Centro Federal de Ensino Tecnológico
Licenciatura em Matemática

Ângulos-Teoremas
Área, volume e diagonal do cubo

Michelle Manhães
2004

Michelle Manhães

Ângulos-Teoremas
Área, volume e diagonal do cubo

Projeto apresentado ao CEFET Campos como requisito da disciplina laboratório de ensino do curso de Licenciatura em Matemática sob a orientação da professora Vera Fazoli.

2004

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este projeto teve como objetivo levar os alunos a reconhecer teoremas do Ensino Fundamental e do Ensino Médio sobre ângulos e cubo, respectivamente, de uma maneira diferente da convencional.

Para isso, usaremos demonstrações práticas que despertarão seu interesse e os levarão a uma melhor compreensão da matéria.

Com a utilização de objetos para facilitar as demonstrações e aplicações de exercícios, este projeto teve como objetivo a construção desses conhecimentos por parte dos alunos.

Ângulos - Teoremas

Objetivo

O objetivo deste projeto foi levar os alunos da sétima série do Ensino Fundamental a melhor compreensão dos seguintes teoremas:

- Teorema da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo;
- Teorema do ângulo externos.

Para isso, utilizaremos construções com materiais como a cartolina para despertar o interesse e facilitar a compreensão dos teoremas. Finalizaremos com exercícios para fixação do conteúdo.

História – Ângulos

"Dos três problemas famosos da Antigüidade, o da trissecção do ângulo é talvez o que tenha maior número de provas falsas. Existem muitas "provas" de como trissectar um ângulo arbitrário usando régua e compasso; porém são todas incorretas já que esta construção é impossível. Saber que a prova é incorreta e encontrar o erro são dois problemas diferentes pois o erro pode ser sutil e difícil de ser encontrado.

O problema da trissecção difere dos outros dois problemas clássicos. Primeiramente porque não há nenhuma referência sobre quando este problema começou a ser estudado. Segundo, porque este é um problema bastante diferente, já que é impossível quadrar qualquer círculo e dobrar qualquer cubo enquanto que alguns ângulos são possíveis de serem trissectados usando instrumentos euclideanos (por exemplo, para trissectar um ângulo reto basta construir um triângulo equilátero). Mas não há nenhuma solução para ângulos quaisquer.

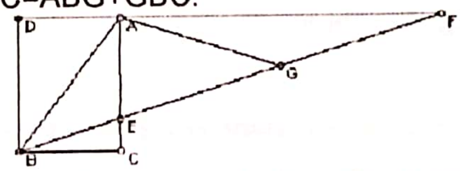
A seguir será descrito o problema das inclinações, ao qual o problema da trissecção de um ângulo qualquer foi reduzido.

Dado um ângulo qualquer deve-se desenhar um retângulo ACBD de modo que AB seja uma de suas diagonais.

Agora considere uma reta por B e cortando CA em E e o prolongamento de DA em F de tal modo que EF=2(BA).

Seja G o ponto médio de EF, podemos provar que GA=GQ=AB e que o ângulo ABG=AGB.

Como AGB é ângulo externo do triângulo AGQ temos ABG=2GFA=2GBC. Assim ABC=3GBC, pois ABC=ABG+GBC.



Este método de trissecção, na verdade, não é possível com régua e compasso euclideanos pois não conseguimos traçar a linha EF por B. Assim, o problema apenas foi traduzido num outro.

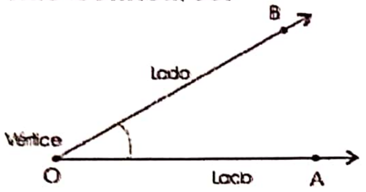
É possível solucionar este problema teoricamente usando cônicas, cubicas, métodos mecânicos ou curvas superiores.

A maioria dos historiadores de matemática acreditam que Arquimedes resolveu este problema usando a espiral de Arquimedes.

Nicomedes que viveu aproximadamente na mesma época que Arquimedes também produziu uma solução através de uma curva, a chamada conchóide."[1]

Ângulos

Definição: Ângulo é a reunião de duas semi-retas de mesma origem não-colineares.



Na figura: O é o vértice

$\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ **são lados.**

Indicação de ângulos:

AÔB ou BÔA ou Ô

Ângulos Congruentes
Dois ângulos são congruentes se as suas medidas são iguais.

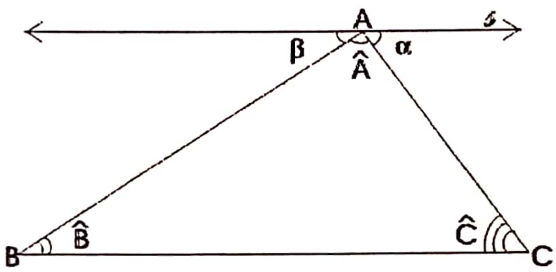
Ângulos reto, agudo e obtuso
Os ângulos recebem nomes especiais de acordo com suas medidas:
- ângulo reto é aquele cuja medida é 90º.
- ângulo agudo é aquele cuja medida é menor que 90º.
- ângulo obtuso é aquele cuja medida é maior que 90º.

Ângulos Complementares
Dois ângulos são complementares quando a soma de suas medidas é 90º.

Ângulos Suplementares
Dois ângulos são suplementares quando a soma de suas medidas é 180º.

Ângulos Opostos pelo Vértice
Duas retas concorrentes determinam quatro ângulos, dois a dois, opostos pelo vértice.

A soma das medidas dos ângulos internos de um triangulo é igual a 180º.



→ Pelo vértice A, traçamos a reta s paralela ao lado $\overline{BC}$

$\alpha + \hat{A} + \beta = 180^\circ$ ①

$\hat{B} \equiv \beta$ (alternos internos) ②

$\hat{C} \equiv \alpha$ (alternos internos) ③

Se substituirmos ③ e ② em ①, temos:

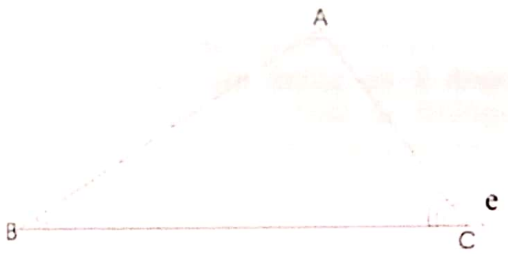
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$

Teorema do Ângulo Externo

Em qualquer triangulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não-adjacentes.

→ Consideremos um △ABC

Tese: e = a + b



$$\begin{cases} a + b + c = 180° \text{ (pelo teorema anterior)} \\ a + b = 180° - c \quad ① \end{cases}$$

$$\begin{cases} e + c = 180° \\ e = 180° - c \quad ② \end{cases}$$

Igualando ① e ② temos:

$$\boxed{e = a + b}$$

Demonstrações práticas

Soma dos ângulos internos do triângulo

Para demonstrarmos que em qualquer triângulo a soma dos ângulos internos é igual a 180º, entregamos aos alunos papel de cartolina e pedimos que desenhem um triângulo qualquer.

Depois, entregamos tesouras e lápis de cor e pedimos que eles recortem da cartolina o triângulo desenhado e pintem de cores diferentes os ângulos dos triângulos.

Feito isso, pedimos que agora recortem os ângulos pintados do triângulo. Entregamos então, uma folha com uma linha traçada horizontalmente.

Finalmente, pedimos que coloquem sobre esta linha horizontal os ângulos de maneira que se encaixem. Os alunos observarão então que a soma dos ângulos internos do triângulo é 180º

Teorema Ângulo Externo

Para demonstrarmos este teorema, entregamos aos alunos um papel em que eles deverão desenhar um triângulo qualquer, deixando alongado um dos lados do triângulo no papel.

Feito isso, entregamos lápis coloridos para que ele pintem os 2 ângulos que não tiveram seus lados prolongados. Depois de pintá-los, entregamos tesouras para que recortem da folha somente os 2 ângulos.

Tendo em mãos os 2 ângulos, pedimos que os coloquem sobre o prolongamento do lado do triângulo na folha. Eles observarão que os dois ângulos recortados preencherão o espaço que é do ângulo externo do ângulo não recortado.

Assim, chegarão a conclusão que a medida de um ângulo externo no triângulo é igual a soma das medidas dos ângulos internos não-adjacentes.

Referências bibliográficas

ANDRINI , Álvaro. Praticando Matemática 7ª série, São Paulo, Editora Brasil, 1989.

RIZZATO, Fernanda Buhrer; supervisão e orientação: prof. Doutor Francisco César Polcino Milies. http://www.matematica.br/historia Acessado em 14/11/2003

Área, Volume e Diagonal do Cubo

Objetivo

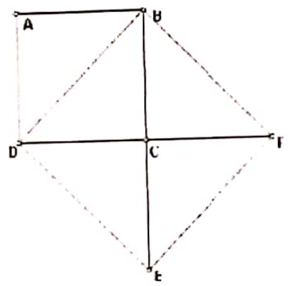
O objetivo deste projeto foi levar os alunos do terceiro ano do Ensino Médio a melhor compreensão da área, volume e diagonal do cubo, conteúdo este da geometria espacial.

Demonstrações práticas e exercícios serão instrumentos utilizados na construção do conhecimento por parte dos alunos.

História – Cubo

"A duplicação do cubo é um dos "três problemas famosos (ou clássicos) "da antigüidade". Não sabemos precisamente quando e por quem este problema foi formulado pela primeira vez, pois existem vários relatos a respeito. Uma das versões diz que como os délios haviam sido atingidos por uma praga, uma delegação foi enviada ao oráculo de Apolo em Delos para perguntar como a peste poderia ser combatida. Este respondeu que para tanto o altar de Apolo, cuja forma era cúbica, deveria ser dobrado. Uma outra versão diz que o rei Minos insatisfeito com o tamanho do túmulo de seu filho Glauco ordenou que o túmulo fosse dobrado, porém sem que perdesse a forma original.

Os gregos obviamente estavam familiarizados com um problema semelhante, porém bem mais simples: duplicar o quadrado.



Dado um quadrado ABCD, traçar a sua diagonal BD e construir um quadrado de lado BD. É fácil perceber que BDEF tem o dobro da área de ABCD. Assim dado um quadrado de lado a é possível encontrar um outro quadrado de lado b cuja área seja o dobro da área do primeiro, portanto $b = a\sqrt[2]{2}$(onde b é a diagonal do quadrado original).

$$b = a\sqrt[2]{2} \Rightarrow b^2 = a^2(\sqrt[2]{2})^2 \Rightarrow b^2 = 2a^2$$

Talvez tenha sido esta simples construção que levou os gregos a pensarem em uma solução para o problema da duplicação do cubo.

O primeiro grande passo foi dado por Hipócrates de Chios, provavelmente não muito depois da aparição do problema. Ele propunha encontrar duas médias proporcionais entre segmentos de comprimento s e 2s, ou seja, achar x e y tal que:

$$\frac{s}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2s}$$

Da primeira igualdade deduzimos que $x^2 = sy$ e da segunda igualdade que $y^2 = 2sx$. Substituindo o valor de y na segunda igualdade temos que $x^3 = 2s^3$. Assim dado o cubo de lado s encontramos um outro de lado x tal que o volume do segundo é o dobro do volume do primeiro. Porém não há construção geométrica para esta dupla proporção.

Também devemos considerar a solução proposta por Arquitas de Tarento, à respeito da qual Heath [Heath, 1931] escreveu:

"A solução de Arquitas é a mais notável de todas, especialmente quando sua data é considerada (primeira metade do séc IV a.C.) porque não é nenhuma construção plana mas uma corajosa construção em três dimensões, determinando um certo ponto como a intersecção de três superfícies de revolução..."

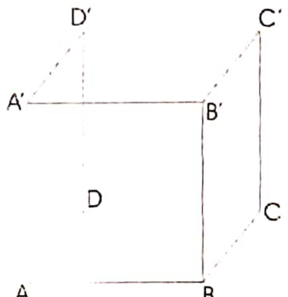
Entretanto todas as soluções eram teóricas e nenhuma solução pratica foi encontrada.

Apenas no séc XIX , mais de 2000 anos depois da formulação do problema foi que se estabeleceu a impossibilidade da construção sob a limitação de usar apenas régua e compasso (instrumentos euclideanos)."[2]

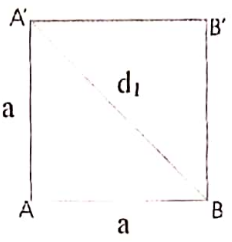
Geometria Espacial – Cubo

- O cubo é um paralelepípedo retângulo cujas 6 faces são quadrados.

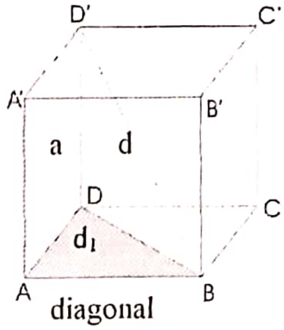
Um cubo possui todas as 12 arestas congruentes entre si. Vejamos como obter a área total **S**, a diagonal **d** e o volume **V** de um cubo de aresta **a**.



cubo



face



diagonal

Cálculo de S

A superfície total de um cubo é a reunião de seis quadrados congruentes. Se o cubo tem aresta **a**, cada superfície tem área a^2.

Portanto $S = 6a^2$

Calculo de d

Inicialmente calcularemos a medida d_1, de uma diagonal de face.

No $\triangle BAD$: $d_1^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow d_1 = a\sqrt{2}$

No $\triangle BDD'$: $d^2 = a^2 + d_1^2$, e como $d_1^2 = a\sqrt{2}$, temos;

$d^2 = a^2 + 2a^2 \Rightarrow d = a\sqrt{3}$

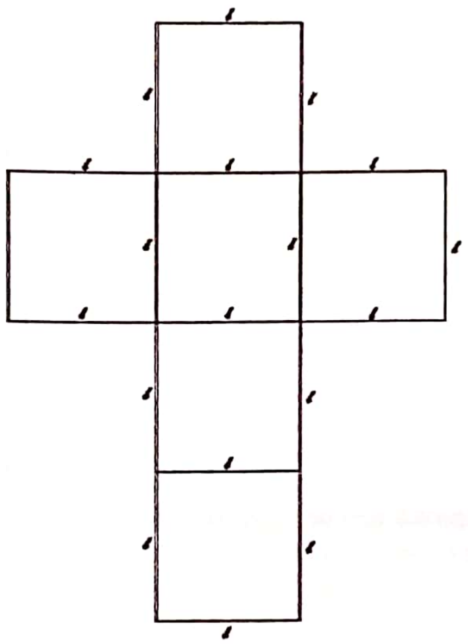
Calculo de V

O volume do cubo é:

$V = a.a.a \Rightarrow V = a^3$

Demonstrações práticas

Área



A superfície do cubo é a reunião dos 6 quadrados que são as faces dele. A medida desta superfície é chamada área do cubo.

Para demonstração, entregaremos a cada aluno parte de uma cartolina e tesoura. Pediremos que construam um cubo planificado, sabendo que ele é formado de 6 quadrados.

Depois, verificaremos se o cubo foi corretamente construído e pediremos que os alunos abram o cubo.

No cubo planificado visualizaremos os 6 quadrados existentes. Sabendo que a área de um quadrado de lada l é l^2, os alunos chegarão à conclusão que a área A, do cubo de aresta l é dada por:

$A = 6l^2$ ou $A = a^2$

Volume

O volume de um cubo de aresta a é dada pelo produto da altura pela área da base.

Para demonstrarmos isso, levaremos para a sala de aula um cubo transparente de vidro de aresta x, e o encheremos líquido.

Depois, faremos uso de conhecimentos utilizados por eles sobre convenções do tipo:

$1m^3 = 1000l$

$1dm^3 = 1l$

$1cm^3 = 1ml$

Com isso, estimularemos seu raciocínio para a relação da aresta x do cubo, com o seu volume. Eles deverão chegar a conclusões, como por exemplo:

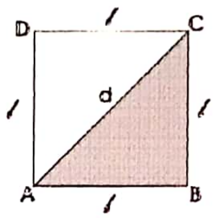
1 litro de leite enche um cubo de aresta igual a 10cm.

Diagonal

Antes de demonstrarmos a fórmula da diagonal do cubo especificamente, demonstraremos a fórmula da diagonal do quadrado pelo teorema de Pitágoras.

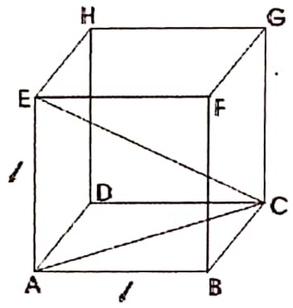
Entregaremos, papel e tesoura para que eles recortem um quadrado, feito isso pediremos que eles tracem a diagonal do quadrado. Eles observarão que a diagonal do quadrado é a hipotenusa de triangulo retângulo de catetos iguais a *l*. Então pelo teorema de Pitágoras, temos:

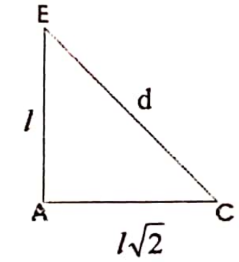
$$d^2 = l^2 + l^2$$
$$d^2 = 2l^2$$
$$d = l\sqrt{2}$$



Depois disso, com um cubo de vidro que levaremos para a sala, faremos a demonstração da diagonal do cubo:

No cubo de vidro marcaremos a diagonal encontrada com um fita colorida, com outra fita marcaremos a diagonal que desejamos encontrar.





Após estas marcações, visualizaremos o triângulo retângulo EÂC. Neste triângulo conhecemos seu lado AC, que foi a diagonal do quadrado já encontrado, EA, que é um dos lados do cubo e EC que é a diagonal desejada. Assim, os alunos verão que:

$$EC^2 = EA^2 + AC^2$$
$$d^2 = l^2 + 2l^2$$
$$d^2 = 3l^2$$
$$d = l\sqrt{3}$$

Referências bibliográficas

FILHO, Benigno Barreto, SILVA, Cláudio Xavier da. Matemática aula por aula, volume único, São Paulo, Ed. FTD, 2000.

IEZZI, Gelson, Matemática, volume único, São Paulo, Ed. Atual, 1997.

MACHADO, Antônio dos Santos. Matemática Temas e Metas, São Paulo, Ed. Atual, 1998.

RIZZATO, Fernanda Buhrer; supervisão e orientação: prof. Doutor Francisco César Polcino Milies. http://www.matematica.br/historia Acessado em 14/11/2003

Anexos

Anexo 1 :

Relatório do projeto: Ângulos – teoremas

Este projeto foi apresentado à turma 704 do Colégio Estadual José do Patrocínio no dia 10 de agosto de 2004.

Logo de início percebemos o grau de dificuldade que encontraríamos, pois a turma não se mostrou receptiva e demonstrava pouco interesse pelo conteúdo abordado.

Começamos a aula recordando feixe de retas paralelas e seus ângulos alternos, neste momento percebemos que os poucos que prestavam atenção tinham dificuldades com a matéria. Logo depois, passamos para a explicação dos teoremas no quadro onde sentimos falta de um apagador que teve de ser substituído por um de nossos jalecos.

Enquanto nos explicávamos o conteúdo os alunos tumultuavam a aula, por isso foram alertados por nossa professora sobre a importância do projeto. Passamos para a demonstração prática onde distribuímos na sala cartolinas, tesouras e lápis de cor e pedimos que construíssem triângulos, mas poucos fizeram.

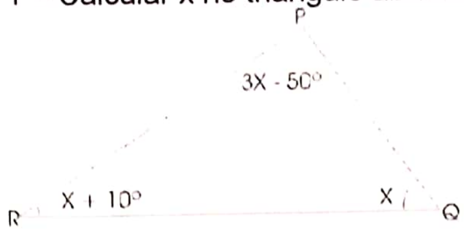
Devido à desordem interrompemos a parte prática e entregamos a folha com exercícios de aplicação. Estava planejado deixar com que os alunos tentassem resolver as questões e mais tarde tiraríamos as dúvidas, mas isso não foi possível porque neste momento a turma estava em total desordem.

Nossa aula estava programada de ter início às 12h 40min e término às 14h 20min, mas por causa da péssima atitude dos alunos que não mostraram respeito, interrompemos a aula 13h 40min e não recolhemos os exercícios.

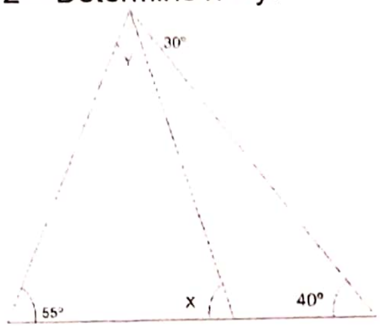
Anexo 2:
Exercício de aplicação

Exercícios de aplicação

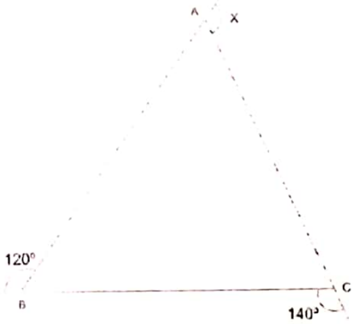
1 – Calcular x no triângulo abaixo:

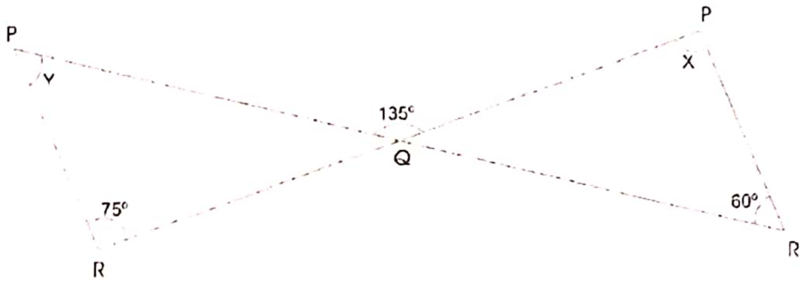


2 – Determine x e y:



3 – Calcule x e y:





Exercícios de aplicação

1 – Se um cubo tem 5cm de aresta, sua área S, sua diagonal d e seu volume V, são:

2 – Qual é o volume de um cubo cuja diagonal mede 6cm?

3 – Qual é a área de um cubo de volume 64 milimetros cúbicos?

4 – Sabendo que a diagonal de um cubo mede 12cm, determine:
a) aresta

b) área total

c) volume

5 – (PUC – SP) Um cubo tem área total igual a 72 metros quadrados. Sua diagonal vale:

a) $2\sqrt{6}$ m
b) 6 m
c) $\sqrt{6}$
d) $\sqrt{12}$ m
e) $2\sqrt{24}$ m

6 – Num cubo de área 150 centímetros quadrados, qual a distância do centro de uma face a um vértice da face oposta.

Anexo 3:
Fotos