CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE CAMPOS

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

TEOREMA DE PITÁGORAS E CILINDROS

POR

TATIANA DA SILVA PEREIRA

PÂMILA CAMILA DE ALMEIDA

CAMPOS DOS GOYTACAZES – 2004.-1

TATIANA DA SILVA PEREIRA

PÂMILA CAMILA DE ALMEIDA

TEOREMA DE PITÁGORAS E CILINDROS

Trabalho de Laboratório de Ensino elaborado sob a orientação da professora Mestra Vera Lucia Fazoli da Cunha Freitas Viana.

CAMPOS DOS GOYTACAZES-2004-1

"A imaginação é mais importante do que o conhecimento."

Albert Einstein

Sumário

INTRODUÇÃO

Este trabalho foi desenvolvido no intuito de buscar uma maior compreensão sobre: Teorema de Pitágoras e Cilindros. No decorrer do trabalho serão apresentados conceitos, demonstrações formais que permitirão a construção dos conceitos pelos alunos. Será feita uma abordagem da parte histórica de cada conteúdo visto que a história da Matemática é um facilitador eficaz do ensino-aprendizagem da Matemática.

DESENVOLVIMENTO

O projeto é composto por dois conteúdos, onde a primeira parte refere-se ao Teorema de Pitágoras, na qual desenvolvemos algumas atividades que possam ajudar os alunos a compreender o conteúdo de forma gradativa. A primeira etapa é composta por um pouco de história doTeorema, alguns conceitos relacionados às propriedades dos triângulos retângulos, a demonstração formal do teorema, atividade prática e oito atividades escritas,nas quais busca-se o entendimento do conteúdo. Já a segunda parte do projeto temos a definição de cilindros e suas respectivas propriedades e um lista contendo cinco exercícios. A segunda parte do projeto foi aplicado turma de licenciatura em um teste exploratório, enquanto que a primeira parte aplicado numa turma de oitava série da Escola Estadual Julião Nogueira no dia vinte e três de Junho de 2004 às sete horas e vinte minutos.

TEOREMA DE PITÁGORAS

Parte Histórica

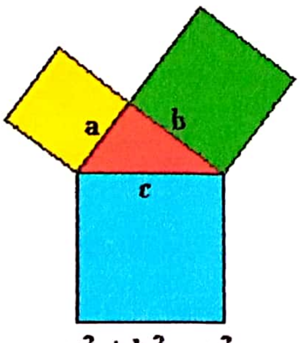
Pequena Biografia

Pitágoras (570-500 a.C.) foi um matemático grego, tendo sido também líder religioso, místico, sábio e filósofo. Nasceu em Samos, uma ilha grega na costa marítima do que hoje é a Turquia. Viajando a Mileto, uma cidade grega 50 quilômetros a sudeste de Samos, aprendeu Matemática com Tales (624-546 a.C.), considerado o fundador da Matemática grega. Segundo antigos historiadores, Pitágoras viajou para o Egito e para a Babilônia, onde é provável que tenha se encontrado com o profeta Daniel. É provável também que Pitágoras tenha estudado na Índia. Sua crença na reencarnação talvez tenha origem indiana. Um de seus contemporâneos é Buda, e é provável que Pitágoras e Buda tenham se encontrado. Em torno de 525 a.C. Pitágoras mudou-se para Crotona, uma cidade ao sul da Itália, onde fundou a Ordem (Escola) Pitagórica. Casou-se com Teano, provavelmente a primeira mulher matemática da história.A Pitágoras podemos relacionar o famoso Teorema de Pitágoras, amplamente utilizado na matemática elementar

Teorema de Pitágoras: *Num triângulo retângulo a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.*
Em outros termos, se ***a*** *e* ***b*** *são os catetos do triângulo retângulo e se* ***c*** *é sua hipotenusa, então:*

$a^2 + b^2 = c^2$.

A figura abaixo mostra o significado geométrico do Teorema de Pitágoras. A área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.

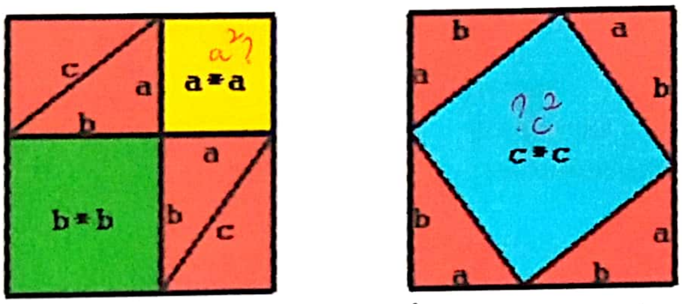


$a^2 + b^2 = c^2$

A tradição matemática ocidental, durante longo tempo, atribuiu a descoberta deste teorema a Pitágoras. Pesquisas históricas mais recentes constataram que o teorema era conhecido pelos babilônios, cerca de 1500 a.C., portanto muito tempo antes de Pitágoras (confira [2], p. 61 e 63). Os chineses o conheciam talvez por volta de 1100 a.C. e os hindus provavelmente cerca de 500 a.C. (confira [1], cap. 12).

Uma das demonstrações mais elegantes do Teorema é conhecida como a **demonstração do quadrado chinês**. Dado um triângulo retângulo de catetos **a** e **b** e hipotenusa **c**, construímos dois quadrados de mesmo lado **a+b**. Em cada um desses quadrados dispomos quatro cópias do triângulo retângulo, como na figura abaixo (em vermelho). A soma das áreas remanescentes do primeiro quadrado (em amarelo e verde) é igual à área remanescente do segundo quadrado (em azul). Portanto $\mathbf{a^2+b^2=c^2}$.

Quadrado chinês



$a^2 + b^2 +$ área vermelha $\qquad c^2 +$ área vermelha

área vermelha $= 4\times$(área do triângulo)

TEOREMA DE PITÁGORAS

Antes de iniciarmos o nosso estudo sobre Teorema de Pitágoras, convém relembrarmos alguns conceitos importantes:

- Todo triângulo retângulo, além do ângulo reto, possui dos ângulos agudos cuja soma é 90º graus, completando, assim, os 180º da soma dos ângulos intenos.

Seja o triângulo ABC da figura, retângulo em Â:

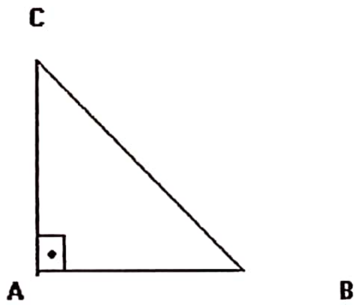


Figura 1

Â= 90º
B + C = 90º (B e C são ângulos complementares).

Obs: Cada lado manterá nome correspondente ao vértice oposto a ele.
O lado BC será chamado lado a (por ser oposto ao vértice A), e assim por diante.

Lados do triângulo Retângulo

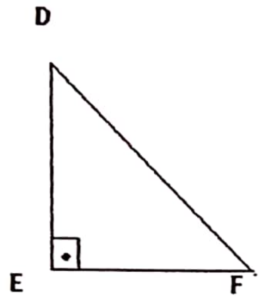
- Hipotenusa___ é o maior lado do triângulo e oposto ao ângulo reto.
- Catetos______ os outros dois lados opostos aos ângulos agudos.

De acordo com a figura 1 acima, temos que:
- AB = c e AC = b_______ catetos
- BC = a ______________ hipotenusa do triângulo ABC

Uma relação importante entre os lados de um triângulo retângulo é o Teorema de Pitágoras, cujo enunciado é: "Em todo triângulo Retângulo, o quadrado da hipotenusa 'e igual à soma dos quadrados dos catetos ". Aplicando o Teorema ao triângulo da figura 1, escreveríamos:

$a^2 = b^2 + c^2$.

EX:
Dado um triângulo EDF, cujos catetos **d** e **f** medem 3cm e 4cm, respectivamente, calcule o perímetro (soma dos lados) do triângulo.



$e^2 = d^2 + f^2$

Sendo EF = 5cm e DF = 3CM, acharemos através do teorema que ED = 4cm. Assim podemos calcular o perímetro da seguinte forma:

Perímetro de EDF = 5+3+4 = 12 cm

DEMONSTRAÇÃO

DEMONSTRAÇÃO

Hipótese

△ ABC é retângulo em C

C= 90.º ,

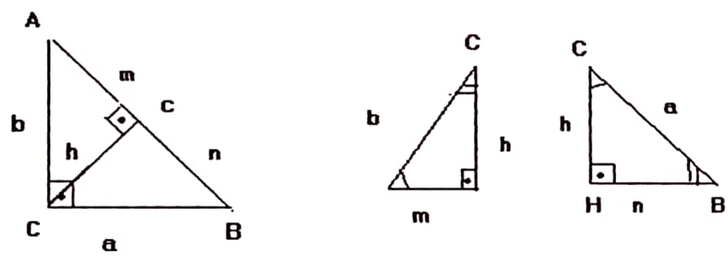
A= f

B= 90.º - f (ângulos complementares), o que falta a alfa para chegar a 90.º, visto que a soma dos ângulos internos é 180º

Assim 90º+ f + 90º -f = 180º

Logo B = 90.º - f

Traçando a altura relativa a hipotenusa temos:



Se dois triângulos possuem pelo menos dois ângulos congruentes, então eles são semelhantes.

Assim

△ ABC ~ AC H ~ CBH
△ ABC ~ AC H ABC ~ACB

c/b = b/m c/a= a/n

b^2= cm a^2= cm

Podemos escrever: $\mathbf{a^2}$ = cm e $\mathbf{b^2}$ = cn

Somemos membro a membro as duas igualdades:

$\mathbf{a^2}$ = cm

$$a^2 + b^2 = cm + cn$$

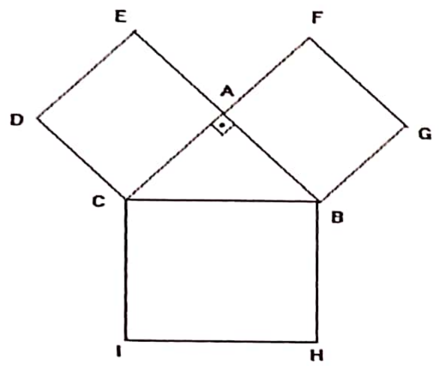
$$a^2 + b^2 = c\,(m + n)$$

$$a^2 + b^2 = c(c)$$

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

MONTAGEM DO QUEBRA CABEÇA

Como montar um quebra cabeça para demonstrar de forma mais fácil o Teorema de Pitágoras. Para montar o quebra cabeça basta seguir os seguintes passos: No centro de um a cartolina, vai desenhar com lápis uma figura como esta :

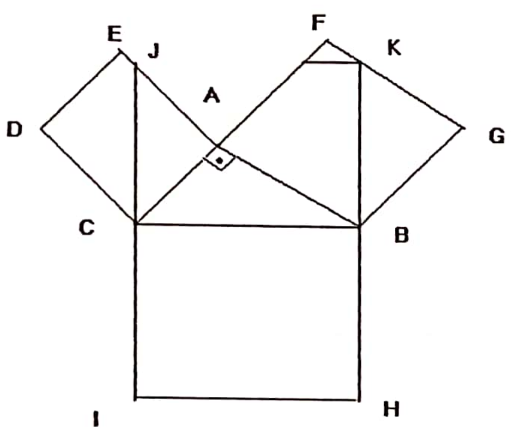


Esta figura é formada por um triângulo de catetos iguais a 6cm e 8 cm e três quadrados de medidas respectivamente iguais a 6cm, 8cm e 10cm.Coloque letras nos vértices como segue a figura acima . Após esta etapa siga as seguintes instruções abaixo:

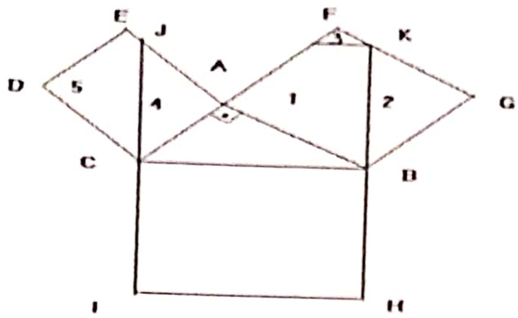
1.º Prolongue IC até EA o ponto J;

2.º'Prolongue HB até o ponto K;

3.º Desenhe a linha KL, que faz ângulo reto com BK.



agora iremos trabalhar apenas com os dois quadrados menores. Para facilitar o entendimento numere as partes dos quadrados menores como a figura abaixo.



Agora vamos montar o quebra cabeça. Para isto basta encaixar 1,2,3,4 e 5 dentro do quadrado do desenho da base. Estas partes irão preencher totalmente o quadrado. Tente!!! Com paciência, você conseguirá. Faça isto sem ver a solução. Aceite esse desafio!

Conclusão

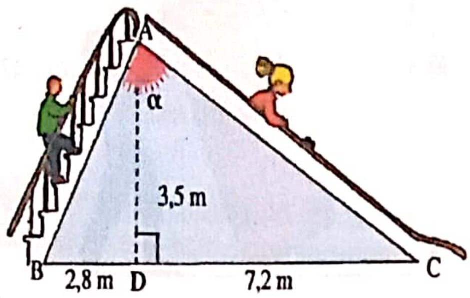
Ao encaixar as cinco peças no quadrado, você cobri o quadrado por completo. Assim podemos concluir que a área do quadrado é a soma das áreas das figuras. Repare que as figuras 1,2 e 3 formam o quadrado médio e que as figuras 4 e 5 formam o quadrado pequeno.Lembrando que os três quadrados foram construídos sobre os lados de um triângulo retângulo, podemos dizer que : neste triângulo retângulo, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas construídos sobre os catetos . Para compreender melhor essa afirmação, pegue o seu desenho base, apague as linhas tracejadas e divida os três quadrados em quadrinhos de 1 cm de lado. A área do quadrado maior é de 100cm $^{2.}$ a área do quadrado menor e de 34cm ^{2}e a do quadrado médio é de 64cm^2. Vemos só ? 100 = 36 + 64, ou seja, a área do quadrado igual soma da área dos outros dois quadrados.Sendo assim podemos dizer que sendo:

a^2 = área do quadrado maior , b^2 e c^2 = área dos outros dois quadrados

Assim podemos concluir que: $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$

ATIVIDADES

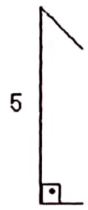
1- Observe a figura a baixo :

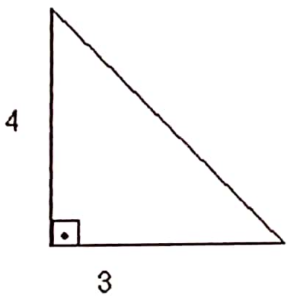


Calcule o segmento do escorrega;

2- Calcule o perímetro dos triângulos abaixo:

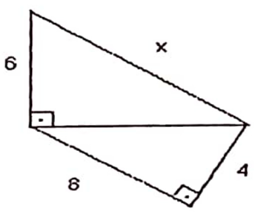
a)



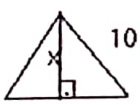


b)

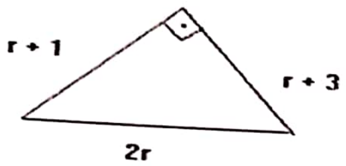
3-Determine o valor de x na figura abaixo:



4- Calcule o valor de x no triângulo eqüilátero abaixo:



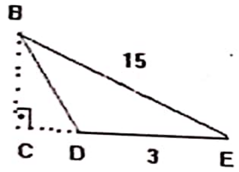
5- Quanto mede a hipotenusa do triângulo abaixo?



6- Num triângulo retângulo de hipotenusa 30 cm, a diferença entre os catetos é 6 cm. Encontre a medida dos catetos.

7- Num triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 40 cm, o perímetro é igual a 96 cm. Encontre a medida dos catetos.

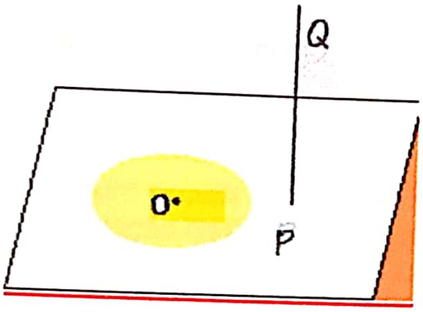
8- Na figura, BC = Cd. Qual é o perímetro do triângulo BCE?

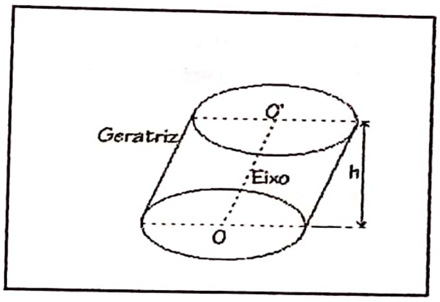


CILINDROS

Definição

Considerando um círculo (região circular) de centro O e raio r, situado num plano alfa, e um segmento de reta PQ, não nulo, não paralelo e não contido em alfa. Chama-se cilindro circular à reunião dos segmentos congruentes e paralelos a PQ, com uma extremidade nos pontos do círculo e situados num mesmo semi-espaço dos determinados por alfa.





Elementos

O cilindro possui:

2 bases: círculos congruentes situados em planos paralelos

Geratrizes: são os segmentos com uma extremidade em um ponto da circunferência de centro O e raio r e a outra no ponto correspondente da circunferência de centro O' e raio r , raio da base.

Altura : distância entre os planos das bases

Eixo : É o segmento de reta que liga os centros das bases do "cilindro".

SUPERFÍCIES

Superfície Lateral : é a reunião das geratrizes. A área dessa superfície ‘e chamada área lateral , e é indicada por A_l.

Superfície Total: é a reunião da superfície lateral com os círculos das bases. A área dessa superfície é a área total e é indicada por A_t.

CLASSIFICAÇÃO

De acordo com a inclinação dos eixos os cilindros podem ser classificados em ;

Oblíquos; se as geratrizes são oblíquas aos planos das bases

Circular reto ; se são perpendiculares aos planos das bases.

O cilindro circular reto é também chamado cilindro de revolução, pois é gerado pela rotação de um ret6angulo em torno de um eixo que contém um de seus lados.

Cilindro eqüilátero: É um cilindro de revolução cuja seção meridiana é um triângulo eqüilátero.

Área lateral : É a medida da superfície lateral do cilindro

Área total : É a medida da superfície total do cilindro.

Seção meridiana de um cilindro : É uma região poligonal obtida pela interseção de um plano vertical que passa pelo centro do cilindro com o cilindro.

Volume de um "cilindro”

Em um cilindro, o volume é dado pelo produto da área da base pela altura.

$$V = A_{base} \times h$$

Se a base é um círculo de raio r, então:

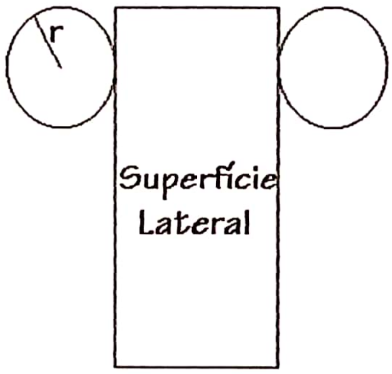
$$V = \pi r^2 h$$

Áreas lateral e total de um cilindro circular reto

Quando temos um cilindro circular reto, a área lateral é dada por:

$A_{lat} = 2\pi r h$ onde r é o raio da base e h é a altura do cilindro. $A_{tot} = A_{lat} + 2A_{base}$

$$A_{tot} = 2\pi r h + 2\pi r^2$$
$$A_{tot} = 2\pi r(h+r)$$



Exemplo: Dado o cilindro circular eqüilátero (h=2r), calcular a área lateral e a área total.

No cilindro eqüilátero, a área lateral e a área total são dadas por:

$A_{lat} = 2\pi r.\ 2r = 4\pi r^2$
$A_{tot} = A_{lat} + 2A_{base}$
$A_{tot} = 4\pi r^2 + 2\pi r^2 = 6\pi r^2$
$V = A_{base}\ h = \pi r^2.\ 2r = 2\pi r^3$

Exemplo: Seja um cilindro circular reto de raio igual a 2cm e altura 3cm. Calcular a área lateral, área total e o seu volume.

- Cálculo da Área lateral
  $A_{lat} = 2\pi r h = 2\pi 2.3 = 12\pi cm^2$

- Cálculo da Área total
  $A_{tot} = A_{lat} + 2\,A_{base}$
  $A_{tot} = 12\,\pi + 2\,\pi\,2^2 = 12\,\pi + 8\,\pi = 20\,\pi\,cm^2$
- Cálculo do Volume
  $V = Abase \times h = \pi\,r^2 \times h$
  $V = \pi\,2^2 \times 3 = \pi \times 4 \times 3 = 12\,\pi\,cm^3$

Exercícios (Cilindros)

1- Calcule a área lateral de um cilindro circular reto, sabendo que o raio da base mede 4 cm e a geratriz 10 cm.

2- O raio de um cilindro circular reto mede 3 cm e a altura 3 cm. Determine a área lateral, a área total e o volume desse cilindro.

3- Determine a altura de um cilindro de 30 π m² de área lateral e 45 metros cúbicos de volume

4- Calcule a altura e o raio de um cilindro reto , sendo 9/5 sua razão nessa ordem , e 270 πcm² a área lateral

5- Determine a área lateral e a área total de um cilindro eqüilátero, sendo 15 cm a medida de sua geratriz

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os alunos, apesar de nunca terem visto conteúdos relacionados a geometria e considerados requisitos fundamentais para o entendimento do Teorema de Pitágoras, conseguiram acompanhar as explicações e alguns alunos até conseguiram montar o quebra cabeça sem nenhuma dificuldade. Desta forma fizemos o possível para que eles pudessem absorver o máximo do conteúdo, visto que o mesmo poderá ser utilizado em futuros níveis de ensino.

RELATÓRIO

O Projeto sobre Teorema de Pitágoras foi aplicado aos alunos da turma 801 da Escola Estadual Julião Nogueira no dia vinte e três de Junho de 2004 às sete horas e vinte minutes. A aula deveria ter se iniciado às sete horas, mas em alguns dias da semana às sete horas e vinte minutos. Na primeira etapa da aula fizemos uma breve apresentação da dupla e da história do Teorema de Pitágoras, onde pudemos dar início ao conteúdo proposto.

Desta maneira iniciamos a aula com uma atividade prática, onde os alunos formaram duplas e deram início a construção de um quebra cabeça, através de materiais fornecidos pelas estagiárias. Através desta atividade buscávamos o entendimento do Teorema de Pitágoras através das relações obtidas ao se ter o quebra cabeça montado. Durante a realização desta atividade alguns alunos atrasados receberam nosso auxílio para que eles pudessem acompanhar o restante da turma.Alguns alunos conseguiram montar o quebra cabeça facilmente, mas outros necessitaram de nossa ajuda para terminar a montagem. Após a montagem houve uma explicação sobre as relações entre a montagem e o surgimento do Teorema de Pitágoras. Assim fizemos uma revisão de algumas propriedades dos triângulos retângulos, como a soma dos ângulos internos, hipotenusa, catetos, altura , além de relembrarmos o conceito de projeção ortogonal, visto que necessitávamos desses conceitos para fazer a demonstração formal do Teorema de Pitágoras. Durante a demonstração, apesar da atenção dos alunos observamos que eles ficaram um pouco confusos, pois era muitas informações ao mesmo tempo, pois eles não vêem geometria. Ao final da demonstração distribuímos a atividade escrita, composta de oito atividades, onde selecionamos algumas questões fáceis e outras com um grau de dificuldade maior. Mas houve um momento em que uma questão teve que ser deixada de mão, pois eles ainda não tinham visto nada sobre equações do segundo grau. Assim faltou resolver algumas questões, pois não houve tempo suficiente para resolução de todas.

Referências Bibliográficas

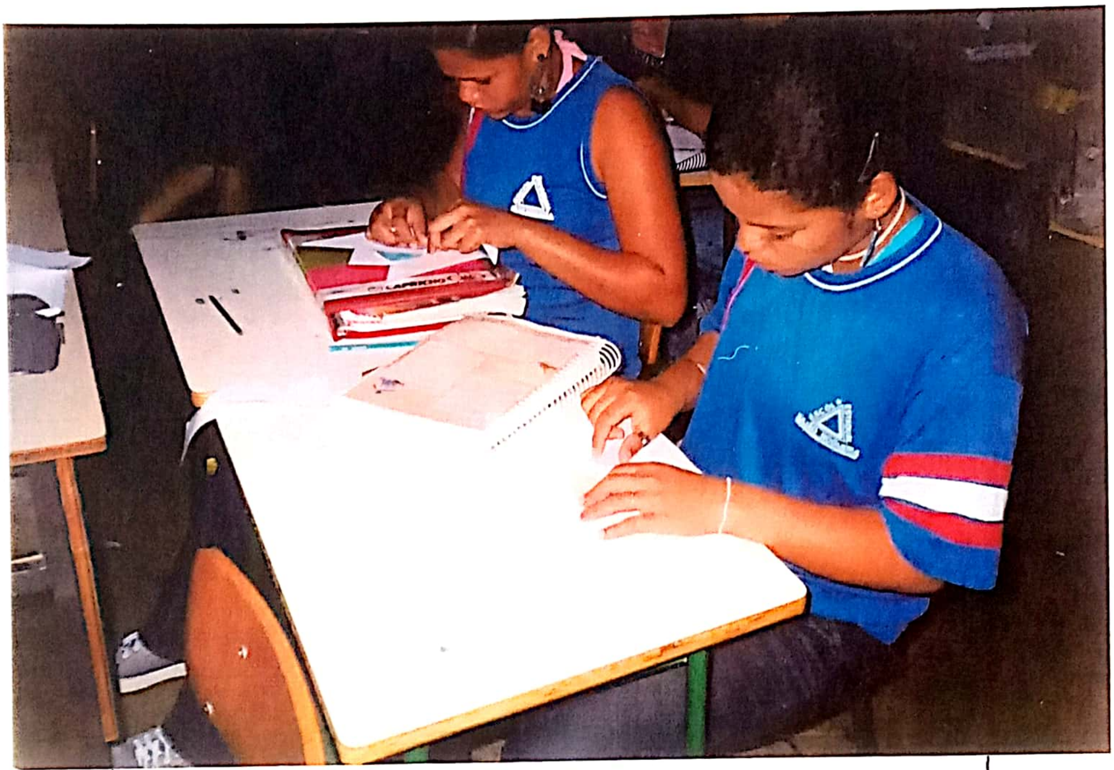
BONGIOVANNI, V.; VISSOTO, O.; LAUREANO, J. **Matemática e Vida**. São Paulo: Editora Ática, 1995.

DOLCE, O; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos da Matemática** Elementar. São Paulo: Editora Atual, 1993.

www.google.com.br/história do teoremadepitagoras

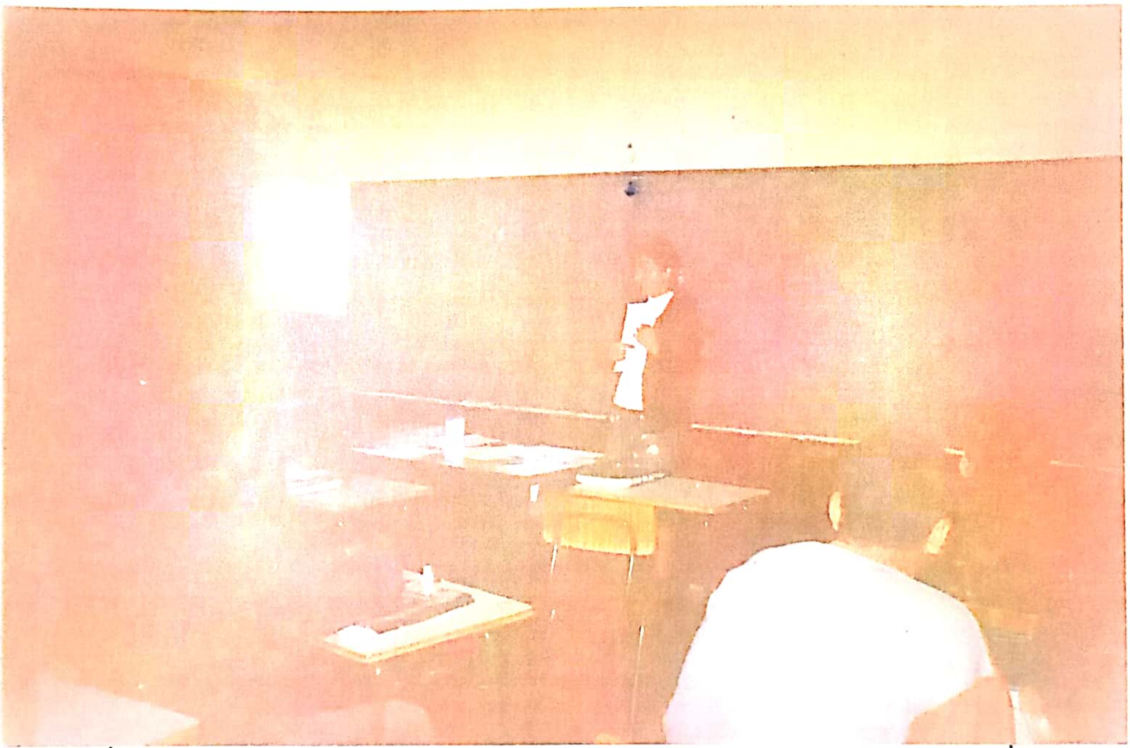
ANEXO I
FOTOS DOS ALUNOS REALIZANDO AS ATIVIDADES

FOTOS

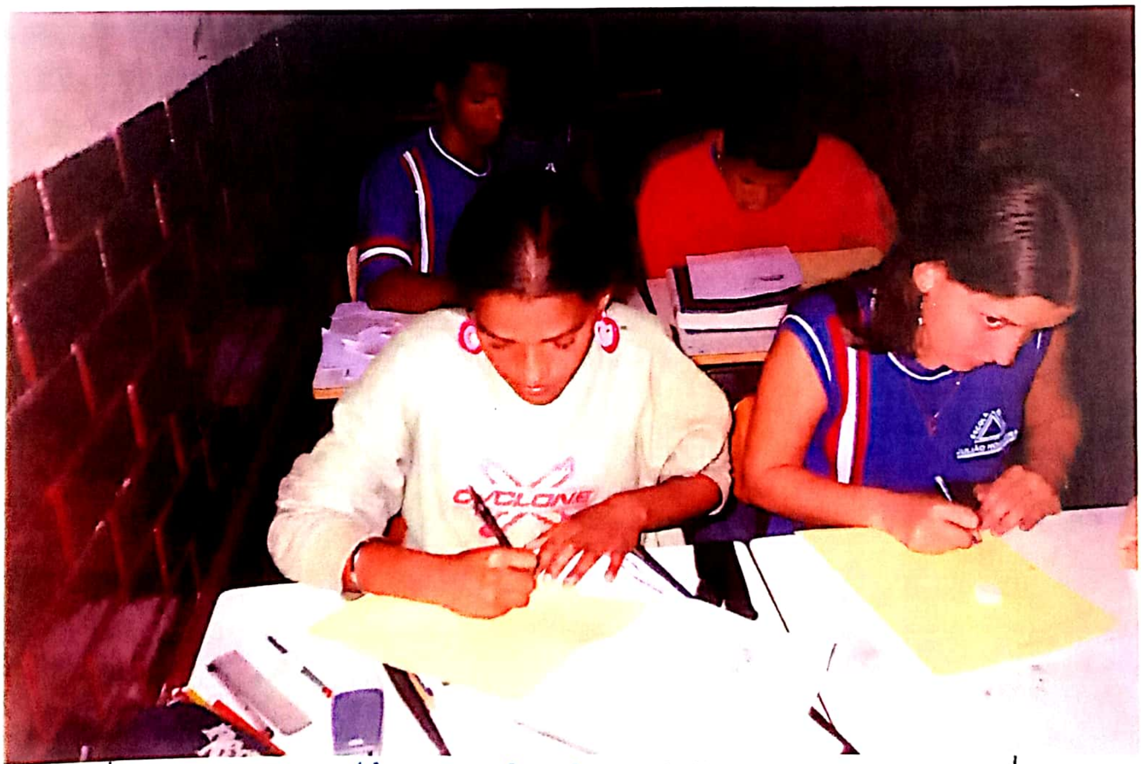


Alunos montando o quebra cabeça

Alunos com o quebra cabeça montado



Explicação da montagem do quebra cabeça



Alunos resolvendo as atividades