CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS
(ENSINO FUNDAMENTAL)

ÁREA E VOLUME DO CUBO
(ENSINO MÉDIO)

AMARÍLIS NEVES MIRANDA
CARLA FERNANDA SOARES GOMES
KEILLA LOPES CASTILHO

CAMPOS DOS GOYTACAZES
2004

<u>SUMÁRIO</u>

INTRODUÇÃO

Este projeto foi desenvolvido no decorrer dos períodos I, II e III no Laboratório de Ensino, supervisionado pela professora Vera Fazoli, na instituição CEFET-Campos.

Foram selecionados dois temas, Semelhança de Triângulos, voltado para o Ensino Fundamental e Área e Volume do Cubo, voltado para o Ensino Médio.

Este projeto tem como objetivo desenvolver as habilidades de percepção de figuras planas e espaciais e cálculos correspondentes.

Trabalharemos com a parte histórica para mostrar o surgimento do teorema e a partir deste apresentar a demonstração formal. Utilizaremos também a demonstração prática, tendo esta a intenção de construir no alunado uma percepção crítica, baseando na visualização e na concreticidade da Matemática no dia-a-dia.

Por fim aplicaremos exercícios específicos para fixar os conteúdos e demonstrações até então feitas.

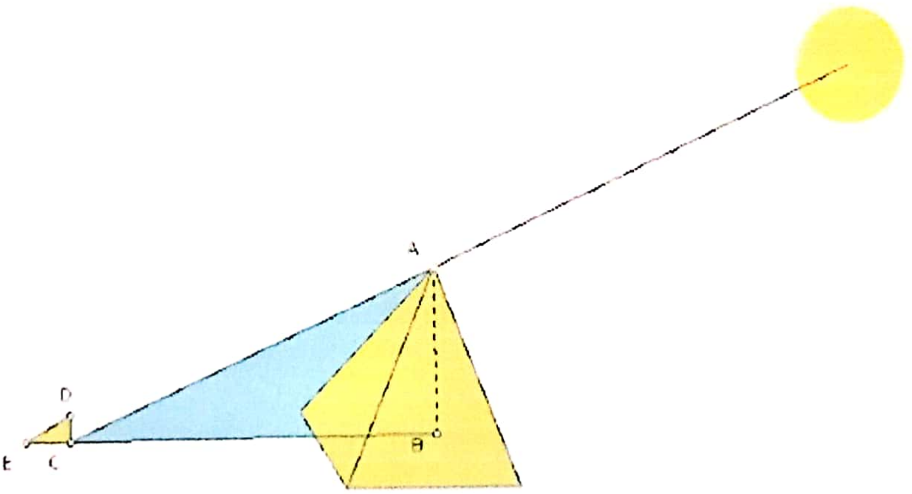
CAPITULO I: SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

UM POUCO DE HISTÓRIA

Segundo Plutarco fincando uma vara vertical no extremo da sombra projetada pela pirâmide, construímos à sombra projetada da vara, formando no solo dois triângulos semelhantes.

Notamos que neste relato é necessário o conhecimento de teoremas sobre triângulos semelhantes.

Observando o desenho abaixo, a vara colocada no extremo C da sombra da pirâmide forma, com sua sombra, o triângulo DCE que é semelhante ao triângulo ABC.



$$\frac{AB}{BC} = \frac{DC}{CE}, onde AB = \frac{DC * AB}{CE}$$

Medindo as duas sombras e a altura da vara, pode-se determinar então a altura da pirâmide.

TEORIA

DEFINIÇÃO

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais.
Homólogo – mesmo lugar.

$A \equiv R$

$B \equiv S$

$C \equiv T$

$$\frac{AB}{RS} = \frac{BC}{ST} = \frac{AC}{RT} = K$$

K: Razão de semelhança
Se a razão de semelhança é igual a 1, ou seja, k = 1, os triângulos são congruentes.

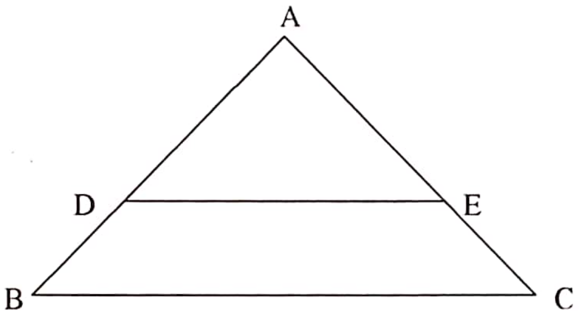
OBSERVAÇÕES

Se a razão de semelhança de dois triângulos é K, então: A razão entre os perímetros é k; A razão entre as alturas homólogas é k.

TEOREMA FUNDAMENTAL

Se uma reta é paralela a um lado de um triângulo e intercepta os outros dois lados em pontos distintos, então ele determina um novo triângulo semelhante ao primeiro.

DEMONSTRAÇÃO



Para provarmos a semelhança entre os triângulos ADE e ABC, precisamos provar que eles têm ângulos ordenadamente congruentes e lados homólogos proporcionais.

1º- Ângulos congruentes

Se DE // BC então D ≡ B e E ≡ C (ângulos correspondentes).

Temos: D ≡ B, E ≡ C e A comum.

Neste momento faremos uma breve revisão do Teorema de Tales.

2º- Lados proporcionais

Considerando as paralelas DE e BC, pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

Por E construímos EF paralela a AB, com F em BC, e pelo teorema de Tales:

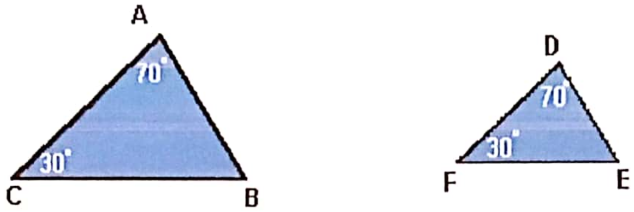
$$\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$$

Como BDEF é paralelogramo, DE ≡ BF. Sendo assim $\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

Logo, $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

CASOS DE SEMELHANÇA

<u>1º caso</u> – “Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes”.



Como a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180° e se dois ângulos são congruentes, então o terceiro ângulo também será congruente.

DEMONSTRAÇÂO

A + B + C = 180° **(1)**

D + E + F = 180° **(2)**

Â = D
C = F

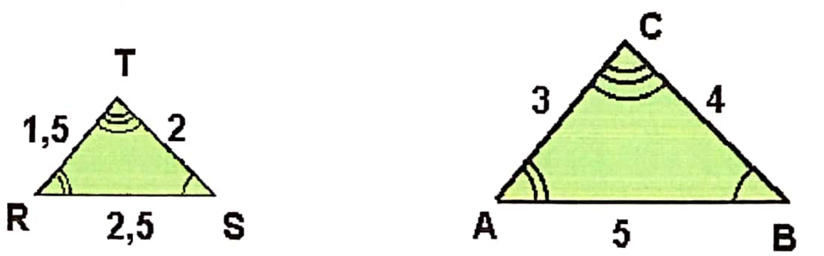
De 1 e 2 temos:

A+B+C = D+E+F

Logo, B ≡ E.

NOTA: Dois ângulos ordenadamente congruentes, asseguram a semelhança entre os triângulos, e daí decorre que os mesmos têm lados homólogos proporcionais.

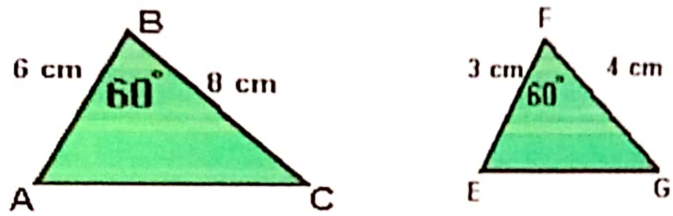
<u>2º caso</u>: “Se dois triângulos têm lados correspondentes proporcionais, então eles são semelhantes”.



Como a razão entre os lados homólogos dos triângulos RST e ABC é constante dizemos que esse lados são proporcionais.

$$\frac{2,5}{5} = \frac{2}{4} = \frac{1,5}{3} = k \qquad \text{ou} \qquad \frac{5}{2,5} = \frac{4}{2} = \frac{3}{1,5} = \frac{1}{K}$$

<u>3º caso</u>: "Se os lados de um triângulo são proporcionais aos homólogos de um outro triângulo e os ângulos compreendidos entre eles são congruentes, então os triângulos são semelhantes".



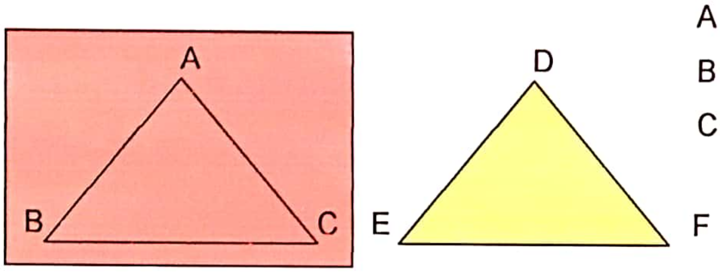
OBS: Se dois lados são proporcionais e os ângulos compreendido congruentes, os triângulos são semelhantes, conseqüentemente o outro lado será proporcional e os outros ângulos ordenadamente congruentes.

PRÁTICA

TEOREMA FUNDAMENTAL DA SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Para a explicação do teorema, dividiremos a turma em grupos de 4 ou 5 alunos, o que dependerá do número total de alunos.

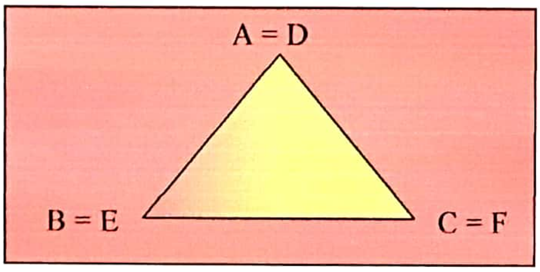
Cada grupo receberá um retângulo com o desenho de triângulos, e um triângulo congruente ao desenhado.



$$\left.\begin{matrix} A = D \\ B = E \\ C = F \end{matrix}\right\} \triangle ABC = \triangle DEF$$

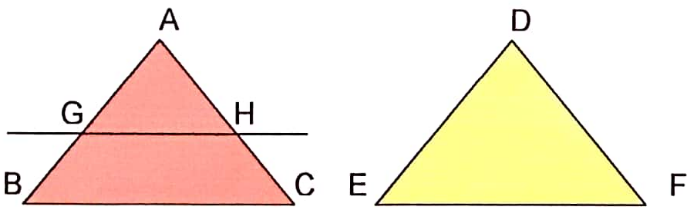
Pediremos aos alunos que nos acompanhem passo a passo na explicação prática do teorema

Para começar sobreporemos os dois triângulos, o que permitirá aos alunos perceberem que os mesmos são congruentes.

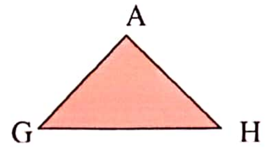


Em seguida marcaremos os pares de ângulos congruentes.

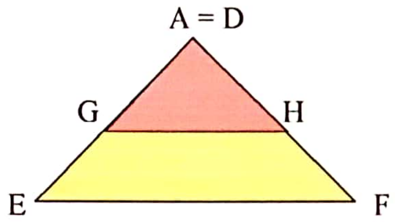
Feito isso traçaremos uma paralela (GH) ao lado BC do triângulo ABC.



Cortaremos o triângulo ABC pela paralela, transformando-o no triângulo AGH.



Em seguida trabalharemos com os triângulos AGH e DEF, mostrando através da sobreposição que A = D; G = E; H = F.

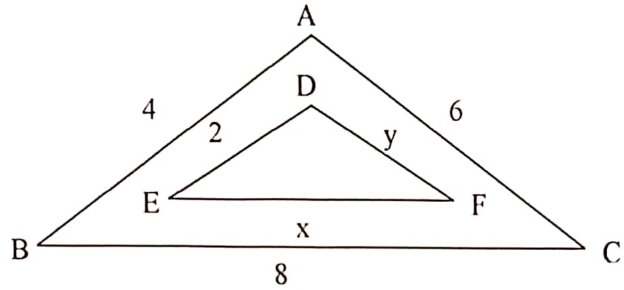


Portanto os triângulos AGH e DEF são semelhantes.

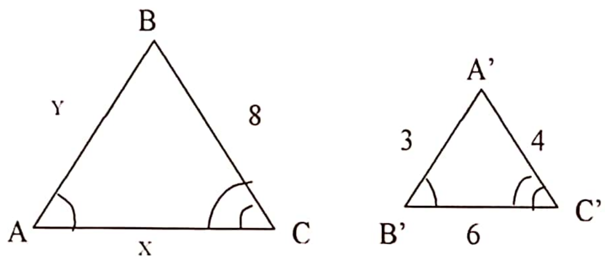
EXERCÍCIOS

1- Sabendo que os triângulos abaixo são semelhantes, determine as medidas de x e y, em cada caso

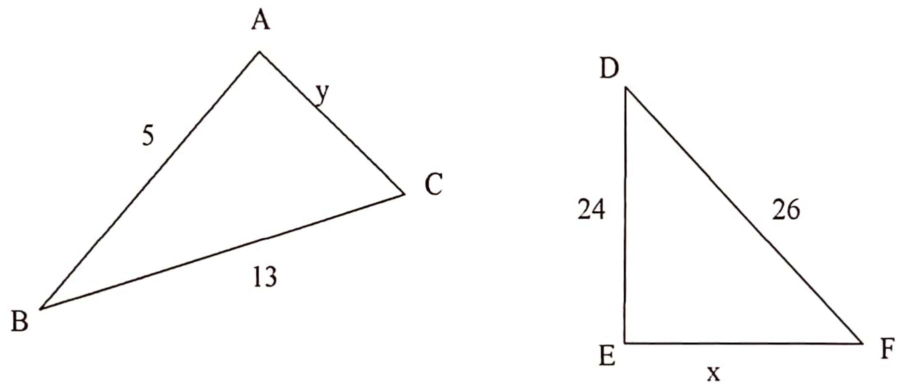
a)



b)

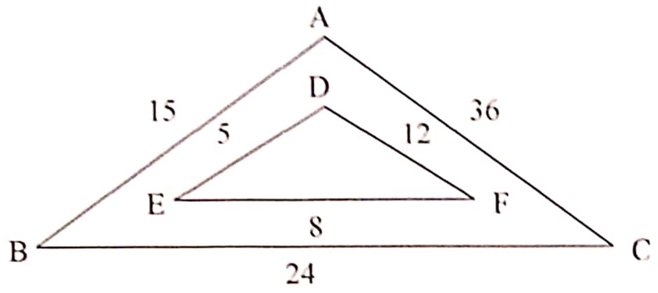


c)

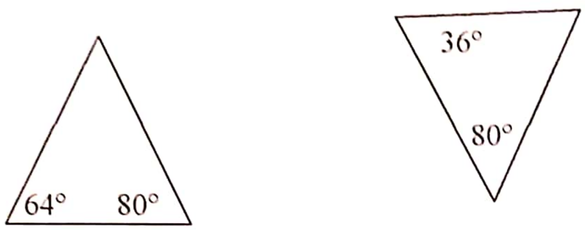


2- Indique o caso pelo qual os triângulos são semelhantes:

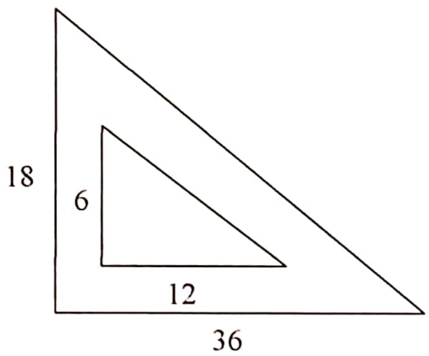
a)



b)



c)



3- Responda as seguintes questões:

a) Dois triângulos congruentes sempre são semelhantes? ____________

b) Dois triângulos semelhantes sempre são congruentes? ____________

c) Dois triângulos eqüiláteros sempre são semelhantes? _____________

CAPITULO II: ÁREA E VOLUME DO CUBO

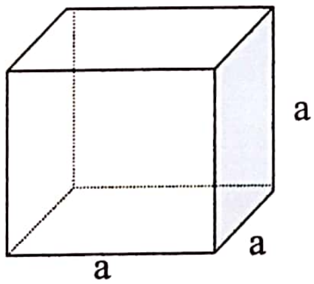
UM POUCO DE HISTÓRIA

A duplicação do cubo é um dos "três problemas famosos (ou clássicos)" da Antigüidade. Não sabemos precisamente quando e por quem este problema foi formulado pela primeira vez, pois existem vários relatos a respeito. Uma das versões diz que como os délios haviam sido atingidos por uma praga, uma delegação foi enviada ao oráculo de Apolo em Delos para perguntar como a peste poderia ser combatida. Este respondeu que para tanto o altar de Apolo, cuja forma era cúbica, deveria ser dobrado.

TEORIA

DEFINIÇÃO:

Cubo é todo paralelepípedo retângulo com seis faces quadradas, portanto todas as arestas do cubo são congruentes.

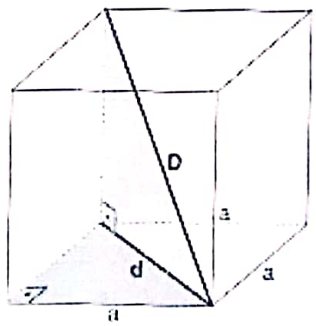


DIAGONAIS

Diagonal da face: $d = a\sqrt{2}$

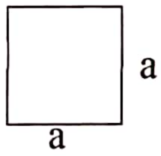
Diagonal do cubo: $D = a\sqrt{3}$

$d^2 = a^2 + a^2$	$D^2 = a^2 + a^2$
$d^2 = 2a^2$	$D^2 = (a\sqrt{2})^2 + a^2$
$d = \sqrt{2a^2}$	$D^2 = 2a^2 + a^2$
$d = a\sqrt{2}$	$D^2 = 3a^2$
	$D^2 = \sqrt{3a^2}$
	$D^2 = a\sqrt{3}$



ÁREA

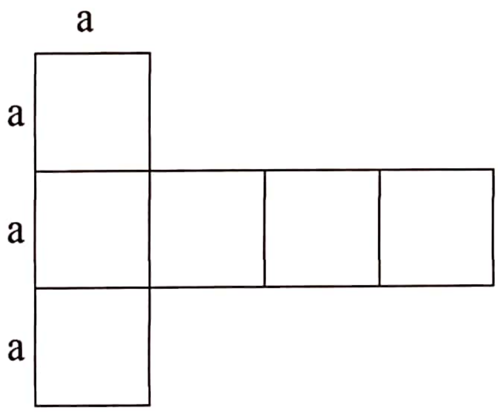
- Área da face (A_f)



$A_f = a \cdot a$

$A_f = a^2$

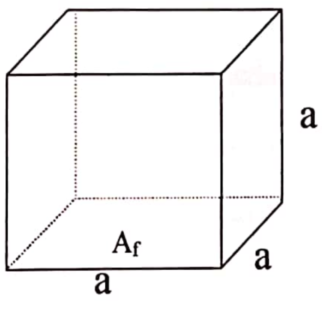
- Área do cubo (A_t)



$A_t = 6A_f$

$A_t = 6a^2$

VOLUME



$V = A_f \cdot h$

$V = a^2 \cdot a$

$V = a^3$

PRÁTICA

ÁREA

Para demonstração prática da área do cubo, dividiremos a turma em grupos de 4 ou 5 alunos.

A cada grupo de alunos será entregue um cubo, no qual os alunos planificarão. A planificaçÃo do cubo permitirá ao aluno melhor visualizaçÃo de que o cubo é composto de seis quadrados congruentes.

Sendo o cubo composto de seis quadrados congruentes, a sua área será igual a seis vezes a área do quadrado. Como a área do quadrado é a^2, onde a é a medida do lado do quadrado, a área do cubo é $6a^2$.

VOLUME

Para demonstração do volume do cubo, utilizaremos um cubo de acrílico, que será preenchido com água (antes da água ser colocada no acrílico, a sua quantidade será medida).

Após o cubo estar cheio de água, os alunos perceberão que o seu volume é igual a quantidade de água usada e que essa quantidade pode ser encontrada pelo produto entre a altura, largura e comprimento do cubo, chegando a fórmula usada para calcular o volume do cubo: $V = a^3$.

EXERCÍCIOS

1 – Quanto mede a aresta de um cubo de $27m^3$?

2 – Um cubo tem volume V. Duplicando a medida da aresta, qual será o volume do novo cubo?

3 – Calcule a medida das diagonais de um cubo de 2m de aresta.

RELATÓRIO

Dentre os temas escolhidos para o desenvolvimento do presente trabalho: Áreas e volumes do cubo e Semelhança de Triângulos, os elaboradores do mesmo optaram por trabalhar em sala de aula com o tema Semelhança de Triângulos.

Este trabalho foi realizado na escola Estadual João Pessoa, localizada no município de Campos dos Goytacazes, em uma turma de 8ª série composta por 22 alunos.

A aula foi programada para dois tempos de aula e sendo esta dividida em cinco momentos:

a) Parte histórica
b) Demonstração do Teorema Fundamental
c) Apresentação dos Critérios de Semelhança
d) Demonstração Prática do Teorema Fundamental
e) Exercícios

Para apresentação da parte histórica foi utilizado um cartaz feito em cartolina para ilustrar o que estava sendo abordado.

Com base nos dados históricos definiu-se triângulos semelhantes, prosseguindo a aula, foi realizada a enunciação e a demonstração do Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos, sendo novamente usado cartazes.

Durante esta demonstração foi feita uma breve revisão sobre retas paralelas.

A primeira parte da demonstração (ângulos congruentes) ocorreu tranqüilamente, no entanto a segunda parte (lados homólogos proporcionais) foi um pouco confusa devido a ocorrência de um pequeno erro que foi percebido a tempo. Tendo corrigido o erro, prosseguimos na demonstração sem mais imprevistos. Logo após deu-se início a explanação sobre os critérios de semelhança de triângulos, sendo usado apenas quadro e giz. Esta etapa ocorreu como previsto, ou seja, boa assimilação por parte dos alunos.

Enfim encerra-se a parte teórica da aula, dando início a demonstração prática seguida de exercícios.

Na demonstração prática a participação dos alunos foi total, no entanto alguns deles tiveram dificuldades em realizar o trabalho tendo necessidade de uma atenção especial. Chamamos os alunos a perceberem que as razões entre os lados homólogos foram aproximadamente iguais devido a imprecisão no traçado da reta paralela e do material utilizado.

Devido pouco tempo para o término da aula não foi possível que os alunos resolvessem os exercícios sozinhos, portanto os elaboradores da aula resolveram os mesmos junto com os alunos, mesmo assim o tempo não foi suficiente para a resolução para todos os exercícios ficando a última questão sem resolver.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos da Matemática Elementar*, 6ª ed., V. 9. São Paulo: Atual, 1985.

GUELLI, Oscar; LIMA, Luciano. *Construindo a Matemática* – 8ª série. São Paulo: Nacional.

IEZZI, Gelson. *Fundamentos da Matemática Elementar*, V. 9. São Paulo: Atual, 2002.

____________; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David Mauro; PÉRIGO, Roberto. *Matemática – Volume Único*. São Paulo: Atual, 1997.

BOYER, Carl B. *Duplicação do cubo*. Disponível em: http//: www.matematica.br. Acesso em: 06/11/2003.

EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Campinas: Unicamp, 1997.

ANEXOS

ANEXOS I: Exercícios Resolvidos Pelos Alunos

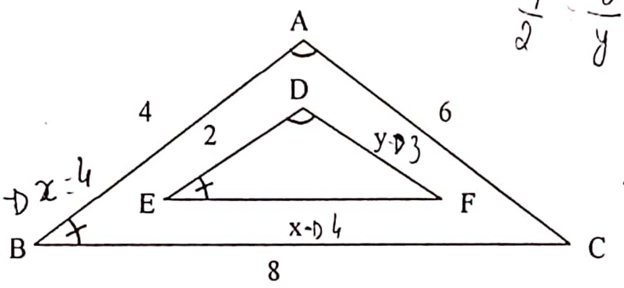
Licenciatura em Matemática – 3º período
Autoras: Amarílis Neves, Carla Fernanda Soares, Keilla Lopes.
NOME: Kaio de Souza Bruno

EXERCÍCIOS

1- Sabendo que os triângulos abaixo são semelhantes, determine as medidas de x e y , em cada caso

a)

$\frac{4}{2} = \frac{6}{y} = \frac{8}{x}$



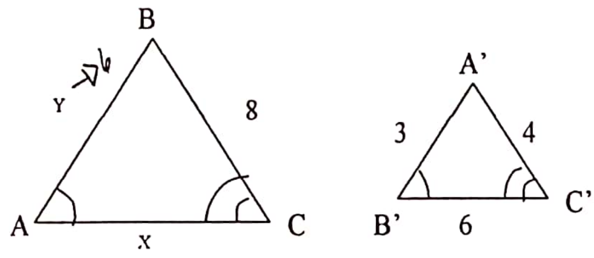
$\frac{4}{2} \times \frac{8}{x} \rightarrow 4x = 16$

$x = \frac{16}{4} \rightarrow x = 4$

$\frac{4}{2} \times \frac{6}{y} \rightarrow 4y = 12$

$y = \frac{12}{4} \rightarrow y = 3$

b)



$\frac{3}{y} = \frac{4}{8} = \frac{6}{x}$

$\frac{4}{8} \times \frac{3}{y} \rightarrow 4y = 24$

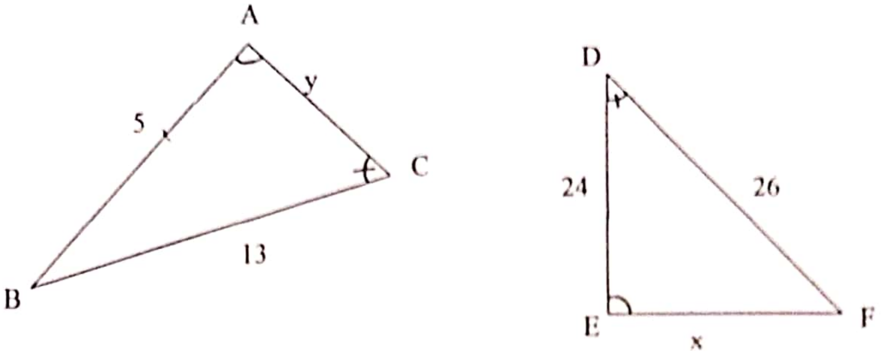
$y = \frac{24}{4} = y = 6$

$\frac{4}{8} = \frac{6}{x}$ $4x = 48$

$x = \frac{48}{4} =$

c)

$$\frac{13}{26} = \frac{5}{x} = \frac{y}{24}$$

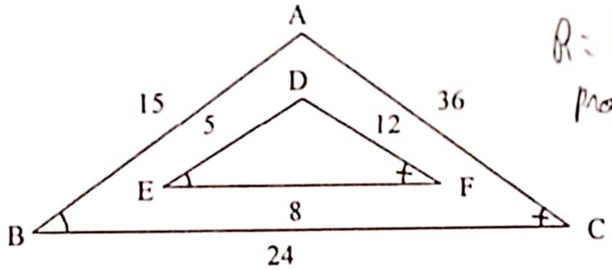


$x = 25 = 10$

$y = \frac{24}{2} = 12$

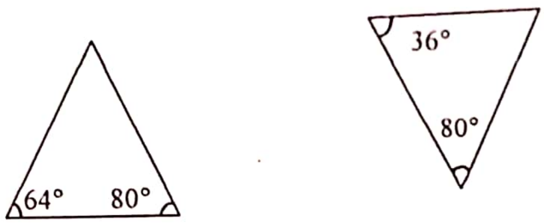
2- Indique o ~~teorema~~ caso pelo qual os triângulos são semelhantes:

a)



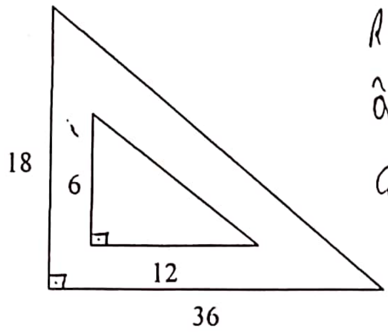
R: Os lados homólogos são proporcionais

b)



R: Dois ângulos congruentes

c)



R: Dois lados homólogos proporcionais e o ângulo compreendido entre estes lados, congruentes.

3- Responda as seguintes questões:

a) Dois triângulos congruentes sempre são semelhantes? ___________

b) Dois triângulos semelhantes sempre são congruentes? ___________

c) Dois triângulos eqüiláteros sempre são semelhantes? ___________

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE CAMPOS

CEFET CAMPOS

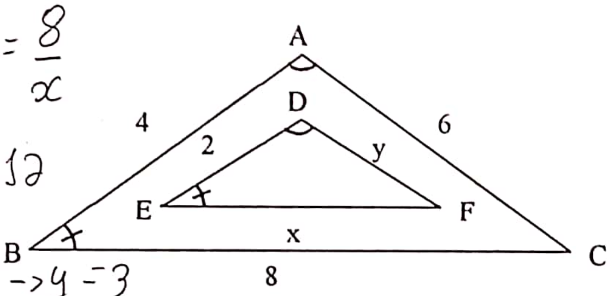
GOVERNO FEDERAL

Licenciatura em Matemática – 3º período
Autoras: Amarílis Neves, Carla Fernanda Soares, Keilla Lopes.
NOME: Zilda Cordoso Ribeiro Dias

EXERCÍCIOS

1- Sabendo que os triângulos abaixo são semelhantes, determine as medidas de x e y , em cada caso

a) $\frac{4}{2} = \frac{6}{y} = \frac{8}{x}$



$\frac{4}{2} = \frac{6}{y} \rightarrow 4y = 12$

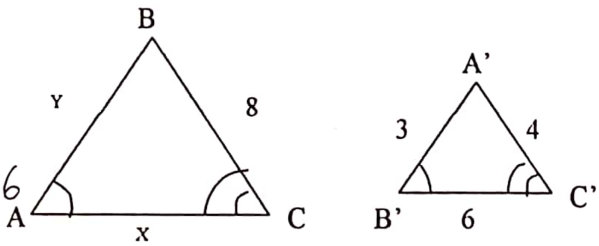
$y = \frac{12}{4} \rightarrow y = 3$

$\frac{4}{2} = \frac{8}{x} \rightarrow 4x = 16$

$x = \frac{16}{4} \rightarrow x = 4$

b)

$\frac{y}{3} = \frac{8}{4} = \frac{x}{6}$



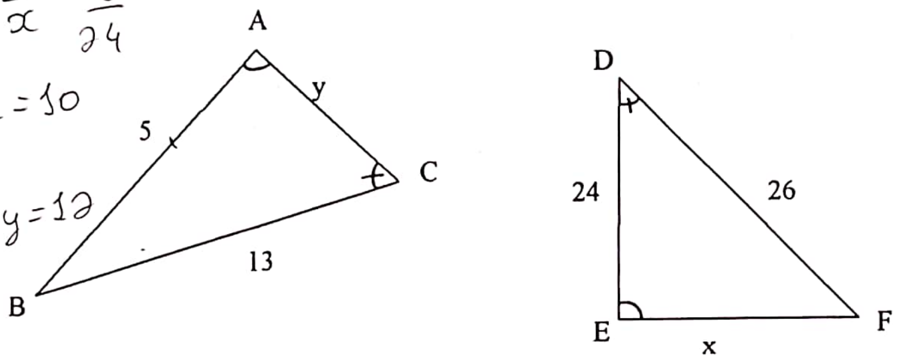
$\frac{8}{4} = \frac{y}{3} \rightarrow \frac{6}{3} \rightarrow y = 6$

$\frac{8}{4} = \frac{x}{6} \rightarrow \frac{12}{6} \rightarrow x = 12$

c) $\frac{13}{26} = \frac{5}{x} = \frac{y}{24}$

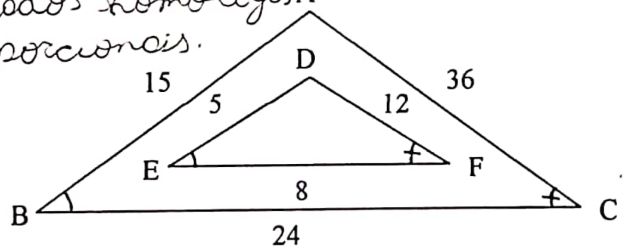
$\frac{13}{26} = \frac{5}{10} \rightarrow x = 10$

$\frac{13}{26} = \frac{12}{24} \rightarrow y = 12$

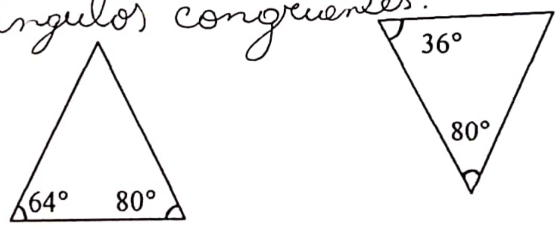


2- Indique o caso [redacted] pelo qual os triângulos são semelhantes:

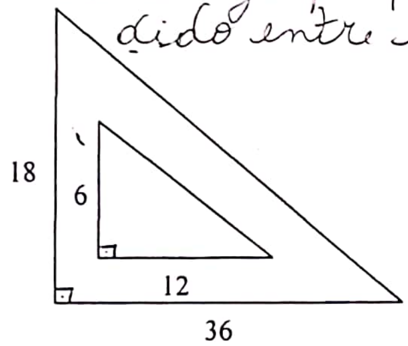
a) Os lados homólogos são proporcionais.



b) Dois ângulos congruentes.



c) Dois lados homologos proporcionais e o ângulo compree, dido entre lados, congruentes.



3- Responda as seguintes questões:

a) Dois triângulos congruentes sempre são semelhantes? ___________

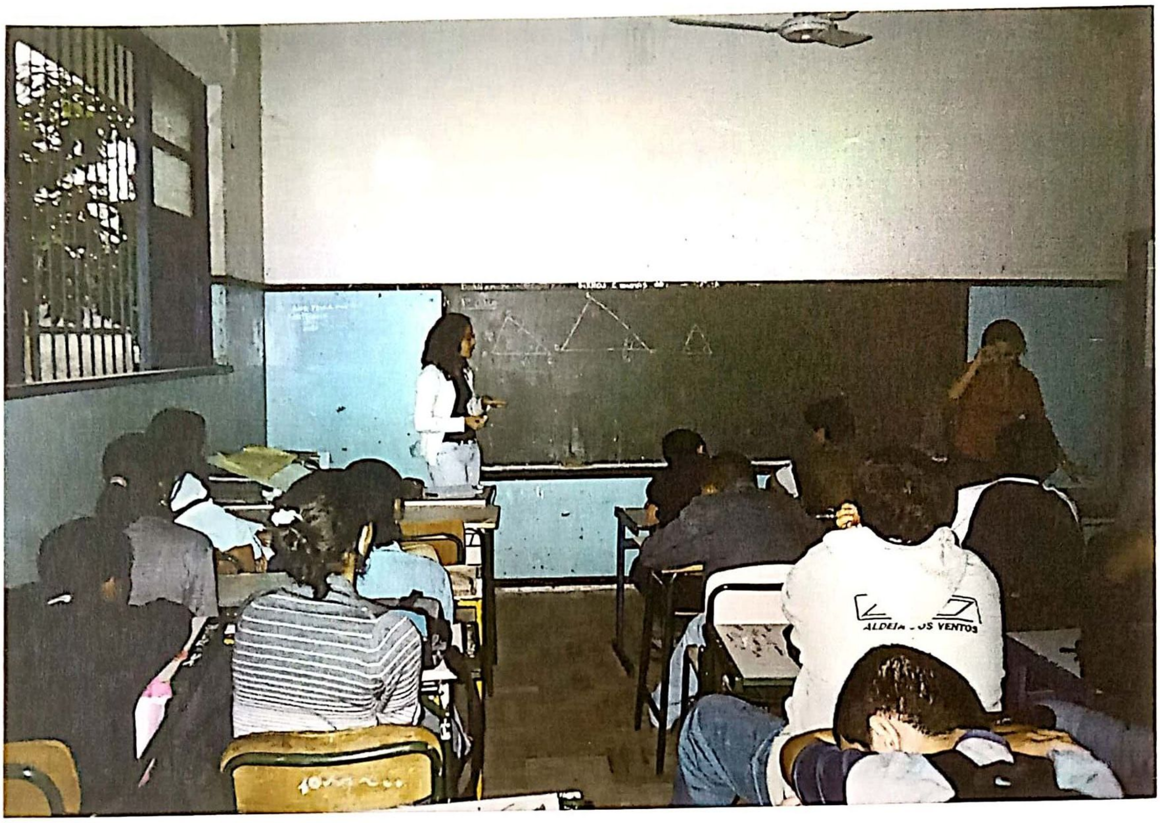
b) Dois triângulos semelhantes sempre são congruentes? ___________

c) Dois triângulos eqüiláteros sempre são semelhantes? ___________

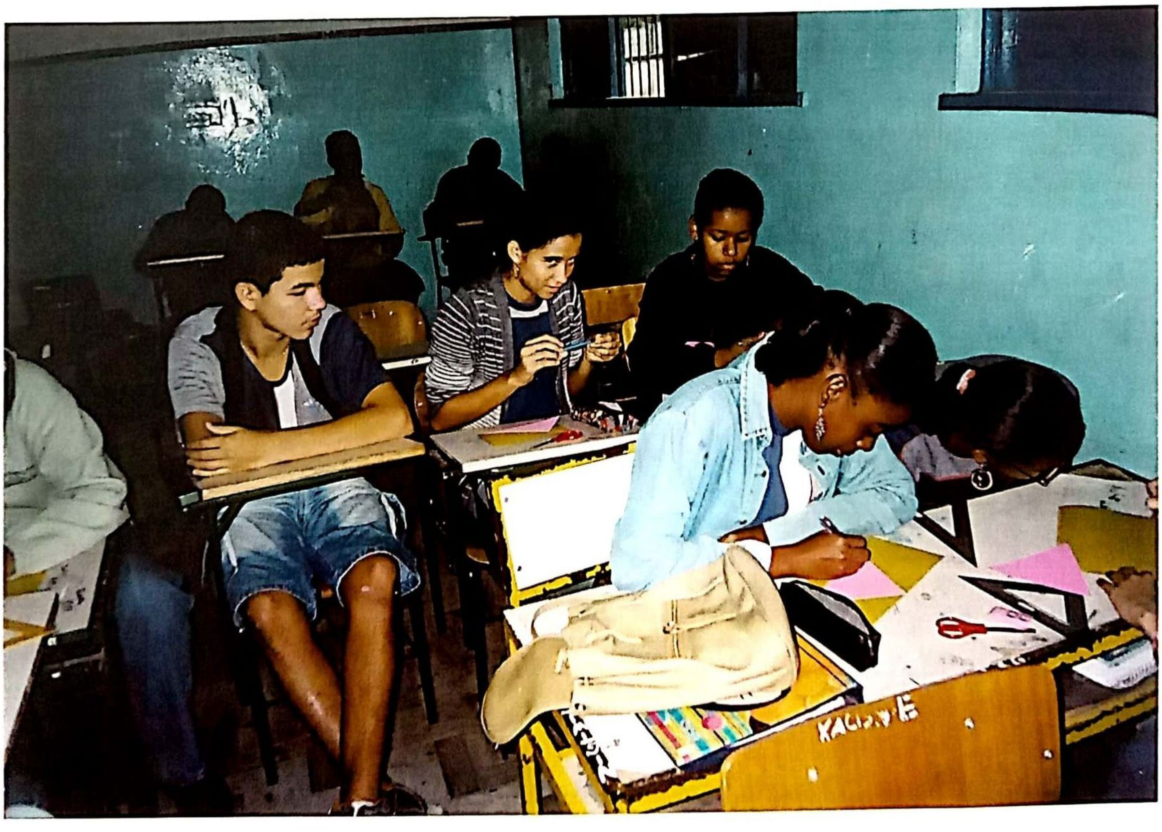
ANEXO II: Fotos

Parte Histórica

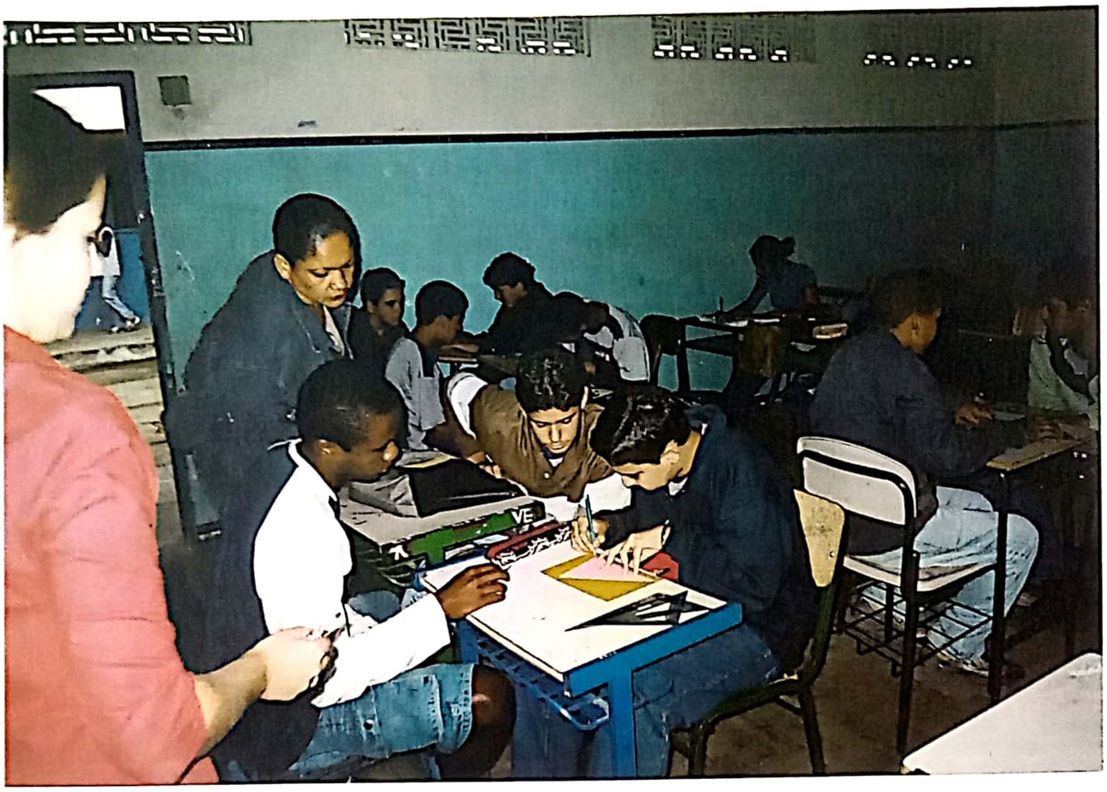
Demonstração do Teorema Fundamental



Casos de Semelhança



Demonstração Prática do Teorema Fundamental



Demonstração Prática do Teorema Fundamental

Demonstração Prática do Teorema Fundamental

Exercícios