

CENTRO FEDERAL DE ENSINO TECNOLÓGICO DE CAMPOS
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA – 4º PERÍODO

TEOREMA DE PITÁGORAS

AMARÍLIS NEVES MIRANDA
ANA PAULA SIQUEIRA NUNES
CARLA FERNANDA SOARES GOMES
HÉLIO MONTEIRO

CAMPOS DOS GOYTACAZES
2004

AMARÍLIS NEVES MIRANDA
ANA PAULA SIQUEIRA NUNES
CARLA FERNANDA SOARES GOMES
HÉLIO MONTEIRO

TEOREMA DE PITÁGORAS

Projeto apresentado ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Campos, como parte das exigências da disciplina Laboratório de Ensino do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Gilmara Teixeira Barcelos
Mestra em Ciências de Engenharia – UENF

CAMPOS DOS GOYTACAZES
2004

SUMÁRIO

1- INTRODUÇÃO	4
2- PREPARAÇÃO DO PROJETO	5
3- DESENVOLVIMENTO DO PROJETO.....	6
3.1- História do Teorema de Pitágoras.....	6
3.2 – Demonstração Prática do Teorema.....	9
3.3- Demonstração do Teorema.....	12
3.4- Exercícios de Aplicação	14
4- CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	15
REFERÊNCIAS	16
ANEXOS.....	17
Anexo A - Exercícios de Aplicação.....	18

1- INTRODUÇÃO

Este projeto tem o intuito de realizar um estudo sobre o teorema de Pitágoras, utilizando material concreto. Para tanto, utiliza-se objeto de fácil manipulação levando a dedução do Teorema.

O público alvo que se destina à aplicação deste trabalho são alunos da 8ª série do ensino fundamental (pró-CEFET). Foi desenvolvido com vinte e oito alunos.

Este projeto tem como objetivo, desenvolver algumas habilidades fazendo com que os aprendizes construam conhecimentos relacionados ao Teorema de Pitágoras. Estes conhecimentos são adquiridos a partir de demonstrações práticas, exemplos de aplicações no cotidiano e algumas considerações históricas.

Fundamenta-se o seguinte roteiro para a aplicação: i) parte histórica para mostrar o surgimento do estudo do teorema, utilizando cálculos fundamentais no dia-a-dia de uma pessoa e área de algumas figuras planas; ii) atividade prática tendo esta a intenção de desenvolver uma percepção crítica, baseada na visualização e na concreticidade da Matemática atual; iii) demonstração teórica, possibilitando a habilidade de percepção de congruências e suas relações, desenvolvendo o raciocínio lógico dedutivo do aluno; iv) exercícios de aplicação

2- PREPARAÇÃO DO PROJETO

O tema “Teorema¹ de Pitágoras” foi escolhido por ser interessante e por ser útil não só à Geometria como também a situações do nosso dia-a-dia. Além disso, é um assunto bastante abordado na matemática, é base para conteúdos de outras disciplinas.

O projeto, Teorema de Pitágoras foi preparado para ser desenvolvido em dois tempos de aula. Antes da aplicação do trabalho, foram realizados dois testes, em dias distintos, com a nossa própria turma, com a finalidade de observar o que poderia ser melhorado ou acrescentado ao projeto. Nesses, observamos que poderíamos melhorar a parte histórica relatando-a com o uso de material concreto do dia-a-dia para melhor assimilação e melhor seqüência da estrutura do projeto. Dando continuidade a este trabalho, foi confeccionado, também para melhor assimilação dos alunos, peças de madeira, com formato semelhante à algumas figuras planas para mostrar uma das demonstrações do Teorema. Estas peças de madeira serão elencadas e descritas na seção 3 (item 3.2). Para complementar o trabalho, procurou-se mostrar aos alunos uma das demonstrações mais citadas pelos livros de ensino fundamental, onde apresenta a demonstração do Teorema através do uso de áreas de quadrados de mesma medida dos catetos do triângulo retângulo a ser estudado. Esta será explicada na seção 3 (item 3.3). Finalizando o projeto foram selecionados alguns exercícios de caráter exploratório acerca do conteúdo em estudo, estes estão no anexo A.

A citar, este projeto, foi desenvolvido a partir de uma coletânea de estudos e pesquisas em livros didáticos, acesso à rede mundial de internet, entre outros.

¹ Teorema: é uma proposição (ou afirmação) que deve ou pode ser demonstrada. TARRIDA, Joan. *Help! Sistema de consulta interativa – Matemática*. São Paulo: Plaza & Janés, 1996.

3- DESENVOLVIMENTO DO PROJETO

O projeto foi desenvolvido em quatro etapas: parte histórica, demonstração prática, demonstração teórica e aplicação de exercícios.

A abertura do mesmo foi realizada com um apanhado histórico, mostrando a utilização do Teorema pelos povos antigos, o qual relatava seu uso inconsciente, principalmente pelos egípcios, onde sentiram a necessidade da formação do ângulo reto em suas construções. Para a explicação deste item foi necessária a utilização de uma corda (material concreto) com treze nós, mostrando assim, a utilização deste "teorema", deduzido pelos egípcios a partir do ângulo reto formado entre os nós da corda.

Após a apresentação da parte histórica, foi trabalhada com os alunos a praticidade do teorema, tentando explorar alguns conceitos básicos e de senso comum deles, a fim de tentar mostrar uma das demonstrações deste conteúdo, e poder, não só trabalhar a matemática como um conhecimento abstrato, mas sim, buscando o ensinamento a partir de algo concreto e que instigasse a curiosidade do aluno. Ao término desta atividade foi realizada uma das deduções do teorema de Pitágoras mais abordadas no ensino fundamental, como já mencionada na preparação do projeto, a qual teve a intenção de trabalhar o raciocínio lógico e dedutivo do aluno. Por fim, trabalhou-se a parte de exercícios de fixação a respeito do teorema já mencionado.

3.1- História do Teorema de Pitágoras²

Iniciamos relatando a origem do teorema e seus repercussores, tendo em seguir a história apresentada aos alunos.

² Toda parte histórica apresentada nesta seção foi extraída de: IMENES, Luiz Márcio. *Vivendo a matemática. Descobrimo o Teorema de Pitágoras*, 10 ed. São Paulo: Scipione, 1994.

Na ordem de antigüidade entre os trabalhos chineses vem o "Kiu-chang Suan-Shu" (Aritmética em novas secções), entre o terceiro e o segundo século a.C., que coletavam os escritos e conhecimentos antigos.

Esta obra passou a ser um manual utilitário por séculos e foi reeditada várias vezes. A nona parte, "Kou-Ku", trata de triângulos retângulos, sendo Ku o cateto maior, Kou o cateto menor e Shian a hipotenusa; nela é dito claramente que adicionando os quadrados de Kou e Ku, a raiz quadrada da soma é igual a Shian.

E Pitágoras? Consta que foi um filósofo, grego (século VI a.C.), natural da ilha de Samos, no mar Egeu. As lendas fantasiosas, infelizmente, deixam dúvidas a respeito de sua vida. Assim, segundo uma delas, foi um jovem inteligente e de rara beleza, enviado a Mileto para estudar com Tales, o primeiro grego com interesses científicos em matemática e o maior sábio da época. Quando aluno desse mestre obteve talvez a prova da proposição, tendo em pouco tempo Tales percebido que nada mais tinha a ensinar-lhe. Pitágoras então emigrou para a Sicília e depois, no continente, estabeleceu-se em Crotona (Sudeste da Itália), situada na região chamada pelos italo-gregos de Magna Grécia. Lá fundou não uma simples escola, mas uma comunidade religiosa, filosófica e política. A influência dessa associação ou "irmandade" se fez presente também em outras regiões do mundo, com ardorosos admiradores e seguidores.

Os membros dessa comunidade, os chamados pitagóricos consideravam quatro graus de sabedoria aritmética, música, geometria e esférica (astronomia). Ele ou eles (os pitagóricos) conheciam a pavimentação do plano por triângulos equiláteros, quadrados e hexágonos regulares, a soma dos ângulos de um triângulo etc.

Pitágoras possivelmente (se de fato existiu) foi exilado de Crotona tendo morrido em Tarento.

O teorema suscitou o interesse de muitos estudiosos e matemáticos. Através de séculos, centenas de provas têm sido desenvolvidas, tendo o próprio

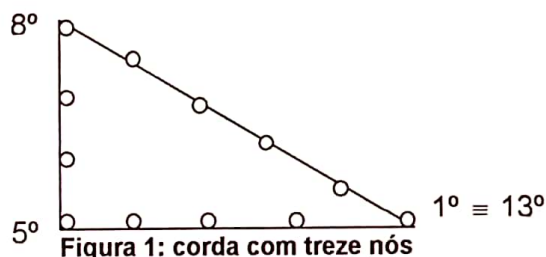
Leonardo da Vinci (1452-1519), o célebre pintor e escultor italiano, nos honrado com uma prova do teorema.

Professor de matemática Elisha Scott Loomis, da cidade de Cleveland, estado de Ohio, nos EUA, já falecido, reuniu 230 demonstrações de teorema num livro publicado em 1927, na 2ª edição do livro, de 1940, ampliou para 370 demonstrações.

3.1.1- O Ângulo Reto e os Egípcios

Consta que no tempo antigo, quando a matemática não estava desenvolvida, que os "agrimensores" egípcios, para medir suas terras nas margens do Rio Nilo precisavam de um ângulo reto e para construir, eles pegavam uma corda e nela marcavam treze nós e doze intervalos iguais. (Figura 1)

Com a corda sempre esticada, a prendiam no chão com uma estaca, fazendo coincidir os 1º e 13º nós, uma estaca no 5º nó e outra no 8º nó. O ângulo no 5º nó, ou seja, na segunda estaca, era então reto.



3.1.2- Triângulo Retângulo e o Mestre de Obras³

Este item foi de grande importância ao grupo, pois o mesmo mostra uma das principais aplicações do teorema no dia-a-dia de uma pessoa, que na maioria das vezes, utiliza sem ter o determinado embasamento teórico do respectivo teorema.

³ IMENES, Luiz Márcio. *Vivendo a matemática. Descobrimo o Teorema de Pitágoras*, 10ª ed. São Paulo: Scipione, 1994, p. 24

Para construir uma casa, é preciso, antes, projetá-la e desenhá-la. Terminado o projeto, a planta é entregue ao mestre de obras, que se encarrega de supervisionar a construção.

As paredes devem formar ângulos retos. Na linguagem dos construtores, elas devem *estar no esquadro*.

Inicialmente, eles esticam um fio entre duas estacas, A e B, cravadas no chão. A distância da estaca A à estaca B é de 80 cm e o lado referente ao lado AC da estaca deve medir 60 cm, logo, se eles ao unirem as estacas C e B com a corda e verificarem que aquela distância é igual a 100cm (1 m), então há uma “parede no esquadro”, ou seja, forma-se um ângulo de 90° .

3.2 – Demonstração Prática do Teorema

Nesta etapa realizamos uma atividade prática com os alunos.

Essa atividade consiste numa melhor compreensão do teorema de Pitágoras a partir da utilização de materiais concretos.

Foi realizada uma atividade prática que continha peças de madeira: uma peça composta de um triângulo retângulo e um quadrado acoplado a este, de medida de lado da hipotenusa do triângulo retângulo; quatro peças triangulares e dois quadrados de medida igual a dos lados (catetos) do triângulo retângulo. A seguir as respectivas peças mencionadas acima:

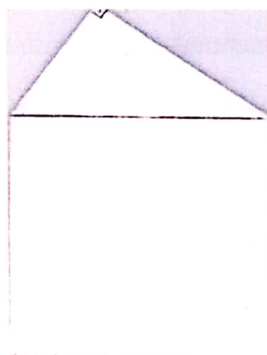


Figura 1 - Peça composta de um triângulo retângulo e um quadrado acoplado a este, de medida de lado da hipotenusa do triângulo retângulo.

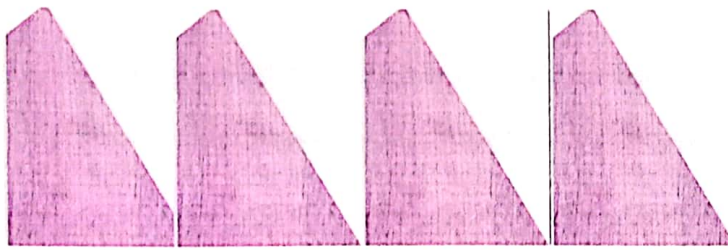


Figura 2 - Quatro quadriláteros, pois possuem quatro vértices.



Figura 3 – Um quadrado de medida igual ao maior cateto do triângulo retângulo.



Figura 4 – Um quadrado de medida igual ao menor cateto do triângulo retângulo

Dividimos a turma em cinco grupos, distribuímos a cada grupo um conjunto dessas peças para a realização desta atividade, que teve como objetivo mostrar uma das demonstrações do teorema em estudo.

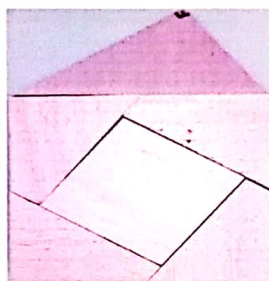
Para chegar a definição do teorema foi pedido que:

- a) Observassem as peças (Figuras 3 e 4) sobre os catetos do triângulo retângulo;
- b) Arrumassem sobre o quadrado de maior lado, os quadriláteros que lhe foram entregues; (Ver figura 5)
- c) Montassem em cima do quadrado acoplado ao triângulo um quadrado com os quadriláteros; (Ver figura 6)

- d) Comentassem o que observaram dos itens a, b e c, respectivamente. Perguntou-se qual a relação entre os quadrados e as peças triangulares com a peça do triângulo acoplado ao quadrado. Visualização:



(Figura 5) – Figura 3 com os quadriláteros sobrepostos nele, de forma a terem, ambos, a mesma área.



(Figura 6) – Visualização da figura 1 com a sobreposição das figuras 2 e 4, respectivamente sobre o quadrado maior.

Claramente, os alunos perceberam que a área do quadrado de medida do maior cateto, acrescido do quadrado de medida do menor cateto resultam na área do quadrado acoplado ao triângulo retângulo.

Contudo, diante de algumas falhas, foi possível perceber que a parte prática (em sala de aula) é de grande importância e também mostrou que apesar do desenvolvimento deste acredita-se, ainda, no aperfeiçoamento do mesmo e maior dedicação nos trabalhos até então confeccionados. A maior realização de um trabalho do profissional em docência é ver a realização de seu aluno, e através desta prática podemos perceber o quanto é instigante para o aluno ver algo teórico ser aplicado ao

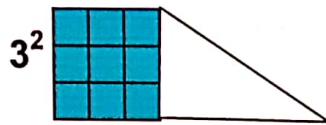
concreto, na vida cotidiana, como foi explanado no início da aula, falando a aplicação do teorema na vida de um mestre de obras e na antiguidade dos povos egípcios, etc.

3.3- Demonstração do Teorema

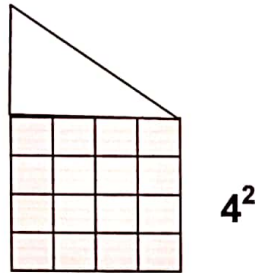
Visando reforçar o resultado encontrado na atividade anterior, foi mostrado teoricamente Teorema de Pitágoras.

Considerando um triângulo retângulo de lados 3, 4, e 5 temos a seguinte demonstração do teorema.:

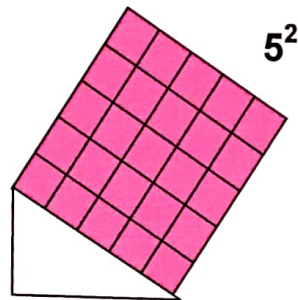
Desenhe um quadrado com a mesma medida de um dos catetos do triângulo retângulo.



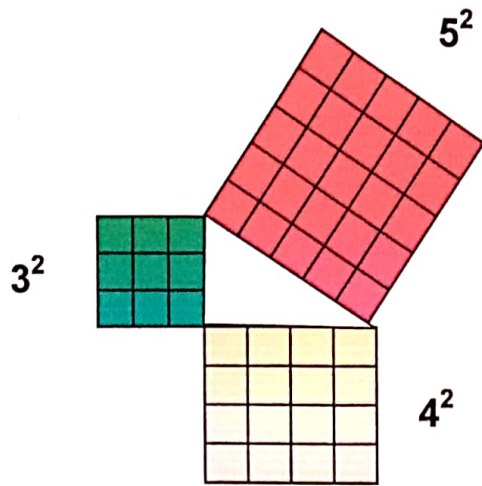
Agora, repita o mesmo procedimento com o outro cateto.



Desenhe também sobre a hipotenusa um quadrado.



Após estes procedimentos, adicione as áreas dos quadrados formados sobre os catetos e compare com a área do quadrado que tem como um de seus lados a hipotenusa.



A área do quadrado construído sobre a hipotenusa (lado maior) é igual a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos (lados menores).

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow 9 + 16 = 25$$

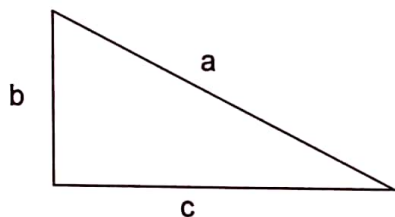
A igualdade não é verificada nos casos:

$$\begin{aligned} &(2; 5; 5) \\ &2^2 + 5^2 \neq 5^2 \\ &4 + 25 \neq 25 \\ &29 > 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(4; 4; 4) \\ &4^2 + 4^2 \neq 4^2 \\ &16 + 16 \neq 16 \\ &32 > 16 \end{aligned}$$

Pode-se demonstrar que:

Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.



a = medida da hipotenusa
b = medida de um cateto
c = medida do outro cateto

Então:

A relação $a^2 + b^2 = c^2$ é chamada de **Teorema de Pitágoras**.

Não fizemos a demonstração do teorema, apenas verificamos nas atividades aplicadas em aula, tais como a prática e a verificação teórica partida de exemplos de ternos pitagóricos.

3.4- Exercícios de Aplicação

Finalizando, fizemos junto com os alunos alguns exercícios de aplicação do Teorema de Pitágoras (ver anexo A).

4- CONSIDERAÇÕES FINAIS

O projeto foi de grande valia para os alunos, pois além de estar relacionado a situações do dia-a-dia, este assunto tem uma importância significativa no ensino de Geometria Plana. Os alunos mostraram-se interessados durante a apresentação do projeto.

A pesquisa da parte histórica do Teorema foi feita em livros relacionados ao assunto, porém com algumas deficiências, no que diz respeito à vida de Pitágoras, por exemplo, não se sabe ao certo se foi ele o precursor do Teorema. Não se sabe nem mesmo se ele existiu.

Com relação ao grupo, pode-se perceber algumas falhas no que diz respeito, não ao domínio do conteúdo, mas à falta de clareza na exposição do mesmo, porém nada que influenciasse no processo de aprendizagem dos respectivos alunos.

No final da aplicação do projeto pode-se constatar a importância de se estudar este assunto através da manipulação de materiais que facilitam no processo de ensino e aprendizagem.

REFERÊNCIAS

BIGODE, Antônio José Lopes. *Matemática Atual 7ª série*. São Paulo: Atual, 1995.

EXERCÍCIOS. Disponível em: [http:// www.zmais.com /](http://www.zmais.com/). Acesso em: 16/10/2003.

GIOVANNI, José Ruy; GIOVANNI JUNIOR, José Ruy. *Matemática Pensar e Descobrir*, v. 4. São Paulo: FTD, 2000.

IMENES, Luiz Márcio. *Vivendo a matemática. Descobrindo o Teorema de Pitágoras*, 10 ed. São Paulo: Scipione, 1994.

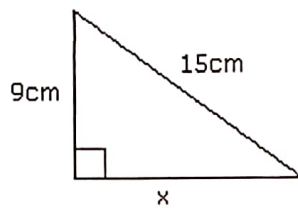
TARRIDA, Joan. *Help! Sistema de Consulta Interativa – Matemática*. São Paulo: Plaza & Janés, 1996.

ANEXOS

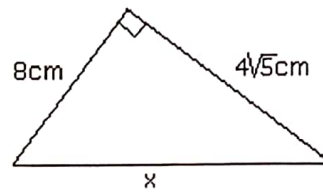
ANEXO A - EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO

1- Na figuras abaixo determine os valores de x :

a)



b)

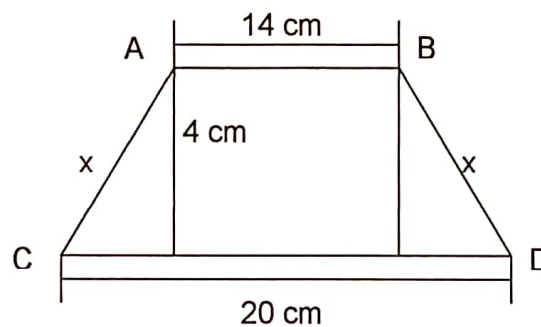


2- Entre duas torres de 13 m e 37 m de altura existe, na base, uma distância de 70 m. Determine a distância entre os extremos dessa torres.

3- Na figura abaixo é mostrado um trapézio isósceles no qual as medidas indicadas estão expressas em centímetros.

Nessas condições, determine:

- A medida x de cada lado não paralelo do trapézio.
- O perímetro do trapézio ABCD.



4- (UFPel-RS) Em um recente vendaval, um poste de luz de 9 metros de altura quebrou-se em ponto a uma distância x do solo. A parte do poste acima da fratura inclinou-se e sua extremidade superior encostou-se ao solo a uma distância de 3 metros da base do mesmo. A que altura x do solo o poste se quebrou?

4 - DESAFIO

Millôr Fernandes, em uma bela homenagem à Matemática, escreveu um poema do qual extraímos o fragmento abaixo:

Às folhas de um livro de matemática,
Um Quociente apaixonou-se um dia doidamente
Por uma incógnita.
Olhou-a com seu olhar inumerável
E viu-a do ápice à base: uma figura ímpar;
Olhos rombóides, boca trapezóide,
Corpo retangular, seios esferóides.
Fez da sua uma vida paralela à dela,
Até que se apaixonaram no Infinito.
“Quem és tu?” – indagou ele em ânsia radical.
“Sou a soma dos quadrados dos catetos.
Mas pode me chamar de hipotenusa”.

Millôr Fernandes

Questão:

A incógnita se enganou ao dizer quem era. Para atender a Teorema de Pitágoras, deveria dar a seguinte resposta:

- a) “Sou a soma dos catetos. Mas pode me chamar de hipotenusa”.
- b) “Sou o quadrado da soma dos catetos. Mas pode me chamar de hipotenusa”.
- c) “Sou o quadrado da soma dos catetos. Mas pode me chamar de quadrado da hipotenusa”.
- d) “Sou a soma dos quadrados dos catetos. Mas pode me chamar de quadrado da hipotenusa”.