CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE CAMPOS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

RELATÓRIO LEAMAT III

DEDUZINDO A PROPORCIONALIDADE NA ÁREA DE FIGURAS SEMELHANTES

LINHA DE PESQUISA: DEMONSTRAÇÕES

Danielle Evangelista Gonçalves
Débora Maciel da Costa
Mikelle Rodrigues de Almeida
Suzana Beatriz Ramos Pessanha

CAMPOS DOS GOYTACAZES/ RJ
2008.2

Danielle Evangelista Gonçalves

Débora Maciel da Costa

Mikelle Rodrigues de Almeida

Suzana Beatriz Ramos Pessanha

RELATÓRIO LEAMAT III

DEDUZINDO A PROPORCIONALIDADE NA ÁREA DE FIGURAS SEMELHANTES

LINHA DE PESQUISA: DEMONSTRAÇÕES

Trabalho apresentado ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Campos como requisito parcial para Conclusão da disciplina Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática III do curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadores: Ana Mary Fonseca Barreto de Almeida

Salvador Tavares

1) Justificativa

Segundo LIMA (2001), a maior parte dos livros didáticos trabalha com a fórmula de áreas sem demonstração. As áreas de figuras semelhantes são calculadas por meio de regra de três sem justificativa, o que atesta a desatenção dos autores em relação a uma das noções mais importantes da Matemática do ensino básico, a de proporcionalidade.

2) Objetivos

Fazer com que os alunos consigam manipular as demonstrações aplicadas facilitando a compreensão das atividades de forma correta e objetiva.

Levar o aluno a deduzir a razão de proporcionalidade existente entre as áreas de figuras semelhantes.

3) Atividades desenvolvidas

3.1) Atividades Preliminares

As atividades se referem ao embasamento teórico sobre o tema demonstrações. Foi feita leitura e discussão sobre os textos:

- "Conceituação, manipulação, aplicações (As três componentes do ensino da Matemática)" do autor Elon Lages Lima;
- "Argumentação e provas no ensino de Matemática" das autoras Lilian Nasser e Lúcia A. A. Tinoco.

A partir desses textos foram desenvolvidas justificativas formais e informais em geometria.

- "Raciocínio Dedutivo e Álgebra Geométrica" (BOYER, 1996).

Foi desenvolvido a partir desse texto, atividades com justificativas informais na álgebra e também na aritmética.

- "Preliminares de Lógica" do autor Geraldo Severo de Souza Ávila.

Com base no texto "Somos todos mentirosos?" das autoras Gilda de La Roque Palis e Iaci Malta, foi realizada uma apresentação na qual foram identificadas hipótese e tese de uma demonstração.

- Introdução do livro "Método de Indução Matemática" do autor Nilson José Machado.

Com a leitura desses textos foram trabalhadas justificativas formais por processos dedutivos e de indução.

3.2) Relato da aplicação da atividade no grupo de LEAMAT II

Foi utilizado o geoplano[1], como instrumento facilitador para melhor compreensão do conceito de ampliação e redução de figuras planas.

Com o material impresso (Anexo A) entregue a turma do LEAMAT II, foi definido ampliação e redução por meio de alguns exemplos de figuras do nosso dia-a-dia. Após a apresentação do geoplano que foi utilizado nas atividades iniciais, foram apresentados outros instrumentos facilitadores como o papel quadriculado e a técnica de homotetia[2] para realização de outras atividades.

Por meio destes instrumentos, os alunos ampliaram ou reduziram, de acordo com a razão de proporcionalidade (k), os polígonos dados, calculando as áreas e determinando a razão entre elas, chegando à conclusão de que a razão entre as áreas é sempre k^2.

A partir das relações de triângulos semelhantes foi demonstrado que a razão de proporcionalidade entre as áreas de qualquer polígono é sempre k^2, sabendo que qualquer polígono pode ser subdividido em triângulos.

Com a definição de semelhança dada por IEZZI (2000) e a definição de área de uma figura qualquer dada por LIMA (1991), como consta no anexo A, foi demonstrado que a razão de proporcionalidade entre duas figuras semelhantes é sempre k^2.

Com algumas dificuldades apresentadas na atividade pela turma do LEAMAT II, principalmente em relação às demonstrações da razão de

---

[1] O geoplano constitui-se por uma placa de madeira, marcada com uma malha quadriculada ou pontilhada. Em cada vértice dos quadrados formados fixa-se um prego, onde se prenderão os elásticos usados para "desenhar" sobre o geoplano.

[2] Segundo Wagner, " fixado um ponto O no plano π e dado um número real k $\neq 0$, a *homotetia de centro O e razão k* é a transformação que cada ponto A do plano π associa A' = $H_{O,\ k}$ (A) tal que $\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$ " (WAGNER, 2000, p. 80).

proporcionalidade entre figuras semelhantes quaisquer e, por dois tempos de aula não terem sido suficientes, foram feitas algumas alterações na atividade. Sentiu-se necessidade de produzir um cartaz para facilitar a compreensão da técnica de homotetia da atividade V no anexo B.

As atividades apresentadas na turma do LEAMAT II constam no anexo A e, as atividades modificadas para serem aplicadas na turma do 9º ano, constam no anexo B.

3.3) Relato da aplicação da atividade na turma de 9º ano do Ensino Fundamental

Aplicou-se a atividade a uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública municipal de Campos dos Goytacazes. Iniciou-se a aula distribuindo a atividade e, em seguida, foi lida a introdução que relata que em nosso cotidiano costuma-se ver exemplos de ampliação ou redução. Neste momento, uma das professoras em formação perguntou aos alunos se as figuras 1 e 2 eram exemplos de redução ou ampliação. Alguns alunos responderam que a figura 1 era uma redução e a figura 2 uma ampliação, o que levou a professora em formação ratificar mostrando que as duas figuras são exemplos de redução. A introdução é finalizada com a apresentação dos instrumentos que seriam usados no decorrer da atividade para ampliar ou reduzir figuras planas.

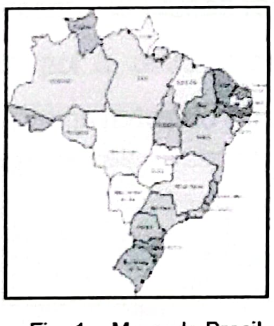


Fig. 1 – Mapa do Brasil

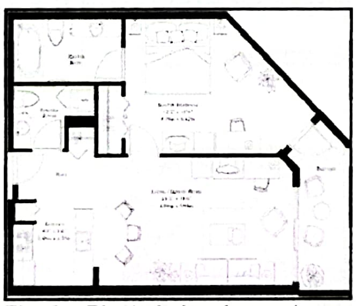


Fig. 2 – Planta baixa de apartamento

Antes de ser aplicada a atividade motivadora, foi perguntado aos alunos se eles já haviam utilizado papel quadriculado para reduzir ou ampliar figuras planas. Dentre doze alunos, apenas três responderam que já haviam utilizado esta técnica.

Foi solicitado então, que eles reduzissem a figura de uma xícara (foto 1) na malha quadriculada. Em seguida, foi perguntado à turma se a partir da área da figura original da xícara eles saberiam calcular a área da figura reduzida. Alguns alunos responderam que a área não havia mudado e outros responderam que área ficou reduzida à metade.

Este problema foi deixado para o final, com o objetivo de se verificar se os alunos seriam capazes de calcular a área desta figura reduzida após as atividades propostas.

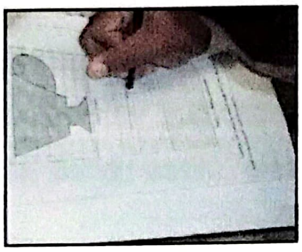


Foto 1: aluno fazendo a redução da xícara

Nesse momento distribuiu-se o geoplano e os elásticos coloridos no qual os alunos deveriam considerar cada quadrado como unidade de medida de área.

Na atividade I, pediu-se para os alunos construírem um quadrado ABCD com lados medindo duas unidades, tendo o ponto A do geoplano como vértice (foto 2). Em seguida pediu-se que os alunos determinassem a área do quadrado ABCD e eles responderam corretamente. Então, solicitou-se a construção do quadrado AEFG , tendo como vértice o ponto A do geoplano, que fosse a ampliação do quadrado ABCD com razão $k=3$ (foto 3), determinando sua área. Nesse momento os alunos responderam que a área do quadrado ABCD iria ficar multiplicada por 3, outros disseram que a área iria dobrar e outros disseram que iria multiplicar os lados do quadrado ABCD pela razão.

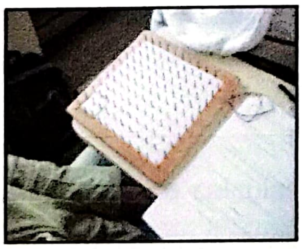


Foto 2: quadrado ABCD

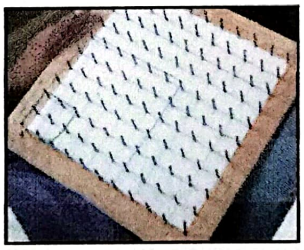


Foto 3: ampliação do quadrado ABCD

Logo após pediu-se para calcular a razão entre as áreas dos quadrados AEFG e ABCD e eles calcularam corretamente.

Na atividade II, pediu-se para construir e determinar a área do retângulo AHIJ com lados medindo seis e três unidades e, tendo o ponto A do geoplano como vértice. Então eles responderam corretamente multiplicando os lados do retângulo.

Em seguida solicitou-se a construção de um retângulo ALMN com vértice no ponto A do geoplano, que fosse a redução do retângulo AHIJ cuja razão era $k = \frac{1}{3}$ (foto 4). Nesse momento, os alunos apresentaram dificuldades em saber quais seriam as dimensões do retângulo ALMN. A partir disso, a professora em formação os auxiliou de forma a mostrar que cada lado do retângulo ALMN seria a terça parte do retângulo AHIJ. Sendo assim, eles responderam corretamente a área e a razão entre as áreas.

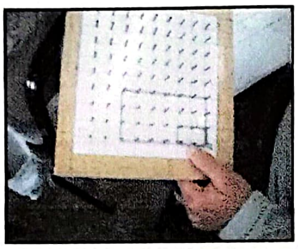


Foto 4: redução do retângulo ALMN

Na atividade III, pediu-se aos alunos para construírem um triângulo retângulo AOP, retângulo em A, com catetos medindo quatro e três unidades tendo o ponto A do geoplano como vértice (foto 5). Em seguida, os alunos calcularam a área deste triângulo.

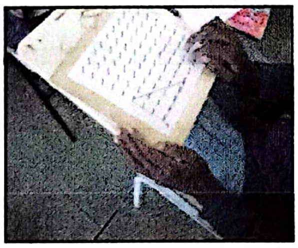


Foto 5: triângulo retângulo AOP

No momento de calcular a área do triângulo retângulo AOP, a professora em formação explicou que os alunos poderiam construir um retângulo cujas dimensões seriam as mesmas dos catetos do triângulo retângulo AOP tendo também o ponto A do geoplano como vértice. Ao pedir para traçarem a diagonal do retângulo observou-se que esta sobrepunha a hipotenusa. A professora em formação então, mostrou que a diagonal do retângulo coincidia com a hipotenusa do triângulo e que, dividia o retângulo em dois triângulos retângulos congruentes (foto 6), foi concluído então, que a área do triângulo retângulo AOP era a metade da área do retângulo.

Foto 6: explicação da área do triângulo retângulo AOP

Em seguida, sem desfazer o triângulo AOP, pediu-se para que os alunos construíssem um triângulo retângulo AQR, com vértice em A do geoplano, que fosse a ampliação do triângulo retângulo AOP cuja razão era $k = 2$ e determinassem a área desse triângulo retângulo. Os alunos construíram, calcularam a área e a razão entre as áreas dos dois triângulos dados corretamente.

Na atividade IV, foi solicitada a construção de um trapézio isósceles ASTU com altura medindo seis unidades, base maior e base menor medindo oito e quatro unidades respectivamente, tendo o ponto A do geoplano como vértice (foto 7). Solicitou-se também o cálculo da área do trapézio ASTU. A professora em formação percebeu que os alunos não lembravam como era o trapézio isósceles, então foi desenhado no quadro um trapézio mostrando a altura, a base menor e a base maior e explicado o que seria um trapézio isósceles. Para calcular a área deste trapézio uma aluna disse que poderia dividir o trapézio em um retângulo e dois triângulos retângulos congruentes (foto 8). A partir disso os alunos poderiam calcular a área do trapézio ASTU.

Foto 7: trapézio isósceles ASTU

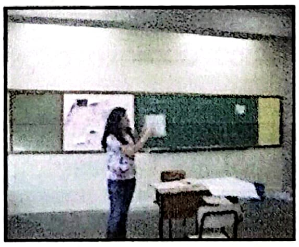


Foto 8: cálculo da área do trapézio isóceles ASTU

Sem desfazer o trapézio isósceles ASTU, pediu-se para construir um trapézio isósceles AVXZ com vértice no ponto A do geoplano (foto 9), que fosse a redução do trapézio ASTU cuja razão era $k = \frac{1}{2}$.

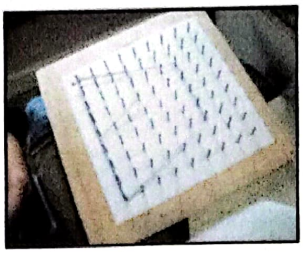


Foto 9: redução do trapézio isósceles ASTU

Assim calcularam corretamente a área do trapézio AVXZ e determinaram a razão entre as áreas dos trapézios AVXZ e ASTU.

Na atividade V, foi introduzido dois instrumentos utilizados para ampliar ou reduzir figuras planas que são o papel quadriculado e a técnica de homotetia. Em seguida, foi pedido para construir um losango P'Q'R'S' que fosse a redução do losango PQRS (figura 3) cujo centro de homotetia seria H e a razão seria $k = \frac{1}{5}$.

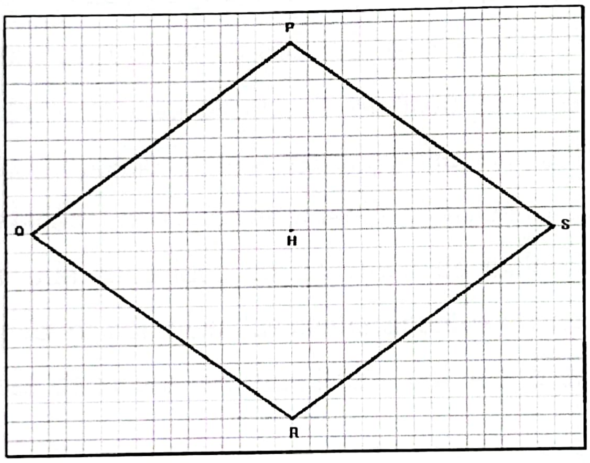


Figura 3: losango PQRS

Nesse momento, a professora em formação explicou como era feita a técnica de homotetia (foto 10), porém alguns alunos já conheciam essa técnica. Foi colocado no quadro um cartaz, feito pelas professoras em formação, com a figura do losango PQRS ampliada e junto com os alunos construíram o losango P'Q'R'S' que era a redução do losango PQRS. Ao calcular a área do losango PQRS e do losango P'Q'R'S', uma aluna foi ao quadro e mostrou que poderia ser feito um retângulo com base de mesma medida da diagonal maior e altura medindo a metade da diagonal menor (foto 11). Desta forma poderia calcular a área multiplicando a diagonal maior (base) pela metade da diagonal menor (altura) ou contar os quadradinhos do retângulo e assim determinar a área dos losangos. Em seguida calcularam corretamente as áreas e a razão entre as mesmas.

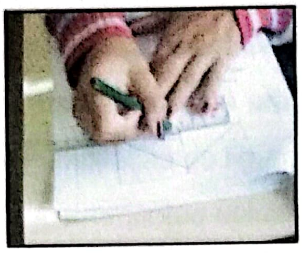


Foto 10: aplicação da técnica de homotetia

Foto 11: aluna participando do cálculo da área

Na atividade VI pediu-se para comparar as razões entre as áreas das atividades anteriores com as respectivas razões de proporcionalidade (k) utilizadas na construção de cada figura e concluir a relação existente entre elas.

Nesse momento, uma das professoras em formação colocou no quadro as razões entre as áreas de cada atividade e suas respectivas razões de proporcionalidade (k) (foto 12), com objetivo de que os alunos identificassem a relação existente entre a razão de proporcionalidade (k) e as razões entre as áreas. Um, em doze alunos, conseguiu observar que a relação era k^2, então a professora em formação junto com os alunos verificou se cada razão entre as áreas seria a razão de proporcionalidade ao quadrado, dessa forma os alunos ficaram convictos da relação. Logo após retomaram a atividade da xícara, na qual os alunos perceberam que cada lado do quadrado da malha quadriculada foi dividido em dois, dessa forma por meio dos conhecimentos obtidos, alguns alunos responderam que a área da xícara reduzida ficaria um quarto da área da xícara anterior.

Foto 12: professora em formação relacionando as razões de proporcionalidade

4) Conclusão

A atividade foi aplicada em dois tempos de aula, sendo que as atividades iniciais necessitaram de um tempo maior do que o previsto, o que acarretou uma redução do tempo para as atividades finais.

A introdução da atividade contribuiu de forma significativa para que os alunos percebessem que em nosso cotidiano existem bons exemplos do uso de redução e ampliação de figuras planas.

Os instrumentos utilizados na atividade para ampliar ou reduzir figuras tais como: o papel quadriculado, o geoplano (já conhecidos pelos alunos) e a técnica de homotetia, contribuíram para que os alunos deduzissem a proporcionalidade entre as linhas homólogas de figuras semelhantes, facilitando assim a aprendizagem dos conteúdos.

A partir de cada atividade os alunos analisaram as razões entre as áreas e suas respectivas razões de proporcionalidade, construindo o conceito de que a razão entre as áreas é o quadrado da razão de proporcionalidade. Porém, observou-se que alguns alunos não conseguiram identificar a relação existente entre a razão de proporcionalidade e as razões entre as áreas, logo a professora em formação induziu para que todos pudessem assimilar o conceito.

De acordo com a atividade (anexo A) aplicada na turma do LEAMAT II, pôde-se aprimorar as atividades VII e VIII em uma linguagem mais adequada ao Ensino Fundamental para a demonstração da área de figuras semelhantes.

5) Referências

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. *Análise Matemática para Licenciatura*. São Paulo, Edgard Blücher, 2001.

BOYER, Carl B. *História da Matemática.* 2ª edição. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

DOMINSKI, I. S. *Método de Indução Matemática*. Coordenação: Nilson José Machado: traduzido por Gelson Iezzi. São Paulo, Atual; Moscou : Editora MIR, 1996. (Coleção Matemática: aprendendo e ensinando).

LIMA, Elon Lages. *Matemática e Ensino*. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro. 2ª edição,

LIMA, Elon Lages. *Medida e Forma em Geometria: Comprimento, Área, Volume e Semelhança*. Rio de Janeiro. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro.

NASSER, Lílian, TINOCO, Lúcia A.. A. *Argumentação e provas no ensino de Matemática*. 2ª edição. Rio de Janeiro: UFRJ/ Projeto Fundão, 2003.

Revista do Professor de Matemática Nº 37- 2º Quadrimestre de 1998, Sociedade Brasileira de Matemática.

ROCHA, Aline Nogueira, CRUZ, Karine Calil da, VIEIRA, Luana de Sousa. *Estudando semelhança para deduzir as relações métricas no triângulo retângulo*. Campos dos Goytacazes, RJ:[s.n.], 2007,119f.;il.

WAGNER, Eduardo. *Construções Geométricas*. Coleção do professor de matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro. 4ª edição, 2000.

Campos dos Goytacazes, 31 de março de 2009.

Danielle Evangelista Gonçalves

Débora Maciel da Costa.

Mikelle Rodrigues de Almeida

Suzana Beatriz Ramos Pessanha

ANEXO A

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE CAMPOS
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense
Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

Atividade apresentada na turma do LEAMAT II

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DEDUZINDO A PROPORCIONALIDADE NA ÁREA DE FIGURAS SEMELHANTES

ATIVIDADES

DANIELLE EVANGELISTA GONÇALVES
DÉBORA MACIEL DA COSTA
MIKELLE RODRIGUES DE ALMEIDA
SUZANA BEATRIZ RAMOS PESSANHA

Orientadora: ANA MARY FONSECA BARRETO DE ALMEIDA

CAMPOS DOS GOYTACAZES / RJ
2008

I. Introdução

As plantas baixas e os mapas aparecem diariamente em revistas e jornais diversos, como os que temos nos exemplos a seguir:

Fig. 1 – Mapa do Brasil

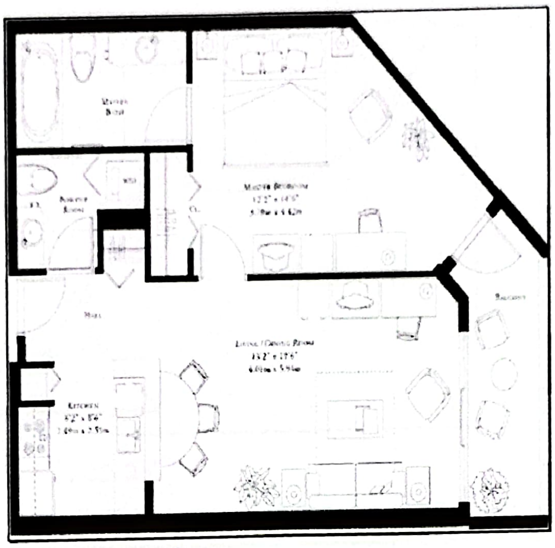


Fig. 2 – Planta baixa de apartamento

As figuras acima são bons exemplos do uso de redução no nosso dia-a-dia.

Do mesmo modo, a ampliação é largamente utilizada. Elas aparecem nas fotografias, nas projeções de forma em geral, etc.

Você saberia, então, definir ampliação e redução?

Ampliar uma figura é aumentar o seu tamanho mantendo as suas proporções, ou seja, é aumentar a figura sem deformá-la.

Analogamente, reduzir uma figura é diminuir o tamanho desta figura mantendo as suas proporções, ou seja, é diminuir a figura sem deformá-la.

Existem instrumentos para ampliarmos ou reduzirmos figuras tais como: o pantógrafo, o papel quadriculado, a técnica da Homotetia (Transformação Geométrica), o geoplano, etc.

Utilizando a malha quadriculada do quadro 1, reduza a figura 3 abaixo:

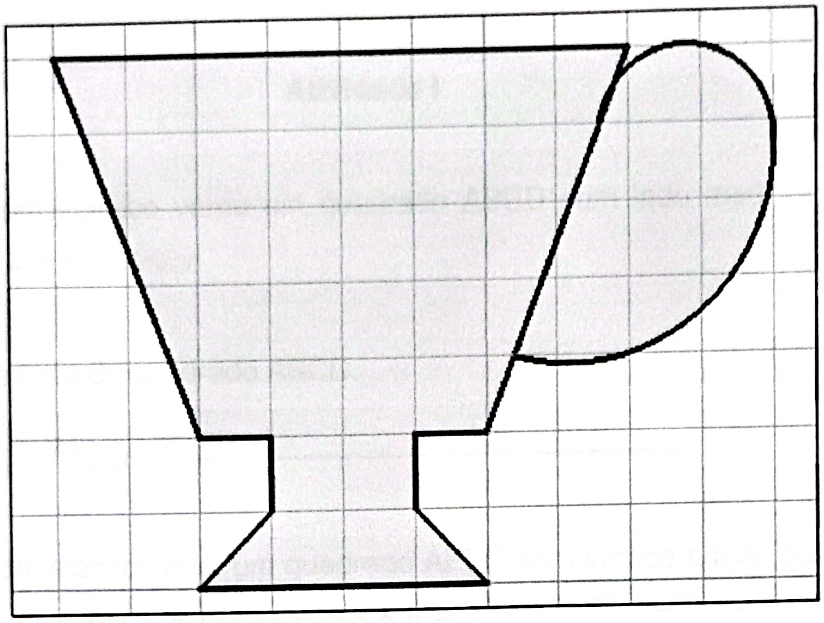
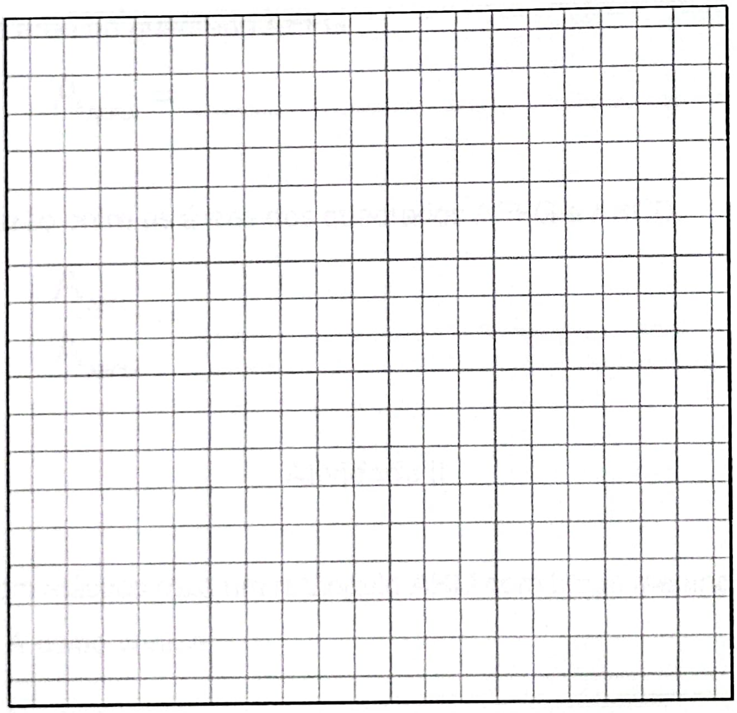


Fig. 3 – Xícara



Quadro 1 – Malha quadriculada

Sabendo que a área da figura 3 mede 44,5 cm^2. Qual é a área da figura obtida na malha quadriculada do quadro 1?____________________________

Utilizando o geoplano e elásticos coloridos para responder às atividades I, II, III e IV e considerando cada $\square$ como unidade de medida de área, responda:

Atividade I

1) Construa com elástico verde um quadrado ABCD com lado medindo dois e tendo o ponto A como vértice.

2) Determine a área do quadrado ABCD.

$$A_{ABCD} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

3) Construa com elástico roxo um quadrado AEFG com vértice em A, que seja a ampliação do quadrado ABCD cuja razão é $k = 3$.

4) Determine a área do quadrado AEFG.

$$A_{AEFG} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

5) Calcule a razão entre as áreas dos quadrados AEFG e ABCD.

$$\frac{A_{AEFG}}{A_{ABCD}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Atividade II

1) Construa com elástico roxo um retângulo AHIJ com lados medindo seis e três e tendo o ponto A como vértice.

2) Determine a área do retângulo AHIJ.

$$A_{AHIJ} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

3) Construa com elástico verde um retângulo ALMN com vértice em A, que seja a redução do retângulo AHIJ cuja razão seja $k = \frac{1}{3}$.

4) Determine a área do retângulo ALMN.

$$A_{ALMN} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

5) Calcule a razão entre as áreas dos retângulos ALMN e AHIJ.

$$\frac{A_{ALMN}}{A_{AHIJ}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Atividade III

1) Construa com elástico rosa um triângulo retângulo AOP, retângulo em Â, com catetos medindo quatro e três e tendo o ponto A como vértice.

2) Determine a área do triângulo retângulo AOP.

$$A_{AOP} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

3) Construa com elástico roxo um triângulo retângulo AQR com vértice em A, que seja a ampliação do triângulo retângulo AOP cuja razão seja $k = 2$.

4) Determine a área do triângulo retângulo AQR.

$$A_{AQR} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

5) Calcule a razão entre as áreas dos triângulos retângulos AQR e AOP.

$$\frac{A_{AQR}}{A_{AOP}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Atividade IV

1) Construa com elástico roxo um trapézio isósceles ASTU com altura medindo seis, base maior oito, base menor quatro e tendo o ponto A como vértice.

2) Determine a área do trapézio ASTU.

$$A_{ASTU} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

3) Construa com elástico laranja um trapézio isósceles AVXZ com vértice em A, que seja a redução do trapézio isósceles AVXZ cuja razão seja $k = \frac{1}{2}$.

4) Determine a área do trapézio AVXZ.

$$A_{AVXZ} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

5) Calcule a razão entre as áreas dos trapézios AVXZ e ASTU.

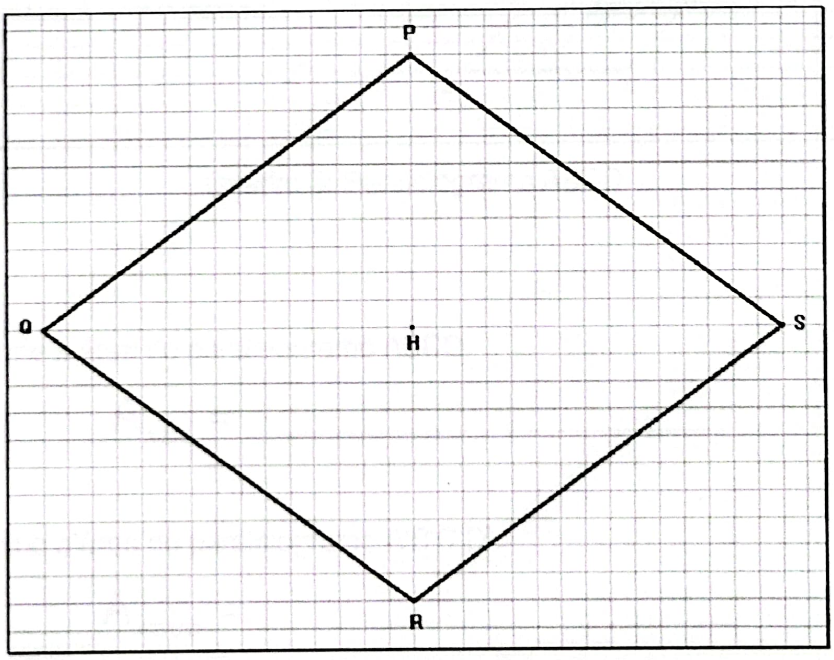
$$\frac{A_{AVXZ}}{A_{ASTU}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Atividade V

Dois instrumentos utilizados para ampliar ou reduzir figuras são o papel quadriculado e a técnica de homotetia.

Aliando estes dois instrumentos, construa os polígonos a seguir, considerando cada □ como unidade de medida de área:

1) Construa um losango P'Q'R'S' que seja a redução do losango PQRS, cujo centro de homotetia seja H e, a razão seja $k = \frac{1}{5}$.



Quadro 2: Losango PQRS

a) Determine a área do losango PQRS.

$$A_{PQRS} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

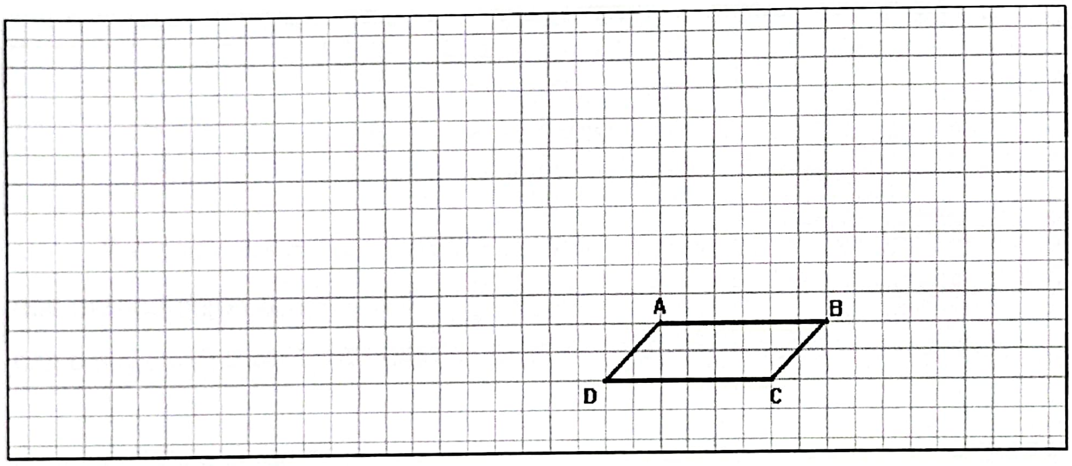
b) Determine a área do losango P'Q'R'S'.

$$A_{P'Q'R'S'} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

c) Calcule a razão entre as áreas dos losangos PQRS e P'Q'R'S'.

$$\frac{A_{P'Q'R'S}}{A_{PQRS}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

2) Construa um paralelogramo A'B'C'D' que seja a ampliação do paralelogramo ABCD, cujo centro de homotetia seja C e, a razão seja $k = 4$.



Quadro 3: Paralelogramo ABCD

a) Determine a área do paralelogramo ABCD.

$$A_{ABCD} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

b) Determine a área do paralelogramo A'B'C'D'.

$$A_{A'B'C'D'} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

c) Calcule a razão entre as áreas dos paralelogramos A'B'C'D' e ABCD.

$$\frac{A_{A'B'C'D'}}{A_{ABCD}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Atividade VI

1) Comparando os itens 5 das atividades I, II, III e IV e os itens 1.c) e 2.c) da atividade V com as suas respectivas razões de proporcionalidade (k), o que você conclui?

____

____

____

____

____

____

Atividade VII

Sabendo que qualquer polígono pode ser subdividido em triângulos (Fig.4), nos prenderemos apenas à demonstração desta propriedade para estes, ficando como sugestão a demonstração da propriedade para os demais polígonos.

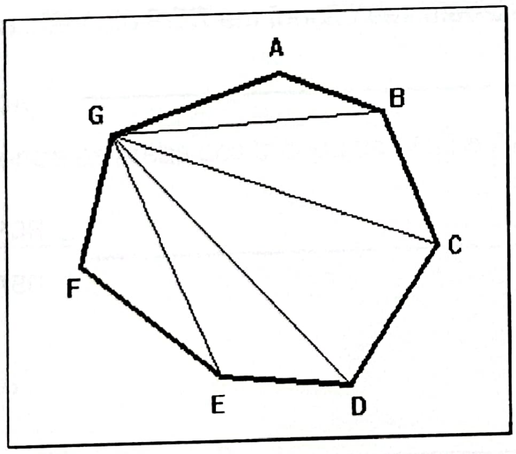


Fig. 4 : Heptágono subdividido em triângulos

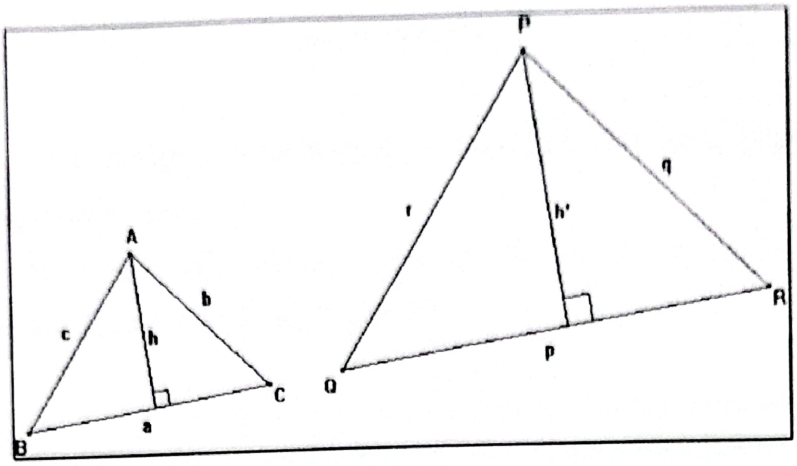


Fig. 5 – Triângulos semelhantes

Sejam os triângulos ABC e PQR semelhantes (Fig. 5), temos as seguintes relações:

$$\frac{p}{a} = \frac{q}{b} = \frac{r}{c} = \frac{h'}{h} = k$$

Daí decorre que:

$$p = k \cdot a$$
$$q = k \cdot b$$
$$r = k \cdot c$$
$$h' = k \cdot h$$

Com base nas informações acima, responda:

1) Determine a área do triângulo ABC.

$A_{ABC} =$ ______________________________

2) Determine a área do triângulo PQR em função das medidas do triângulo ABC.

$A_{PQR} =$ ______________________________

3) Determine a razão entre as áreas dos triângulos PQR e ABC.

$\frac{A_{PQR}}{A_{ABC}} =$ ______________________________

4) O que você conclui?

____

____

Atividade VIII

Será que esta relação é válida apenas para polígonos, ou será que ela será válida para qualquer figura?

Precisaremos, então, definir semelhança de uma figura qualquer. Usaremos a definição dada por IEZZI (2000).

> Em Matemática, dois objetos são semelhantes somente quando a razão entre um segmento do 1.º objeto e o segmento correspondente (ou homólogo) do 2.º objeto é sempre a mesma (é constante), qualquer que seja o par de segmentos correspondentes considerados.

Com base na definição anterior, verifique se as figuras 6 e 7 são semelhantes.

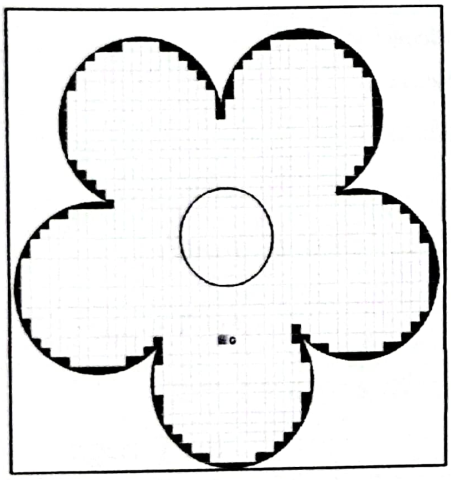


Fig. 6 – Flor A

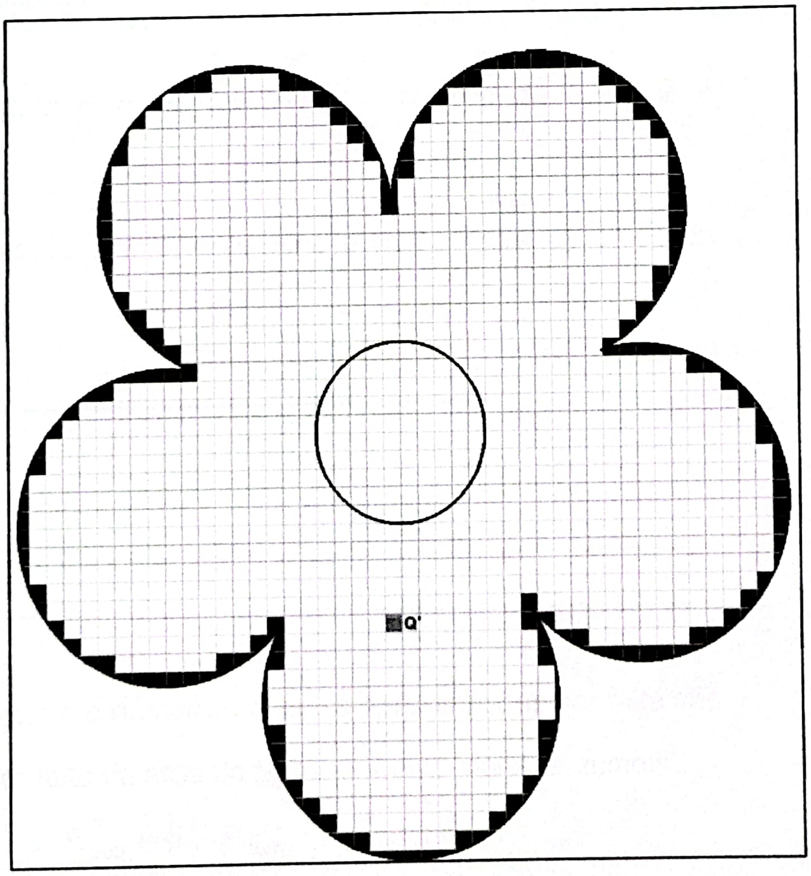


Fig. 7 – Flor B

1) O que você conclui?

____

____

Considerando o $\square$Q contido na fig.6 e o $\square$Q' contido na fig.7, que são homólogos, temos que a área do $\square$Q' é igual a k^2 vezes a área de $\square$Q.

$$A_{Q'} = k^2 \cdot A_Q$$

Precisaremos, então, definir a área de uma figura qualquer. Usaremos a definição dada por LIMA (1991).

> A área da figura plana F deve ser um número real não-negativo, que indicaremos com $a(F)$. Ele ficará bem determinado se conhecermos seus valores aproximados, por falta ou por excesso.
>
> Assim, definiremos a área da figura F como o número real cuja as aproximações por falta são as áreas dos polígonos retangulares contidos em F.

Assim, a área da figura 6 é $A_{florA} = n \cdot A_Q$ e a área da figura 7 é $A_{florB} = n \cdot A_{Q'}$.

Com base nas afirmações acima, determine a razão entre as áreas da figura 7 e 6:

$$\frac{A_{florB}}{A_{florA}} = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

O que você conclui?

____

____

Assim, a área da figura 7 é o número real cujas aproximações por falta são k^2 vezes as aproximações por falta da área da figura 6. Desta maneira, temos:

$$A_{florB} = k^2 \cdot A_{florA}$$

ANEXO B

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE CAMPOS
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense

Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

Atividade modificada após a apresentação na turma do LEAMAT II

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DEDUZINDO A PROPORCIONALIDADE NA ÁREA DE FIGURAS SEMELHANTES

ATIVIDADES

DANIELLE EVANGELISTA GONÇALVES
DÉBORA MACIEL DA COSTA
MIKELLE RODRIGUES DE ALMEIDA
SUZANA BEATRIZ RAMOS PESSANHA

Orientadora: ANA MARY FONSECA BARRETO DE ALMEIDA

CAMPOS DOS GOYTACAZES / RJ
2008

I. Introdução

As plantas baixas e os mapas aparecem diariamente em revistas e jornais diversos, como os que temos nos exemplos a seguir:

Fig. 1 – Mapa do Brasil

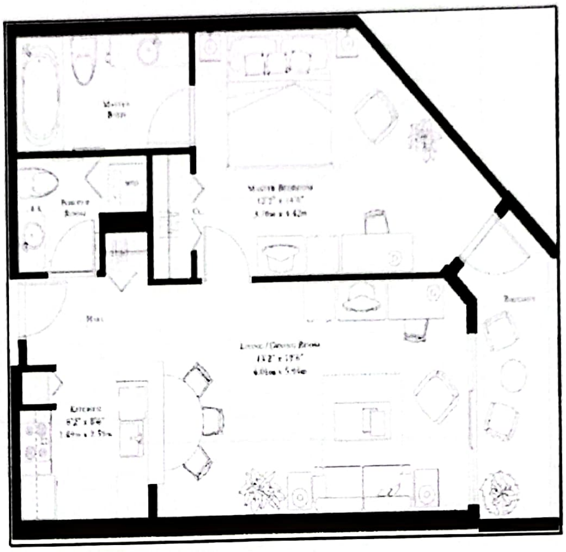


Fig. 2 – Planta baixa de apartamento

As figuras acima são bons exemplos do uso de redução de figuras planas no nosso dia-a-dia.

Do mesmo modo, a ampliação de figuras planas é largamente utilizada. Elas aparecem nas fotografias, nas projeções de forma em geral, etc.

Você saberia, então, definir ampliação e redução?

Ampliar uma figura é aumentar o seu tamanho mantendo as suas proporções, ou seja, é aumentar a figura sem deformá-la.

Analogamente, reduzir uma figura é diminuir o tamanho desta figura mantendo as suas proporções, ou seja, é diminuir a figura sem deformá-la.

Existem instrumentos para ampliarmos ou reduzirmos figuras tais como: o pantógrafo, o papel quadriculado, a técnica da Homotetia (Transformação Geométrica), o geoplano, etc.

Utilizando a malha quadriculada do quadro 1, reduza a figura 3 abaixo:

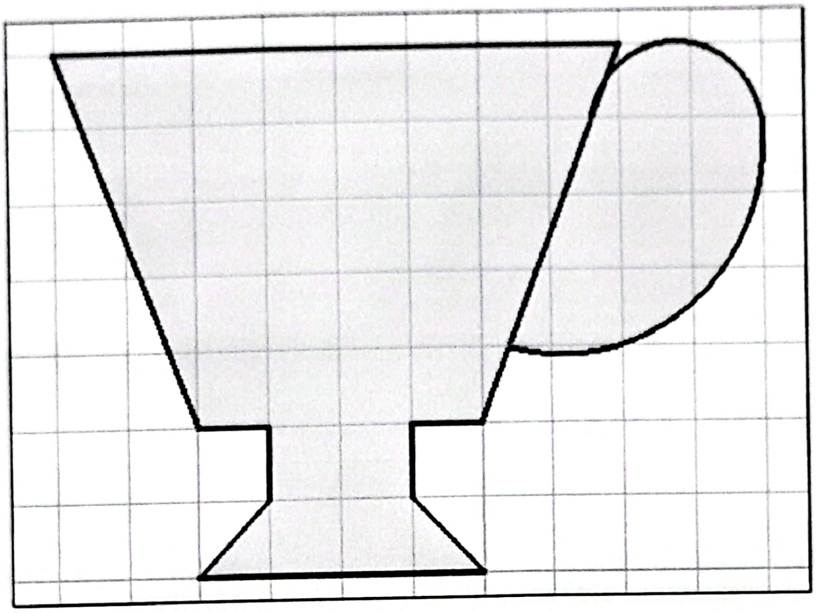
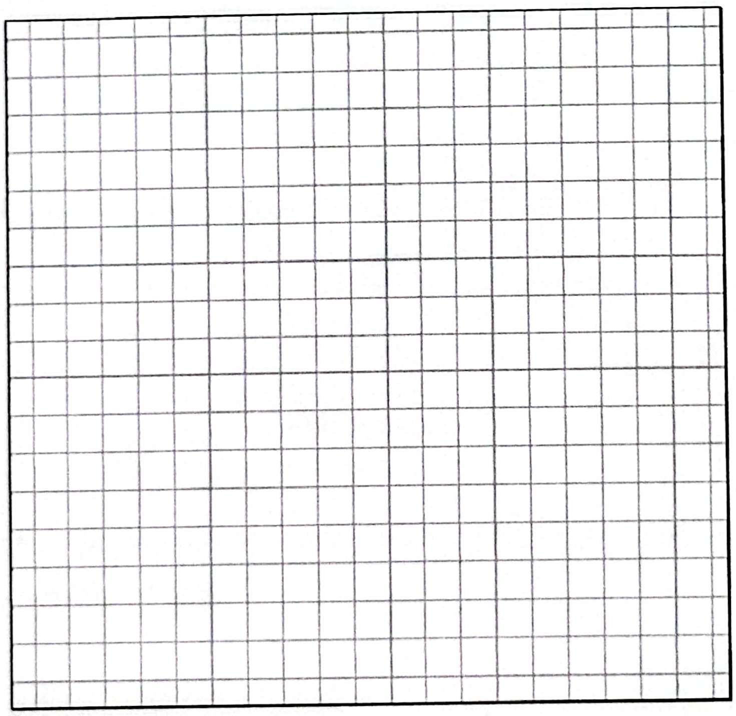


Fig. 3 – Xícara



Quadro 1 – Malha quadriculada

Sabendo que a área da figura 3 mede $44,5 \text{ cm}^2$. Qual é a área da figura obtida na malha quadriculada do quadro 1?____

Utilizando o geoplano e elásticos coloridos, responder às atividades I, II, III e IV considerando cada □ como unidade de medida de área:

Atividade I

1) Construa com elástico verde um quadrado ABCD com lado medindo dois e tendo o ponto A como vértice.

2) Determine a área do quadrado ABCD.

$$A_{ABCD} = \rule{6cm}{0.4pt}$$

3) Construa com elástico roxo um quadrado AEFG com vértice em A, que seja a ampliação do quadrado ABCD cuja razão é $k = 3$.

4) Determine a área do quadrado AEFG.

$$A_{AEFG} = \rule{6cm}{0.4pt}$$

5) Calcule a razão entre as áreas dos quadrados AEFG e ABCD.

$$\frac{A_{AEFG}}{A_{ABCD}} = \rule{6cm}{0.4pt}$$

Atividade II

1) Construa com elástico roxo um retângulo AHIJ com lados medindo seis e três e tendo o ponto A como vértice.

2) Determine a área do retângulo AHIJ.

$$A_{AHIJ} = \rule{6cm}{0.4pt}$$

3) Construa com elástico verde um retângulo ALMN com vértice em A, que seja a redução do retângulo AHIJ cuja razão seja $k = \frac{1}{3}$.

4) Determine a área do retângulo ALMN.

$$A_{ALMN} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

5) Calcule a razão entre as áreas dos retângulos ALMN e AHIJ.

$$\frac{A_{ALMN}}{A_{AHIJ}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Atividade III

1) Construa com elástico rosa um triângulo retângulo AOP, retângulo em Â, com catetos medindo quatro e três e tendo o ponto A como vértice.

2) Determine a área do triângulo retângulo AOP.

$$A_{AOP} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

3) Construa com elástico roxo um triângulo retângulo AQR, retângulo em A, que seja a ampliação do triângulo retângulo AOP cuja razão seja $k = 2$.

4) Determine a área do triângulo retângulo AQR.

$$A_{AQR} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

5) Calcule a razão entre as áreas dos triângulos retângulos AQR e AOP.

$$\frac{A_{AQR}}{A_{AOP}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Atividade IV

1) Construa com elástico roxo um trapézio isósceles ASTU com altura medindo seis, base maior oito, base menor quatro e tendo o ponto A como vértice.

2) Determine a área do trapézio ASTU.

$A_{ASTU} =$ ______________________

3) Construa com elástico laranja um trapézio isósceles AVXZ com vértice em A, que seja a redução do trapézio isósceles ASTU cuja razão seja $k = \frac{1}{2}$.

4) Determine a área do trapézio AVXZ.

$A_{AVXZ} =$ ______________________

5) Calcule a razão entre as áreas dos trapézios AVXZ e ASTU.

$\frac{A_{AVXZ}}{A_{ASTU}} =$ ______________________

Atividade V

Dado o polígono PQRS abaixo, responda:

1) Trace as semi-retas $\overrightarrow{HP}, \overrightarrow{HQ}, \overrightarrow{HR}$ e $\overrightarrow{HS}$.

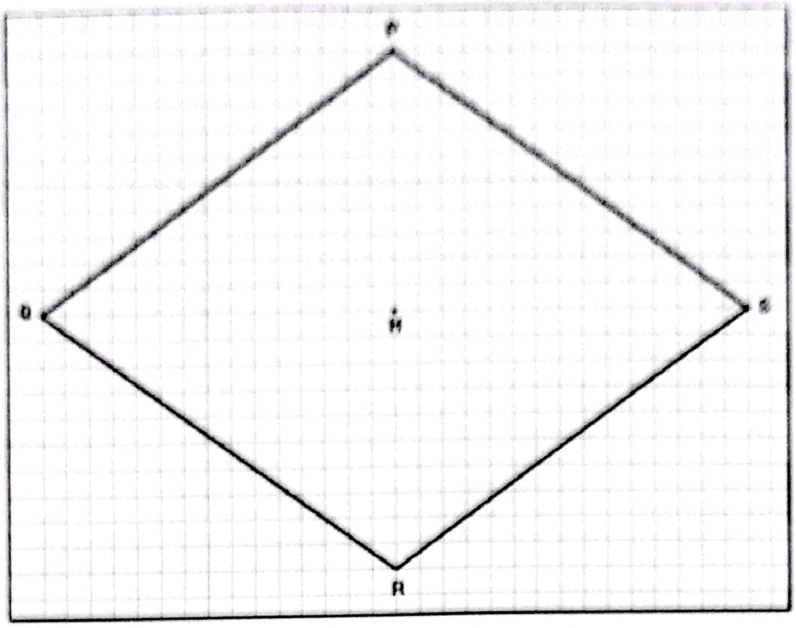
2) Determine em $\overrightarrow{HP}$ um ponto P', de forma que $HP' = \frac{1}{5}HP$.

3) Determine em $\overrightarrow{HQ}$ um ponto Q', de forma que $HQ' = \frac{1}{5}HQ$.

4) Determine em $\overrightarrow{HR}$ um ponto R', de forma que $HR' = \frac{1}{5}HR$.

5) Determine em $\overrightarrow{HS}$ um ponto S', de forma que $HS' = \frac{1}{5}HS$.

6) Construa o polígono P'Q'R'S'.



O processo utilizado para a construção do losango P'Q'R'S' chama-se homotetia, cujo centro da transformação foi o ponto H e sua razão $k = \frac{1}{5}$.

Considerando cada $\square$ como unidade de medida de área:

a) Determine a área do losango PQRS.

A_{PQRS} = ______________________

b) Determine a área do losango P'Q'R'S'.

$A_{P'Q'R'S'}$ = ______________________

c) Calcule a razão entre as áreas dos losangos PQRS e P'Q'R'S'.

$\frac{A_{P'Q'R'S}}{A_{PQRS}}$ = ______________________

Atividade VI

Comparando os itens 5 das atividades I, II, III e IV e o item c) da atividade V com as suas respectivas razões de proporcionalidade (k) utilizadas na construção das figuras, o que você conclui?