fornece o consumo em m^3, e os dois últimos algarismos representam, respectivamente, as centenas e dezenas de litros de água consumidos. Um dos relógios de ponteiros indica a quantidade em litros, e o outro em décimos de litros, conforme ilustrados na figura a seguir:



Disponível em: www.aguasdearacoiaba.com.br (adaptado).

Considerando as informações indicadas na figura. O consumo total de água registrado nesse hidrômetro, em litros, é igual a:

a) 3 534, 85
b) 3 544, 20
c) 3 534 850, 00
d) 3 534 859, 35
e) 3 534 850, 39

3534
x 1000

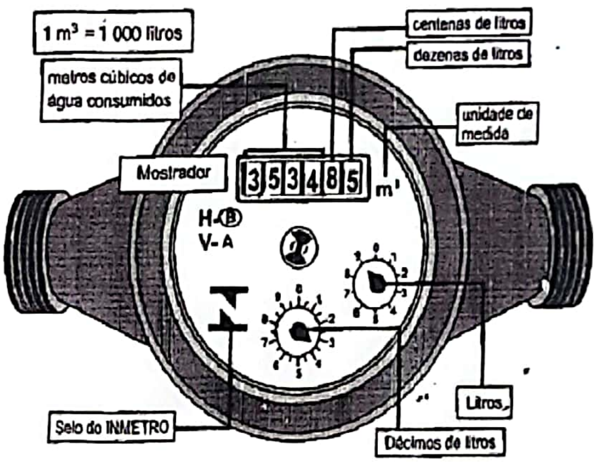
3534
3534850
+ 9
3534859
+ 0,35
3534859,35

Fonte: protocolo de pesquisa

A seguir é apresentada uma resolução feita por outro aluno com a intenção de evidenciar a dificuldade encontrada em relação à interpretação do enunciado.

Figura 4: Resposta de um aluno na questão 2

2) (ENEM 2012) Os hidrômetros são marcadores de consumo de água em residências e estabelecimentos comerciais. Existem vários modelos de mostradores de hidrômetros, sendo que alguns deles possuem uma combinação de um mostrador e dois relógios de ponteiro. O número formado pelos quatro primeiros algarismos do mostrador fornece o consumo em m^3, e os dois últimos algarismos representam, respectivamente, as centenas e dezenas de litros de água consumidos. Um dos relógios de ponteiros indica a quantidade em litros, e o outro em décimos de litros, conforme ilustrados na figura a seguir:



Disponível em: www.aguasdearacoiaba.com.br (adaptado).

Considerando as informações indicadas na figura,. O consumo total de água registrado nesse hidrômetro, em litros, é igual a:

a) 3 534, 85
b) 3 544, 20
c) 3 534 850, 00
d) 3 534 859, 35
e) 3 534 850, 39

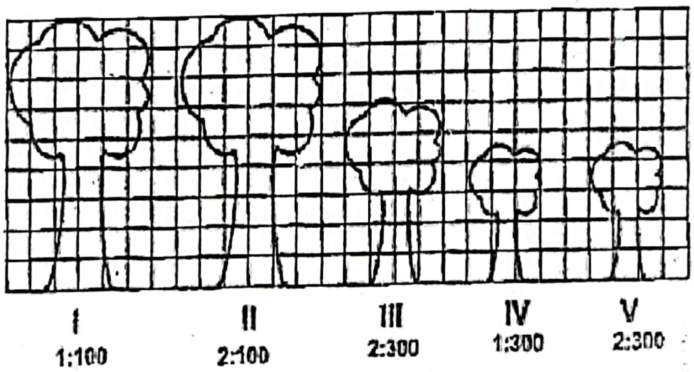
marquei o A, porque foi de acordo de como contamos o dinheiro.

Fonte: protocolo de pesquisa

Na terceira questão (Figura 5), foi detectado o acerto de apenas um aluno. Ao analisar o exercício percebeu-se que a maioria desconhecia o significado de escala e, aqueles que sabiam através de algum curso, se lembravam deste conceito de maneira muito vaga. No momento em que foram apresentadas as formas pelas quais a questão poderia ter sido resolvida, os alunos se mostraram bastantes surpresos com a simplicidade da resolução.

Figura 5: Resposta de um aluno na questão 3

3) (ENEM 2012) Um biólogo mediu a altura de cinco árvores distintas e representou-as em uma mesma malha quadriculada, utilizando escalas diferentes, conforme indicações na figura a seguir:



Lo foi reduzido 300x do seu tamanho real

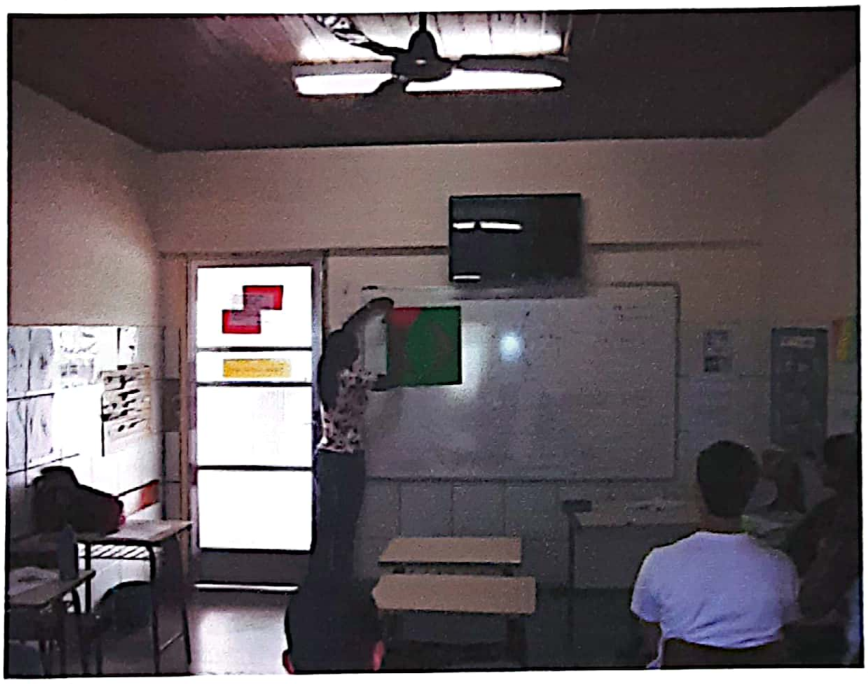
Qual é a árvore que apresenta a maior altura real?

a) I
b) II
c) III
~~d)~~ IV
e) V

Fonte: protocolo de pesquisa

Na quarta questão, não houve nenhuma resposta certa. No momento da discussão deste exercício, os alunos mostraram certo desconforto em relação à mesma e perguntavam se alguém teria conseguido resolver. Para apresentar uma forma de resolução mais atraente, a professora em formação confeccionou a figura dada na questão em cartolina colorida, de modo que suas partes pudessem ser desmontadas e remontadas de acordo com as necessidades. Ao juntar as partes de mesma cor da figura, eles perceberam que seriam construídos três quadrados de mesma área na cor escura e as partes restantes formariam um quadrado na cor clara com a mesma área dos quadrados escuros. Após este momento, os alunos constataram que para resolver a questão poderiam utilizar o conceito de área do triângulo e de fração. Notou-se, então, que a dificuldade apresentada pelos alunos no exercício foi a falta de visualização geométrica.

Figura 6: A professora em formação explicando a questão 4

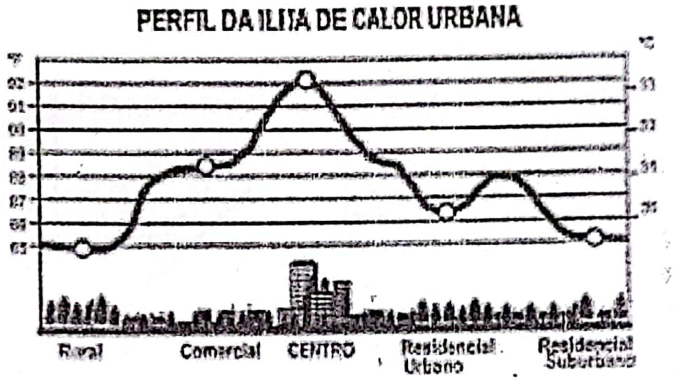


Fonte: protocolo de pesquisa

Na quinta questão (Figura 7) não houve dificuldade quanto à resolução, contudo, alguns alunos se confundiram quando não levaram em consideração que não poderiam utilizar a opção da região Centro.

Figura 7: Resposta de um aluno na questão 5

5) (ENEM 2011) Rafael mora no centro de uma cidade e decidiu se mudar, por recomendações médicas, para uma das regiões: Rural, Comercial, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano. A principal recomendação médica foi com as temperaturas das "ilhas de calor" da região, que deveriam ser inferiores a 31 °C. Tais temperaturas são apresentadas no gráfico:



Fonte: EPA

Escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões para morar, a probabilidade de ele escolher uma região que seja adequada às recomendações médicas é:

$\cancel{P = \frac{1}{3}}$

$P = \frac{3}{4}$ — Nº evento
— espaço amostral.

a) $\frac{1}{5}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{2}{5}$

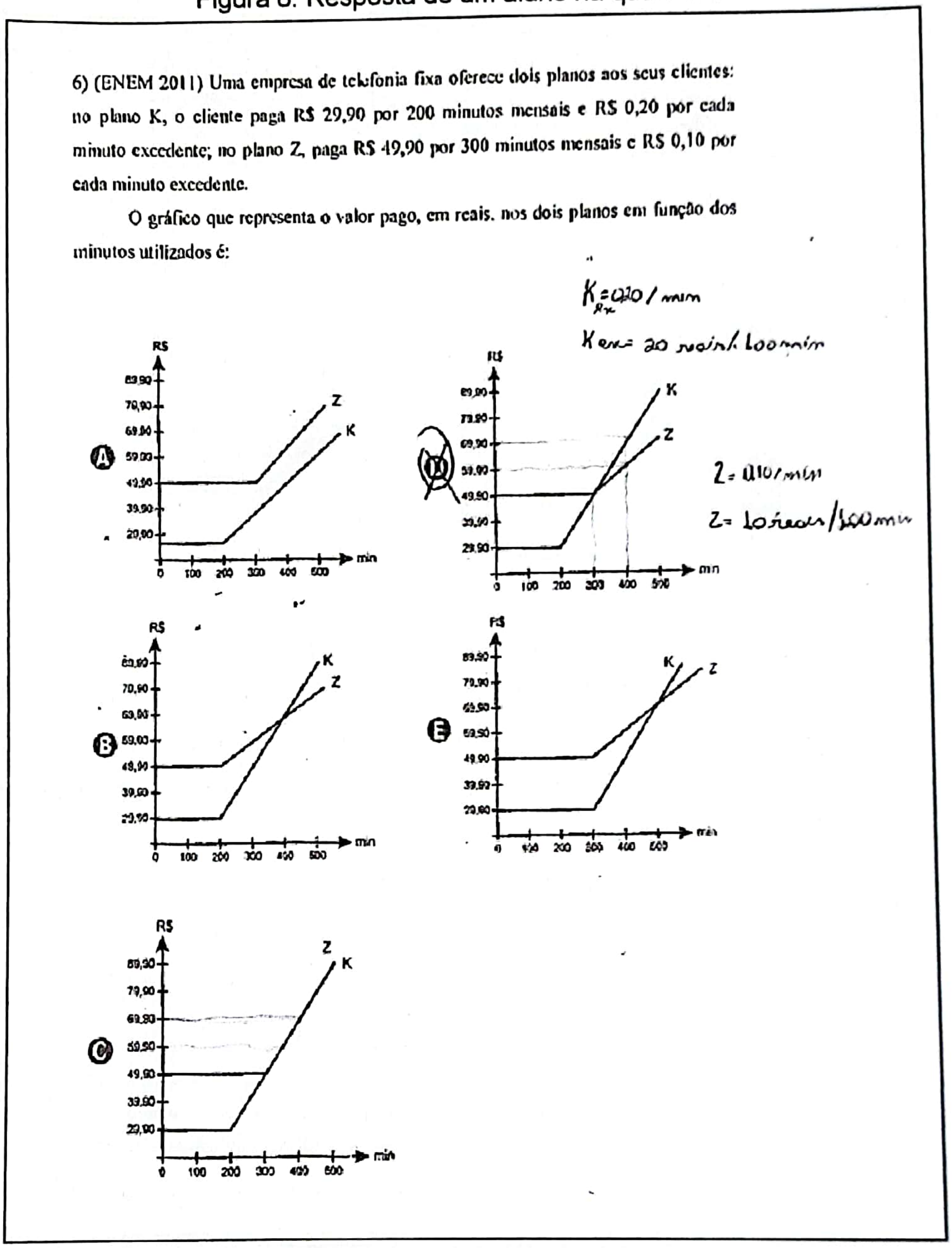
d) $\frac{3}{5}$

X e) $\frac{3}{4}$

Fonte: protocolo de pesquisa

Para resolver a sexta questão a maioria dos alunos adotou como critério a eliminação dos itens que não atendiam ao enunciado (Figura 8).

Figura 8: Resposta de um aluno na questão 6

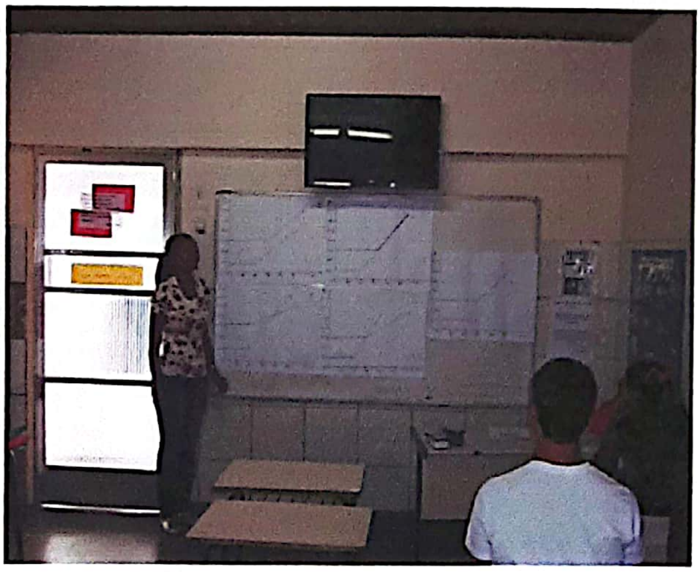

6) (ENEM 2011) Uma empresa de telefonia fixa oferece dois planos aos seus clientes: no plano K, o cliente paga R$ 29,90 por 200 minutos mensais e R$ 0,20 por cada minuto excedente; no plano Z, paga R$ 49,90 por 300 minutos mensais e R$ 0,10 por cada minuto excedente.

O gráfico que representa o valor pago, em reais, nos dois planos em função dos minutos utilizados é:

Fonte: protocolo de pesquisa

Alguns ficaram em dúvida entre as opções C e D, porque não observaram que a inclinação das retas era o fator determinante para chegar à resposta correta. A professora em formação chamou atenção para esse fato (Figura 9).

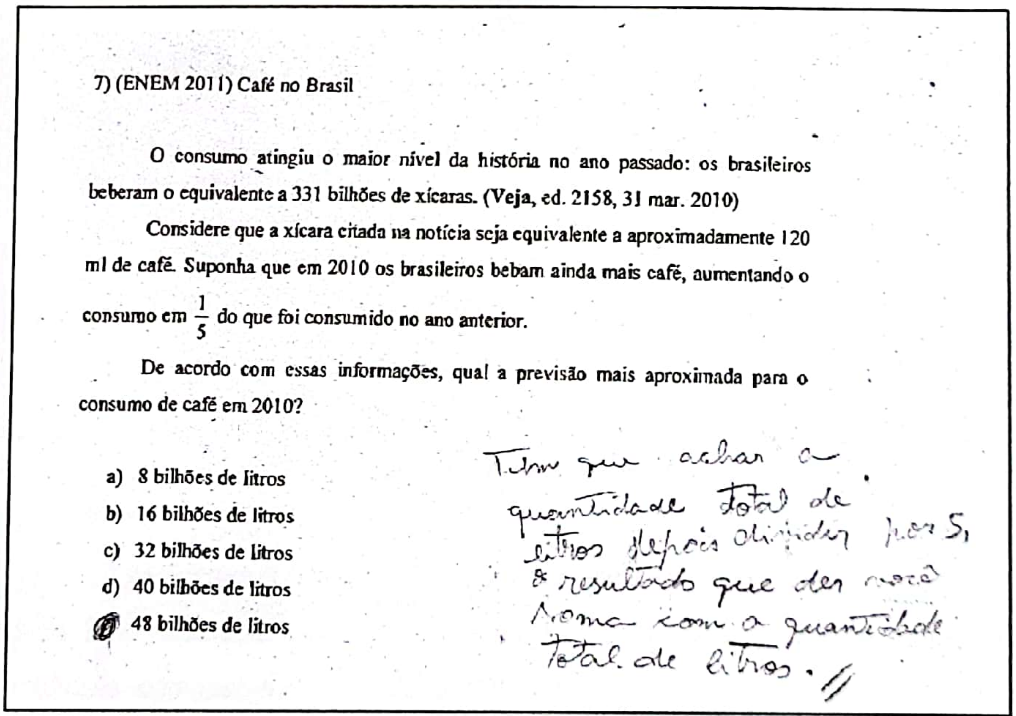
Figura 9: A professora em formação explicando a questão 6



Fonte: protocolo de pesquisa

Na sétima questão, os alunos compreenderam que para a resolução seria necessário interpretação e operações bem simples. Muitos deles conseguiram resolver o exercício, contudo, alguns se confundiram com as unidades de medidas, que deveriam ser as mesmas (Figura 10).

Figura10: Resposta de um aluno na questão 7



7) (ENEM 2011) Café no Brasil

O consumo atingiu o maior nível da história no ano passado: os brasileiros beberam o equivalente a 331 bilhões de xícaras. (Veja, ed. 2158, 31 mar. 2010)

Considere que a xícara citada na notícia seja equivalente a aproximadamente 120 ml de café. Suponha que em 2010 os brasileiros bebam ainda mais café, aumentando o consumo em $\frac{1}{5}$ do que foi consumido no ano anterior.

De acordo com essas informações, qual a previsão mais aproximada para o consumo de café em 2010?

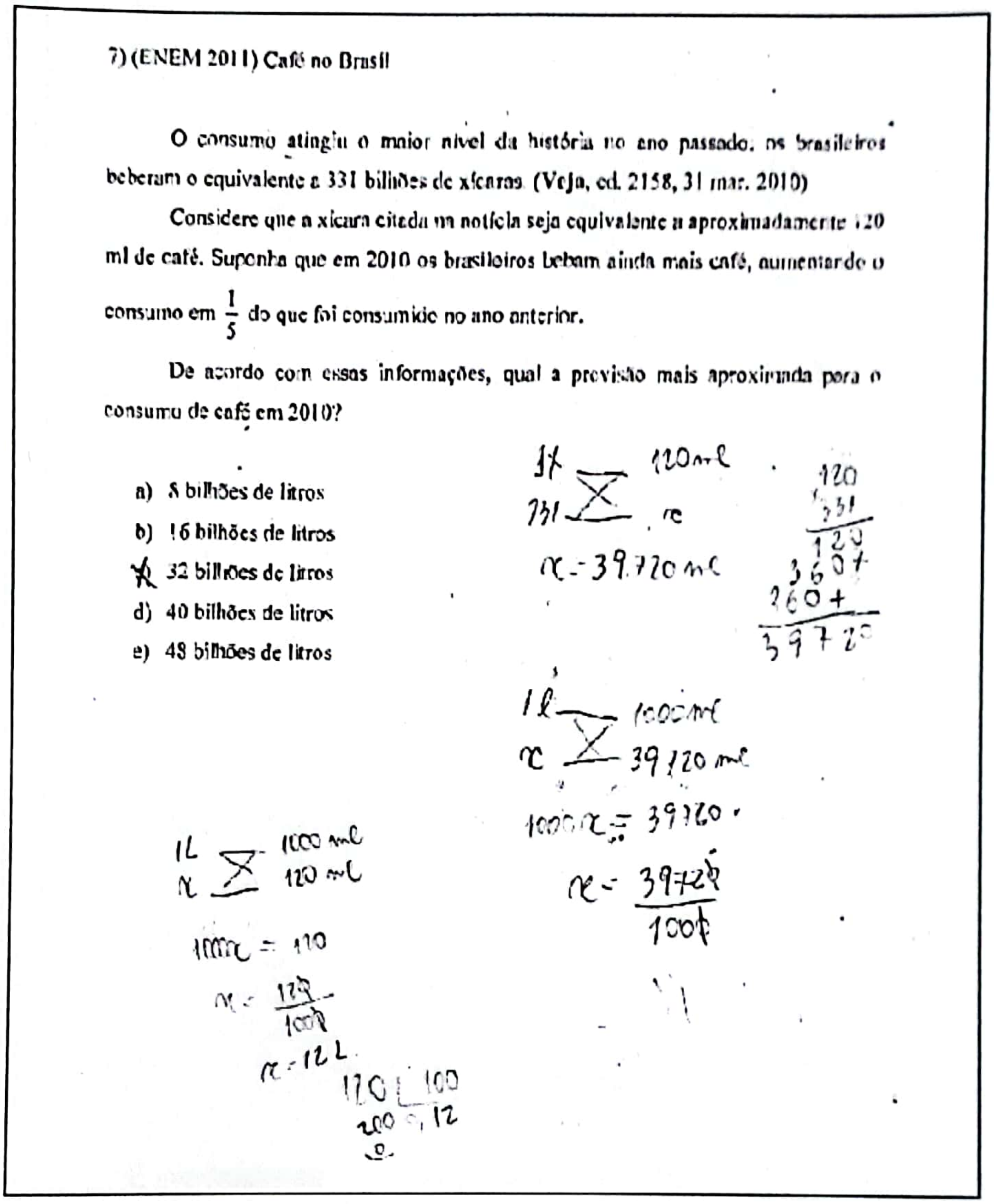
a) 8 bilhões de litros
b) 16 bilhões de litros
c) 32 bilhões de litros
d) 40 bilhões de litros
e) 48 bilhões de litros

Tem que achar a quantidade total de litros depois dividir por 5, o resultado que der você soma com a quantidade total de litros. //

Fonte: protocolo de pesquisa

Outro fator relevante é o fato de alguns alunos utilizarem a regra de três mesmo onde esta não se faz necessária (Figura 11).

Figura 11: Resposta de um aluno na questão 7


7) (ENEM 2011) Café no Brasil

O consumo atingiu o maior nível da história no ano passado, os brasileiros beberam o equivalente a 331 bilhões de xícaras. (Veja, ed. 2158, 31 mar. 2010)

Considere que a xícara citada na notícia seja equivalente a aproximadamente 120 ml de café. Suponha que em 2010 os brasileiros bebam ainda mais café, aumentando o consumo em $\frac{1}{5}$ do que foi consumido no ano anterior.

De acordo com essas informações, qual a previsão mais aproximada para o consumo de café em 2010?

a) 8 bilhões de litros
b) 16 bilhões de litros
c) 32 bilhões de litros
d) 40 bilhões de litros
e) 48 bilhões de litros

Fonte: protocolo de pesquisa

Na oitava questão não houve nenhuma dificuldade por parte dos alunos. Eles rapidamente perceberam que se tratava de um exercício de notação científica e, com isso a maioria deles respondeu corretamente (Figura 12).

Figura 12: Resposta de um aluno na questão 8

8) (ENEM 2012) A Agência Espacial Norte Americana (NASA) informou que o asteroide YU 55 cruzou o espaço entre a Terra e a Lua no mês de novembro de 2011. A ilustração a seguir sugere que o asteroide percorreu sua trajetória no mesmo plano que contém a órbita descrita pela Lua em torno da Terra. Na figura, está indicada a proximidade do asteroide em relação à Terra, ou seja, a menor distância que ele passou da superfície terrestre.

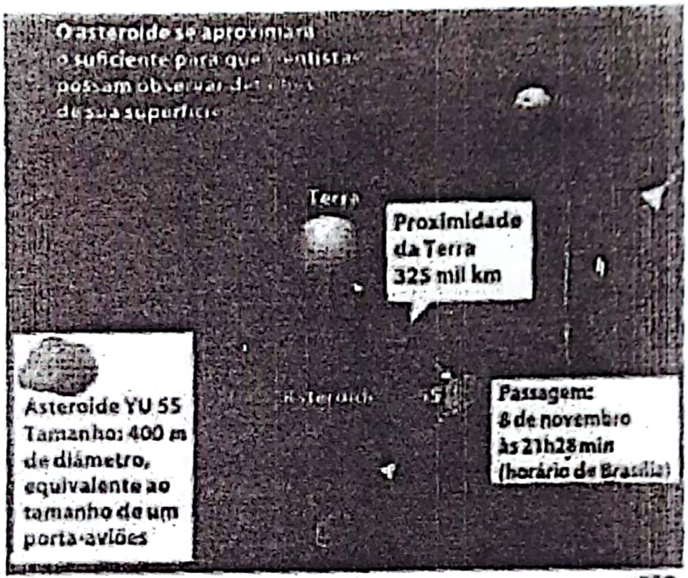


Foto: NASA

AFP

Disponível em: http://noticias.terra.com.br (adaptado).

Com base nessas informações, a menor distância que o asteroide YU 55 passou da superfície Terra é igual a:

a) $3{,}25 \times 10^2$ km

b) $3{,}25 \times 10^3$ km

c) $3{,}25 \times 10^4$ km

d) $3{,}25 \times 10^5$ km

e) $3{,}25 \times 10^6$ km

$325.000 = 3{,}25 \times 10^5$ Km

Fonte: Protocolo de pesquisa

É importante citar que as aulas de Matemática nesta turma acontecem nos dois últimos horários, que os alunos chegam à sala depois do horário por conta da hora do almoço e, alguns deles saem mais cedo porque fazem curso ou moram em lugares de difícil acesso, dependendo do ônibus para se deslocarem. Sendo assim, não foi possível a resolução das duas questões do livro do professor Sérgio Lorenzato pelos alunos.

2.3.2. Escola B

A aplicação foi realizada em dois encontros com duração de duas horas-aula cada e contou com a presença de 11 alunos.

No primeiro encontro, assim como na Escola A, foi apresentada a Atividade, seus objetivos e a sua relevância bem como foi explicada a importância de todas as questões serem respondidas com a indicação da resolução.

É importante citar que as aulas de Matemática nesta turma acontecem nos três primeiros horários e por isso alguns alunos chegaram atrasados por conta do transporte. Outro grupo teria uma prova a realizar e, portanto, só contaram com aproximadamente um horário e meio de aula para a resolução das questões que compõem a Atividade.

No segundo encontro, que ocorreu em dois horários, houve a participação de 5 alunos que não estavam presentes no dia da aplicação da Atividade, mas como ficaram interessados pela proposta do trabalho resolveram participar, totalizando 16 alunos neste segundo momento.

Ao iniciar este momento, foi perguntado aos alunos o que eles acharam da Atividade. Eles responderam que gostaram e que estavam curiosos para comparar as respostas como também verificar os acertos.

Na primeira questão, todos os alunos responderam corretamente e não apresentaram quaisquer dúvidas a respeito da mesma.

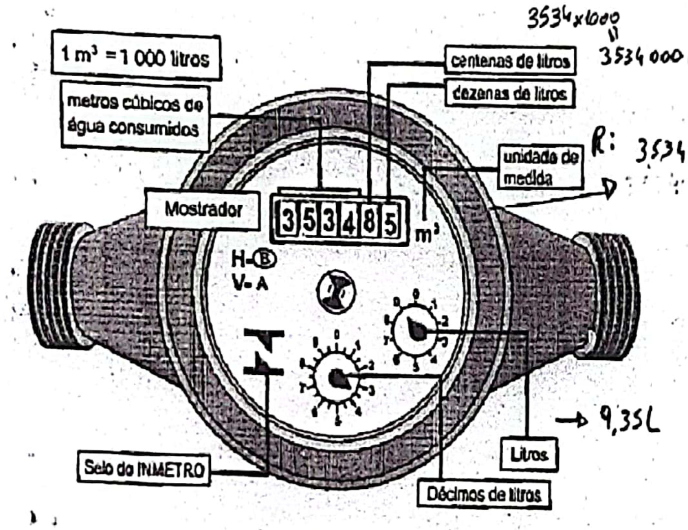
Na segunda questão, alguns alunos acertaram, mas foi possível identificar o uso desnecessário da regra de três em várias resoluções. Dentre as respostas corretas, uma maneira de resolver merece destaque por conta da rapidez na qual foi realizada (Figura 13). Neste caso, dois alunos resolveram a questão analisando apenas os relógios de ponteiros e perceberam que somente uma das opções apresentava a terminação de números encontrada por eles.

Figura 13: Resposta de um aluno na questão 2

2) (ENEM 2012) Os hidrômetros são marcadores de consumo de água em residências e estabelecimentos comerciais. Existem vários modelos de mostradores de hidrômetros, sendo que alguns deles possuem uma combinação de um mostrador e dois relógios de ponteiro. O número formado pelos quatro primeiros algarismos do mostrador fornece o consumo em m^3, e os dois últimos algarismos representam, respectivamente, as centenas e dezenas de litros de água consumidos. Um dos relógios de ponteiros indica a quantidade em litros, e o outro em décimos de litros, conforme ilustrados na figura a seguir:

3534x1000

3534000L + 850L = 3534850L



R: 3534859,35L

→ 9,35L

Disponível em: www.aguasdearacoiaba.com.br (adaptado).

Considerando as informações indicadas na figura. O consumo total de água registrado nesse hidrômetro, em litros, é igual a:

a) 3 534, 85

b) 3 544, 20

c) 3 534 850, 00

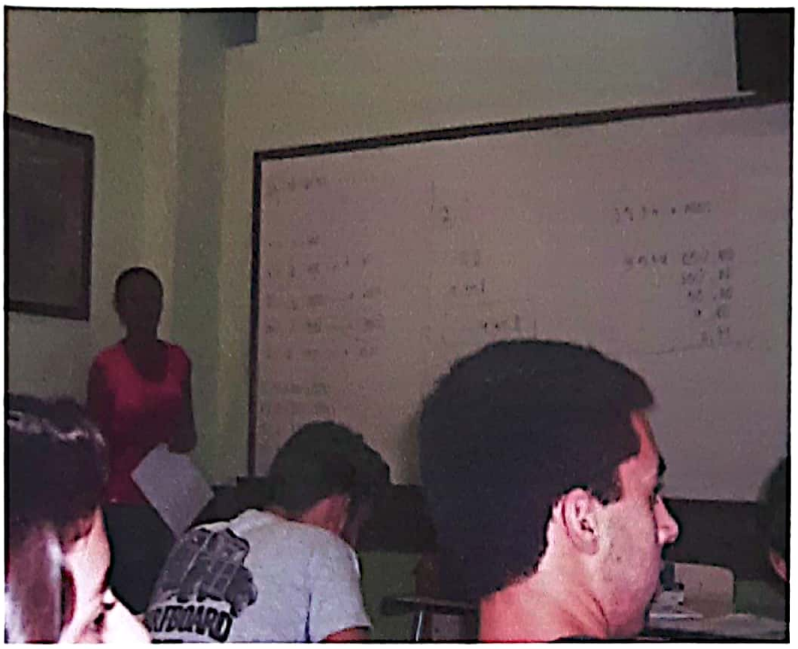
~~d)~~ 3 534 859, 35

e) 3 534 850, 39

Fonte: Protocolo de pesquisa

O momento da discussão das resoluções representou uma valiosa oportunidade de troca de informações pelos alunos (Figura 14).

Figura 14: A professora em formação explicando a questão 2

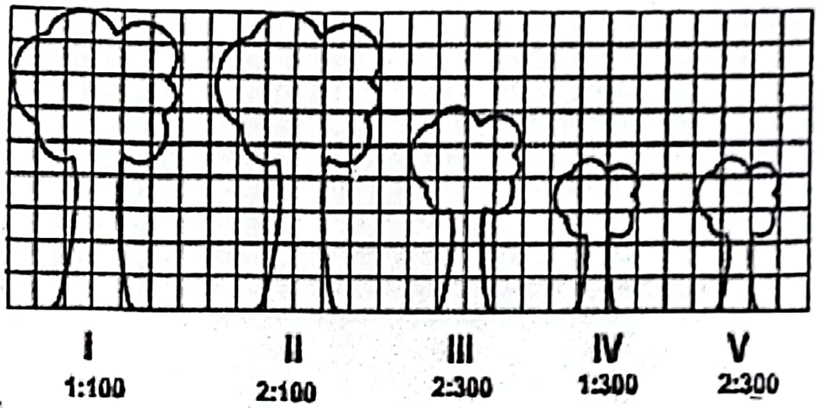


Fonte: Protocolo de pesquisa

Na terceira questão, foi possível perceber que alguns alunos se confundiram e tentaram montar uma razão com as escalas apresentadas. Outros conseguiram responder reduzindo o valor da escala a uma unidade, ou seja, encontrando os valores de cada um dos quadradinhos. Assim, eles perceberam que, neste caso, a escala não representa o tamanho real de um determinado objeto, mas a redução de *x* vezes do seu tamanho real (Figura 15).

Figura 15: Resposta de um aluno na questão 3

3) (ENEM 2012) Um biólogo mediu a altura de cinco árvores distintas e representou-as em uma mesma malha quadriculada, utilizando escalas diferentes, conforme indicações na figura a seguir:



Qual é a árvore que apresenta a maior altura real?

a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V

I = 100
II = 50
III = 150
IV = 300
V = 150

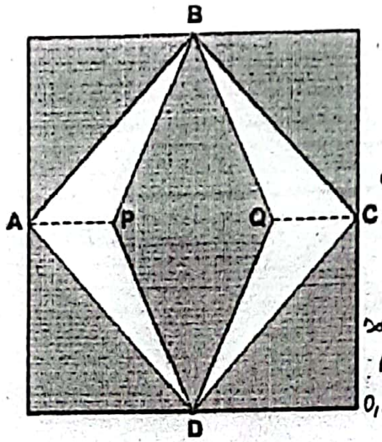
Fonte: Protocolo de pesquisa

Na quarta questão, metade dos alunos que participaram da Atividade conseguiu encontrar a resposta correta. Contudo, é importante frisar que alguns deles, embora, tenham respondido corretamente, fizeram indicações na resolução que não deixam claro como chegaram à resposta (Figura 16).

Figura 16: Resposta de um aluno na questão 4

4) (ENEM 2012) Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura a seguir:

$\frac{0,5 \cdot 0,5}{2} = \frac{0,25}{2} = 0,125$



$A_1 = 1 m^2$

$A_T = \frac{B \cdot h}{2} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{8}}{2}$

$= \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0,25 m^2$

$0,125 \times 6 = 0,750 m^2$ parte escura

$1 m^2$ —— $30,00$

$0,750 m^2$ —— x

$x = 30 \times 0,750 = 22,50$ reais

sobrou: 0,250 de parte branca

$1 m^2$ —— $50,00$

$0,250 m^2$ —— x

$x = 50 \times 0,250 = 12,50$ reais

Nesta figura, os pontos A, B, C e D são pontos médios dos lados do quadrado e os segmentos AP e QC medem $\frac{1}{4}$ ($= 0,25 m$) da medida do lado do quadrado. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R$ 30,00 o m^2 e outro para a parte mais clara (regiões ABPDA e BCDQB), que custa R$ 50,00 o m^2.

De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral?

$22,50 + 12,50 = R\$ 35,00$

a) R$ 22,50
~~b)~~ R$ 35,00
c) R$ 40,00
d) R$ 42,50
e) R$ 45,00

$0,25 \div 2 = 0,125$

$0,125 \times 6 = 0,750$

$0,750 \times 30 = 22,500$

$0,250 \times 50 = 12,500$

Fonte: Protocolo de pesquisa

Por conta disso, a professora em formação, durante a discussão desta questão, chamou a atenção para o fato da organização das respostas ser importante em uma avaliação discursiva (Figura 17).

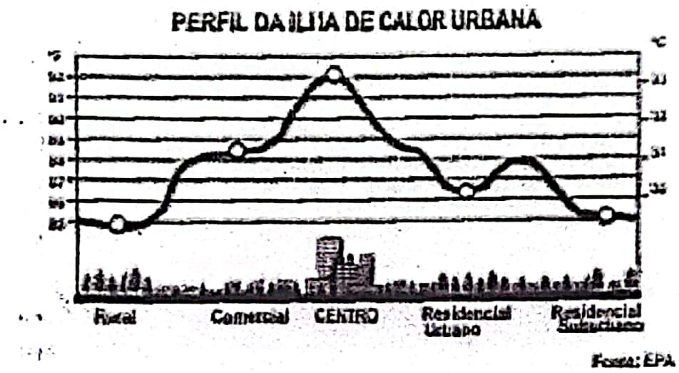
Figura 17: A professora em formação explicando a questão 4

Fonte: Protocolo de pesquisa

A quinta questão foi resolvida sem dificuldade. Alguns alunos se confundiram em relação à quantidade de regiões que atenderiam ao que foi proposto no enunciado, não levando em consideração que a mudança de região implicaria em não utilizar a região Centro (Figura 18).

Figura 18: Resposta de um aluno na questão 5

5) (ENEM 2011) Rafael mora no centro de uma cidade e decidiu se mudar, por recomendações médicas, para uma das regiões: Rural, Comercial, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano. A principal recomendação médica foi com as temperaturas das "ilhas de calor" da região, que deveriam ser inferiores a 31°C. Tais temperaturas são apresentadas no gráfico:



Escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões para morar, a probabilidade de ele escolher uma região que seja adequada às recomendações médicas é:

a) $\frac{1}{5}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{2}{5}$

d) $\frac{3}{5}$

e) $\frac{3}{4}$

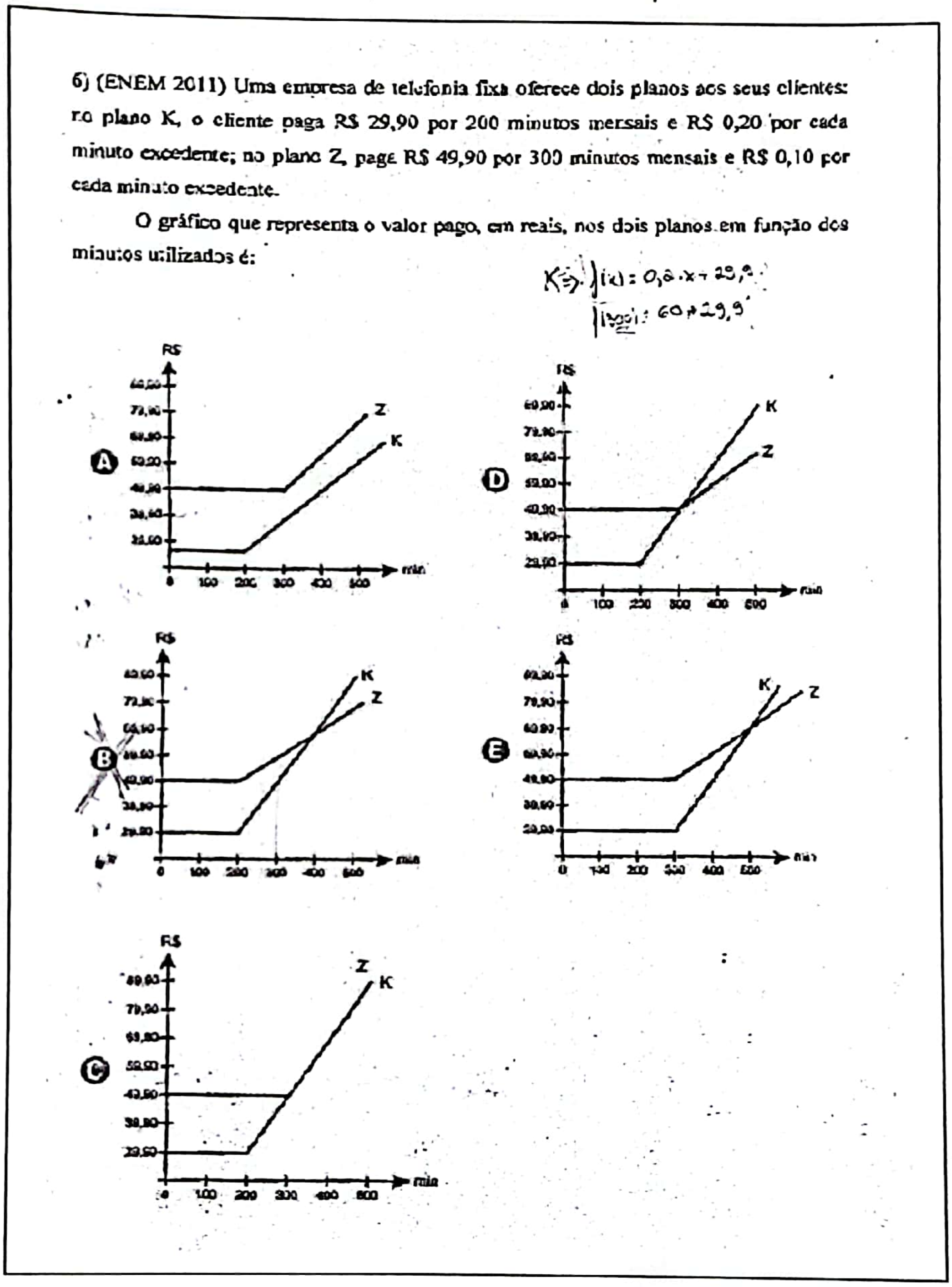
há 3 regiões com temperaturas abaixo de 31°C.
há 5 regiões que ele pode escolher

$P = \frac{3}{5}$

Fonte: Protocolo de pesquisa

Na sexta questão, a professora em formação perguntou aos alunos qual o método utilizado para chegar ao resultado, uma vez que não deixaram registrado o raciocínio utilizado na questão. Após a explicação, não foi detectado dificuldades por parte dos alunos. Para resolver os exercícios, eles adotaram como critério a eliminação dos itens que não atendiam ao enunciado. Alguns ficaram em dúvida entre as opções C e D, porque não observaram que a inclinação das retas era o fator determinante para chegar à resposta correta. Apenas um aluno tentou achar a lei da função (Figura 19).

Figura 19: Resposta de um aluno na questão 6


6) (ENEM 2011) Uma empresa de telefonia fixa oferece dois planos aos seus clientes: no plano K, o cliente paga R$ 29,90 por 200 minutos mensais e R$ 0,20 por cada minuto excedente; no plano Z, paga R$ 49,90 por 300 minutos mensais e R$ 0,10 por cada minuto excedente.

O gráfico que representa o valor pago, em reais, nos dois planos em função dos minutos utilizados é:

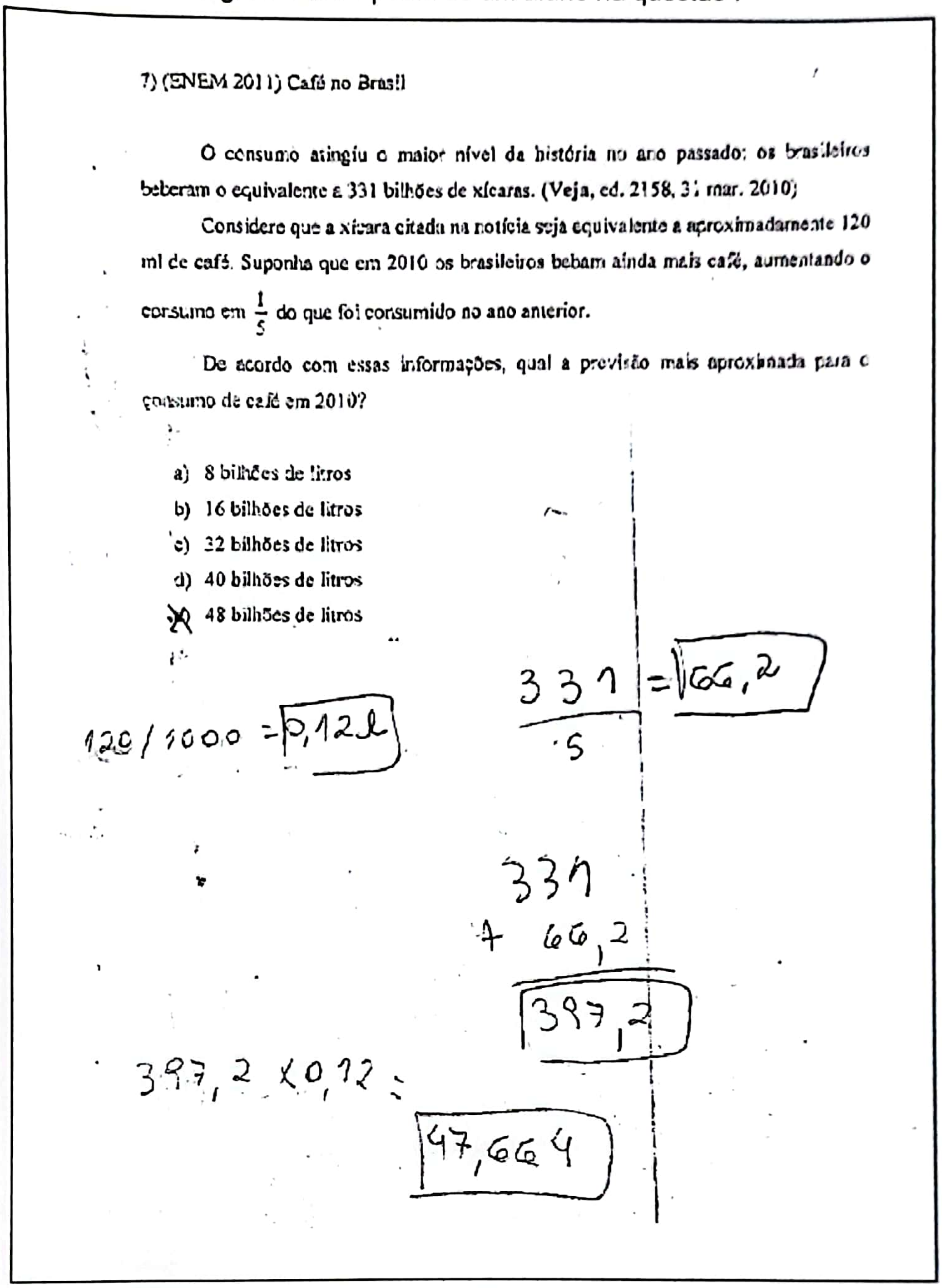
$K \Rightarrow f(x) = 0,2 \cdot x + 29,9$

$f(300) = 60 + 29,9$

Fonte: Protocolo de pesquisa

Na sétima questão, os alunos compreenderam que para a resolução seria necessário operações bem simples. Muitos deles conseguiram resolver o exercício sem dificuldade, contudo, alguns se confundiram com as unidades de medida, que deveriam ser as mesmas (Figura 20).

Figura 20: Resposta de um aluno na questão 7



7) (ENEM 2011) Café no Brasil

O consumo atingiu o maior nível da história no ano passado: os brasileiros beberam o equivalente a 331 bilhões de xícaras. (Veja, ed. 2158, 31 mar. 2010)

Considere que a xícara citada na notícia seja equivalente a aproximadamente 120 ml de café. Suponha que em 2010 os brasileiros bebam ainda mais café, aumentando o consumo em $\frac{1}{5}$ do que foi consumido no ano anterior.

De acordo com essas informações, qual a previsão mais aproximada para o consumo de café em 2010?

a) 8 bilhões de litros
b) 16 bilhões de litros
c) 32 bilhões de litros
d) 40 bilhões de litros
e) 48 bilhões de litros

$120/1000 = \boxed{0{,}12\ell}$

$\frac{331}{5} = \boxed{66{,}2}$

$331 + 66{,}2 = \boxed{397{,}2}$

$397{,}2 \times 0{,}12 = \boxed{47{,}664}$

Fonte: Protocolo de pesquisa

Outro fator relevante é o fato de alguns alunos utilizarem a regra de três mesmo onde esta não se faz necessário (Figura 21).

Figura 21: Resposta de um aluno na questão 7

7) (ENEM 2011) Café no Brasil

O consumo atingiu o maior nível da história no ano passado: os brasileiros beberam o equivalente a 331 bilhões de xícaras. (Veja, ed. 2158, 31 mar. 2010)

Considere que a xícara citada na notícia seja equivalente a aproximadamente 120 ml de café. Suponha que em 2010 os brasileiros bebam ainda mais café, aumentando o consumo em $\frac{1}{5}$ do que foi consumido no ano anterior.

De acordo com essas informações, qual a previsão mais aproximada para o consumo de café em 2010?

a) 8 bilhões de litros

b) 16 bilhões de litros

c) 32 bilhões de litros

d) 40 bilhões de litros

e) 48 bilhões de litros

$\frac{1}{5}$ de 331 bi

66,2 bi

$331 \text{ --- } \frac{5}{5}$

$x \text{ --- } \frac{1}{5}$

$\frac{331}{5} = \frac{5}{5}x$

$x = \frac{331}{5} \cdot \frac{5}{5}$

66,2

397,2 bi

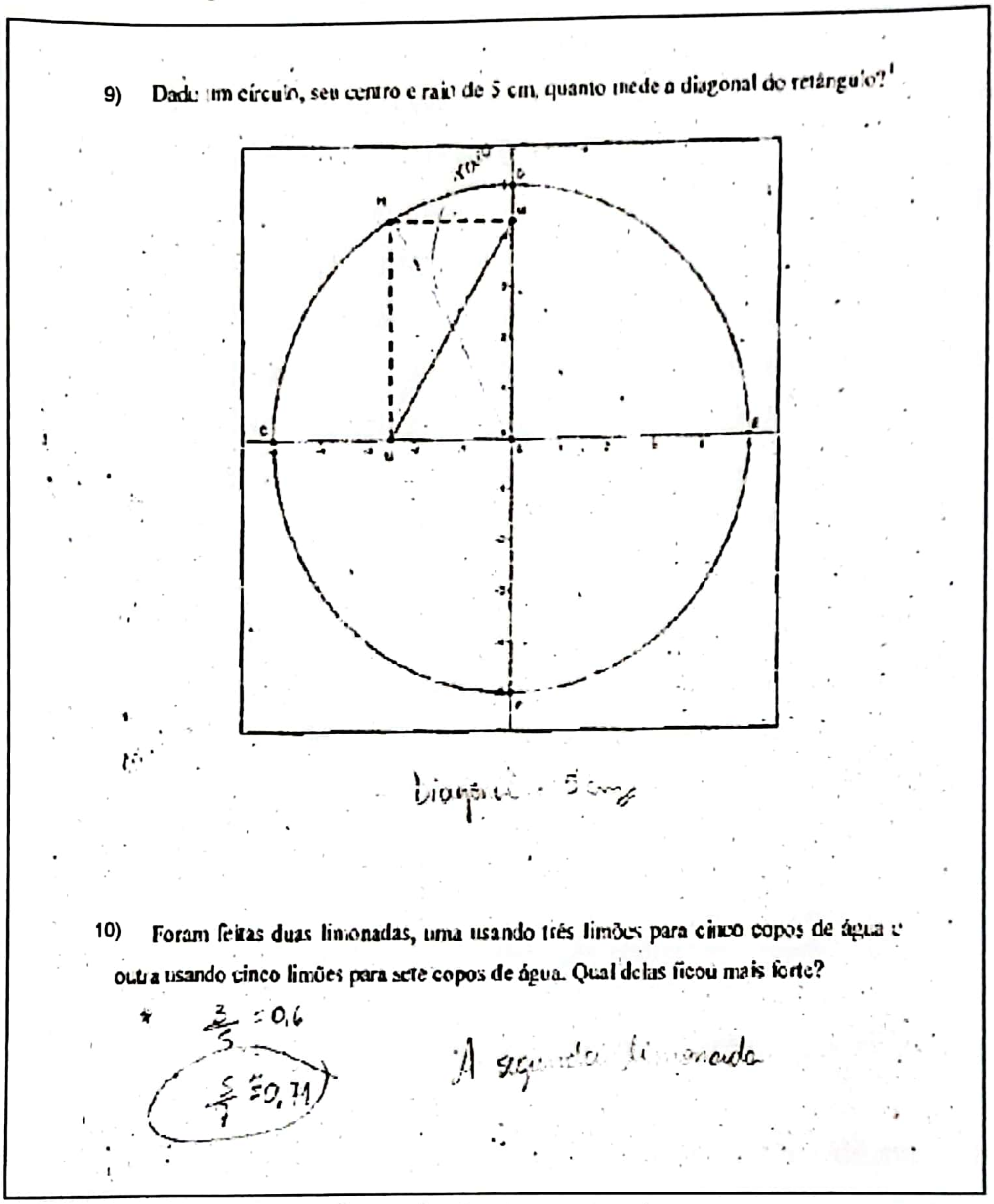
$\div$ 120

Fonte: Protocolo de pesquisa

Na oitava questão não houve nenhuma dificuldade por parte dos alunos. Eles rapidamente perceberam que se tratava de um exercício de notação científica e, com isso todos responderam corretamente.

Nesta turma houve tempo disponível para a aplicação das duas questões retiradas do livro de autoria do professor Sérgio Lorenzato (Figura 22). De um modo geral, os alunos conseguiram visualizar as respostas e perceberam que não se tratava de questões com resoluções complexas.

Figura 22: Resposta de um aluno nas questões extra



9) Dado um círculo, seu centro e raio de 5 cm, quanto mede a diagonal do retângulo?

Diagonal = 5 cm

10) Foram feitas duas limonadas, uma usando três limões para cinco copos de água e outra usando cinco limões para sete copos de água. Qual delas ficou mais forte?

$\frac{3}{5} = 0,6$

$\frac{5}{7} \cong 0,71$

A segunda limonada

Fonte: Protocolo de pesquisa

3. Conclusão

O trabalho proporcionou a professora em formação uma vivência do cotidiano da sala de aula, por meio da qual foi possível perceber que embora se tenha aplicado a Atividade no mesmo ano de escolaridade, ambas as turmas possuíam características bem distintas.

Na escola A, percebeu-se que os alunos são inseguros em relação ao seu próprio conhecimento e esta insegurança pode estar relacionada à dificuldade que eles apresentam em conteúdos elementares. Mostraram-se ainda, muito passivos diante da discussão das questões, recebendo informações sem muitos questionamentos e, em dados momentos relataram não compreender a importância da Matemática.

Na escola B, os alunos são dinâmicos e se mostraram muito interessados em aprender mais e em como encontrar novos caminhos para a resolução de um mesmo problema. São críticos em relação ao que lhes é transmitido e questionam quando não compreendem alguma explicação. Além disso, possuem uma base mais consistente com relação à Matemática básica.

A aplicação desta sequência didática mostrou realidades muito diferentes entre as escolas A e B, por meio das quais se constatou alunos com perfis diferenciados. O fato da escola B ter como forma de ingresso um processo seletivo mostra que os alunos desta precisam ter conhecimentos mínimos para frequentá-la.

É importante ressaltar que na escola A, o objetivo do trabalho foi cumprido parcialmente, uma vez os alunos não demonstraram curiosidade como também não apresentaram resoluções criativas como era esperado. Já em relação a escola B, o objetivo do trabalho foi cumprido integralmente, uma vez que possibilitou aos alunos a manipulação das questões selecionadas do ENEM como também a compreensão de que neste tipo de avaliação muitos problemas podem ser resolvidos sem o uso de fórmulas complexas.

Além disso, caracterizou-se como um incentivo a curiosidade dos alunos e uma oportunidade de compartilhar as diversas formas de resolução em cada uma das questões.

Referências

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio**: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEF, 2002.

BRASIL. Ministério de Educação. **Matriz de Referência ENEM**. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/downloads/2012/matriz_referencia_enem.pdf>. Acesso em 18 fev. 2014.

CARVALHO, Dione Lucchesi de. **Metodologia do Ensino da Matemática.** 2 ed. São Paulo: Cortez, 1994. (Coleção Magistério 2º grau. Série formação do professor)

LORENZATO, Sérgio. **Para aprender matemática**. 3 ed. São Paulo: Autores Associados, 2010. (Coleção Formação de professores)

APÊNDICE

LABORATÓRIO DE ENSINO E APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA II

LEAMAT II / 2013.1

Linha de pesquisa: Ensino e Aprendizagem de Aritmética
Professora orientadora: Ana Paula Rangel de Andrade
Professora em formação: Lucivânia Coutinho Soares
Aluno: ______________________________
Data: ___/___/_____

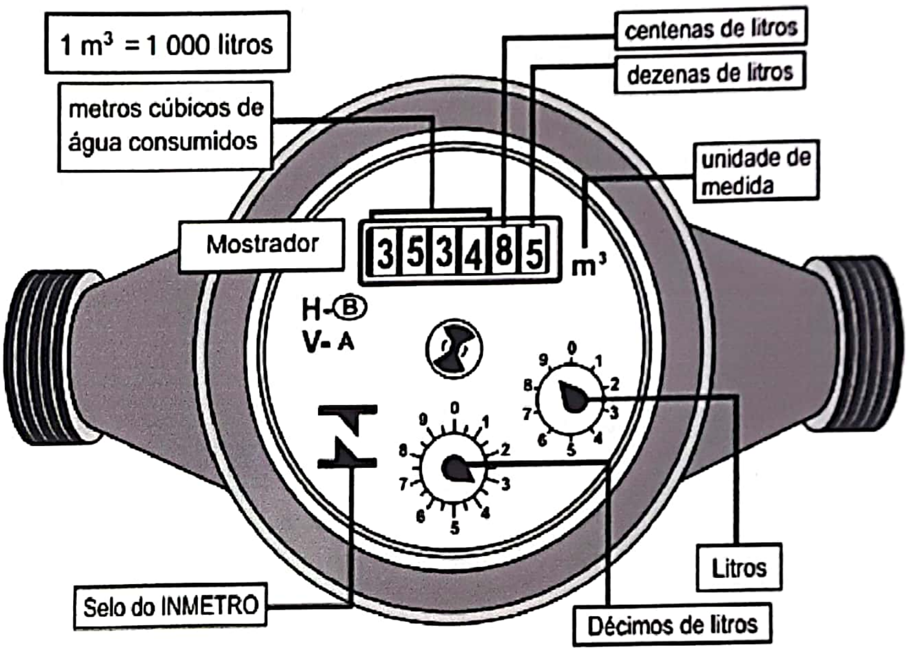
1) (ENEM 2012) O diretor de uma escola convidou 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existem 5 objetos e 6 personagens numa casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido.

Todos os alunos decidiram participar. A cada vez um aluno é sorteado e dá a sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada.

O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há:

a) 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
b) 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
c) 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
d) 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
e) 270 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

2) (ENEM 2012) Os hidrômetros são marcadores de consumo de água em residências e estabelecimentos comerciais. Existem vários modelos de mostradores de hidrômetros, sendo que alguns deles possuem uma combinação de um mostrador e dois relógios de ponteiro. O número formado pelos quatro primeiros algarismos do mostrador fornece o consumo em m^3, e os dois últimos algarismos representam, respectivamente, as centenas e dezenas de litros de água consumidos. Um dos relógios de ponteiros indica a quantidade em litros, e o outro em décimos de litros, conforme ilustrados na figura a seguir:



Disponível em: www.aguasdearacolaba.com.br (adaptado).

Considerando as informações indicadas na figura. O consumo total de água registrado nesse hidrômetro, em litros, é igual a:

a) 3 534, 85

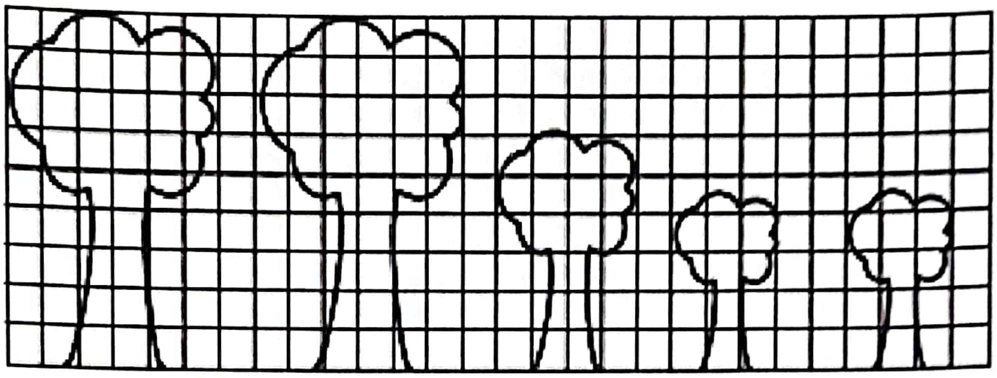
b) 3 544, 20

c) 3 534 850, 00

d) 3 534 859, 35

e) 3 534 850, 39

3) (ENEM 2012) Um biólogo mediu a altura de cinco árvores distintas e representou-as em uma mesma malha quadriculada, utilizando escalas diferentes, conforme indicações na figura a seguir:



Qual é a árvore que apresenta a maior altura real?

a) I

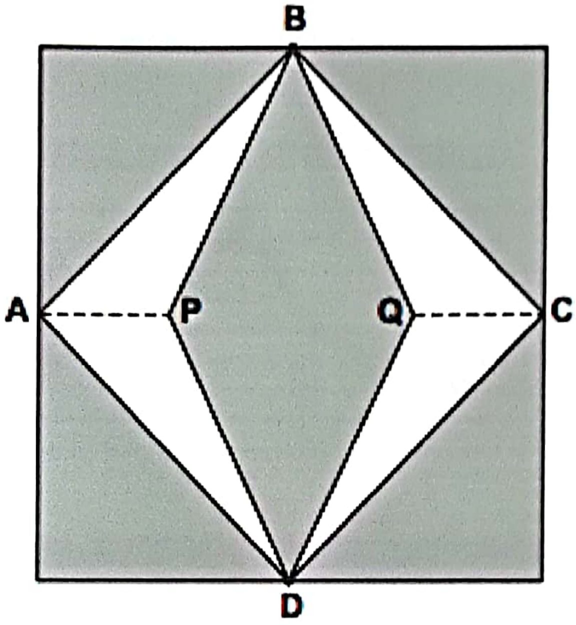
b) II

c) III

d) IV

e) V

4) (ENEM 2012) Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura a seguir:



Nesta figura, os pontos A, B, C e D são pontos médios dos lados do quadrado e os segmentos AP e QC medem $\frac{1}{4}$ da medida do lado do quadrado. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R$ 30,00 o m^2, e outro para a parte mais clara (regiões ABPDA e BCDQB), que custa R$ 50,00 o m^2.

De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral?

a) R$ 22,50

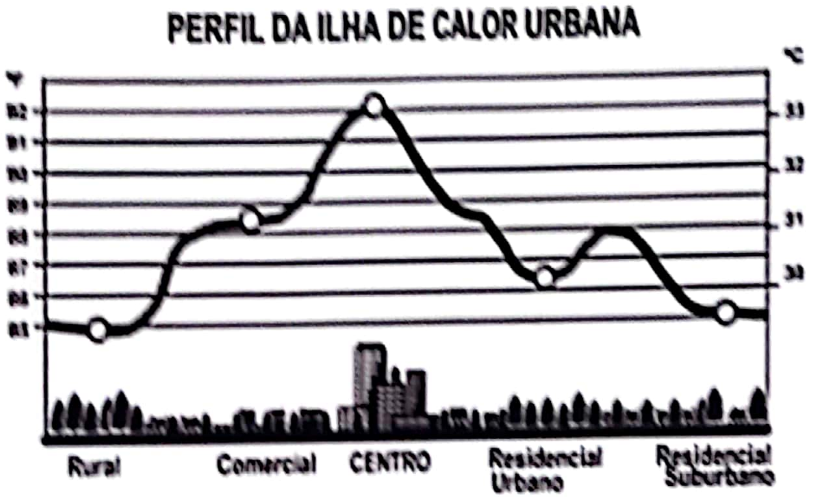
b) R$ 35,00

c) R$ 40,00

d) R$ 42,50

e) R$ 45,00

5) (ENEM 2011) Rafael mora no centro de uma cidade e decidiu se mudar, por recomendações médicas, para uma das regiões: Rural, Comercial, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano. A principal recomendação médica foi com as temperaturas das "ilhas de calor" da região, que deveriam ser inferiores a 31°C. Tais temperaturas são apresentadas no gráfico:



Fonte: EPA

Escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões para morar, a probabilidade de ele escolher uma região que seja adequada às recomendações médicas é:

a) $\frac{1}{5}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{2}{5}$

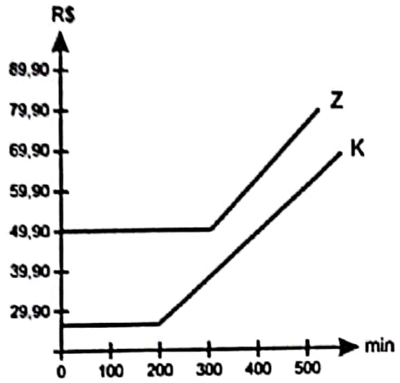
d) $\frac{3}{5}$

e) $\frac{3}{4}$

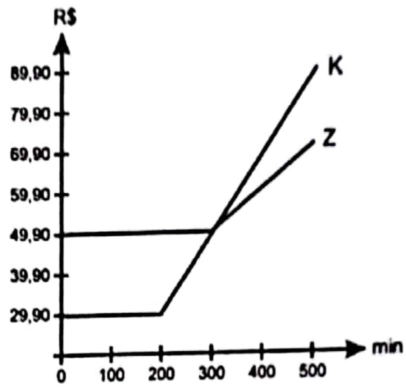
6) (ENEM 2011) Uma empresa de telefonia fixa oferece dois planos aos seus clientes: no plano K, o cliente paga R$ 29,90 por 200 minutos mensais e R$ 0,20 por cada minuto excedente; no plano Z, paga R$ 49,90 por 300 minutos mensais e R$ 0,10 por cada minuto excedente.

O gráfico que representa o valor pago, em reais, nos dois planos em função dos minutos utilizados é:

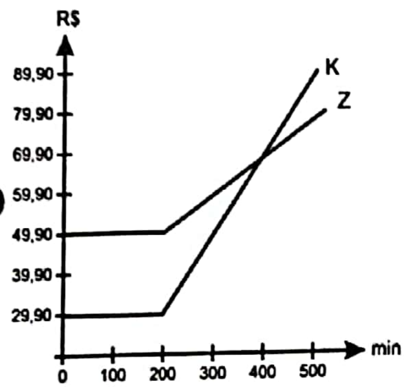
A



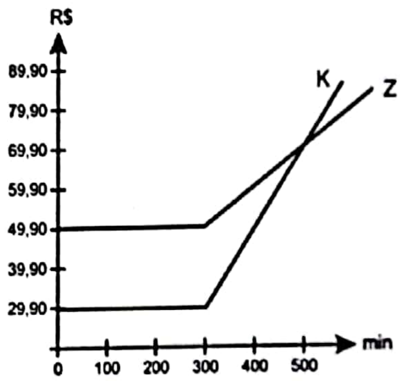
D



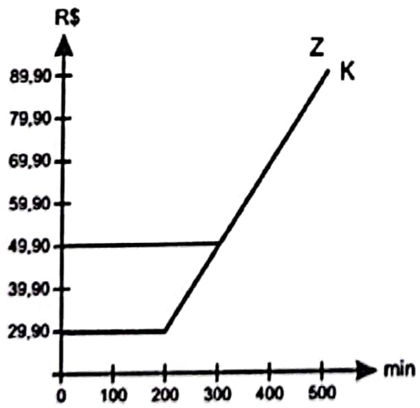
B



E



C



7) (ENEM 2011) Café no Brasil

O consumo atingiu o maior nível da história no ano passado: os brasileiros beberam o equivalente a 331 bilhões de xícaras. (**Veja**, ed. 2158, 31 mar.2010)

Considere que a xícara citada na notícia seja equivalente a aproximadamente 120 ml de café. Suponha que em 2010 os brasileiros bebam ainda mais café, aumentando o consumo em $\frac{1}{5}$ do que foi consumido no ano anterior.

De acordo com essas informações, qual a previsão mais aproximada para o consumo de café em 2010?

a) 8 bilhões de litros
b) 16 bilhões de litros
c) 32 bilhões de litros
d) 40 bilhões de litros
e) 48 bilhões de litros

8) (ENEM 2012) A Agência Espacial Norte Americana (NASA) informou que o asteróide YU 55 cruzou o espaço entre a Terra e a Lua no mês de novembro de 2011. A ilustração a seguir sugere que o asteróide percorreu sua trajetória no mesmo plano que contém a órbita descrita pela Lua em torno da Terra. Na figura, está indicada a proximidade do asteróide em relação à Terra, ou seja, a menor distância que ele passou da superfície terrestre.

Disponível em: http://noticias.terra.com.br (adaptado).

Com base nessas informações, a menor distância que o asteróide YU 55 passou da superfície Terra é igual a:

a) $3{,}25 \times 10^2$ km

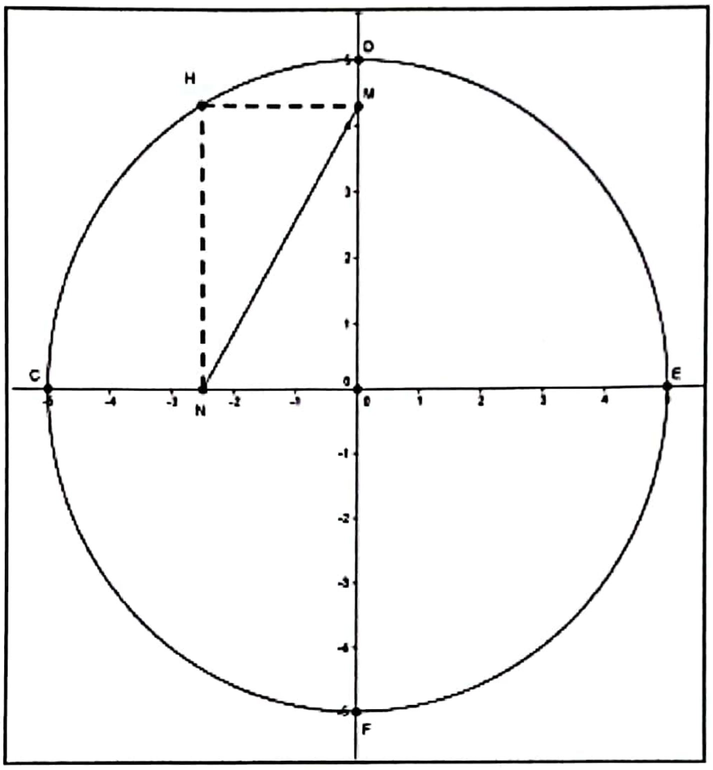
b) $3{,}25 \times 10^3$ km

c) $3{,}25 \times 10^4$ km

d) $3{,}25 \times 10^5$ km

e) $3{,}25 \times 10^6$ km

9) Dado um círculo, seu centro e raio de 5 cm, quanto mede a diagonal do retângulo?[1]



10) Foram feitas duas limonadas, uma usando três limões para cinco copos de água e outra usando cinco limões para sete copos de água. Qual delas ficou mais forte?

[1] As questões 9 e 10 foram retiradas da referência:

LORENZATO, Sérgio. *Para aprender matemática*. Campinas: Autores Associados, 2006. (Coleção Formação de professores)

Campos dos Goytacazes, 25 de julho de 2014.

Marcivânia Coutinho Soares