CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE CAMPOS

ÁREA DA PIRÂMIDE
E TEOREMA DE TALES

Amanda Moura
Ana Paula Siqueira
Hélio Monteiro
Juliana Santos

CAMPOS DOS GOYTACAZES
2004

Amanda Gomes de Moura
Ana Paula Siqueira
Hélio Monteiro
Juliana Santos Barcellos Chagas

ÁREA DA PIRÂMIDE E TEOREMA DE TALES

Projeto apresentado ao CEFET Campos como requisito da disciplina Laboratório de Ensino do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Vera Fazoli

CAMPOS DOS GOYTACAZES
2004

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Os projetos "Área da Pirâmide e Teorema de Tales" foram desenvolvidos desde o primeiro período do curso de Licenciatura em Matemática. Eles trabalham esses conteúdos apresentando desde parte de sua história, até a demonstração formal, utilizando material concreto.

A escolha desses conteúdos deveu-se ao fato de serem importantes conteúdos da Geometria (plana e espacial). E também pela proposta do uso de material concreto.- muitas vezes um recurso não utilizado – como um facilitador e incentivo na construção e ampliação dos conhecimentos geométricos dos alunos.

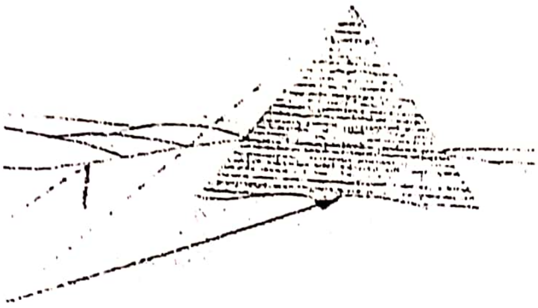
Para os futuros educadores, este trabalho é de grande importância para a postura, desempenho e relação com os alunos, preparando-os para o ambiente escolar, desde o planejamento da aula até a sua execução.

ÁREA DA PIRÂMIDE

OBJETIVO

Esse conteúdo foi preparado para ser aprsentado a uma turma do 3º ano do Ensino Médio. E a partir dos conhecimentos prévios dos alunos sobre figuras planas como quadrado, hexágono, triângulo, etc, construir-se-á o conceito de pirâmide e, pela visualização do material concreto (planificação das pirâmides), a identificação da área da base, área lateral e assim a área total da pirâmide.

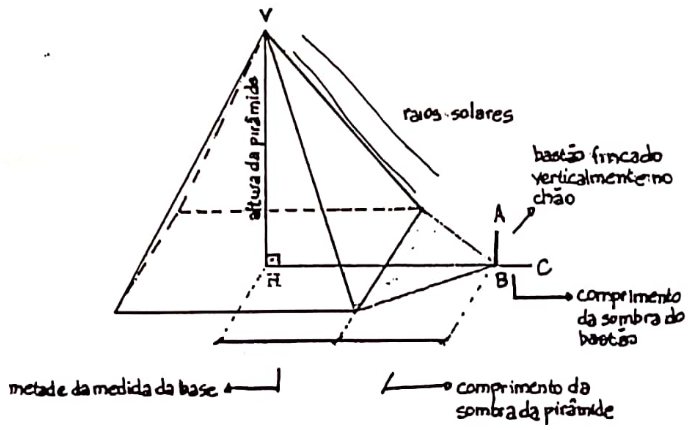
UM POUCO DA HISTÓRIA



As pirâmides egípcias são monumentos grandiosos. A pirâmide de Queóps, construída por volta de 2500 a.C., é considerada uma das grandes maravilhas do mundo antigo; sua base é um quadrado cujos lados medem cerca de 230 metros e sua altura é de 150 metros, aproximadamente.

Tales, um rico comerciante da cidade grega de Mileto, observou que, num mesmo instante, a razão entre a altura de um objeto e o comprimento da sombra que esse objeto projetava no chão era semelhante a mesma para quaisquer objetos.

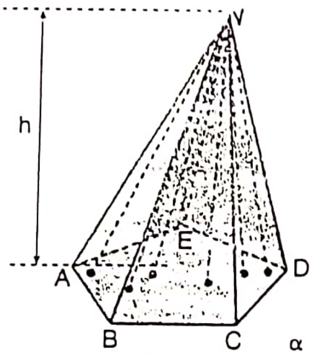
Tales imaginou os triângulos VHB e ABC, que são semelhantes, por terem dois ângulos respectivamente congruentes. Como Tales sabia que os lados desses triângulos eram proporcionais, pôde determinar a altura VH da pirâmide através da proporção VH está para AB, assim como HB está para BC.



CONCEITO

Partindo do conhecimento dos alunos sobre polígono, será considerado um polígono qualquer em um certo plano e um ponto V fora dele. Tomando segmentos de reta todos com uma extremidade em V e outra extremidade nos vértices do polígono. A reunião desses segmentos é um sólido e que esse sólido é uma pirâmide.

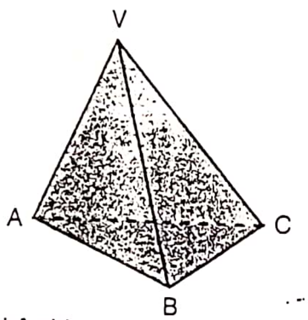
Exemplo:



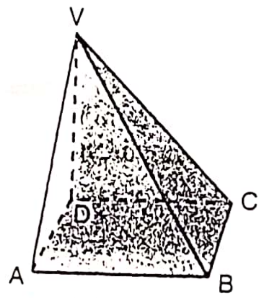
Este exemplo é dado com um polígono de 5 lados.

A partir desse conceito diremos que as pirâmides são classificadas de acordo com o polígono da base (pirâmide triangular, quadrangular...).

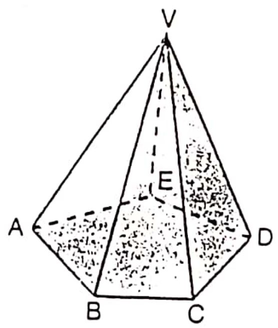
Um destaque especial será dado as pirâmides regulares cujas bases são polígonos regulares.



pirâmide triangular (tetraedro)



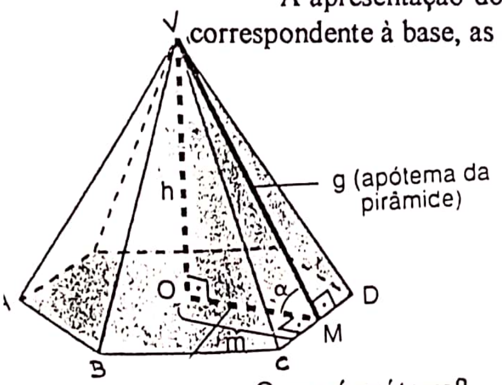
pirâmide quadrangular



pirâmide pentagonal

APRESENTAÇÃO

A apresentação dos elementos da pirâmide será feita no quadro: vértice, o polígono correspondente à base, as arestas da base e laterais, as faces laterais e a altura da pirâmide.



.V- vértice
.Polígono ABCD- base
.AB, BC, CD, DE, EF, FA- arestas da base
.VA, VB, VC, VD, VE, VF- arestas laterais
.Distância de V ao plano da base- altura (h) da pirâmide
.O- centro da base
.OM- apótema da base

O que é apótema?

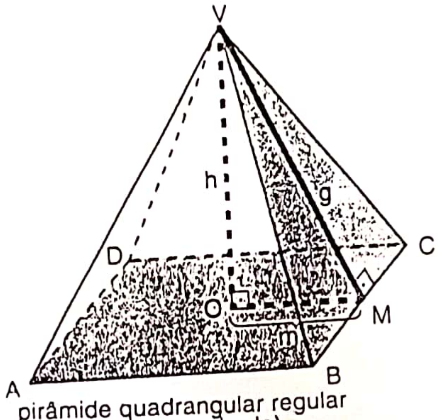
Numa pirâmide regular, em que a base é um polígono regular, o apótema é a altura de uma face lateral relativa ao lado da base.

O que é o centro da base?

É a projeção ortogonal do vértice de uma pirâmide regular sobre o plano da base.

A relação entre a relação entre a altura da pirâmide, apótema da base e apótema da pirâmide:

A reunião desses segmentos formará um triângulo retângulo. Aplicando o teorema de Pitágoras tem-se que $g^2=h^2+m^2$, sendo g: apótema da pirâmide, h: altura da pirâmide e m: apótema da pirâmide.



pirâmide quadrangular regular
(a base é um quadrado)

ATIVIDADE NA CARTOLINA

Em grupos de cinco, os alunos montarão as figuras planificadas (Anexo 1) e reconhecerão os elementos já explicados. Uma ficha de trabalho (Anexo 2) será entregue para ajudá-los a identificarem as áreas (da base, lateral e total) e com exercícios de verificação da aprendizagem.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto. *Matemática Volume único*. São Paulo: Editora Atual, 1997.

Pirâmides. Disponível em http://www.educ.fc.ul.pt/icm99/icm21/piramides.htm . Última consulta em 06/04/04.

Sem nome. Disponível em http://www.colegiocatanduvas.com.b. Última consulta em 01/12/03.

Sem nome. Disponível em http://www.cinei.hpg.ig.com. Última consulta em 01/12/03.

TEOREMA DE TALES
OBJETIVO

O projeto está destinado a alunos da 8ª Série do Ensino Fundamental. Em geral esse teorema é apresentado na 7ª Série e demonstrado com segmentos comensuráveis. O objetivo é, a partir desse conhecimento prévio dos alunos sobre o conteúdo, agora com um novo enfoque, deduzir e generalizar o teorema através da semelhança de triângulos. É uma aula expositiva, com atividade usando material concreto (palitos de picolé) e exercícios de fixação.

HISTÓRIA

Tales de Mileto foi um filósofo grego que viveu por volta de 630 a.C. Se sabe muito pouco a respeito de sua vida e de sua obra. Julga-se ter sido ele o criador da geometria demonstrativa.

Atribui-se a Tales as seguintes propriedades:

Um ângulo inscrito numa semicircunferência é reto;
Os ângulos opostos pelo vértice são congruentes;
Os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes;
Um círculo é dividido igualmente pelo seu diâmetro;
Se dois triângulos são tais que dois ângulos e um lada de um são congruentes respectivamente a dois ângulos e um lado do outro, então esses triângulos são congruentes.

Tales previu o eclipse solar de 585 a.C., mediu a altura da pirâmide do Egito pela observção de sua sombra com a sombra da pirâmide e mediu a distância de uma torre a um navio.

A questão da proporcionalidade estava sempre associada ao nome de Tales. Além disso, ele era de grande importância na arquitetura e agrimensura. Por isso julga-se que a primeira sistematização da geometria deve ter sido em torno da questão da proporcionalidade de segmentos determinados por um feixe de retas paralelas e outras retas transversais. Esta questão durante séculos foi denominada de teorema dos seguimentos proporcionais. Foi somente no final do século séc. XIX na França, que alguns autores passaram a denominar este resultado de Teorema de Tales, denominação que persiste hoje.

Em alguns países como, por exemplo, a Alemanha, o nome Teorema de Tales é dado a um outro enunciado. Neste país, o Teorema de Tales tem o seguinte enunciado: "Todo triângulo inscrito numa semicircunferência é retângulo". E o que é chamado aqui de Teorema de Tales, na Alemanha recebe o nome de "Teorema dos fixos de retas concorrentes".

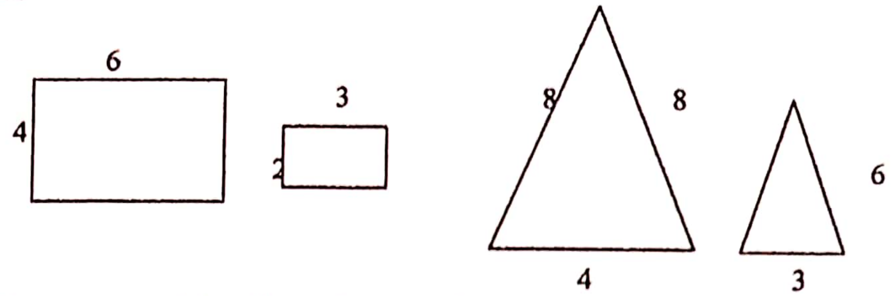
PROCEDIMENTO

1. Revisão dos conceitos de proporcionalidade e semelhança de triângulos usando figuras em cartolina e o quadro-negro a fim de explorar os conhecimentos prévios dos alunos sobre esses conteúdos.

Pares de figuras serão apresentados para que a partir da visualização eles deduzam o conceito de proporcionalidade. Depois então a demonstração no quadro.

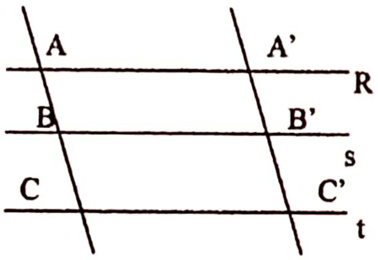
O mesmo se fará para mostrar a teoria de semelhança de triângulos.

Ex:



1. Teorema enunciado e ilustrado no quadro

"Um feixe de retas paralelas determina sobre duas transversais segmentos proporcionais".



$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

r // s // t

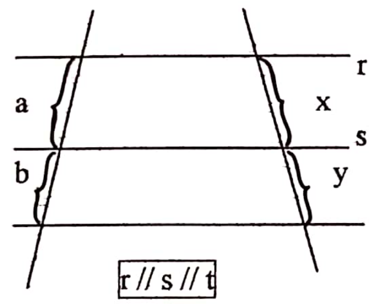
DEMONSTRAÇÃO

1. CONCRETA

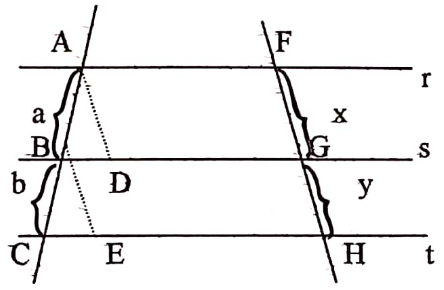
Uma ficha de trabalho (Anexo 5) será entregue com o roteiro da atividade, que consiste em construir, utilizando palitos que serão dados, um triângulo qualquer; colocar um palito paralelo a um dos lados do triângulo e que corte os demais formando um outro triângulo interior ao primeiro formado e observá-los de forma a concluir a semelhança ente eles e, portanto, a proporção entre seus lados.

2. FORMAL

Partindo desta figura



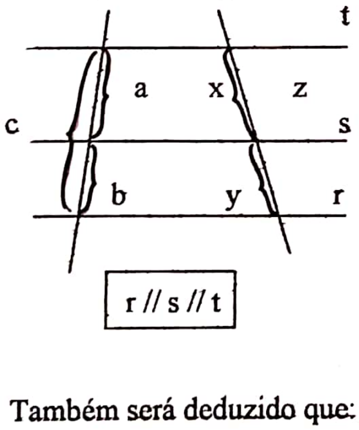
Traça-se AD e BE, paralelos a FH



Os triângulos formados ABD e BCE são semelhantes porque têm ângulos respectivamente iguais. Logo: $\frac{AB}{AD}\ \frac{AD}{BE}$ ou $\frac{a}{b}\ \frac{AD}{BE}$.

Como os quadriláteros ABGF e BCHG são paralelogramos, resulta: AD=x e BE=y. Portanto: $\frac{a}{b}\ \frac{x}{y}$.

Usando a álgebra,será visto que é possível escrever outras proporções, associadas à mesma figura. Exemplo:



$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$$

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{x}{y} + 1$$

$$\frac{a+b}{b} = \frac{x+y}{y}$$

ou

$$\frac{c}{b} = \frac{z}{y}$$

Também será deduzido que: $\frac{c}{a} = \frac{z}{x}$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ROBERTO, Luís. *Tudo é Matemática-8ª série.* São Paulo: Editora Ática, 2003.

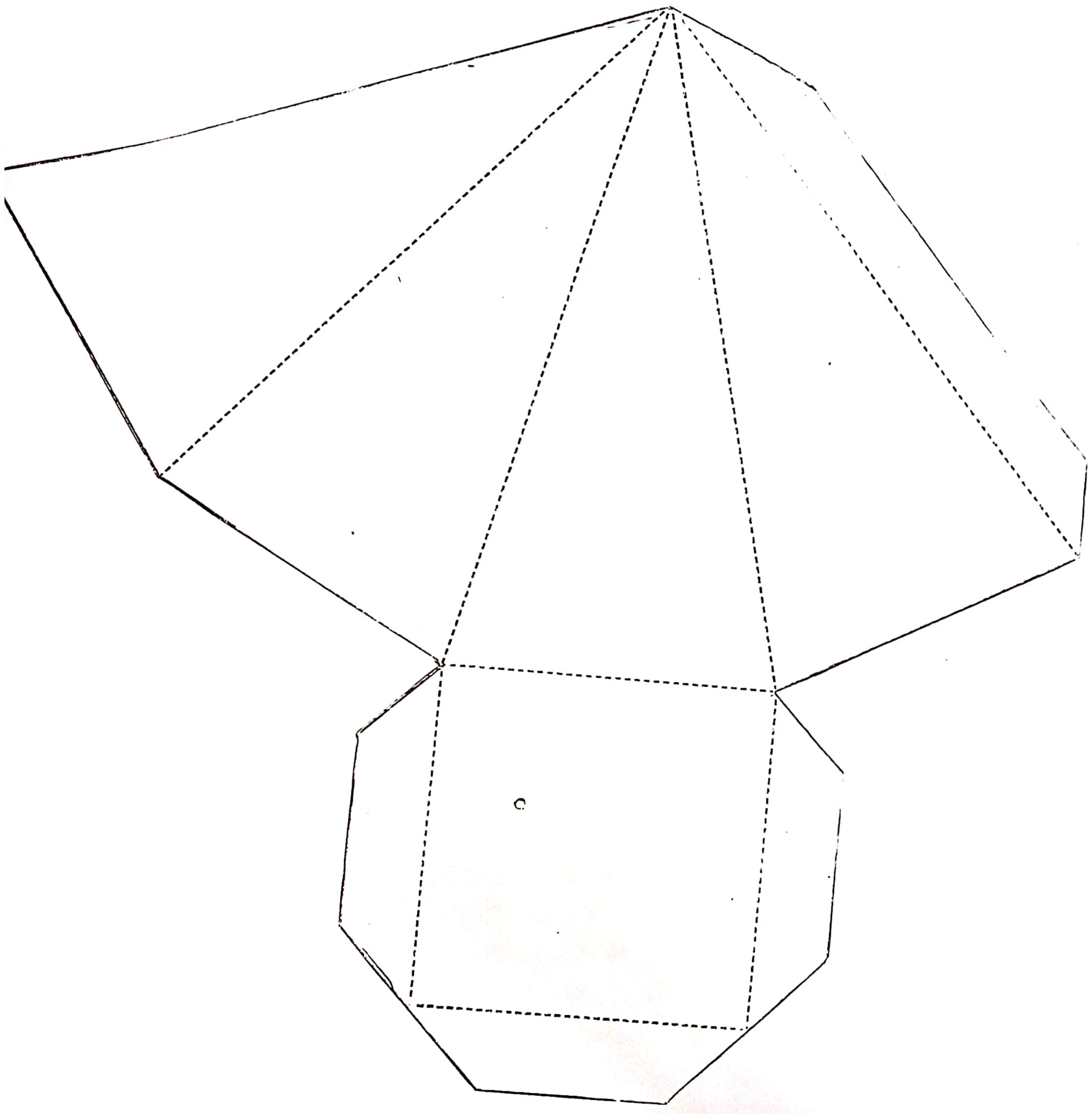
Sem nome. Disponível em: **http://www.teoremadetales.htm**. Última consulta em 9/11/03.

IMENES, Luís Márcio e LELLIS Marcelo. *Matemática para todos- 8ª série.* São Paulo: Editora Scipione, 2002.

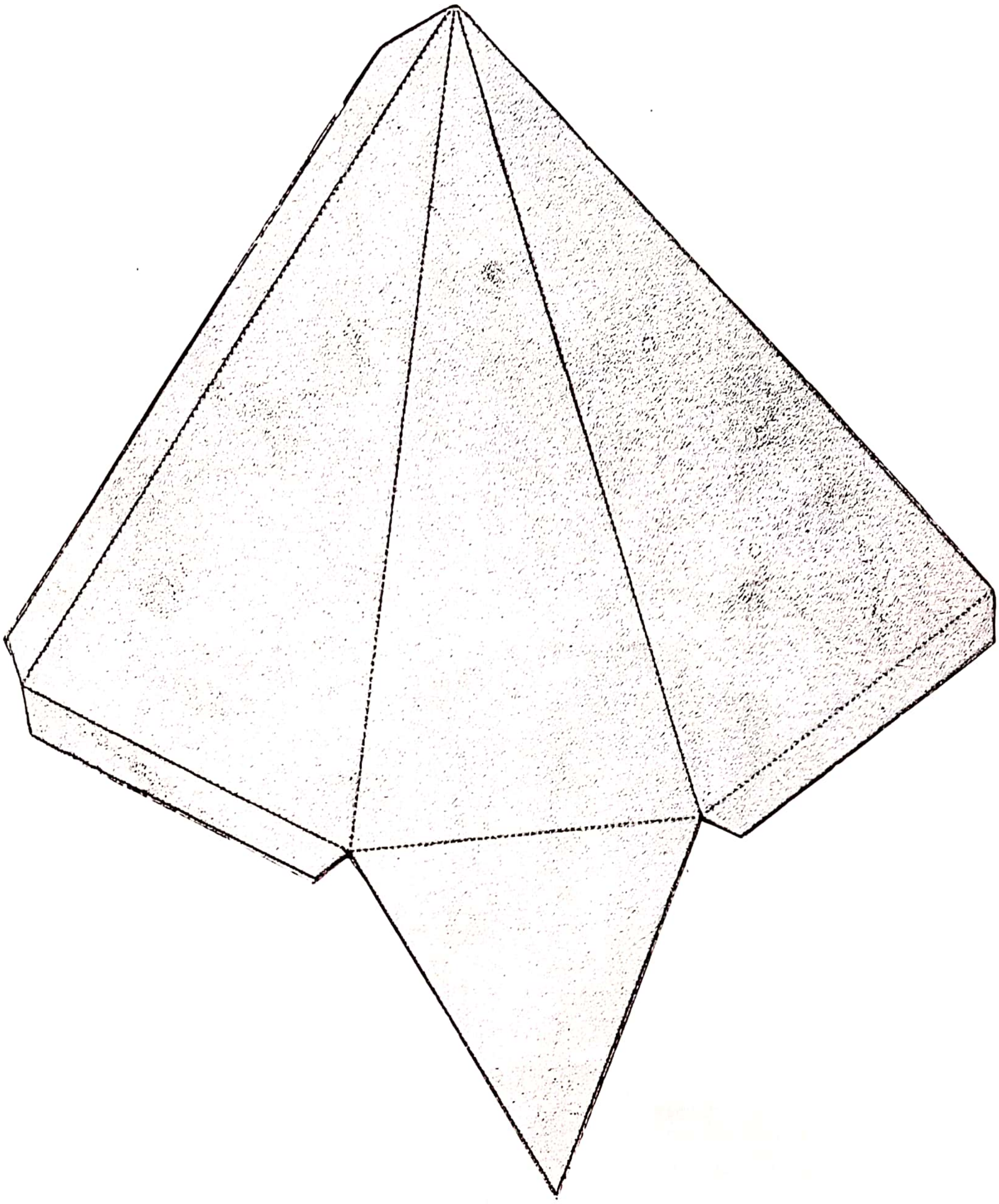
ANEXOS

ANEXO 1
PLANIFICAÇÕES

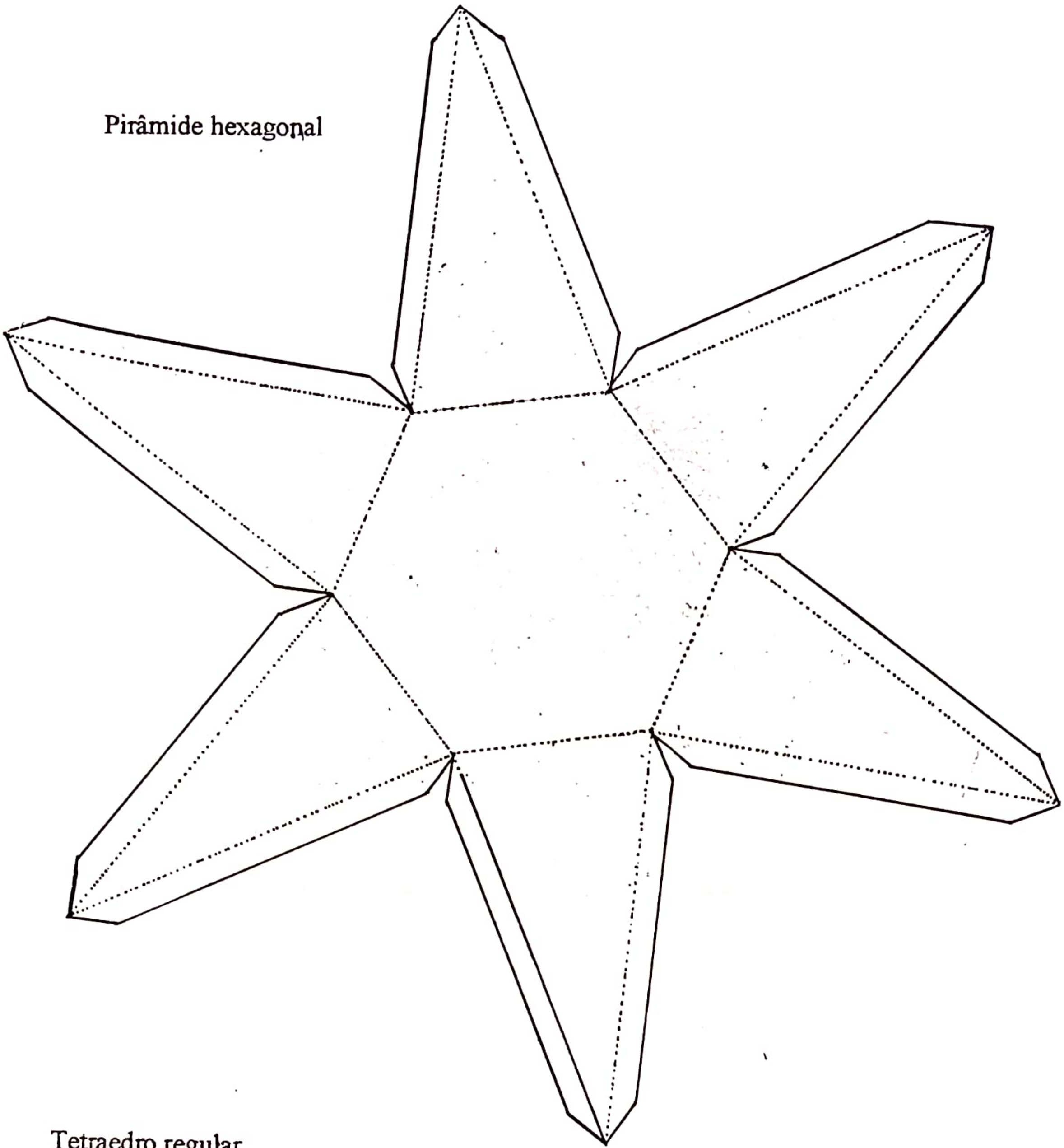
Pirâmide quadrangular



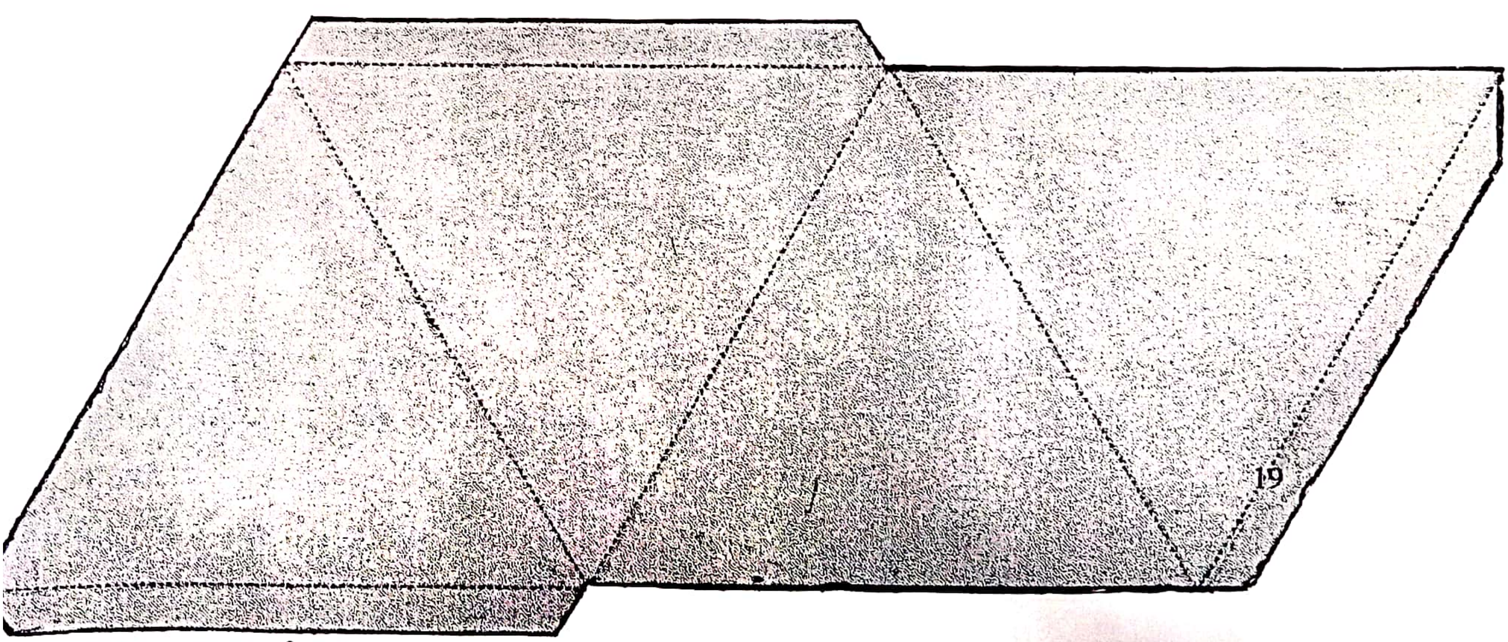
Pirâmide triangular



Pirâmide hexagonal



Tetraedro regular



ANEXO 2
FICHA DE TRABALHO: "ÁREA DA PIRÂMIDE"

CEFET CAMPOS - Licenciatura em Matemática
Alunos responsáveis - Amanda Moura, Juliana Chagas, Hélio Monteiro e Ana Paula Siqueira.

Projeto sobre Teorema da Área da Pirâmide

Ficha de Trabalho

Atividade 1

Com as planificações das figuras em mãos, faça o que se pede:

1.1 Recorte as figuras
1.2 Dobre nas linhas pontilhadas
1.3 Cole as abas

Atividade 2

Através da montagem das pirâmides planificadas, responda às perguntas a seguir:

2.1 Que polígono corresponde a base de cada pirâmide?

Figura 1 ____________________

Figura 2 ____________________

Figura 3 ____________________

Figura 4 ____________________Meça os lados desse polígono.O que você pode observar? Então qual a classificação desse triângulo de acordo com os lados? ____________________

2.2 Qual a área de cada um de cada um desses polígonos?

Figura 1 ____________________

Figura 2 ____________________

Figura 3 ____________________

Figura 4 ____

Conclusão: Então a área desses polígonos corresponde a _______________ _________________________ da pirâmide.

2.3 Que polígono corresponde a face lateral de todas as pirâmides?

____

2.4 Qual a área desse polígono na figura 1, 2 e 3? Qual a área desse polígono na figura 4?

____

2.5 Quantas faces laterais existem nas figuras 1, 2, 3 e 4?

____

2.6 A área lateral de cada pirâmide é?

____

____

____

____

Conclusão: Então tendo uma pirâmide regular com n faces laterais a área lateral dessa pirâmide é

____

Através da atividade 23 o que é possível enunciar sobre a área total da pirâmide regular de n faces?

____

Exercícios para aprendizagem

1- Uma pirâmide tem por base um retângulo cujas dimensões medem 10 cm e 24 cm, respectivamente. As arestas laterais são iguais à diagonal da base. Calcule a área total da pirâmide.

2- Calcule a área total de uma pirâmide regular hexagonal, sendo 3 cm sua altura e 10 cm a medida da aresta da base.

3- (PUC-RS) Uma pirâmide quadrangular regular com 12 cm de altura e 10 cm de aresta da base tem área, em centímetros quadrados, igual a:

ANEXO 3
RELATÓRIO DO PROJETO "ÁREA DA PIRÂMIDE"

RELATÓRIO DO PROJETO "ÁREA DA PIRÂMIDE"

O projeto de aula sobre a Área da Pirâmide teve como objetivo levar os alunos, através da montagem e observações das planificações das pirâmides, as conclusões sobre a área da pirâmide.

O projeto foi apresentado na Escola Estadual Dr. Nilo Peçanha, no 3° ano do Ensino Médio, na turma 1303. O horário da aula era das 7h às 8h25min. Iniciou-se a apresentação aproximadamente às 7h15min, devido à falta de material (apagador e giz) na sala de aula. Uma das componentes do grupo se atrasou, mas chegou no momento em que os demais componentes estavam se apresentando.

A aula começou efetivamente com um dos componentes falando um pouco sobre a história da pirâmide. Através do desenho de uma pirâmide na cartolina foram apresentados os primeiros pensamentos a respeito deste sólido.

Até então, a turma – composta de aproximadamente 25 alunos – não estava completa. Ao longo da apresentação do projeto, iam chegando demais alunos, o que atrapalhou e dispersou um pouco a atenção da turma e de quem estava explicando.

Logo após a parte histórica, apresentou-se o conceito de pirâmide, enfatizando as pirâmides regulares. Em seguida, foram explicados os elementos que compõem uma pirâmide e a relação entre apótema da base, apótema da pirâmide e altura numa pirâmide regular.

Em todo o tempo buscou-se ouvir as conclusões dos alunos sobre tudo o que estava sendo explicado através de perguntas, que na maioria das vezes foram respondidas de forma correta, mostrando também um grande interesse por parte da turma.

Conhecendo já a definição de pirâmide, os alunos receberam a ficha de trabalho (Anexo 2) e as planificações (Anexo 1) para montarem e então tirarem conclusões a respeito da Área da Pirâmide. A turma foi dividida em grupos de três alunos (em média).

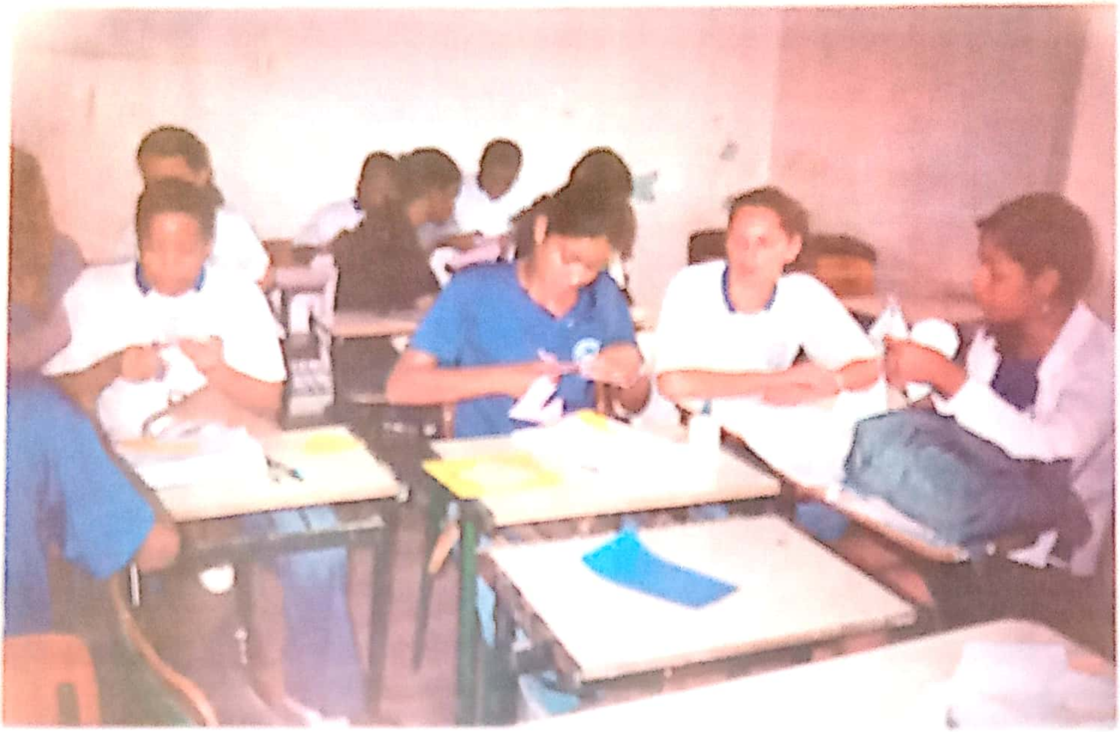
A maioria dos grupos se interessou e buscou aprender, solicitando ajuda e esclarecimentos (quando necessários) em suas carteiras. Mas havia uma minoria desinteressada.

Em todo o tempo os futuros professores circularam nos grupos e notaram que o objetivo principal do projeto foi alcançado pela maior parte da turma.

Os exercícios foram corrigidos no quadro. Devido à falta de tempo os alunos não fizeram os exercícios sozinhos e foi possível resolver apenas o primeiro dos três exercícios propostos. Uma falha foi notada neste ponto: a escolha de exercícios de resolução muito grande, o que impossibilitou a resolução dos demais.

Apesar disso, o projeto foi apresentado com êxito e alcançou seu objetivo.

ANEXO 4
FOTOS



ANEXO 5
FICHA DE TRABALHO: "TEOREMA DE TALES"

Alunos responsáveis – Amanda Moura, Juliana Chagas, Hélio Monteiro e Ana Paula Siqueira.

Projeto Sobre Teorema de Tales

Ficha de Trabalho

Com os palitos, faça o que se pede:

1º- Cole três palitos sobre a folha de maneira que forme um triângulo.

2º- Cole outro palito paralelo a um dos lados do triângulo, formando um triângulo menor "dentro" do primeiro triângulo.

3º- Observe os dois triângulos formados. O que é possível dizer dos ângulos do triângulo maior em relação aos ângulos do triângulo menor?

4º- Que conclusão podemos tirar a respeito desses dois triângulos?

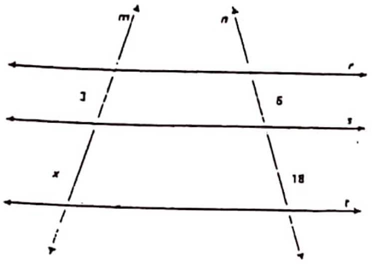
5º- Com base no que você concluiu acima, o que é possível dizer sobre os lados desses dois triângulos?

6º- Meça os lados dos triângulos e confirme a relação existente

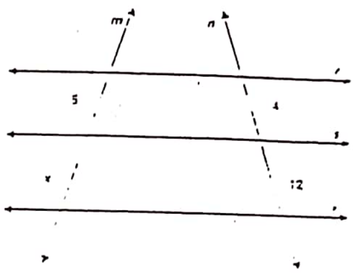
Exercícios de verificação da aprendizagem

1) Sendo $r // s // t$, determine o valor de x:

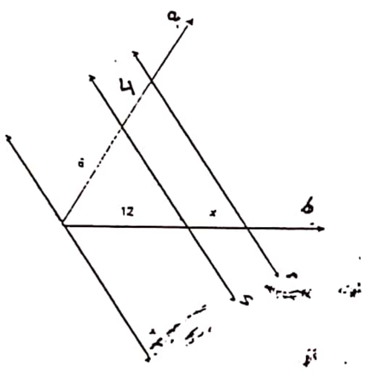
a)



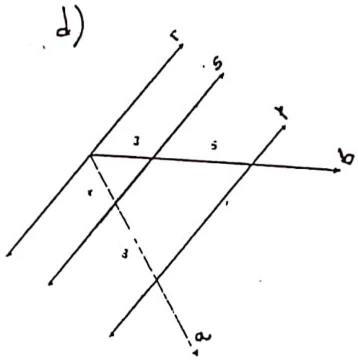
b)



c)

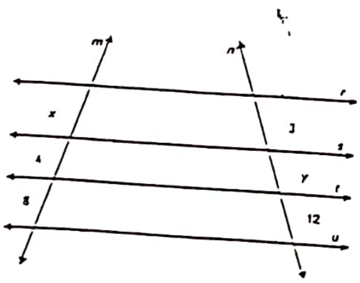


d)

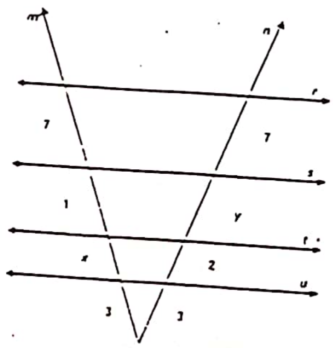


2) Calcule a medida dos segmentos com x e y, em cada caso, usando o teorema de Tales, sendo $r // s // t // u$.

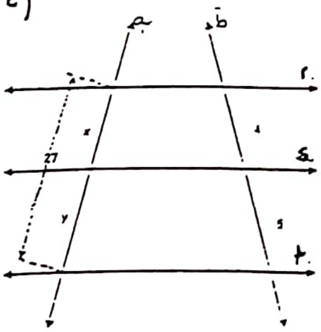
a)



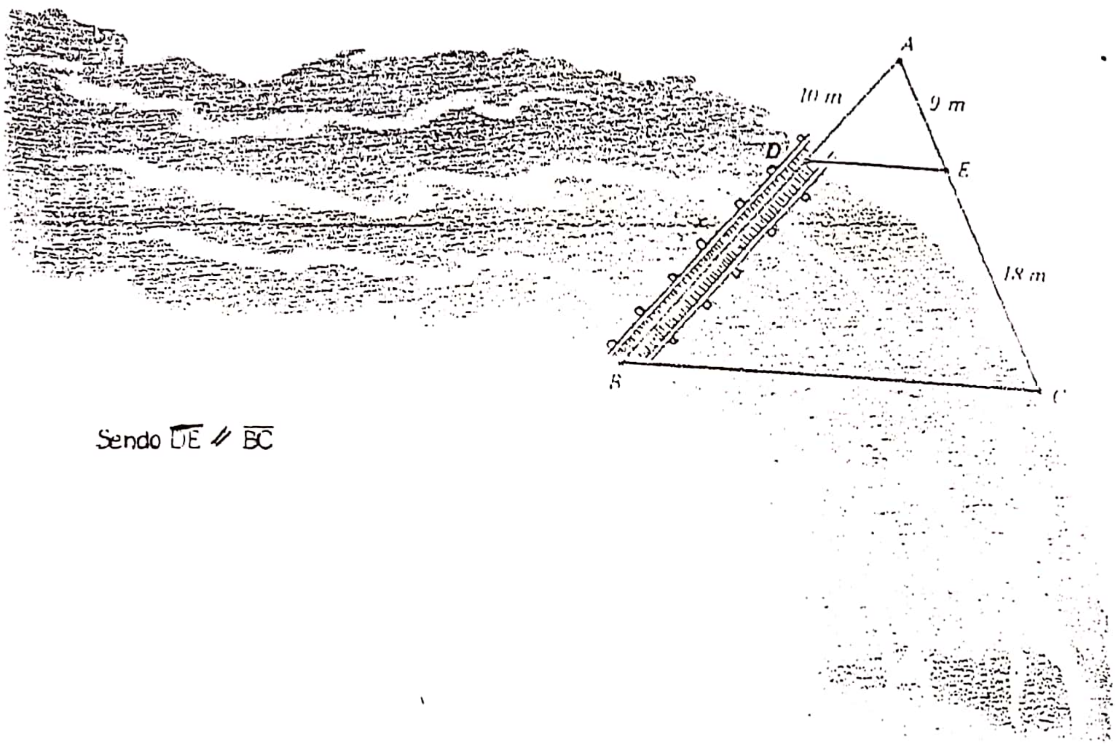
b)



c)

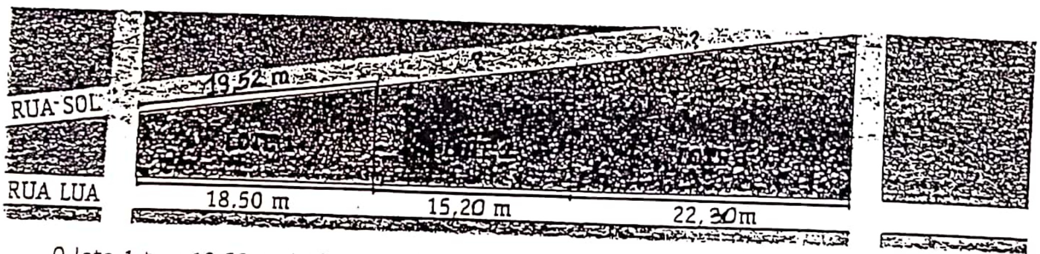


3 - Qual será o comprimento de uma ponte que vai ser construída sobre um rio, nas condições da figura abaixo?



Sendo $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

4. Observe a planta do loteamento:



O lote 1 tem 19,52 m de frente para a rua Sol. Quais são as medidas aproximadas das frentes dos lotes 2 e 3 para essa mesma rua? Se quiser, use calculadora.