

# RELATÓRIO LEAMAT

AS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS SENO E COSSENO: UM ESTUDO COM O  
GEOGEBRA

ENSINO E APRENDIZAGEM DE DEMONSTRAÇÃO

ANDRÉIA GOMES DE SOUZA OLIVEIRA  
DANIELLE PEIXOTO ARTILES  
GABRIELA DO ROSARIO SILVA  
TIAGO MOTA BARRETO

CAMPOS DOS GOYTACAZES / RJ

2011.2

*Aprovado  
11/06/2012*

ANDRÉIA GOMES DE SOUZA OLIVEIRA  
DANIELLE PEIXOTO ARTILES  
GABRIELA DO ROSARIO SILVA  
TIAGO MOTA BARRETO

## RELATÓRIO LEAMAT

AS RAZÕES TRIGONOMÉTRICA SENO E COSSENO: UM ESTUDO COM O  
GEOGEBRA

ENSINO E APRENDIZAGEM DE DEMONSTRAÇÃO

Trabalho apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, Campus Campos-Centro, como requisito parcial para conclusão da disciplina Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática III do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Mônica Souto da Silva  
Dias

CAMPOS DOS GOYTACAZES / RJ

2011.2

## SUMÁRIO

1) Introdução.....	3
2) Objetivos.....	3
3) Atividades desenvolvidas.....	3
3.1) Elaboração da atividade.....	3
3.2) Relato da aplicação da atividade na turma do LEAMAT II.....	3
3.3) Relato da aplicação da atividade para a turma regular.....	4
4) Conclusões.....	9
5) Referências.....	10
6) APÊNDICES.....	11
Apêndice A: Atividade(s) aplicada(s).....	12

## 1) Introdução

No triângulo retângulo, os alunos estudam as razões trigonométricas de ângulos de até  $90^\circ$  sem aparente dificuldade. Entretanto, quando trabalham ângulos maiores no ciclo trigonométrico, é observado obstáculos na compreensão destas razões no ciclo, bem como da transição do triângulo retângulo para o ciclo trigonométrico.

Tendo em vista este fato, o uso do software de geometria dinâmica GeoGebra, pode auxiliar a formação de imagens mentais no ensino do ciclo trigonométrico (BRASIL, 2006)

A construção de atividades que conduzam o aluno a construir uma representação das razões trigonométricas seno e cosseno no ciclo trigonométrico, constituem outro viés deste trabalho, uma vez que propõe a construção do conhecimento de modo reflexivo pelos alunos, propiciando o exercício da argumentação, pois de acordo com NASSER e TINOCO,

“Embora desenvolver o raciocínio lógico seja um dos objetivos incluídos nos planejamentos de quase todos os professores de matemática, os alunos foram passando pela escola sem que fossem expostos à atividades que desenvolvesse seu raciocínio lógico ou que os preparassem para o domínio do processo dedutivo.” (NASSER e TINOCO, 2001, p.1)

## 2) Objetivos

Elaborar atividades que levem o aluno a compreender a passagem do seno e cosseno do triângulo retângulo para o ciclo trigonométrico, utilizando o *software* GeoGebra.

### 3) Atividades desenvolvidas

#### 3.1) Elaboração da Atividade

As atividades foram inspiradas no minicurso que foi ministrado na Semana de Matemática 2010, por um aluno do grupo, no Instituto Federal de educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, Campos dos Goytacazes, cujo tema foi *Funções trigonométricas no ciclo utilizando o software Geogebra*.

A escolha do software GeoGebra foi devido a sua fácil manipulação, além de ter sido utilizado no minicurso, do qual foi extraído o tema.

#### 3.2) Relato da aplicação da Atividade na turma do LEAMAT II

Durante a aplicação na turma do LEAMAT II, uma das professoras em formação iniciou o conteúdo utilizando o software de geometria dinâmica GeoGebra, cujas imagens foram projetadas numa tela por meio de um datashow. A professora sugeriu que uma aluna fosse ao computador para que fizesse a construção da figura seguindo um roteiro, tendo essa aluna conseguido fazer.

Em seguida foi entregue uma apostila para a turma contendo sete questões e foi disponibilizado um período de 20 minutos para que eles resolvessem até a terceira questão.

Após esse tempo, foi feita a correção de tais questões por uma das professoras em formação, que debateu com os alunos como eles resolveram as questões.

A representação do triângulo retângulo com a hipotenusa na posição horizontal, para esta turma não foi fator de dificuldade.

Logo após uma das professoras em formação discutiu a terceira e quarta questões com a turma.

Posteriormente, o professor em formação fez a construção do círculo trigonométrico, no qual os alunos deveriam construir junto com ele, não sendo possível por falta de computadores no local.

Não tendo tempo para terminar a construção a professora orientadora assumiu o trabalho, finalizando-o com a turma.

Durante a aplicação das atividades não houve alterações por parte dos alunos e dos professores.

### 3.3) Relato da aplicação da Atividade para a turma regular

A atividade foi aplicada em uma turma regular do 1º ano do Ensino Médio de uma escola estadual no município de Campos dos Goytacazes, no dia 24 de novembro de 2011, em duas horas. A professora regente permaneceu em sala durante todo o trabalho, intervindo quando julgou necessário.

A turma citada acima já havia estudado o conteúdo abordado na atividade. Embora este fato não tivesse sido previsto, ele ocorreu devido à disponibilidade de turmas de Ensino Médio, objeto da aplicação do trabalho. Contudo, a professora regente informou que ela havia utilizado uma abordagem expositiva.

Os professores em formação foram apresentados à turma pela professora orientadora, e, logo após, uma das professoras em formação iniciou as atividades utilizando o software de geometria dinâmica GeoGebra, cujas imagens eram projetadas numa tela por meio de um datashow. Ela construiu um ângulo qualquer e questionou os alunos como poderia ser encontrado o seno e cosseno daquele ângulo. Diante do silêncio da turma, a professora regente perguntou aos alunos: *Lembram o que nós estudamos?* Logo em seguida, a professora em formação afirmou que construiria uma perpendicular a um dos lados do ângulo porque precisaria do triângulo retângulo para encontrar o seno e cosseno. Deste modo, ela foi construindo e explicando oralmente o que estava sendo feito, sendo acompanhado atentamente pelos alunos, que participaram respondendo às perguntas que eram feitas pela professora em formação.

A construção citada no parágrafo anterior consistiu de um ângulo qualquer e de uma perpendicular a um dos lados do ângulo, formando um triângulo retângulo. Em seguida, foram medidos os lados do triângulo a fim de calcular o seno e cosseno do ângulo indicado.

A condução da professora em formação relatada no parágrafo acima constituiu um equívoco devido à problemas de planejamento e de comunicação entre os componentes do grupo em formação. A proposta era que os alunos observassem a constância da razão entre o cateto oposto e a hipotenusa, e entre o cateto adjacente e a hipotenusa, ao movimentar a reta perpendicular construída, obtendo vários triângulos retângulos. Após, a professora em formação deveria afirmar que estas razões recebem o nome de seno e cosseno do ângulo, respectivamente, e que estas razões o identificam.

Em seguida foi entregue uma apostila para a turma contendo sete questões e foi disponibilizado um período de 20 minutos para que eles resolvessem até a terceira questão.

Transcorrido esse tempo, foi feita a correção de tais questões por uma professora em formação, que solicitou aos alunos que mostrassem como eles haviam resolvido as duas primeiras questões. Alguns alunos apresentaram oralmente a sua solução, cujo registro (Figura 1) está a seguir:

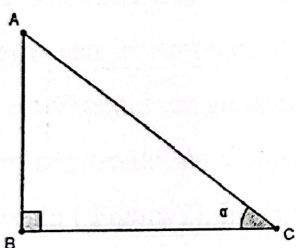
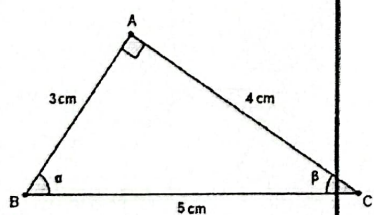
1) No triângulo retângulo dado abaixo, determine o que é pedido:	
	
$\text{sen } \alpha = \frac{AB}{AC}$	$\text{cos } \alpha = \frac{BC}{AC}$
2) Considere o triângulo abaixo e determine o que é solicitado:	
	
$\text{cos } \alpha = \frac{3}{5}$	$\text{cos } \beta = \frac{4}{5}$
$\text{sen } \alpha = \frac{4}{5}$	$\text{sen } \beta = \frac{3}{5}$

Figura 1: resolução de um aluno para as duas primeiras questões

A representação do triângulo retângulo com a hipotenusa na posição horizontal, foi fator de dificuldade para alguns alunos, com relação à localização da hipotenusa e catetos.

Posteriormente, uma das professoras em formação respondeu a terceira e quarta questões com a participação dos alunos, que mostraram compreender que em todo triângulo retângulo de hipotenusa com medida de uma unidade, o valor do seno e do cosseno dos ângulos coincide com o valor das medidas dos catetos oposto e adjacente respectivamente. Essa compreensão é importante para o entendimento da construção do círculo trigonométrico que virá a seguir.

Logo após, o professor em formação orientou a construção do círculo trigonométrico, tendo como apoio o roteiro constante na apostila, enquanto desenhava no GeoGebra cujas as imagens eram projetadas no quadro. Foi percebido, nesta atividade, que os alunos encontraram dificuldades com conceitos básicos que eles deveriam ter estudado em séries anteriores tais como retas paralelas, perpendiculares, ângulos. Por exemplo, no item 2 da seção *Construção do círculo trigonométrico*, os alunos não compreenderam a frase “Posicione um dos pontos de modo que um dos ângulos obtidos seja agudo”. Alguns não sabiam como desenhar um ângulo, e outros desconheciam ângulos agudos. Também demonstraram desconhecer a diferença entre reta, segmento de reta e semirreta, bem como retas paralelas e perpendiculares. Eles não apresentaram dificuldades na manipulação do software e o roteiro disponibilizado mostrou-se eficiente.

Entretanto, a deficiência dos conceitos geométricos já citados acima, impediu que os alunos tirassem melhor proveito do software. Este fato evidencia que o bom rendimento na resolução de problemas geométricos com o uso do software de geometria dinâmica pode estar atrelado a um conjunto de conhecimentos consistentes em geometria.

Após os alunos terem construído, no Geogebra, um círculo de raio um, e um ângulo agudo com vértice no centro do círculo ( Figura 2), iniciou-se um dialogo com a turma, com o objetivo de construir o círculo trigonométrico.

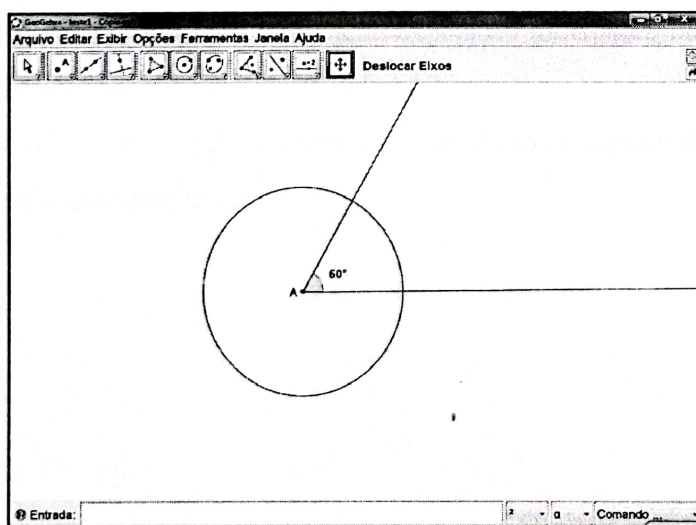


Figura 2 ↴

Considere P para a fala do professor em formação, A para a fala dos alunos e PR para fala do professor regente:

P: Como podemos calcular o seno e cosseno desse ângulo?

Seguiu-se um silêncio.

P: Vocês se lembram de como fizemos, no início da aula, para achar o seno e cosseno de um ângulo?

A: Traçou uma reta.

P: Mas que reta?

PR: Vocês lembram da aula que tivemos?

Seguiu-se um silêncio.

P: Lembram?

A: Uma reta paralela.

P: Não é uma reta paralela, é uma reta perpendicular.

Um professor em formação construiu uma reta perpendicular ao raio, passando pelo ponto de interseção do outro raio com o círculo.

P: E agora? Qual figura foi formada?

A: Um triângulo retângulo.

P: Como podemos calcular o seno e cosseno desse ângulo, a partir desse triângulo?

Os alunos não conseguiram dizer o que deveria ser feito. Foi necessária a intervenção dos professores em formação para que pudessem avançar no processo de construção do círculo trigonométrico. Daí em diante, um professor em formação foi construindo os elementos que compõem o círculo trigonométrico, utilizando uma exposição dialogada, buscando a participação dos alunos, no que foi atendido.

Ao término da construção, pode-se afirmar que os alunos compreenderam a construção e o funcionamento do círculo trigonométrico.



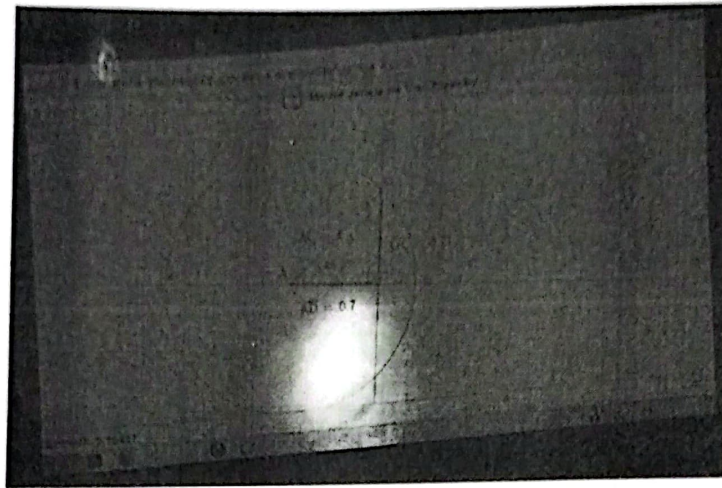


Figura 3: Círculo trigonométrico construído

Em seguida, foi solicitado aos alunos que resolvessem a última questão. Esta não foi discutida junto com eles, para que servisse como avaliação do trabalho desenvolvido. Devido ao fato de já ter sido esgotado o tempo da aula, alguns alunos não resolveram a questão. Dentre os 13 alunos participantes, oito responderam e cinco deixaram a questão em branco. Dos oito alunos que responderam, três acertaram completamente a questão; dois acertaram os valores e erraram a notação, e três alunos erraram completamente. A seguir as respostas dos alunos.

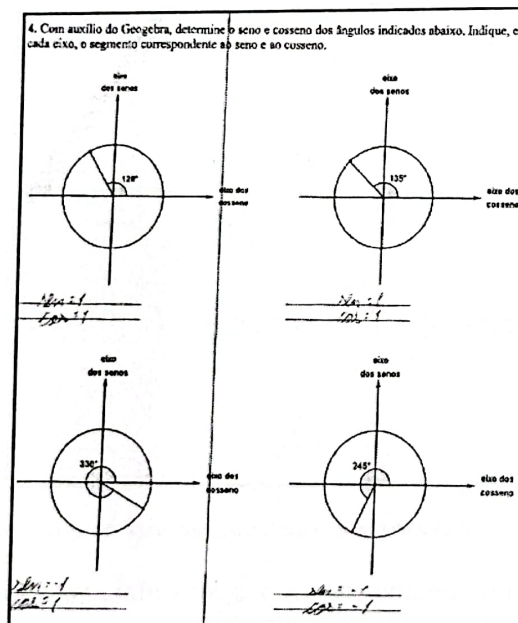


Figura 4: Resposta errada de um aluno

Os três alunos que erraram completamente a questão, parecem ter trabalhado em grupo, pois as respostas estavam idênticas. Os professores em formação não possuem dados para justificar as respostas apresentadas, entretanto, em uma das respostas, pode-se pensar que o aluno associou a medida do raio ao sinal do seno e cosseno em cada quadrante a qual pertencia o ponto.

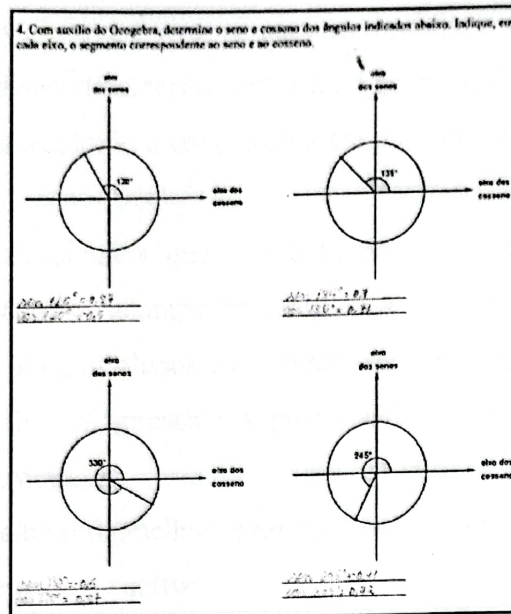


Figura 5: Resposta correta de um aluno

Três alunos responderam essa questão de forma correta.

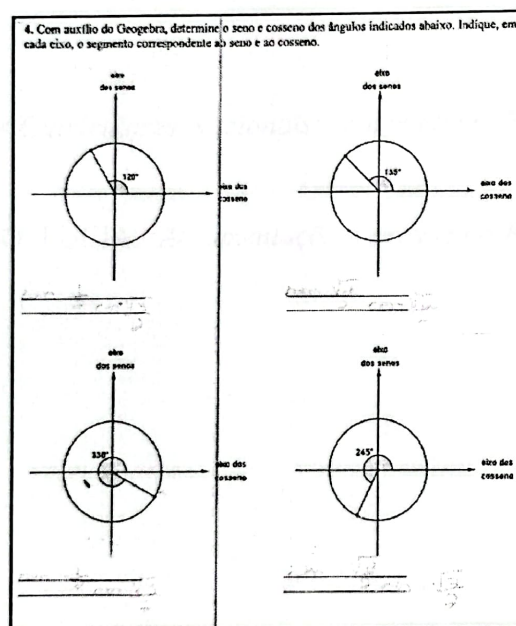


Figura 6: Resposta de um aluno com erro de notação

Os alunos que acertaram parcialmente a questão, cometeram erro de notação, talvez pelo fato desta não ter sido enfatizada durante a aula. Observou-se que uma das respostas foi dada utilizando-se radicais, infere-se que tal aluno não tenha utilizado o resultado fornecido pelo GeoGebra, utilizando seus conhecimentos anteriores.

#### 4) Conclusão

O trabalho cumpriu o seu objetivo, ainda que tenha ocorrido vários contra-tempos, tais como o *layout* do laboratório de informática, no qual os alunos sentavam-se de frente para parede e de

costas para o quadro, o que os levava a virar-se para acompanhar a exposição dos professores em formação, causando desconforto e desatenção. Outro fator de desequilíbrio foi o número escasso de computadores que sujeitavam os alunos a compartilharem o mesmo computador em grupos de dois ou três.

A presença de uma funcionária que estava tirando fotos para a carteira de identidade estudantil também prejudicou o acompanhamento dos alunos na construção do círculo trigonométrico. Apesar deste fato, os alunos envolveram-se com a aula porque eles nunca tiveram uma abordagem como a que lhes foi apresentada, propiciando, então, uma melhor compreensão do conteúdo com auxílio do software.

Percebe-se que o trabalho seria melhor aproveitado se os alunos soubessem alguns conceitos básicos de Geometria e o manuseio do software.

Os alunos expuseram que trabalhar diretamente com o software foi interessante e enriquecedor, pois, até o momento, eles eram apenas espectadores da professora.

#### 5) Referências

BRASIL. MEC. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática – Ensino Médio*. Brasília: MEC, 1998.

NASSER, LILIAN; TINOCO, LÚCIA. *Argumentação e provas no Ensino da Matemática*. Rio de Janeiro: UFRJ, 2001

## APÊNDICES

Apêndice A. Atividade(s) aplicada(s)

## Apêndice A: Atividade(s) aplicada(s)

Curso: Licenciatura em Matemática

2011.2

Disciplina: LEAMAT III

Linha de pesquisa: Demonstração

Orientador(a): Dr<sup>a</sup> Mônica Souto

Professores em formação: Andréia Gomes de Souza Oliveira

Danielle Peixoto Artilles

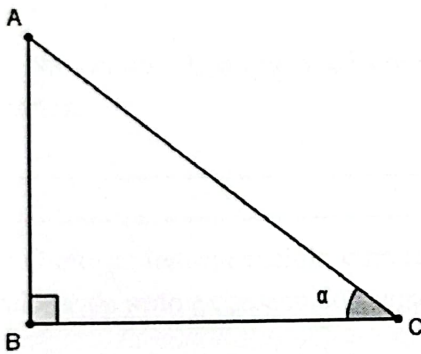
Gabriela do Rosario Silva

Tiago Mota Barreto

### As razões trigonométrica seno e cosseno

Vamos fazer uma breve revisão sobre duas razões trigonométricas: seno e cosseno.

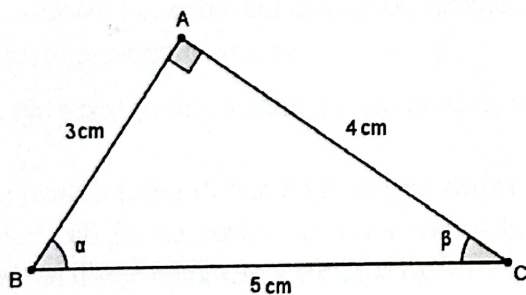
1) No triângulo retângulo dado abaixo, determine o que é pedido:



$\text{sen } \alpha = \text{---}$

$\text{cos } \alpha = \text{---}$

2) Considere o triângulo abaixo e determine o que é solicitado:



$\text{cos } \alpha =$

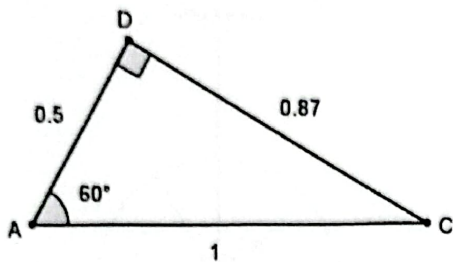
$\text{cos } \beta =$

$\text{sen } \alpha =$

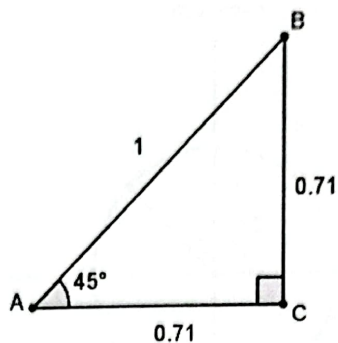
$\text{sen } \beta =$

3) Calcule o seno e cosseno dos ângulos indicados nas figuras abaixo:

a)



b)



4) Na questão 3, o que você observa com relação ao valor do seno e cosseno e as medidas dos catetos.

---

---

5) O que podemos concluir, com relação ao triângulo retângulo de hipotenusa de medida 1, sobre os valores do seno e cosseno dos ângulos agudos desse triângulo.


---


---

### Construção do círculo trigonométrico

Vamos construir um círculo trigonométrico no ambiente de geometria dinâmica Geogebra. Para isso, siga o roteiro abaixo.

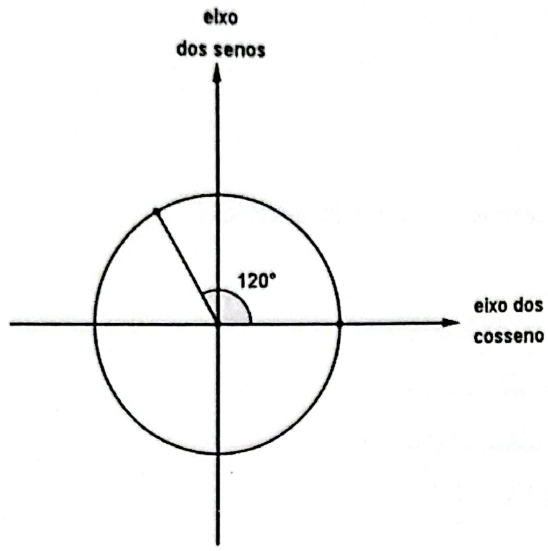
1. No sexto ícone da barra de ferramentas, selecione com o botão esquerdo do mouse a pequena seta

na parte inferior direita do ícone, ao abrir o menu, escolha a opção  “Círculo dados centro e raio”, clique no centro do plano com o botão esquerdo do mouse. Logo em seguida abrirá uma janela, digite o número 1 e clique ok.

2. No terceiro ícone da barra de ferramentas, selecione  “Segmento definido por dois pontos”. Agora construa dois raios quaisquer na circunferência, clicando no centro da circunferência, e depois num ponto qualquer da circunferência. Posicione um dos pontos de modo que um dos ângulos obtidos seja agudo.

3. Determine o seno e cosseno do menor ângulo formado entre os raios.

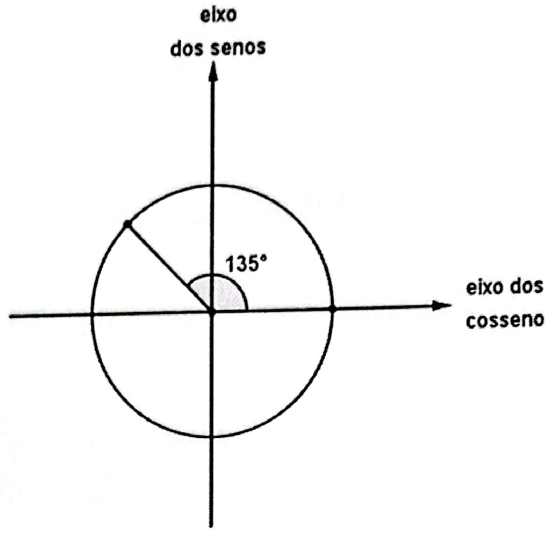
4. Com auxílio do Geogebra, determine o seno e cosseno dos ângulos indicados abaixo. Indique, em cada eixo, o segmento correspondente ao seno e ao cosseno.




---



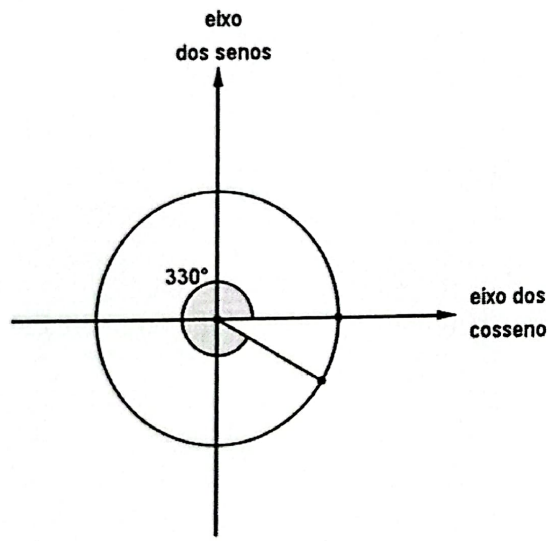
---




---



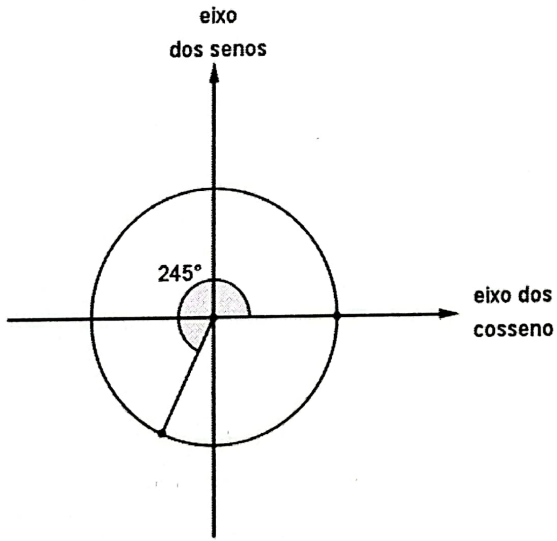
---




---



---




---



---



Campos dos Goytacazes, 12 de junho de 2012.

Andréia G. S. Oliveira

Danielle Pereira Antunes

Gabriela do Rosário Silva

Luigo Mota Barreto