

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
FLUMINENSE

Secretaria de
Educação Profissional
e Tecnológica

Ministério da
Educação

RELATÓRIO LEAMAT III

ENSINO E APRENDIZAGEM DE DEMONSTRAÇÕES

SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM TRIÂNGULO

JOSUÉ RANGEL DE SIQUEIRA
JULIANA BERNARDO PEPE
MAYCK GOMES MARVILA

CAMPOS DOS GOYTACAZES / RJ
2013.2

JOSUÉ RANGEL DE SIQUEIRA
JULIANA BERNARDO PEPE
MAYCK GOMES MARVILA

RELATÓRIO LEAMAT III

ENSINO E APRENDIZAGEM DE DEMONSTRAÇÕES

SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM TRIÂNGULO

Trabalho apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, Campus Campos-Centro, como requisito parcial para conclusão da disciplina Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática III do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Mônica Souto da Silva
Dias

CAMPOS DOS GOYTACAZES / RJ
2013.2

Sumário

Introdução.....	3
1) Objetivos	7
2) Atividades Desenvolvidas.....	7
2.1) Elaboração da Atividade.....	7
2.2) Relato da aplicação da atividade na turma do LEAMAT II	7
2.3) Relato da aplicação da atividade para a turma regular	8
3) Conclusão	14
Referências	16
Apêndices	17
Apêndice A: Atividade aplicada na turma do LEAMAT II	18
Apêndice B: Atividades aplicadas na turma regular	23

Introdução

O tema escolhido possui grande importância dentro da Geometria. A vivência acadêmica dos autores aponta o desconhecimento por parte dos alunos, da justificativa matemática do fato de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° .

Por outro lado, o processo de demonstração do fato matemático citado no parágrafo anterior, possibilita que o aluno vivencie cada um dos níveis de validação citados a seguir (BALACHEFF, 1987, apud ORDEM, ALMOULOUD, 2012).

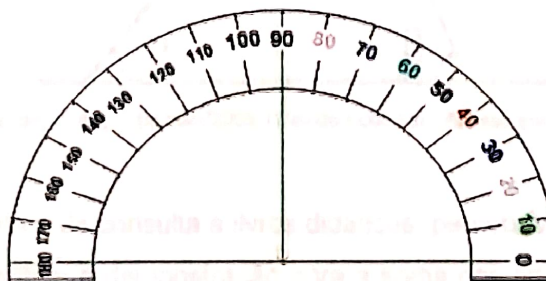
O primeiro nível de validação é o empirismo ingênuo, no qual a conclusão é obtida a partir da verificação de poucos casos, e sem questionamentos. Como exemplo deste nível de validação, é apresentado nas figura 1, 2 e 3 possibilidades de verificação do fato de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180. Na Figura 1, é possível perceber como é feita a verificação da soma dos ângulos internos de um triângulo, por meio de recortes. Na figura 2, o transferidor é utilizado para medir cada ângulo de um triângulo, a fim de calcular a soma de suas medidas. E na figura 3, a constatação de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° ocorre por meio de dobradura e justaposição.

Figura 1: Recortes



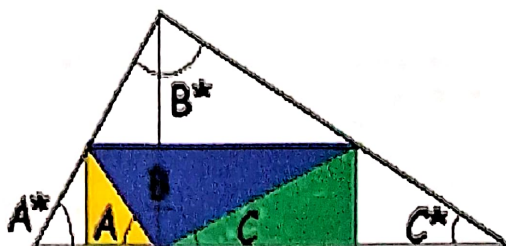
Fonte: <http://fatasmaticos.blogspot.com.br/2009/07/soma-dos-angulos-internos-de-um.html>.
Acesso em: 10 jun 2013

Figura 2: Transferidor



Fonte: http://www.escolovar.org/mat_angulos_medir01.html.
Acesso em: 10 jun 2013

Figura 3: Dobraduras



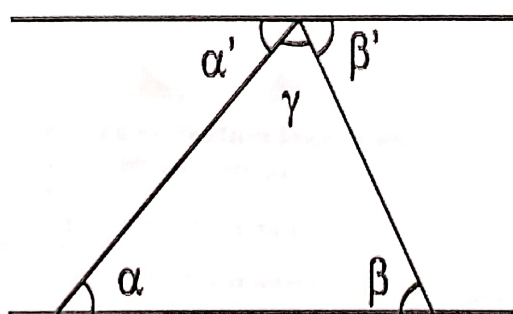
Fonte: http://matematicaemacao7.blogspot.com.br/2010_04_01_archive.html.
Acesso em: 10 jun 2013

O segundo nível de validação é chamada de experiência crucial, que é alcançada após a verificação de um caso especial.

O terceiro nível é o exemplo genérico, em que por meio de operações sobre um exemplo, deseja-se explicitar as razões que confirmam a propriedade.

O último nível de validação é a experiência mental, no qual há uma construção cognitiva mais complexa, usando uma rede de implicações matemáticas baseada em axiomas, postulados e teoremas. Nesta etapa, os exemplos são usados para ilustrar a justificação e argumentação. É o que ocorre na utilização dos conceitos e propriedades das retas paralelas cortadas por uma transversal, para demonstrar a soma dos ângulos internos de um triângulo (figura 4).

Figura 4: Demonstração usando o paralelismo

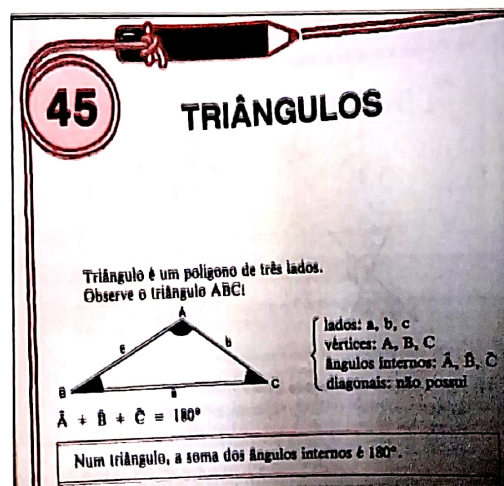


Fonte: <http://blog.ricbit.com/2009/11/lei-de-ricbit.html> Acesso em: 10 jun 2013

Por meio de consulta a livros didáticos, percebeu-se que eles, em sua maioria, não apresentam a demonstração para a soma dos ângulos internos de um

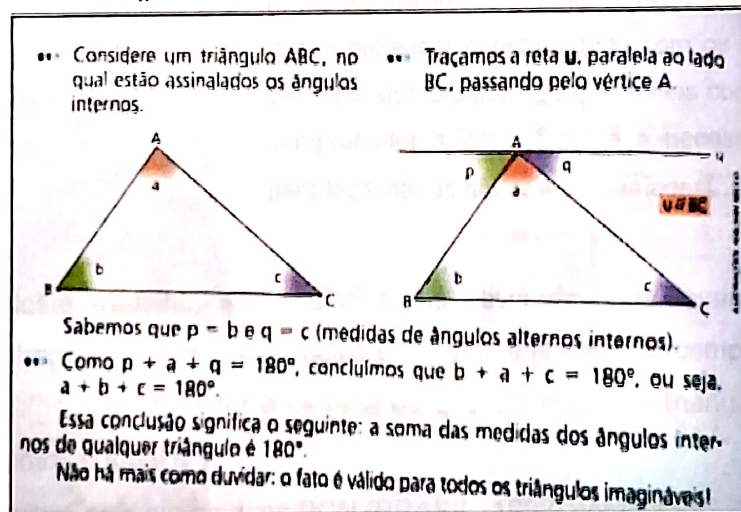
triângulo, apenas afirmam essa verdade, sem apresentar a confirmação existente para todos os casos, conforme é possível visualizar nas figuras a seguir.

Figura 5: Abordagem em um dos livros didáticos.



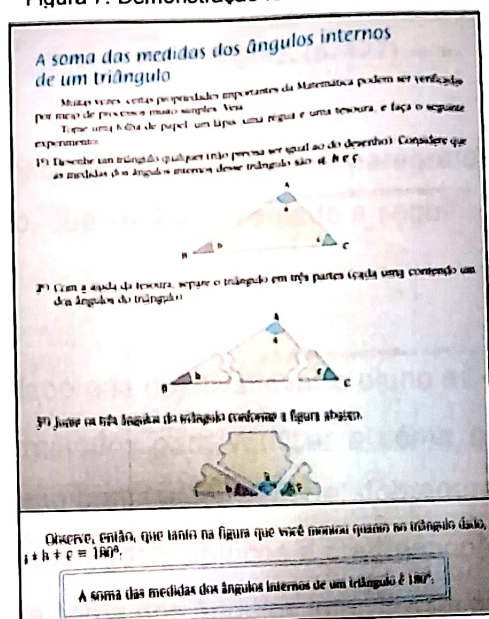
Fonte: CHEMELLO, 1989, p.94

Figura 6: Demonstração em um dos livros didáticos.



Fonte: IEZZI, DOLCE; 1997 p.139

Figura 7: Demonstração feita com recorte.



Fonte: GIOVANNI, 1999 p. 268 e 269.

A importância de fazer uma demonstração para provar uma verdade matemática é enfatizada nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), que afirmam que:

(...)as atividades de geometria são muito propícias para que o professor construa junto com os seus alunos um caminho, que a partir de experiências concretas leve-os a compreender a importância e a necessidade da prova para legitimar as hipóteses levantadas(...) (p. 126)

Neste trabalho, serão elaboradas atividades que levam os alunos a constatar a fragilidade das experiências concretas a fim de que compreendam que é necessário algo mais para ter a certeza de que em qualquer triângulo a soma dos ângulos internos é igual a 180° .

Sobre este aspecto, os PCN (BRASIL, 1998) comentam:

A exemplificação num contexto pode apenas desempenhar um papel de fontes de conjecturas a serem provadas formalmente. Um exemplo desse fato pode ser identificado na comprovação de que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo vale 180° , feita por

decomposição e composição de um modelo material de um triângulo. (p. 127)

Tendo em vista as afirmações nos parágrafos anteriores, formulou-se e aplicou-se este trabalho, que será apresentado a seguir.

1) Objetivos

A proposta elaborada objetiva levar o aluno a:

1. usar diferentes métodos para verificar a soma dos ângulos internos de um triângulo, tais como transferidor, recorte, dobradura e software GeoGebra;
2. perceber que os métodos empíricos e pragmáticos são falíveis;
3. demonstrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° ;

2) Atividades Desenvolvidas

2.1) Elaboração da Atividade

As atividades foram elaboradas tendo em vista ser algo dinâmico, de modo que todos os alunos pudessem participar efetivamente e construir o conhecimento individualmente. Teve-se o cuidado de organizar as atividades em grau crescente de dificuldade. À medida que vai avançando, o aluno tem a oportunidade de ampliar um conceito e no final concluir que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180° , além de utilizar quatro meios distintos para investigar o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo.

A pesquisa para a elaboração do presente trabalho deu-se por meio de consulta a livros didáticos do Ensino Fundamental, a uma dissertação (ORDEM, ALMOULOU, 2012) e a questões de vestibulares que envolvem o assunto abordado.

2.2) Relato da aplicação da atividade na turma do LEAMAT II

A atividade foi aplicada na turma do LEAMAT II para as professoras e as alunas presentes. Elas não tiveram dificuldade na resolução da atividade, visto este ser um conceito de domínio de todos. Houve unanimidade na aprovação e

recomendação da apresentação do trabalho, salvo algumas sugestões de alterações, que serão mencionadas a seguir.

Na primeira questão foi sugerida a correção da notação do ângulo, ou seja, a colocação do acento circunflexo sobre a letra.

Na segunda questão, os professores em formação auxiliaram os alunos no manuseio do transferidor. Foi recomendado este procedimento na aplicação na turma regular.

Nas questões três e quatro, a proposta era apresentar duas formas de verificação da soma dos ângulos internos do triângulo, a saber, dobradura e recorte. Após, os alunos deveriam colar num espaço retangular destinado para isso. A sugestão apresentada foi que tais espaços fossem aumentados, a fim de que os triângulos dobrados e recortados coubessem no referido retângulo.

A próxima questão trabalha retas paralelas cortadas por uma transversal, conteúdo necessário para subsidiar a proposta do trabalho. Foi sugerida a retirada de um dos itens, alegando-se que ficou muito repetitivo.

A seguir, a questão constituía-se na formalização da demonstração, e a orientação aqui recebida foi de que toda a resposta fosse escrita no quadro, a partir das palavras utilizadas pelos próprios alunos.

A atividade foi concluída com duas questões de vestibular que abordavam o tema ora apresentado. Porém, sugeriu-se que as questões fossem alteradas, devido ao fato de terem sido retiradas de vestibulares de pouca expressão e alegando-se que as questões eram de um elevado grau de dificuldade. Tal sugestão foi acatada, trocando-se ambas as questões por uma outra.

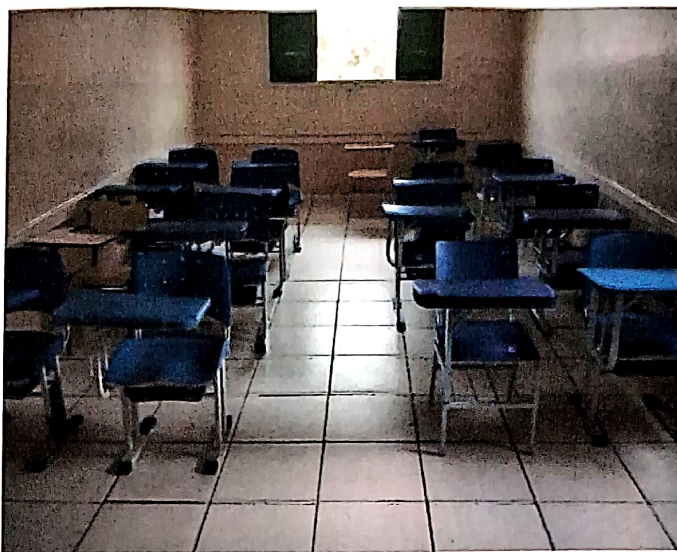
2.3) Relato da aplicação da atividade para a turma regular

O trabalho foi aplicado no dia 25 de outubro de 2013, numa turma do 8º. ano de uma escola estadual em Travessão, distrito do município de Campos dos Goytacazes, durante 2h15min.

Havia vinte alunos na sala de aula, porém nem todos chegaram na hora certa e alguns precisaram pegar sua carteira em outra turma, porque as que haviam na sala não eram suficientes.

A proposta foi que os alunos trabalhassem em dupla, por isso as carteiras já foram agrupadas conforme visto na figura abaixo.

Figura 8: Arrumação das carteiras em dupla



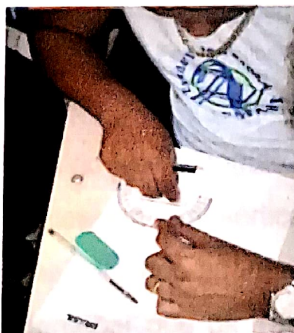
Fonte: Autores

Porém, quando os alunos chegaram, arrastaram as carteiras, colocando-as da forma como desejaram. Isto foi permitido, com a condição de que ninguém sentasse sozinho, mas todos ficassem perto de algum colega.

Após os alunos em formação se apresentarem, foram entregues as atividades aos alunos. O trabalho iniciou-se com a identificação dos elementos de um triângulo. Nesta questão, os alunos tiveram alguma dificuldade e a maioria estava receosa em responder. Na representação escrita, alguns estudantes confundiram o vértice com o ângulo e, na identificação, confundiram os vértices com os lados, que foi esclarecido pelos alunos em formação.

Após, foi feita uma questão que exigia o uso do transferidor, a fim de verificar a medida de cada ângulo de um triângulo. Foi preciso auxiliá-los na carteira, conforme Figura 9, pois nenhum deles sabia manusear corretamente tal instrumento de medida.

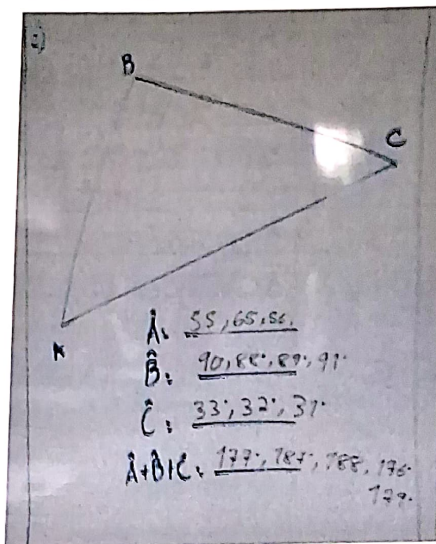
Figura 9: Auxílio ao uso do transferidor



Fonte: Autores

Foi dada a oportunidade de todos dizerem qual valor da medida encontraram para cada ângulo e a soma destes, sendo registrado no quadro as diferentes repostas. Foi notável que nenhum aluno encontrou como soma para os ângulos internos o valor de 180° . (Figura 10).

Figura 10: Registro das respostas dos alunos.



Fonte: Autores

Foi interessante perceber que, já a partir deste momento, os alunos se interessaram e ficaram animados e empolgados. Um deles manifestou-se na sua avaliação final expressando sua satisfação em ter tido a oportunidade de utilizar o transferidor (Figura 11).

Figura 11: Avaliação de um aluno

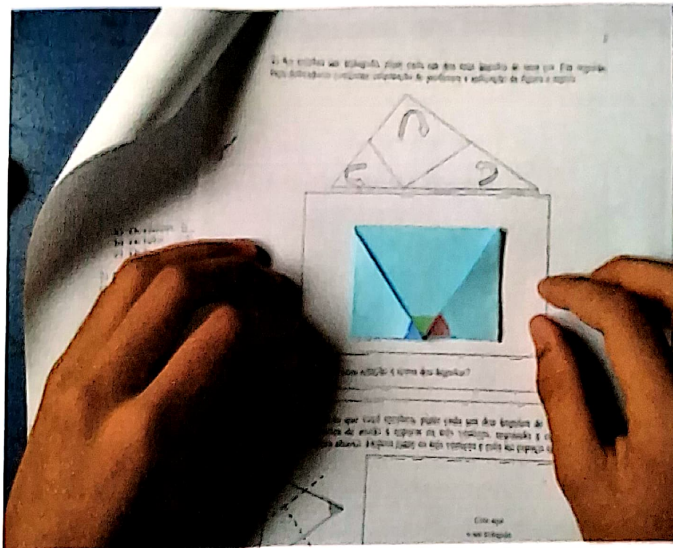
Eu gostei de tudo por que, eu aprendi a usar medidor e transferidor e gostei dos professores. São todos muito legais.

Fonte: Autores

Em seguida foi distribuído um triângulo confeccionado em papel para cada aluno e solicitado que pintassem um vértice de cada cor. Todos ficaram animados neste momento. Por meio da dobradura, orientada pelos professores em formação, os alunos puderam perceber que os três vértices unidos formavam um ângulo raso (Figura 12). Quando perguntado qual era a medida deste ângulo, que é

o mesmo que meia volta, um aluno disse "90°". Mas logo a informação foi corrigida por outro aluno e a atividade compreendida.

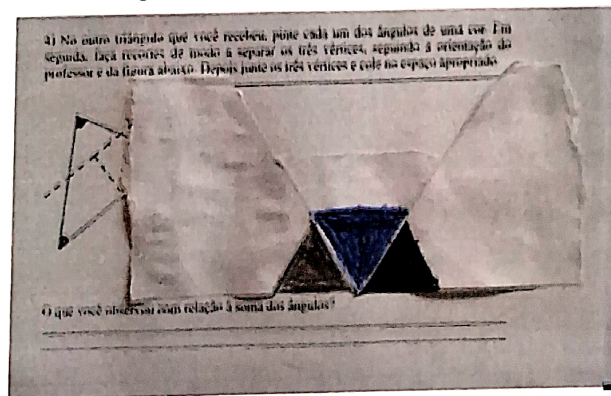
Figura 12: Dobradura feita por um aluno



Fonte: Autores

Logo depois foi distribuído um outro triângulo para cada aluno, pedindo-lhes que novamente pintassem cada vértice de uma cor. O recurso utilizado neste momento foi o recorte (Figura 13) e a conclusão obtida foi a mesma do exercício anterior, porém a concluíram com mais facilidade.

Figura 13: Recorte feito por um dos alunos



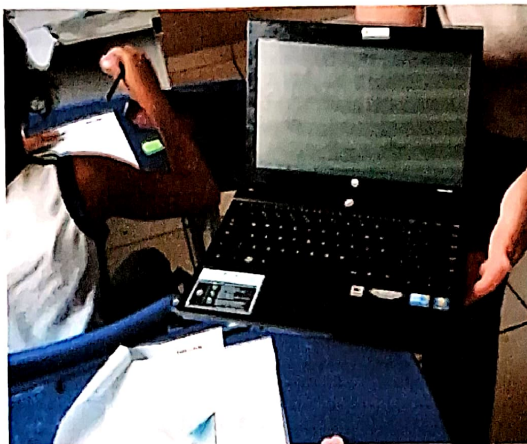
Fonte: Autores

Em ambas atividades acima mencionadas, os professores em formação auxiliaram os alunos em suas carteiras.

O recurso utilizado na sequência foi o computador, com um *software* de geometria dinâmica chamado *GeoGebra*, em que foi possível a manipulação de um

triângulo a fim de verificar se a soma dos ângulos internos deste polígono é de fato igual a 180° . A escola não possui laboratório de informática, televisão nem projetor multimídia, por isso, esta etapa da atividade foi feita com um notebook, sendo manipulado apenas por um dos professores em formação, que percorreu a sala mostrando aos alunos (Figura 14).

Figura 14: Verificação no Geogebra

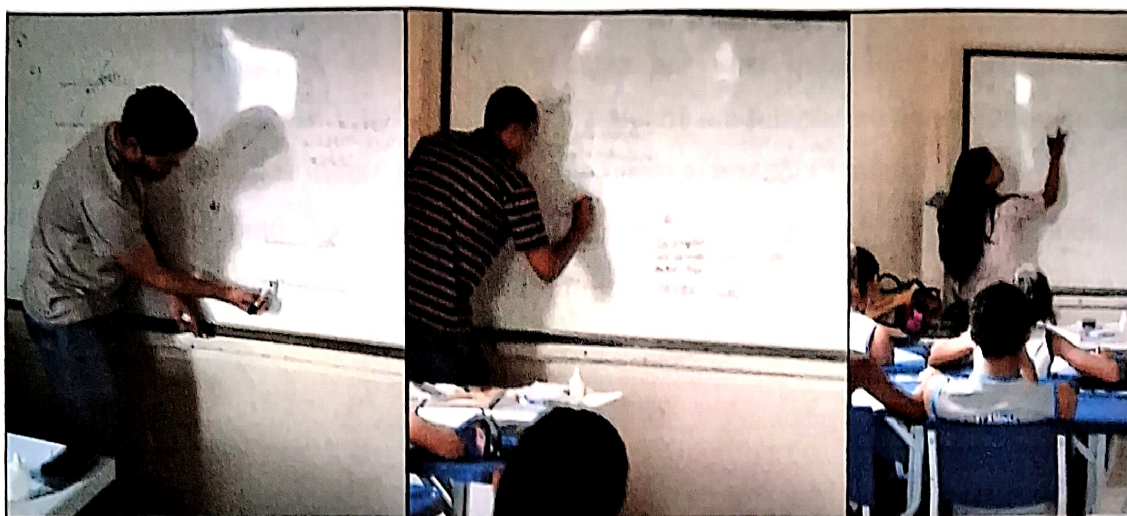


Fonte: Autores

Em dado momento uma aluna disse: "Estou gostando de hoje, porque não estamos tendo aula de Matemática", ao que um dos professores em formação respondeu: "Mas esta é uma aula de Matemática! Só que diferente". Diante deste depoimento, pode-se inferir que as aulas de tal disciplina geralmente devem ser extremamente expositivas.

Como é necessário o uso do conteúdo retas paralelas cortadas por uma transversal e das propriedades dos ângulos formados por estas retas, para a demonstração de que a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180° , foram discutidas e resolvidas questões que revisavam e reforçavam estes fatos matemáticos (Figura 15).

Figura 15: Exercícios de revisão

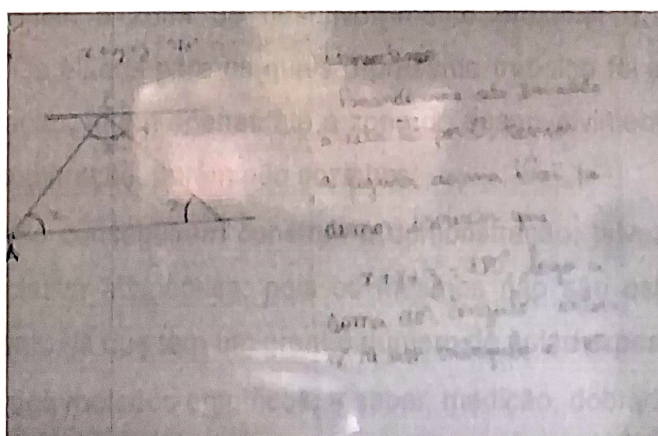


Fonte: Autores

Na questão que abordava ângulos suplementares, a maioria dos alunos respondeu acertadamente. Em outros casos, que envolviam conceitos de ângulos correspondentes ou alternos internos, poucos alunos participaram, alguns acertando outros errando.

O final da atividade consistia em se fazer a demonstração propriamente dita, na qual esperava-se que os alunos conseguissem resolver sozinhos, o que não ocorreu. Então a demonstração foi construída com a participação dos alunos, sendo esta insistentemente estimulada pelos professores em formação. Toda a construção da demonstração foi registrada no quadro e os alunos a copiaram (Figura 16).

Figura 16: Demonstração



Fonte: Autores

A última atividade da apostila era uma questão de vestibular, cuja finalidade era testar o conhecimento dos alunos em relação ao conceito recém visto, ficando os alunos felizes ao verem que haviam acertado a resposta.

Como forma de agradecimento pela participação dos alunos, os professores em formação reproduziram um jogo relacionado a este conteúdo e, no final da aula, o sortearam entre os alunos. Houve ansiedade e alegria neste momento.

3) Conclusão

O trabalho foi uma experiência enriquecedora para os professores em formação. Foi o primeiro contato do grupo com uma turma regular, o qual deixou uma boa impressão, pois os alunos interagiram e participaram ativamente no processo de construção do conhecimento.

Os professores em formação terminaram a apresentação com uma sensação de realização pessoal e confirmação da vocação profissional.

Os alunos compreenderam que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° . Porém, a demonstração não foi construída por eles, sozinhos, apenas com o auxílio dos professores em formação.

Neste contexto, percebeu-se a exemplificação da teoria de Vygotsky (2007) a qual afirma que existem três estágios de aprendizagem: a zona de desenvolvimento potencial, a zona de desenvolvimento proximal e a zona de desenvolvimento real. Os alunos para os quais o presente trabalho foi aplicado, no que tange à demonstração, foram apenas até a zona de desenvolvimento proximal, ou seja, fizeram a demonstração, porém não sozinhos.

Os alunos não conseguiram construir a demonstração, talvez devido ao fato de não terem iniciativa acadêmica, pois os mesmos não são estimulados a buscarem o conhecimento, já que tem um grande número de aulas expositivas.

A utilização dos métodos empíricos, a saber, medição, dobradura, recorte e software, cumpriu seu objetivo no sentido de que não conseguiram provar de fato, que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° , além de suscitar a dúvida sobre a mesma. As atividades de medição, dobradura e recorte também

tiveram caráter motivador, propiciando o envolvimento dos alunos na construção do conhecimento.

Na aplicação do trabalho, não foi possível os alunos utilizarem o computador para construir uma conjectura sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo, sendo utilizado apenas um laptop para exibir para a turma a construção requerida. Devido a este fato, não foi possível observar a reação dos alunos durante a manipulação do software, uma vez que esta foi feita por um dos professores em formação. Entretanto, recomenda-se fortemente que esta ação seja realizada pelos alunos.

Foi feita uma avaliação pelos alunos, na qual houve unânime aprovação da aula aplicada. Abaixo, algumas destas avaliações (Figura 17).

Figura 17: Avaliação feita pelos alunos

<p>Eu gostei de trabalhar com o transferidor por eu gostar de, trabalhar com ele mas eu gostei de tudo e até de parabéns todos os 3 futuros professores.</p>
<p>Gostei foi ótimo aprender coisas novas e ter dificuldade em algumas coisas mas prestando atenção tudo se resolve mas a aula realmente foi excelente que meus absenteísmo a aula de vocês valeu.</p>
<p>Um, nada flita de ensinar matemática mais dinâmica</p>
<p>Eu gostei muito, foi legal os professores foram muito bons.</p>

Referências

- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** - Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>>. Acesso em: 20 mar. 2013
- CHAMELLO, Tereza. **Sem medo de aprender matemática**. 7ª série. São Paulo. Editora Ática, 1989
- GIOVANNI, José Ruy. PARENTE, Eduardo. **Aprendendo matemática**. 6ª série. São Paulo. Editora FTD, 1999
- IEZZI, Geilson. Dolce, Osvaldo. MACHADO, Antônio. **Matemática e realidade**. 7ª série. 1ª edição. São Paulo. Editora Atual, 1997
- ORDEM, Jacinto. **Três técnicas para uma prova pragmática de uma propriedade: soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo**. Disponível em: revistas.pucsp.br/index.php/pdemat/article/.../6843
- VYGOTSKY, L. S. **A Formação Social da Mente**. São Paulo: Martins Fontes, 2007.



... de

... ..

... ..

Apêndices

... ..

... ..



A =	_____
B =	_____
C =	_____
A + B + C =	_____

Apêndice A: Atividade aplicada na turma do LEAMAT II



Secretaria de
Educação Profissional
e Tecnológica

Ministério da
Educação



LABORATÓRIO DE ENSINO E APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA II LEAMAT II/ 2012.1

Linha de pesquisa: Ensino e Aprendizagem de Demonstrações

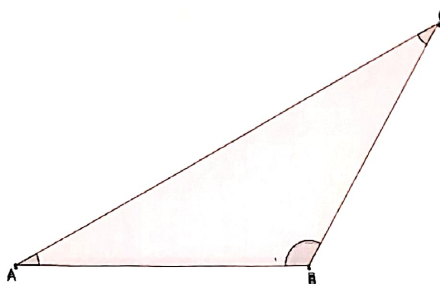
Professora orientadora: Mônica Souto da Silva Dias

Professores em formação: Josué de Siqueira, Juliana Pepe e Mayck Marvila

Aluno: _____ Data: ____/____/____

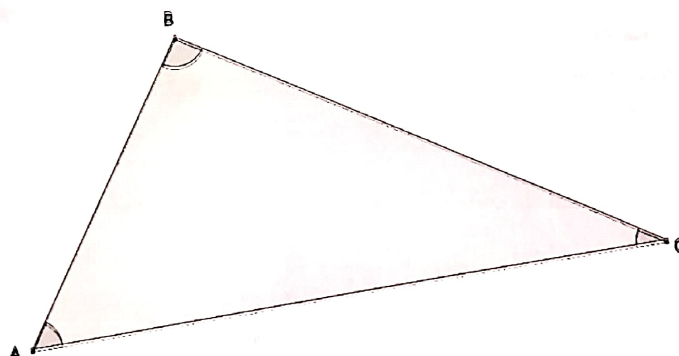
SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM TRIÂNGULO

1) Dado o triângulo abaixo, identifique:



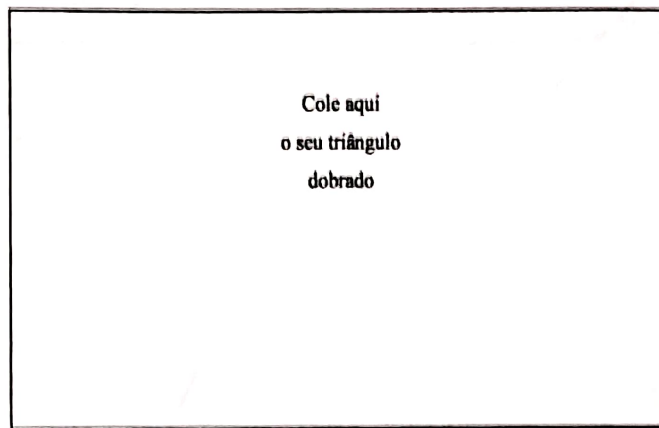
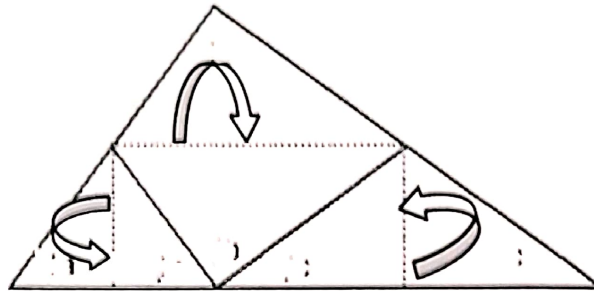
- a) Os vértices: _____
 b) Os lados: _____
 c) Os ângulos: _____

2) Com o transferidor, meça os ângulos internos do triângulo ABC dado abaixo e calcule a soma deles.



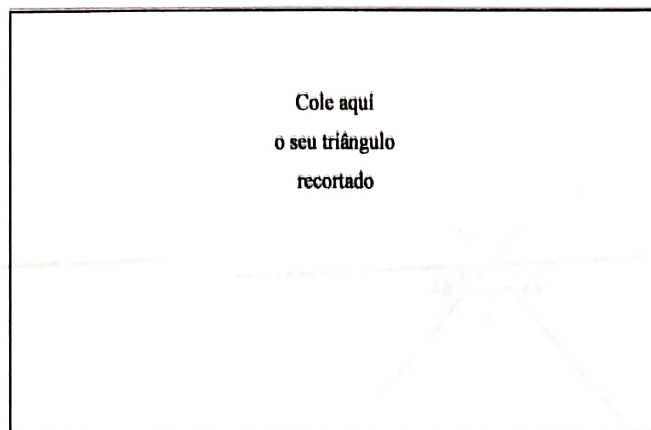
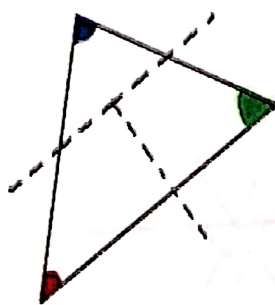
\hat{A}	=	_____
\hat{B}	=	_____
\hat{C}	=	_____
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$	=	_____

3) Ao receber um triângulo, pinte cada um dos seus ângulos de uma cor. Em seguida, faça dobraduras conforme orientação do professor e indicação da figura a seguir.



O que você observou com relação à soma dos ângulos?

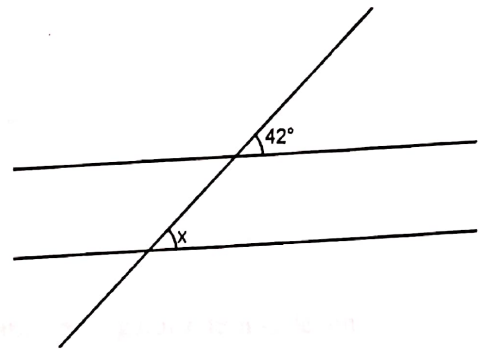
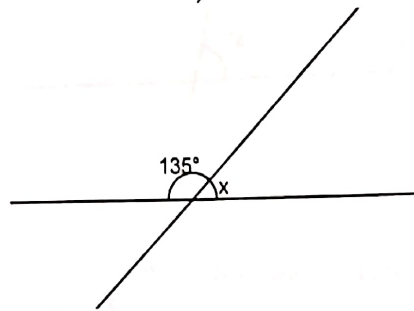
4) No outro triângulo que você recebeu, pinte cada um dos ângulos de uma cor. Em seguida, faça recortes de modo a separar os três vértices, seguindo a orientação do professor e da figura abaixo. Depois junte os três pedaços e cole no espaço apropriado.



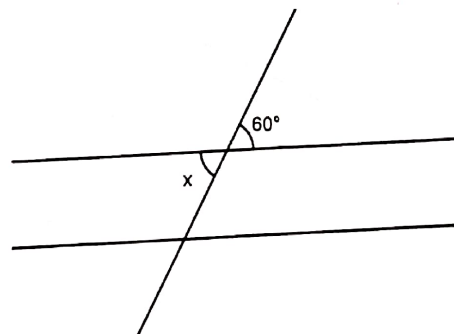
O que você observou com relação à soma dos ângulos?

5) Determine os valores das incógnitas nos casos abaixo, sendo $r \parallel s$:

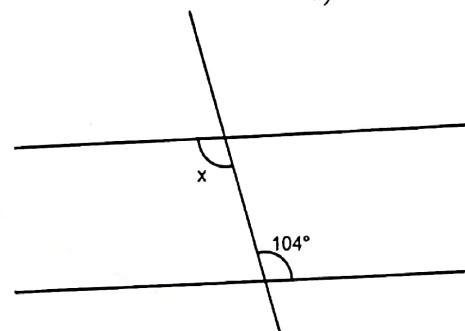
a)



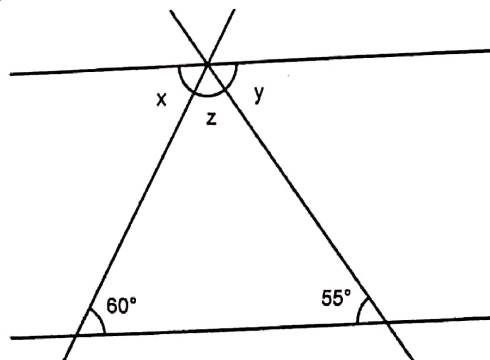
c)



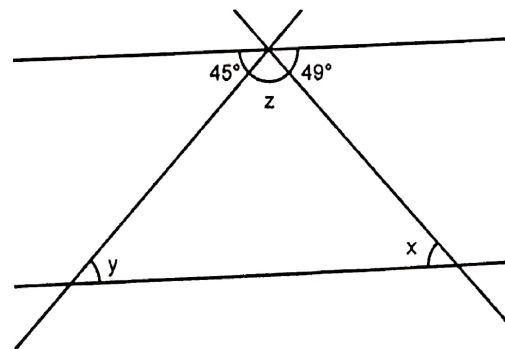
d)



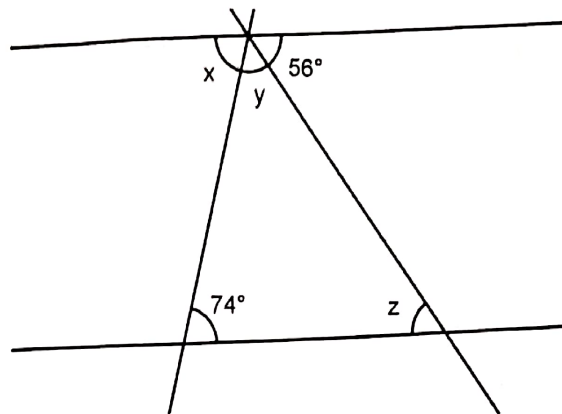
e)



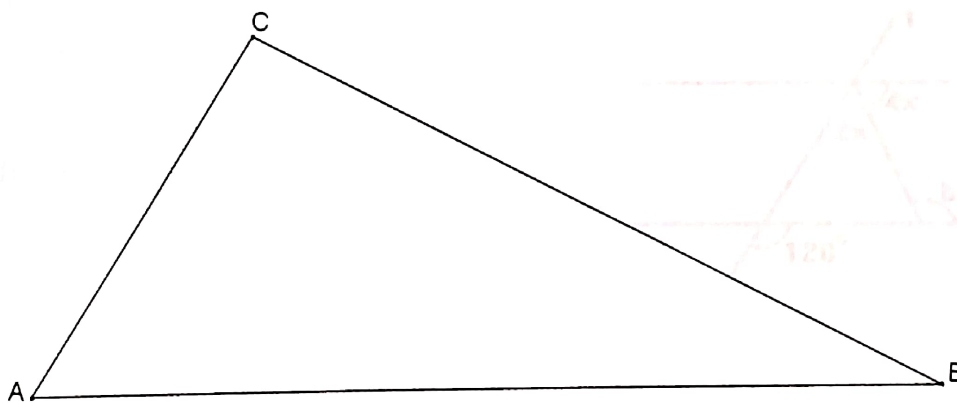
f)



g)



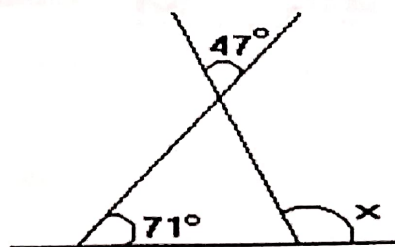
6) Utilize o conhecimento revisado para provar que a soma dos ângulos internos de um triângulo mede 180° .



7) Exercícios

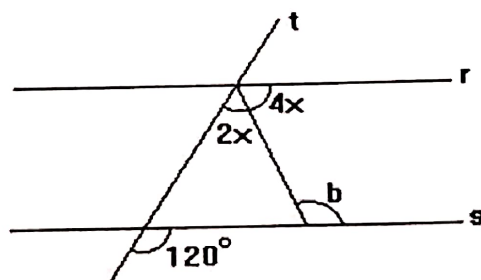
(VESTIBULINHO – SP) A medida x , do ângulo assinalado na figura abaixo é:

- a) 118°
- b) 125°
- c) 132°
- d) 133°



(UFGO) Na figura abaixo, as retas r e s são paralelas. A medida do ângulo b é:

- a) 100°
- b) 110°
- c) 120°
- d) 140°



Apêndice B: Atividades aplicadas na turma regular

LABORATÓRIO DE ENSINO E APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA II LEAMAT II/ 2012.1

Linha de pesquisa: Ensino e Aprendizagem de Demonstrações

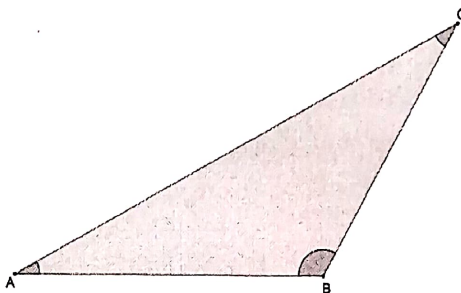
Professora orientadora: Mônica Souto da Silva Dias

Professores em formação: Josué de Siqueira, Juliana Pepe e Mayck Marvila

Aluno: _____ Data: ___/___/___

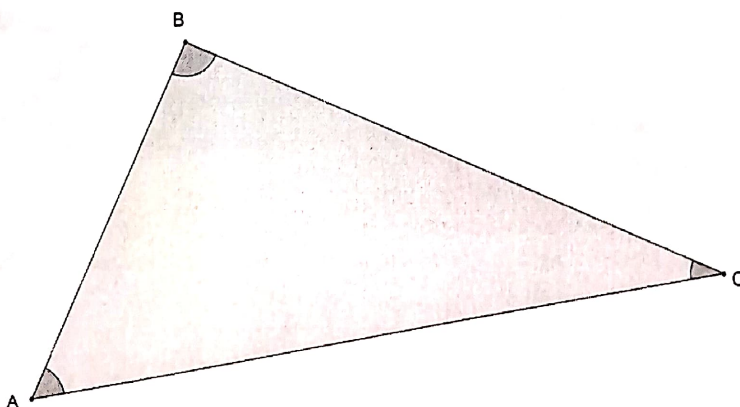
SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM TRIÂNGULO

1) Dado o triângulo abaixo, identifique:



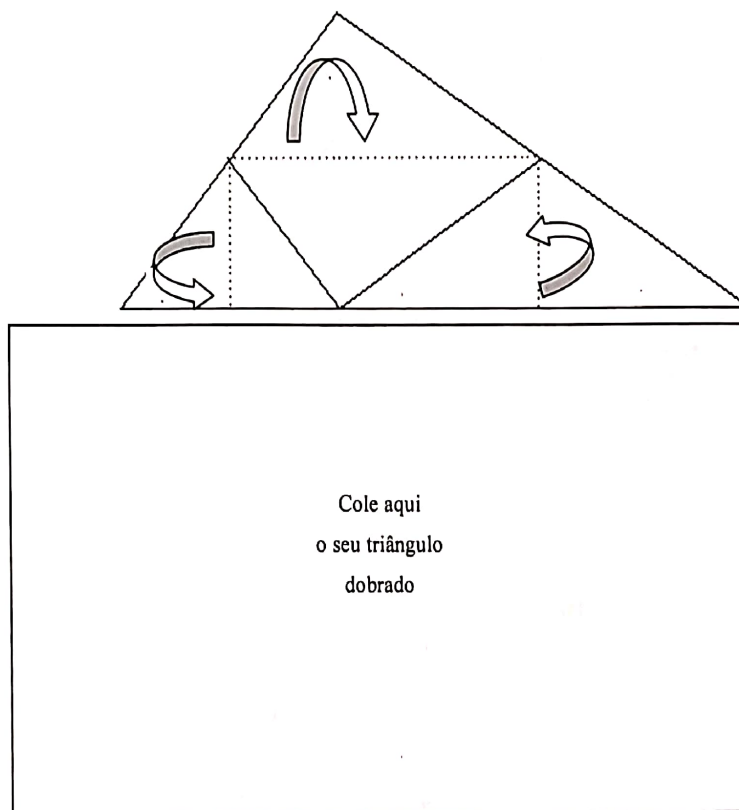
- a) Os vértices: _____
 b) Os lados: _____
 c) Os ângulos: _____

2) Com o transferidor, meça os ângulos internos do triângulo ABC dado abaixo e calcule a soma deles.



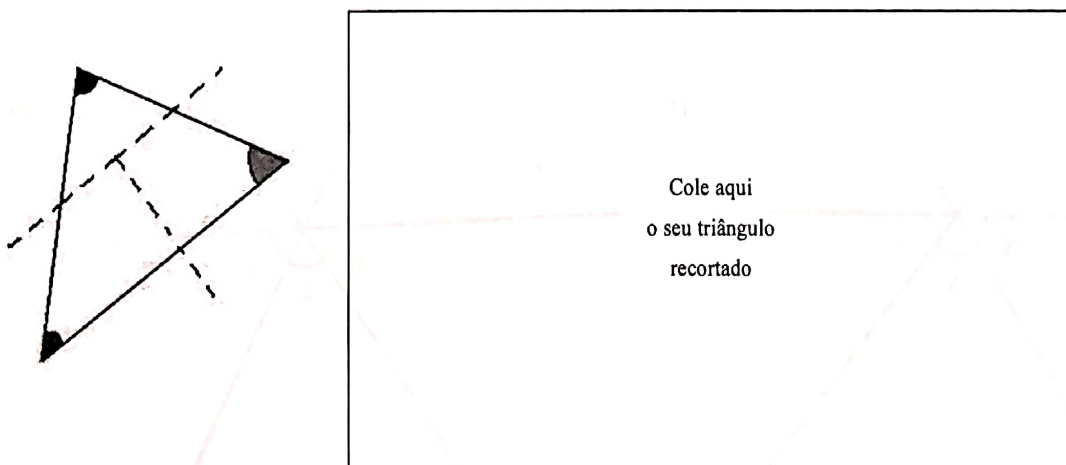
$\hat{A} =$ _____
$\hat{B} =$ _____
$\hat{C} =$ _____
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} =$ _____

3) Ao receber um triângulo, pinte cada um dos seus ângulos de uma cor. Em seguida, faça dobraduras conforme orientação do professor e indicação da figura a seguir.



O que você observou com relação à soma dos ângulos?

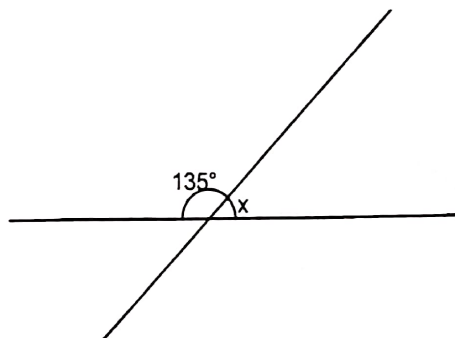
4) No outro triângulo que você recebeu, pinte cada um dos ângulos de uma cor. Em seguida, faça recortes de modo a separar os três vértices, seguindo a orientação do professor e da figura abaixo. Depois junte os três vértices e cole no espaço apropriado.



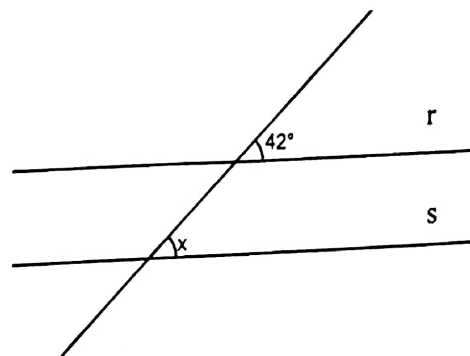
O que você observou com relação à soma dos ângulos?

5) Determine os valores das incógnitas nos casos abaixo, sendo $r//s$:

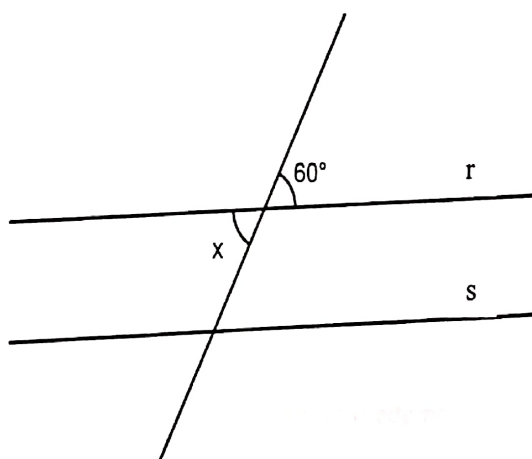
a)



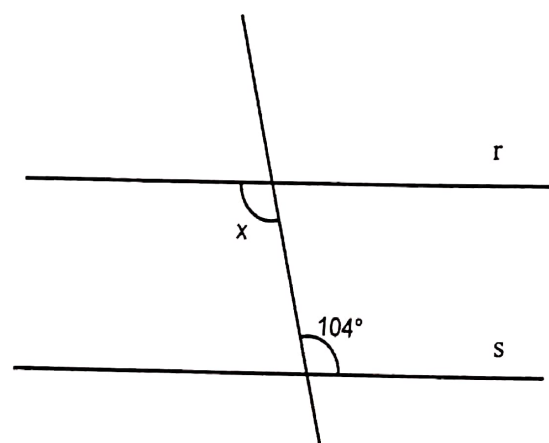
b)



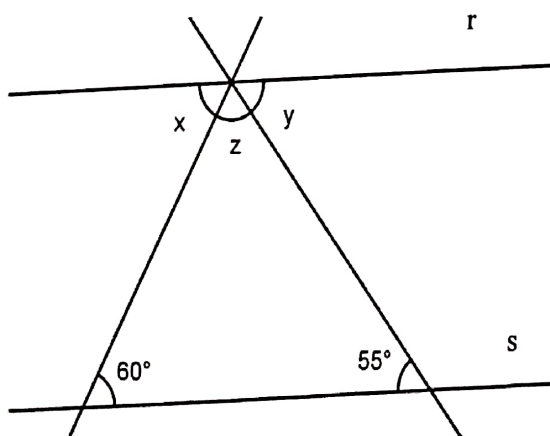
c)



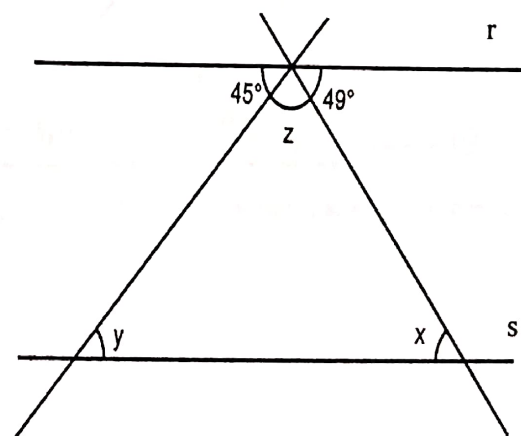
d)



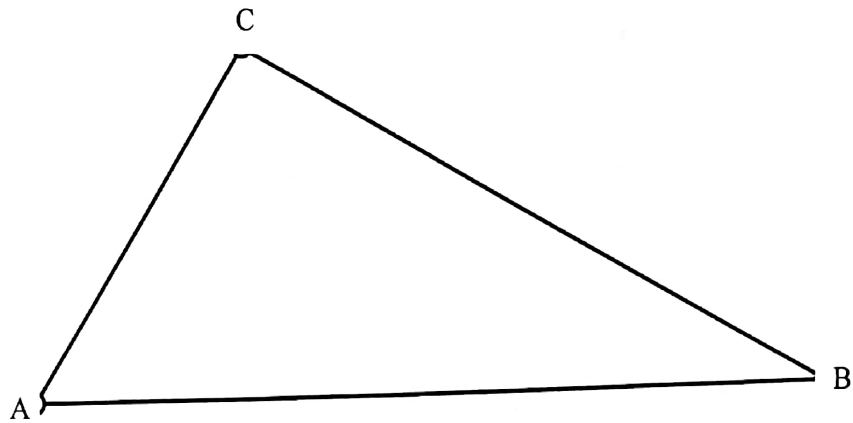
e)



f)

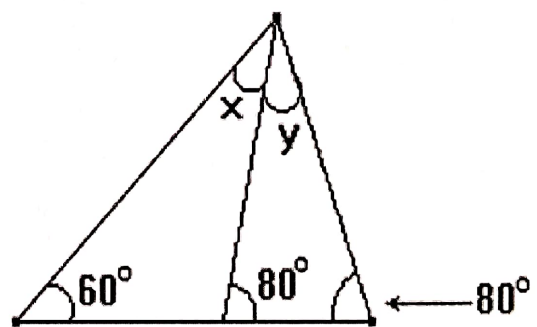


6) Utilize o conhecimento revisado para provar que a soma dos ângulos internos de um triângulo mede 180°



7) Exercício
(UFMG) Os ângulos x e y da figura medem:

- a) $x = 20^\circ, y = 30^\circ$
- b) $x = 20^\circ, y = 20^\circ$
- c) $x = 30^\circ, y = 20^\circ$
- d) $x = 60^\circ, y = 20^\circ$



<http://www.slideshare.net/thieresaulas/exerccios-tringulos>
Acesso em: 10 ago 2013