CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE CAMPOS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ÂNGULOS

POR
JOCEIR DOS SANTOS
PÂMILA CAMILA ALMEIDA

CAMPOS DOS GOITACAZES/RJ
2004

JOCEIR DOS SANTOS
PÂMILA CAMILA ALMEIDA

ÂNGULOS

Projeto apresentado ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Campos como requisito para conclusão da disciplina Laboratório de Ensino do curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Gilmara Texeira Barcelos.
Mestra em Ciências de Engenharia - UENF.

CAMPOS DOS GOYTACAZES/RJ
2004

SUMÁRIO

1 - INTRODUÇÃO

O tema desse projeto foi bissetriz de um ângulo. Este foi aplicado a uma turma do Pró-CEFET com 32 alunos no CEFET- Campos. Os recursos utilizados para melhor desenvolvimento dos conteúdos foram construções geométricas e o *Software* educacional "Régua e Compasso".

O objetivo desse trabalho foi, além de dar a definição de ângulo e bissetriz, mostrar a construção da bissetriz utilizando compasso e usando o programa "Régua e Compasso" como facilitador da aprendizagem. Oferecendo assim, possibilidades para que o aluno pudesse construir seu conhecimento.

A escolha do tema deu-se no primeiro período da Licenciatura. Dentre livros e S*oftwares* pesquisados, selecionamos aqueles que correspondiam com os objetivos do nosso trabalho, que era utilizar recursos variados para a aplicação de um conteúdo.

Por fim o trabalho ficou com o seguinte formato: parte histórica, revisão de ângulos, construção da bissetriz com o auxilio do *Software* "Régua e Compasso" e atividades de fixação.

2 - ELABORAÇÃO DO PROJETO

Durante dois períodos da licenciatura preparamos o projeto, escolhemos o tema, preparamos as atividades a serem realizados com *software* e realizamos um teste exploratório.

Foi uma experiência desafiadora para os autores deste projeto usar o *software*, pois até então nenhum de nós tinha conhecimento ou domínio do assunto. Após estudo do *software* e do tema escolhido, confeccionamos as atividades e estas foram aplicadas inicialmente para os nossos companheiros do curso.

Ficamos surpresos com a dificuldade que a turma teve para rever o conteúdo utilizando o programa do computador, mesmo sendo um conteúdo de domínio de todos.

No final da experiência concluímos que, diante da dificuldade para utilizar esse novo recurso na educação, é preciso preparar muito bem o material didático, organizando a seqüência das atividades, um pequeno manual de instruções sobre o programa para que haja uma interação entre o programa e o aluno. E por fim é fundamental que o mediador tenha bastante conhecimento sobre todos os recursos que serão utilizados.

3 - DESENVOLVIMENTO

A aplicação do referido projeto foi dividida em etapas: parte histórica, revisão, atividades com o *Software* "Régua e Compasso", construção da bissetriz utilizando compasso e finalizamos com exercícios de aplicação da definição da bissetriz.

Houve um atraso para se iniciar a aula porque os alunos do Pró-CEFET não chegaram no horário previsto para aula e também devido à distância entre o laboratório de informática, onde foi aplicado o projeto, e a sala do Pró-CEFET.

3.1 - Parte histórica

"Quais as razões para dizermos que um ângulo de 360° representa uma revolução completa?

As razões são históricas, embora nem sempre muito convincentes. Retornando ao ano de 4000 a.C., quando egípcios e árabes estavam elaborando seu calendário, estabeleceram, na época, que o sol girava em torno da Terra numa órbita que levava 360 dias para completar uma volta. Assim, cada dia o sol percorria uma parcela dessa órbita, ou seja, um arco de circunferência de sua órbita. A este arco fez-se corresponder um ângulo cujo o vértice era o centro da Terra e cujos os lados passavam pela extremidade de tal arco. Esse ângulo passou a ser unidade de medida e foi chamado de 'grau'. Desta forma, para os antigos árabes e egípcios, o grau era a medida do arco que o sol percorria em torno da Terra durante um dia."

Toda a parte histórica foi extraída de: **MARCH, M. D. e MCEVERS, J.** Curso básico de astrologia Princípios Fundamentais. Disponível em: http: //mscabralsites.uol.br/mauro /curioso/medida.html. Acessado em 12/04/04.

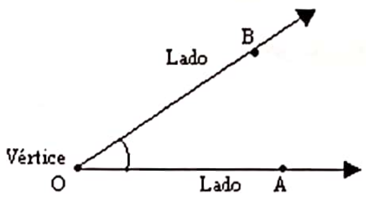
3.2 - Revisão

Após comentarmos a parte histórica (seção anterior) fizemos revisão de alguns conteúdos que são pré-requisitos para o tema deste projeto. São eles: ângulos, pontos internos a um triângulo, medida de um ângulo, ângulos congruentes, ângulo agudo, ângulo reto, obtuso, retas perpendiculares, ângulo complementares, ângulos suplementares e ângulos replementares. Apresentamos cada um deles a seguir.

→ **Ângulos**

Definição:

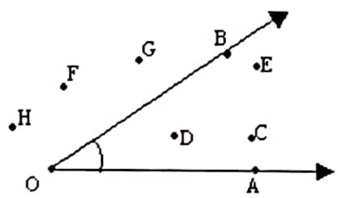
A região limitada por duas semi-retas de mesma origem determina um ângulo. A origem comum a essas semi-retas é o vértice do ângulo e cada uma das semi-retas é um lado do ângulo. Uma das unidades de medida de ângulo é grau, cujo símbolo é °.



Na figura: O é o vértice, $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ os são lados do ângulo.

Indicação de ângulos: AÔB ou BÔA ou Ô

→ **Pontos internos e externos a um ângulo**



C, D e E são pontos internos ao ângulo AÔB

H, F e G são pontos externos ao ângulo AÔB

→ **Medida de um ângulo**

Um ângulo pode se medido através de um instrumento chamado de **transferidor** que tem o **grau** como unidade. A unidade grau tem dois submúltiplos: **minutos e segundos.**

1 grau tem 60 minutos (1° = 60')

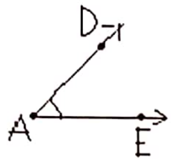
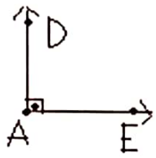
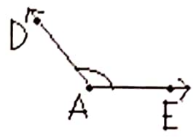
1 minuto tem 60 segundos (1' = 60")

→ **Ângulos Congruentes**

Dois ângulos são congruentes se as suas medidas são iguais

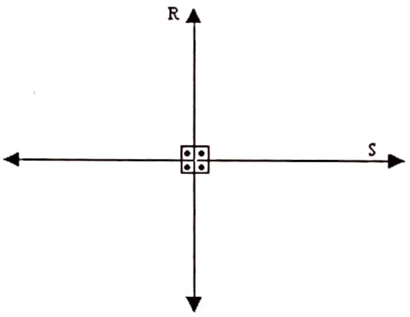
→ **Ângulo agudo, reto e obtuso**

Os ângulos recebem nomes especiais de acordo com suas medidas:

Ângulo agudo é aquele cuja medida é menor que 90°.	Ângulo reto é aquele cuja medida é 90°.	Ângulo obtuso é aquele cuja medida é maior que 90° e menor que180°
		

→ **Retas Perpendiculares**

Quando duas retas se intersectam formando ângulos retos, dizemos que elas são perpendiculares.



R ⊥ S (lê-se " R perpendicular a S")

→ **Ângulos complementares**

Dois ângulos são complementares quando a soma de suas medidas é 90°.

→ **Ângulos suplementares**

Dois ângulos são suplementares quando a soma de suas medidas é 180°

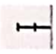
→ **Ângulos replementares**

Dois ângulos são replementares quando a soma de suas medidas é 360°.

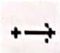
Durante essa revisão os alunos não apresentaram dúvidas, e como não houve problema nas atividades seguintes quando retomávamos alguns desses assuntos, concluímos que a turma dominava esse conteúdo revisado.

3.3 - Atividade com o software "régua e compasso"

A lista de botões que foram usados durante a atividade.

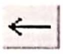
 Uma **semi-reta** a partir do primeiro ponto determinado e contendo o segundo ponto marcado.

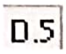
 **Círculo** cujo raio é igual à distância entre dois pontos determinados. Faz o papel do compasso.

 **Mover** um ponto (não fixo).

 **Ângulo** através de três pontos. O segundo ponto é vértice do ângulo.

 **Ocultar** objetos. Objetos ocultos podem ficar visíveis ativando a ferramenta

 **Apagar** o **último** passo da construção, além de todos objetos invisíveis antes daquele passo.

 Mostrar **valores** (medidas de segmentos, ângulos, coordenadas de pontos, etc.).

 **Mostrar** todos os **objetos ocultos**.

Explicamos a função de cada botão acima e para que os alunos se familiarizassem com o programa pedimos a eles que mexessem livremente por alguns minutos. Em seguida esclarecemos as últimas dúvidas sobre o *software* e aplicamos as atividades que seguem.

<u>Atividades</u>

- Trace uma semi-reta qualquer.
- Da origem dessa semi-reta, trace outra semi-reta.

- A partir destas duas semi-retas, você poderá perceber que foi formado um ângulo.
- Com a ajuda da ferramenta "círculo", trace uma circunferência com o centro na origem das semi-retas traçadas.

- Com a ferramenta "compasso", trace uma circunferência com raio maior do que a metade da medida do ângulo, num dos pontos de interseção da circunferência com uma semi-reta.

- Ainda com a ferramenta "compasso", trace outra circunferência do mesmo tamanho da anterior, no outro ponto de encontro da 1ª circunferência com a outra semi-reta.

- Trace uma semi-reta com origem no centro da primeira circunferência, passando pela interseção das outras duas circunferências.

- Clique no botão "mostrar valores", logo após clique em "Ângulo", e verifique a medida dos 3 ângulos. Vale lembrar que o ângulo é formato por três pontos sendo o segundo o seu vértice.
- Compare a medida dos dois ângulos menores com a do ângulo maior.
- Movimente as semi-retas e compare novamente a medida dos ângulos.
- Descreva o que você observou:

Durante esta atividade os alunos se mostraram bem interessados, havia dois alunos para cada computador e observamos que quando um aluno termina a atividade o outro refazia, desse modo todos fizeram a atividade. O *software* prendeu a atenção deles e todos, com suas palavras, conseguiram expressar suas conclusões sobre a atividade, conclusão esta que se tratava da definição da bissetriz de um ângulo.

A seguir estão algumas das respostas dos alunos:

"Que e possível observar que o ângulo de 34° foi dividido ao meio por uma semi-reta formando 2 ângulos de 17°."

"A reta dividiu o ângulo em dois outros ângulos de mesma medida"

Após essa atividade definimos bissetriz de um ângulo.

Bissetriz de um ângulo: é a semi-reta com origem no vértice de um ângulo e o que divide em dois ângulos congruentes.

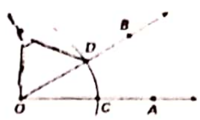
3.4 - Construção da bissetriz utilizando o compasso.

Mostramos no quadro como constrói a bissetriz de um ângulo relacionando os passos que estão indicados abaixo com os feitos no *software* para melhor compreensão por parte dos alunos.

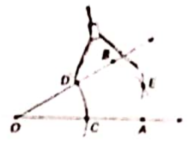
Construção da bissetriz utilizando Compasso

Determinação da bissetriz do ângulo AÔB

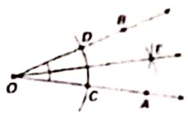
- Centramos o compasso em O e com uma abertura qualquer determinamos os pontos C e D sobre as semi-retas OA, e OB, respectivamente.



- Centramos o compasso em C e D e com uma abertura maior que a metade da distância entre de C e D traçamos arcos que se cruzem em E.



- Traçamos OE, determinando assim a bissetriz de AÔB.



Logo após foram distribuídos compassos e réguas para que eles construíssem um ângulo qualquer e em seguida a bissetriz desse ângulo (anexo exercício n° 7).

Observando as construções feitas pelos alunos, notamos que a construção feita no *software* foi melhor apreendida por eles do que a descrita acima. Dizemos isso porque ao invés de usar os arcos da circunferência (como está descrito no segundo passo acima) que é mais fácil de fazer, os alunos traçaram toda a circunferência. Provavelmente isso tenha ocorrido porque na construção acima os alunos apenas assistiram e na do *software* fizeram, permitindo assim uma melhor assimilação.

3.4 – Exercícios de fixação

Além de exercitar o que os alunos tinham aprendido na aula, nosso objetivo também era avaliar nosso trabalho através das respostas dos alunos. Devido o tempo da aula ter se esgotado, não foi possível que os alunos resolvessem todos os exercícios.

4-CONSIDERAÇÕES FINAIS

Aconteceram alguns pequenos contratempos durante a aplicação das atividades com o *software* porque quando o projeto foi elaborado o grupo era composto por quatro pessoas e com a saída de duas, ficou mais demorado o processo de atendimento aos alunos nos computadores o que era inevitável, pois era a primeira vez em que alguns alunos utilizavam o *software*. Com isso o tempo de aplicação dessa atividade foi além do programado, o que prejudicou as demais atividades.

Apesar dos imprevistos os objetivos foram alcançados. Através da rápida resolução de alguns exercícios e das conclusões tiradas pelos alunos pode-se notar que eles entenderam o conteúdo trabalhado.

Com a aplicação desse projeto adquirimos uma importante experiência, pois passamos por várias situações que nos fez observar como deve ser a postura de um professor.

As aulas devem ser bem planejadas para que haja um bom rendimento da mesma levando em consideração, durante o planejamento das aulas, o tempo se perde com os possíveis imprevistos como atraso dos alunos, conversas não condizentes com o assunto da aula, que alguns alunos tem raciocínio mais rápido outros mais lento. É preciso trabalhar bem essa diferença de raciocínio, para que os alunos que entendem mais rápido não fiquem esperando os que são mais lentos e esses não fiquem se entender porque o conteúdo está sendo dado rápido de mais.

Dentre os demais projetos realizados, este foi o que mais se destacou, pois melhor atendeu os objetivos elaborados. O motivo pelo qual esse projeto se destacou foi porque para a sua aplicação utilizamos recursos diferenciados, com isso vimos que é possível e mais interessante trabalhar um mesmo conteúdo utilizando métodos diferentes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DOLCE,O., POMPEU, J.N. *Fundamentos da Matemática Elementar, 9: geometria plana*. 7. ed. São Paulo: Atual,1993.

BONGIOVANNI, V., VISSOTO,O., LAUREANO, J.R. *Matemática e Vida.* 7ª série. 5. ed. São Paulo: Ática, 1995.

BIANCHINI, E. *Matemática 7ª série*. 3. ed. São Paulo: Moderna, 1991.

GIOVANNI, J.R., CASTRUCCI, B., GIOVANNI, JR., J.R. *A Conquista da Matemática: teoria e aplicação 7ª série*. 3. ed. São Paulo: FTD, 1992.

MARCH, M. D., MCEVERS, J. *Curso básico de astrologia – Princípios Fundamentais.* Disponível em: http://mscabral.sites.uol.com.br/mauro/curioso/medida.htm. Última consulta: 12/04/04.

ANEXO

ANEXO: EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

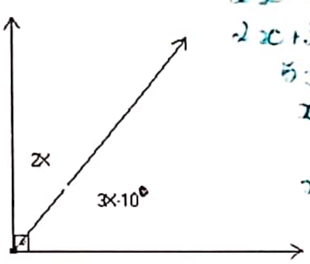
EXERCÍCIOS

1) Um ângulo é reto quando seus lados são:
a) paralelos.
b) opostos.
c) perpendiculares.
d) tem a mesma medida.

2) Um ângulo mede 50º. Podemos afirmar que seu suplemento é:
a) um ângulo obtuso.
b) um ângulo reto.
c) um ângulo agudo.
d) um ângulo de 40º.

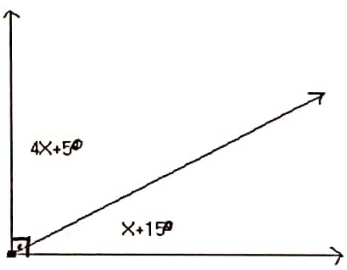
3) Calcule o valor de x nas seguintes figuras:

a)



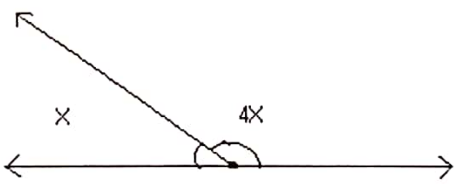
$2x + 3x - 10 = 90$
$2x + 3x = 90 + 10$
$5x = 100$
$x = \frac{100}{5}$
$x = 20°$

b)



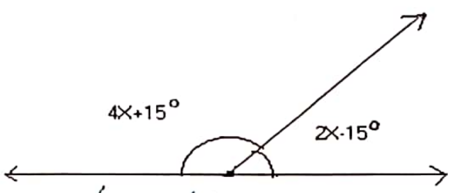
$4x + 5 + x + 15 = 90$
$4x + x = 90 - 5 - 15$
$5x = 70$
$x = \frac{70}{5}$
$x = 14°$

c)



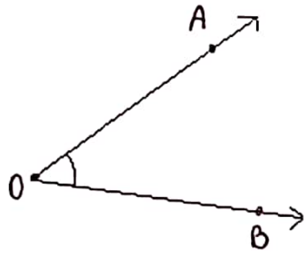
$x + 4x = 180$
$5x = 180$
$x = \frac{180}{5}$
$x = 36°$

d)



$4x + 15 + 2x - 15 = 180$
$4x + 2x = 180 - \cancel{15} + \cancel{15}$
$6x = 180$
$x = \frac{180}{6}$
$x = 30°$

4) O ângulo AÔB é agudo e mede x graus:

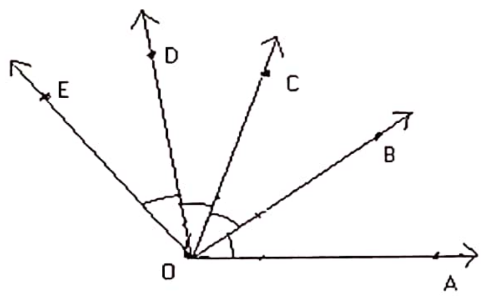


Escreva a expressão algébrica que representa a medida do ângulo:
a) igual â metade da medida do ângulo AÔB.

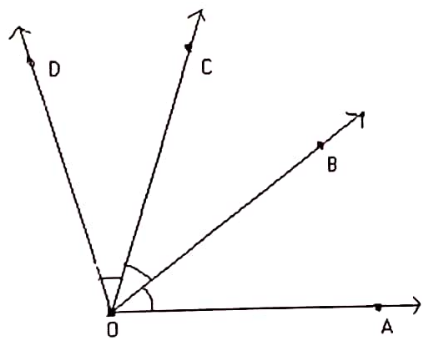
b) igual ao dobro da medida do ângulo AÔB.

c) igual a $\frac{2}{3}$ da medida do ângulo AÔB.

5) Sabendo-se que:
m(AÔC) = 70º, m(CÔE) = 60º, $\overrightarrow{OB}$ é bissetriz de AÔC, $\overrightarrow{OD}$ é bissetriz de CÔE. Calcule a medida de BÔD.



6) Na figura, m(AÔB) = 72º, m(CÔD) = m$\left(\frac{AÔB}{4}\right)$ OC é bissetriz de BÔD. Calcule a medida de AÔC.



7) No verso dessa folha construa um ângulo qualquer e trace a bissetriz desse ângulo.

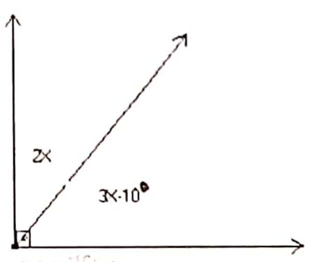
EXERCÍCIOS

1) Um ângulo é reto quando seus lados são:
a) paralelos.
b) opostos.
c) perpendiculares.
d) tem a mesma medida.

2) Um ângulo mede 50º. Podemos afirmar que seu suplemento é:
a) um ângulo obtuso.
b) um ângulo reto.
c) um ângulo agudo.
d) um ângulo de 40º.

3) Calcule o valor de x nas seguintes figuras:

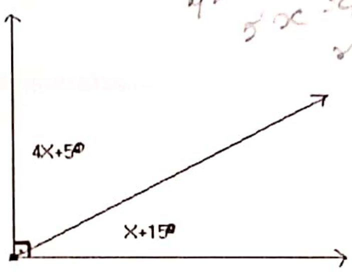
a)



90 graus

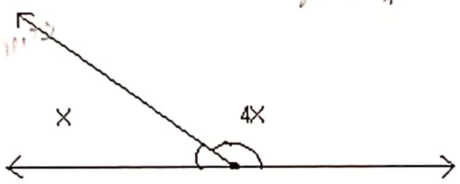
$2x + 3x - 10 = 90$
$5x = 90 + 10$
$x = \frac{100}{5}$
$x = 20$

b)

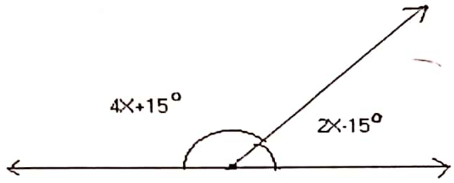


$4x + 5 + x + 15 = 90$
$5x = 90 - 20$
$x = \frac{70}{5} = 14$

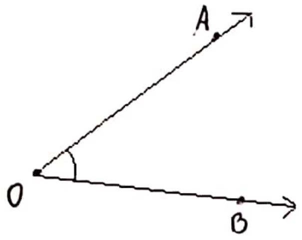
c)



d)



4) O ângulo AÔB é agudo e mede x graus:

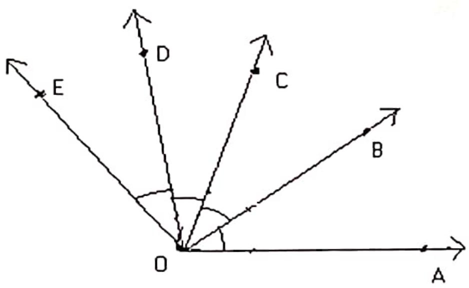


Escreva a expressão algébrica que representa a medida do ângulo:
a) igual á metade da medida do ângulo AÔB.

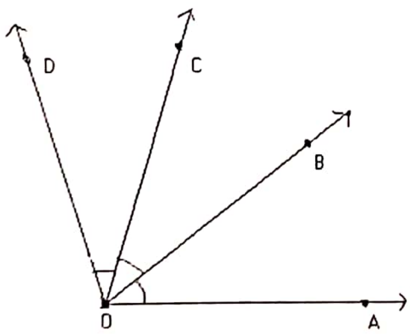
b) igual ao dobro da medida do ângulo AÔB.

c) igual a $\frac{2}{3}$ da medida do ângulo AÔB.

5) Sabendo-se que:
m(AÔC) = 70º, m(CÔE) = 60º, $\overrightarrow{OB}$ é bissetriz de AÔC, $\overrightarrow{OD}$ é bissetriz de CÔE. Calcule a medida de BÔD.



6) Na figura, m(AÔB) = 72º, m(CÔD) = m$\left(\frac{A\hat{O}B}{4}\right)$ $\overrightarrow{OC}$ é bissetriz de BÔD. Calcule a medida de AÔC.



7) No verso dessa folha construa um ângulo qualquer e trace a bissetriz desse ângulo.

EXERCÍCIOS

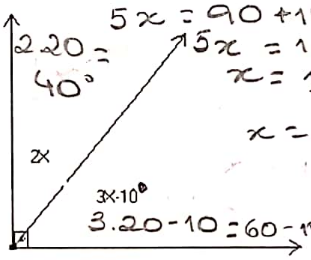
1) Um ângulo é reto quando seus lados são:
a) paralelos.
b) opostos.
c) perpendiculares.
d) tem a mesma medida.

2) Um ângulo mede 50º. Podemos afirmar que seu suplemento é:
a) um ângulo obtuso.
b) um ângulo reto.
c) um ângulo agudo.
d) um ângulo de 40º.

3) Calcule o valor de x nas seguintes figuras:

a)

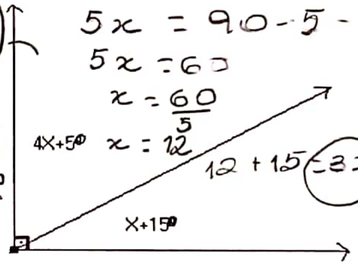
$2x + 3x - 10 = 90$
$5x = 90 + 10$
$5x = 100$
$x = \frac{100}{5}$
$x = 20$



$2 \cdot 20 = 40°$
$3 \cdot 20 - 10 = 60 - 10 = 50°$

b)

$4x + 5 + x + 15 = 90$
$5x = 90 - 5 - 15$
$5x = 60$
$x = \frac{60}{5}$
$x = 12$



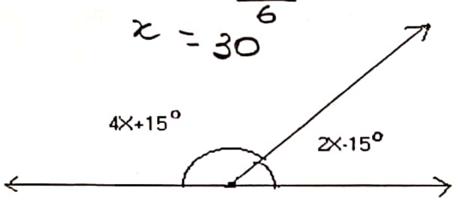
$4 \cdot 12 + 5$
$48 + 5 = 53°$
$12 + 15 = 37°$

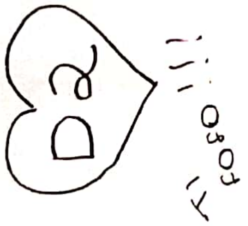
c)

$x + 4x = 180$
$5x = 180$
$x = \frac{180}{5}$
$x = 36$
$4 \cdot 36 = 144$

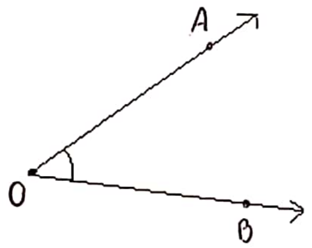
d)

$4x + \cancel{15} + 2x - \cancel{15} = 180$
$6x = 180$
$x = \frac{180}{6}$
$x = 30$





4) O ângulo AÔB é agudo e mede x graus:



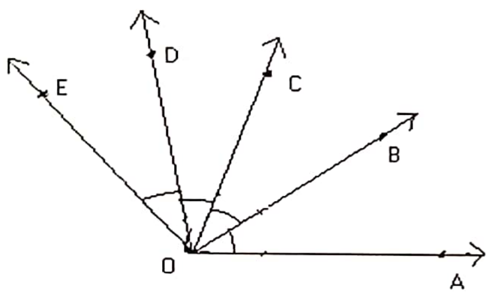
Escreva a expressão algébrica que representa a medida do ângulo:

a) igual á metade da medida do ângulo AÔB.

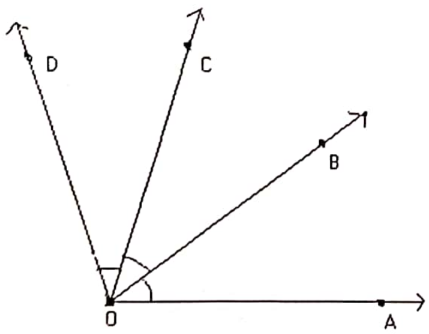
b) igual ao dobro da medida do ângulo AÔB.

c) igual a $\frac{2}{3}$ da medida do ângulo AÔB.

5) Sabendo-se que:
m(AÔC) = 70º, m(CÔE) = 60º, $\overrightarrow{OB}$ é bissetriz de AÔC, $\overrightarrow{OD}$ é bissetriz de CÔE. Calcule a medida de BÔD.



6) Na figura, m(AÔB) = 72º, m(CÔD) = $m\left(\frac{A\hat{O}B}{4}\right)$ $\overrightarrow{OC}$ é bissetriz de BÔD. Calcule a medida de AÔC.



7) No verso dessa folha construa um ângulo qualquer e trace a bissetriz desse ângulo.