CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE CAMPOS

Universidade da Tecnologia e do Trabalho

Ministério da Educação

Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA LEI DOS COSSENOS

POR

HELOIZA RANGEL DA SILVA

JOSIE PACHECO DE VASONCELLOS SOUZA

LUIS GUSTAVO MARQUES SOARES

ROSANA RAMOS DE BARCELOS

TATIELE DO NASCIMENTO PEREIRA PESSANHA

CAMPOS DOS GOYTACAZES/RJ

2007-2

HELOIZA RANGEL DA SILVA
JOSIE PACHECO DE VASONCELLOS SOUZA
LUIS GUSTAVO MARQUES SOARES
ROSANA RAMOS DE BARCELOS
TATIELE DO NASCIMENTO PEREIRA PESSANHA

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA LEI DOS COSSENOS

Projeto apresentado no Centro Federal de Educação Tecnológica de Campos, como parte das exigências da disciplina Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática do curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Gilmara Teixeira Barcelos
Mestre em Ciências de Engenharia - UENF

CAMPOS DOS GOYTACAZES/RJ

2007- 2

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem intuito de realizar um estudo sobre a lei dos cossenos, utilizando demonstração formal e prática. Um dos recursos utilizados foram as animações contidas em *sites,* estas auxiliaram na demonstração geométrica da lei dos cossenos.

O objetivo geral é abordar a interpretação geométrica da lei dos cossenos fazendo com que os alunos, a que foram aplicadas as atividades, percebessem que os recursos tecnológicos, em particular as animações, contribuem para a aprendizagem do tema. Visamos também, que os alunos sejam capazes de aplicar os conhecimentos adquiridos na resolução de problemas. Além disso, por meio do relato dessa experiência pretendemos incentivar professores de Matemática a buscarem novas maneiras de abordar o tema em estudo.

Consideramos o tema muito rico. A possibilidade de ser estudado de várias maneiras levou-nos a escolhê-lo, pois assim podemos abordá-lo, de maneira diferente daquelas que geralmente são usadas nas salas de aula. Preparamos um projeto que abrange demonstrações que não encontramos na maioria dos livros didáticos.

De acordo com os PCN:

> É preciso ainda uma rápida reflexão sobre a relação entre Matemática e tecnologia. Embora seja comum, quando nos referimos às tecnologias ligadas à Matemática, tomarmos por base a informática e o uso de calculadoras, estes instrumentos, não obstantes sua importância, de maneira alguma constituem o centro da questão. (BRASIL, 1999, p.41).

Assim, nesse projeto, usamos tecnologias associadas à aprendizagem Matemática, e não com um fim em si mesma.

> O impacto da tecnologia na vida de cada indivíduo vai exigir competências que vão além do simples lidar com as máquinas. A velocidade do surgimento e renovação de saberes e de formas de fazer em todas as atividades humanas tornarão rapidamente ultrapassadas a maior parte das competências adquiridas por uma pessoa ao início de sua vida profissional. (BRASIL, 1999, p.41).

Sendo assim, utilizamos, neste projeto, *sites* que possibilitam movimentações por parte do usuário. Consideremos que o uso consciente e crítico de tecnologias pode ser um instrumento facilitador da aprendizagem contribuindo para a construção do conhecimento.

Além disso, alguns tópicos importantes relacionados com o nosso projeto são citados em "Competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática" nos PCN (BRASIL, 1999), são eles:

- Utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação;
- Formular hipóteses e prever resultados;
- Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real;
- Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.

Neste contexto este trabalho iniciou com um relato da parte histórica do tema, de modo a despertar interesse dos alunos. A seguir, foram propostas atividades com as quais deduziram a lei dos cossenos, por meio da manipulação de figuras em *sites*. Dessa forma o conteúdo não foi simplesmente explicado de maneira formal e clássica.

Na etapa seguinte demonstramos a lei dos cossenos com auxílio de *sites* contendo animações. Finalizamos com as atividades de aplicação, contemplando assim as sugestões dos PCN quando ressalta a importância da aplicação dos conhecimentos matemáticos em situações reais, conforme citado anteriormente. Na próxima seção descreveremos, detalhadamente, cada uma dessas etapas.

Aplicamos as atividades em uma turma do 3° ano do Ensino Médio de uma instituição pública. Embora a turma já houvesse estudado o conteúdo de Lei dos cossenos, não tinha visto sua interpretação geométrica. O projeto foi aplicado em três tempos de aula distribuído em dois dias.

2. DESENVOLVIMENTO

2.1 - Preparação do projeto

No segundo período do curso de Licenciatura em Matemática foi dado início à disciplina Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática, que consiste na elaboração de um projeto para aplicação em sala de aula, sob orientação de um professor.

Neste projeto, nas primeiras aulas realizamos leituras de alguns textos relacionados à Educação e Tecnologias para entendermos melhor o objetivo da disciplina e como deveríamos desenvolver os projetos. Depois destinamos um tempo à escolha do tema.

Inicialmente havíamos pensado em "Resolução de Triângulos" abordando além da Lei dos Cossenos, a Lei dos Senos, mas devido às pesquisas realizadas sobre o tema, percebemos que o tempo disponível para o desenvolvimento do projeto não seria suficiente para abordar as duas leis, utilizando demonstrações formais e geométricas com animações. Sendo assim optamos pela Lei dos cossenos, pois os recursos encontrados na pesquisa eram interessantes e diversificados, enriquecendo assim a aprendizagem do tema pelos alunos.

Assim, com o tema escolhido começamos a pensar de que forma iríamos estudar o conteúdo com os alunos e quais as atividades que iríamos elaborar. Encontramos alguns *sites* com animações que possibilitam a demonstração da lei dos cossenos, selecionamos os melhores e os inserimos no trabalho. Fizemos também uma pesquisa sobre a parte histórica do tema.

Ainda no segundo período fizemos uma apresentação em *slides* para toda a turma, para orientadora deste projeto e para a orientadora de outro projeto desta disciplina, mostrando o que pretendíamos fazer. Além disso, foi elaborado o relatório parcial das atividades desenvolvidas.

No início do terceiro período, fizemos algumas alterações no projeto, a partir das sugestões feitas na apresentação oral e na correção do relatório parcial entregue no período anterior.

Dando continuidade, finalizamos a elaboração das atividades e realizamos um teste exploratório com a nossa turma, com intuito de detectar alguns erros e perceber o que poderia ser modificado para a aplicação do projeto com o público alvo (alunos do Ensino Médio).

Depois da aplicação do teste exploratório, com ajuda de nossa turma e da orientadora, detectamos que algumas mudanças deveriam ser feitas. Percebemos que deveríamos ter proposto um problema inicial com o intuito de verificar os conhecimentos dos alunos sobre o tema. Além disso, percebemos que era necessário que realizássemos uma pesquisa mais ampla da parte histórica. Os pré-requisitos deveriam ser abordados de forma dialogada e alguns exemplos deveriam ser dados. Nas atividades de dedução percebemos que deveríamos disponibilizar para os alunos os links dos sites em um arquivo do Word ou abrir todos os *sites* antes do início da aula. Na ficha de atividades foram feitas algumas alterações nos enunciados, para não deixar dúvidas nos mesmos, facilitando a compreensão dos alunos.

A partir de uma sugestão da orientadora acrescentamos, nas atividades de dedução, uma atividade de classificação dos triângulos quanto aos ângulos. Na demonstração da fórmula, as letras que estavam na cartolina utilizada deveriam ser maiores. No problema que destacava a aplicação da lei dos cossenos na física percebemos que o desenho deveria ser feito em cartolina para facilitar a visualização dos alunos.

Um problema encontrado durante o teste exploratório foi que um dos *sites* utilzados estava fora do ar naquele dia. Devido a esse problema decidimos preparar alguns recursos que o substitua. Salvamos a página da web, para podermos utilizá-la off-line e preparamos uma cópia da imagem da animação do site em cartolina. Após detectar os problemas citados, fizemos as alterações necessárias no projeto.

No quarto período realizamos outro teste exploratório, desta vez somente para a nossa orientadora. Este teste foi aplicado em quatro tempos de aula, percebemos que houve uma melhora significativa em relação ao anterior, atribuímos este fato ao trabalho estar mais estruturado e ao grupo apresentar mais firmeza em relação ao conteúdo.

Detectamos, neste teste exploratório, que algumas alterações seriam necessárias. Nos pré-requisitos identificamos quais as relações que realmente seriam utilizadas no decorrer do trabalho e acrescentamos a visualização dessas relações no Geogebra[1], o

[1] Essas construções foram elaboradas no âmbito do projeto de pesquisa "Tecnologias de Informação e Comunicação na Aprendizagem de Matemática" desenvolvido no CEFET Campos, sendo a orientadora deste trabalho, pesquisadora do mesmo.

que anteriormente era feito somente na circunferência trigonométrica (desenhada num pedaço de madeira). Até este teste, as atividades, possibilitam apenas a dedução de uma relação entre a medida dos lados do triângulo, a qual posteriormente seria utilizada para demonstrar a lei dos cossenos. Percebemos que seria melhor se a lei dos cossenos fosse deduzida pelos alunos e não apenas a relação. Notamos que iria facilitar a explicação se reproduzíssemos as figuras de um dos *sites*, utilizados em cartolina. Fizemos todos os ajustes necessários.

2.2. Etapas do Projeto

Os tópicos a seguir destacam as etapas do desenvolvimento do projeto:

- Parte histórica
- Problema Inicial
- Pré - requisitos
- Dedução da lei dos cossenos
- Demonstração da lei dos cossenos (Geométrica e Formal)
- Aplicação na física
- Atividades de aplicação

2.2.1 Parte histórica

Iniciamos a aplicação do nosso projeto destacando um pouco da história da trigonometria. O objetivo desta etapa é estimular os alunos para o estudo do tema.

Nessa parte foi utilizado um arquivo do *Power Point*, no qual foram colocados os tópicos mais importantes do texto abaixo, visando facilitar a exposição desta parte (Figura 1).

A palavra trigonometria é de origem grega, formada por três radicais: *tri* = três, *gonos* = ângulos e *metron* = medir (DANTE, 2005). Daí vem o seu significado: medida dos triângulos (DANTE, 2005). Por isso, podemos dizer que a trigonometria é a parte da Matemática que tem como objetivo o cálculo das medidas dos elementos de um triângulo (lados e ângulos) (DANTE, 2005).

Além de ser usada na Matemática, a trigonometria, não se limita a estudar somente os triângulos (DANTE, 2005). Sua ampliação se estende a vários campos da Matemática (como a Geometria e a Análise). Encontramos também aplicações da Trigonometria na Física, na Química, em quase todos os ramos da Engenharia e em muitos outros campos de atividades, aplicações essas envolvidas em conceitos que dificilmente lembram os triângulos que deram origem à trigonometria (DANTE, 2005).

Devido as relações estabelecidas entre as medidas de ângulos e de segmentos, a trigonometria, foi considerada originalmente como uma extensão da Geometria (DANTE, 2005).

Os babilônios já usavam a trigonometria para resolver problemas práticos de navegação, de agrimensura e de Astronomia (DANTE, 2005). A Astronomia foi a grande impulsionadora do desenvolvimento da trigonometria, principalmente entre os gregos e os egípcios (DANTE, 2005). Os astrônomos estabeleceram os fundamentos da trigonometria. (DANTE, 2005).

A trigonometria, como os outros ramos da Matemática, não foi obra de um só homem – ou nação (BOYER, 2001). Há indícios que teoremas sobre as razões entre lados de triângulos semelhantes tenham sido conhecidos e usados pelos antigos egípcios e babilônios (BOYER, 2001).

Sabe-se que o astrônomo grego Hiparco de Nicéia (séc.II a.C.) foi o mais importante astrônomo da antiguidade, e que em razão disso, costuma ser chamado de "o pai da trigonometria" (IEZZI, 2004). Ele foi quem empregou, pela primeira vez, relações entre os lados e os ângulos de um triângulo retângulo, por volta de 140 a.C (DANTE, 2005). A trigonometria de Hiparco surgiu como uma "tabela de cordas" em doze livros, obra que se perdeu com o tempo. Nessa obra foi usado pela primeira vez o círculo de 360° (IEZZI, 2004).

Ptolomeu (125 a.C), o mais célebre astrônomo da Antiguidade, preservou a obra de Hiparco e ampliou de maneira brilhante (IEZZI, 2004). Graças a ele surge o documento mais antigo que trata da trigonometria: *O almagesto* (baseados nos trabalhos de Hiparco), um compêndio de astronomia em treze livros, do qual ainda há cópias hoje em dia (IEZZI, 2004). Ptolomeu apresenta um verdadeiro tratado de trigonometria retilínea e esférica, na *sintaxe Matemática* (DANTE, 2005).

Importantes trabalhos hindus foram traduzidos para o árabe, no fim do século VIII, mostrando quanto aquele povo estava familiarizando com esse ramo da Matemática, e foram os responsáveis pelas notáveis descobertas feitas pelos matemáticos árabes sobre a trigonometria (DANTE, 2005).

No século XV, procurando restabelecer a obra de Ptolomeu, Purback, introduziu o seno e a tangente na Trigonometria e construiu a primeira tábua trigonométrica. (DANTE, 2005).

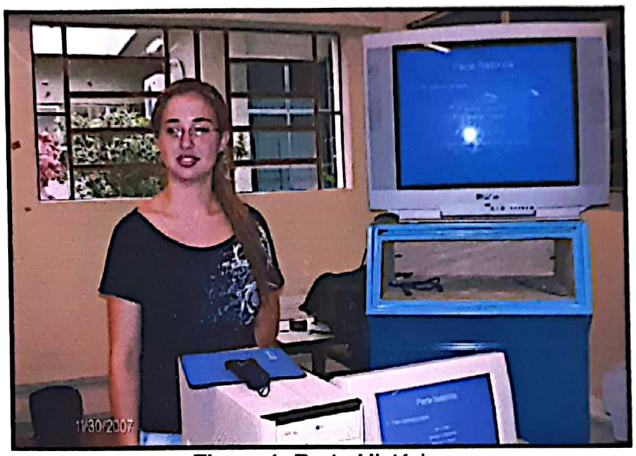


Figura 1: Parte Histórica

Todos os alunos ficaram atentos a apresentação e não fizeram perguntas.

2.2.2 Problema Inicial

Logo após o relato da Parte Histórica, apresentamos aos alunos um problema inicial em que sua resolução envolvia a lei dos cossenos. Este problema é uma aplicação no cotidiano, nele é solicitado que se calcule quantos metros de encanamento serão necessários para ligar um poço a uma caixa d'água. Utilizamos uma cartolina com o esquema do problema para facilitar a compreensão dos alunos (Figura 2).

O objetivo deste problema inicial era verificar se os alunos tinham alguma sugestão para resolvê-lo. Alguns alunos sugeriram resolver aplicando a lei dos cossenos. Sendo assim, comunicamos que eles naquela aula iriam conhecer uma nova abordagem desse conteúdo.

Este mesmo problema é a primeira questão da ficha de atividades de aplicação que foi respondida pelos alunos no final da aula.

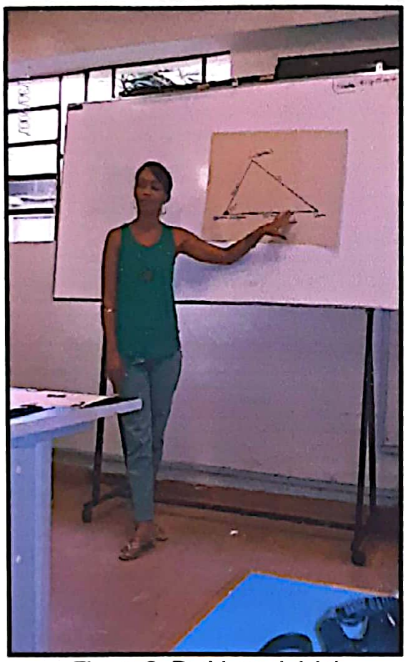


Figura 2: Problema Inicial

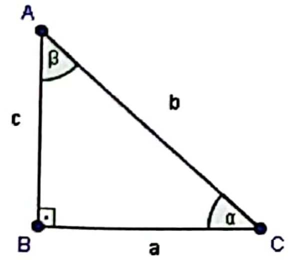
2.2.3 Pré-requisitos

Para o estudo da Lei dos Cossenos é importante rever alguns pré-requisitos. Sendo assim, foi feita uma revisão dos seguintes conteúdos:

- Classificação dos triângulos quantos aos ângulos;
- Ângulos complementares e suplementares;
- Definição de cosseno e seno no triangulo retângulo;
- Cosseno e seno dos ângulos notáveis;
- Cosseno e seno de ângulos complementares e suplementares.

Para explicação do primeiro item foram utilizados triângulos de cartolina, com a medida de seus ângulos indicadas, para que os alunos pudessem classificá-los quanto à medida de seus ângulos, o que de fato foi respondido.

A seguir definimos ângulos complementares e suplementares e utilizando o triângulo da figura 3, construído em cartolina, relembramos o nome dos lados de um triângulo retângulo e a definição de seno e cosseno de um ângulo agudo.



$$\text{sen } \alpha = \frac{c}{b} \qquad \cos \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\text{sen } \beta = \frac{a}{b} \qquad \cos \beta = \frac{c}{b}$$

Figura 3: Razões Trigonométricas

Aproveitamos a figura para iniciar a explicação de que quando os ângulos são complementares o seno de um ângulo é igual ao cosseno do outro, como apresentado na figura 3. A seguir foi colada no quadro uma tabela que continha o seno e cosseno dos ângulos notáveis (Tabela 1), utilizando-a reforçamos a relação entre seno e cosseno de ângulos complementares.

Tabela 1: Valores notáveis

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Depois desta explicação foi apresentada aos alunos uma circunferência trigonométrica desenhada num pedaço de madeira. Este material facilitou a explicação de algumas relações entre o seno e o cosseno dos ângulos suplementares (Figura 4). Utilizamos também, para explicar algumas dessas relações, construções feitas no *software Geogebra,* com a finalidade de facilitar a visualização e a compreensão das mesmas, pelos alunos.

Entendida esta parte, apresentamos outras relações que foram utilizadas na dedução e na demonstração da lei. São elas:$\cos \theta = \text{sen } (90° + \theta)$, $\text{sen } (270° - \theta) = -\cos \theta$.

Os alunos se mostrarão bastante atentos e participativos durante esta etapa.

Figura 4: Pré-requisitos

2.2.4 Dedução da lei dos cossenos

Após as duas etapas já descritas, iniciamos o estudo da Lei dos cossenos, com as atividades de dedução (Anexo 1). Foram três atividades, uma para triângulo retângulo, uma para acutângulo e outra para obtusângulo.

Os alunos receberam uma ficha que continha todas as atividades que eles teriam que fazer utilizando o *site,* para dedução da lei.

O objetivo dessas atividades era comparar as áreas dos quadrados formados sobre os lados do triângulo, deduzindo assim algumas relações.

A dedução iniciou com o triângulo retângulo, onde foi feita a verificação do Teorema de Pitágoras. Pedimos para os alunos abrissem o *site*:

http://www.ies.co.jp/math/java/geo/pythafv/pythafv.html. Nele apareceu a imagem mostrada na figura 5.

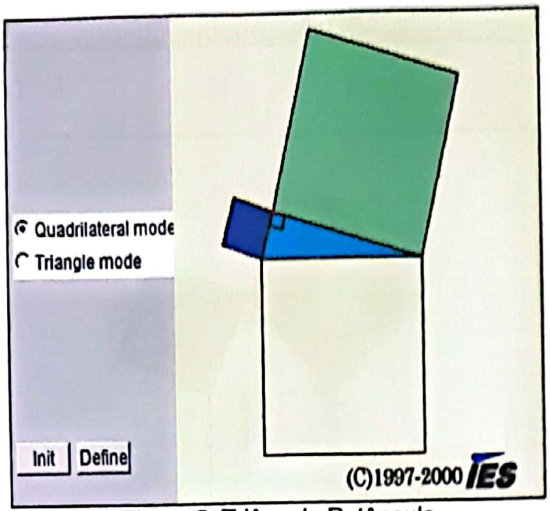


Figura 5: Triângulo Retângulo

Após as movimentações solicitadas nas letras **a**, **b**,**c**, **d**, **e** e **f** do item 1 da ficha de atividades, à figura passou a ser a representada na figura 6.

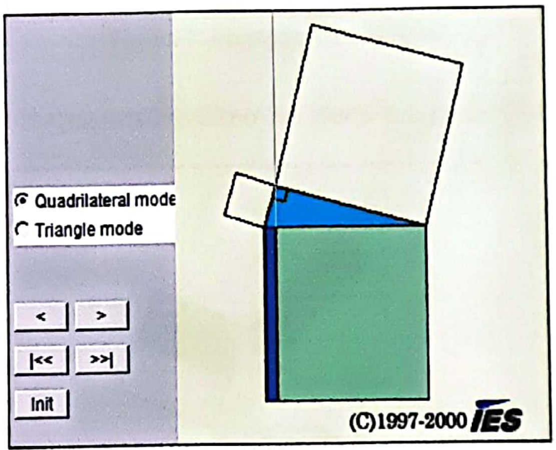


Figura 6: Teorema de Pitágoras

A partir das movimentações, os alunos visualizaram que **a área do quadrado formado sobre hipotenusa (a) é igual à soma das áreas dos quadrados formados sobre os catetos (b** e **c)**.

Nos itens **g**, **h** e **i**, da mesma atividade, foi solicitado que movimentassem o triângulo e repetissem os passos anteriores. Assim, os alunos conjecturaram que esta afirmação é válida para qualquer triângulo retângulo. O item **j** pedia para escrever, simbolicamente, a relação deduzida: $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$.

A segunda dedução foi no triângulo acutângulo, atividade 2, nela utilizamos dois *sites*. O primeiro foi:

http://euler.mat.ufrgs.br/~edumatec/atividades/ativ18/CabriJava/todas.htm, no qual inicialmente aparece a figura 7.

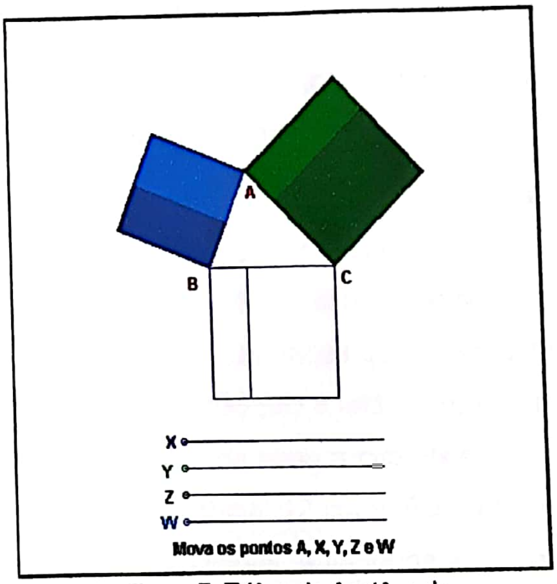


Figura 7: Triângulo Acutângulo

Pedimos aos alunos que resolvessem os itens **b** e **c**, os quais geraram a figura 8.

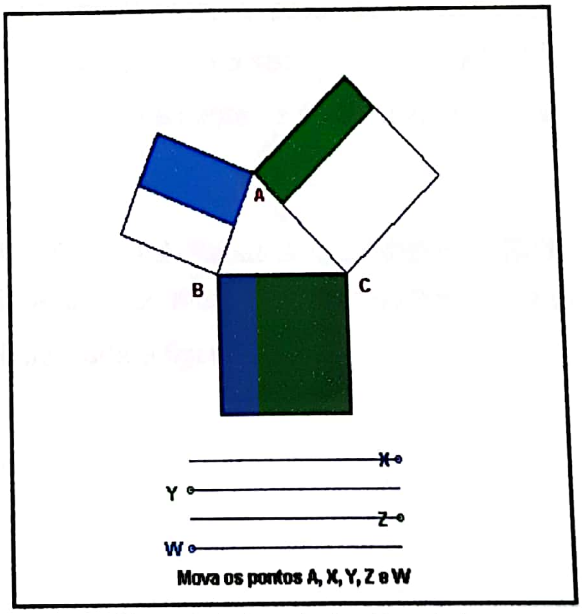


Figura 8: Triângulo Acutângulo 2

E no item **d,** da mesma atividade, os alunos conjecturaram que **a área do quadrado que está sobre o lado BC é menor que a soma das áreas dos quadrados que estão sobre os lados** $\overline{AB}$ **e** $\overline{AC}$.

Ao fazerem o item **e**, verificaram que essa afirmação é válida para qualquer triângulo acutângulo. Finalizando, no item **f**, pedimos que os alunos escrevessem a relação matemática deduzida: $\mathbf{a^2 < b^2 + c^2}$.

Nessa parte alguns alunos tiveram dificuldades em estabelecer a relação, pois não visualizaram, de imediato, as áreas que "sobram".

Com as relações $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$ e $\mathbf{a^2 < b^2 + c^2}$ foi possível estabelecer uma maneira de classificar os triângulos quanto aos ângulos conhecendo apenas a medida de seus lados. Para isso, basta comparar a área do quadrado construído sobre o maior lado do triângulo com a soma das áreas dos outros dois quadrados que foram construídos sobre os outros dois lados do triângulo. Se for igual, o triângulo é retângulo, se for menor, acutângulo.

Nesse momento perguntamos qual seria a classificação, quanto aos ângulos, dos triângulos cujos lados medem 8 cm, 10 cm, 12 cm e 6cm, 8cm e 10cm . Para responder usaram corretamente as relações citadas anteriormente. Eles não conheciam essa maneira de classificar os triângulos, mas conseguiram compreender bem, pois responderam corretamente aos exemplos propostos.

Dando continuidade mostramos, a partir de movimentações na figura, que a relação $\mathbf{a^2 < b^2 + c^2}$ poderia ser escrita da seguinte forma: $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - (A\ fig_1 + A\ fig_2)}$, no qual A fig_1 e A fig_2 são respectivamente as áreas que "sobraram" nos quadrados sobre os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.

No segundo site: http://www.ies.co.jp/math/java/trig/yogen_auto/yogen_auto.html, apareceu a figura 9. Utilizando-a os alunos fizeram os itens de **a** até **d** da atividade 2.1. A partir da resolução foi visualizada a figura10.

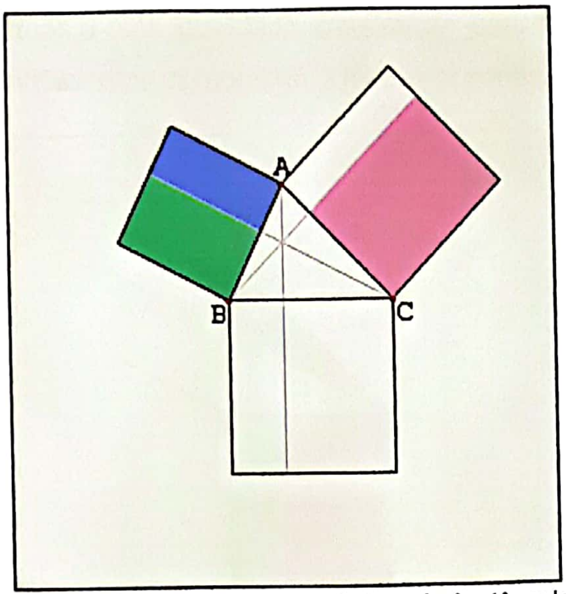


Figura 9: Lei dos Cossenos no Triângulo Acutângulo

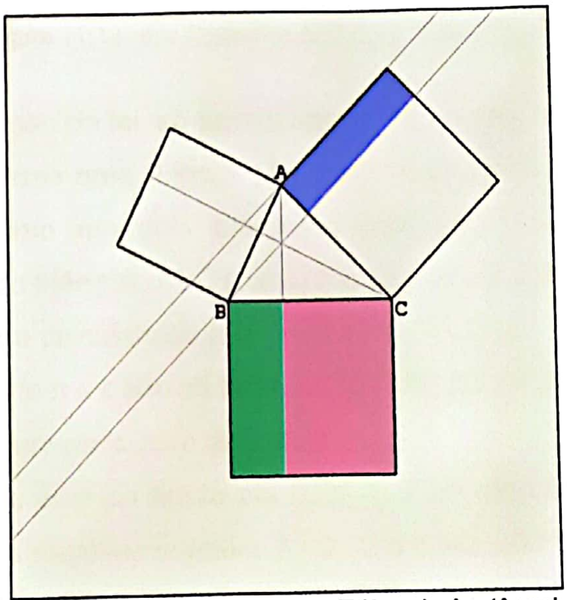


Figura 10: Lei dos Cossenos no Triângulo Acutângulo 2

A partir da resolução do item **e** os alunos observaram que as áreas que restaram nos quadrados formados (**A fig$_1$** e **A fig$_2$**) sobre os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ eram congruentes. No item **f** os alunos perceberam que isso acontece em qualquer triângulo acutângulo.

Já que, **A fig$_1$ = A fig$_2$**, então, a sentença deduzida anteriormente, $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - (A\ fig_1 + A\ fig_2)}$, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2A\ fig_1}$$

Logo após chegarmos a esta igualdade, mostramos uma reprodução da figura 11, em cartolina, para que pudéssemos demonstrar a lei dos cossenos.

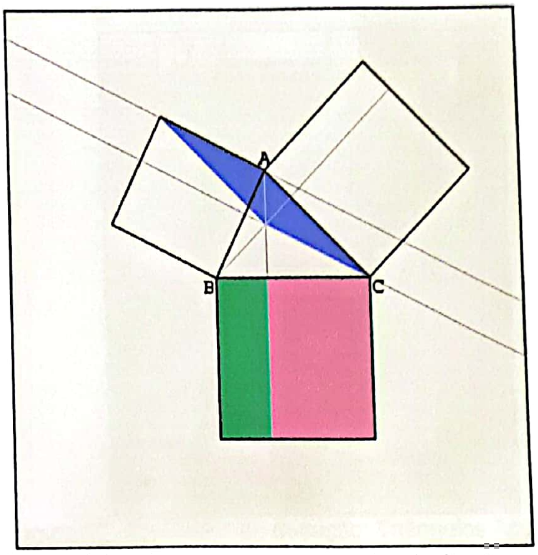


Figura 11: Lei dos Cossenos no Triângulo Acutângulo

Para a demonstração da lei, só precisávamos determinar a área do paralelogramo azul. Para calcularmos essa área (Figura 11), que é equivalente a figura 1 e a figura 2, dividimos o paralelogramo em dois triângulos congruentes cujos dois lados eram congruentes aos lados do triângulo ABC (c e b) e o ângulo compreendido entre dois deles era (90° + Â). Então para calcularmos a área desses triângulos, utilizamos a fórmula de área: A= ½ b.c.sen θ, onde b e c são os lados de um triângulo e θ o ângulo compreendido entre eles. Essa fórmula era nova para os alunos.

Visto isso, como a área da figura era composta por dois triângulos, calculamos a área do paralelogramo da seguinte maneira: A= 2. ½ a.b.sen. (90° + Â).

Simplificando e substituindo sen (90° + Â) por cos Â, chegamos que a $Afig_1$ = c.b.cos Â. Assim a relação $a^2 = b^2 + c^2 - 2Afig_1$, deduzida anteriormente, ficou assim: **$a^2 = b^2 + c^2 - 2$ c.b.cos Â,** que é a lei dos cossenos deduzida a partir de um triângulo acutângulo.

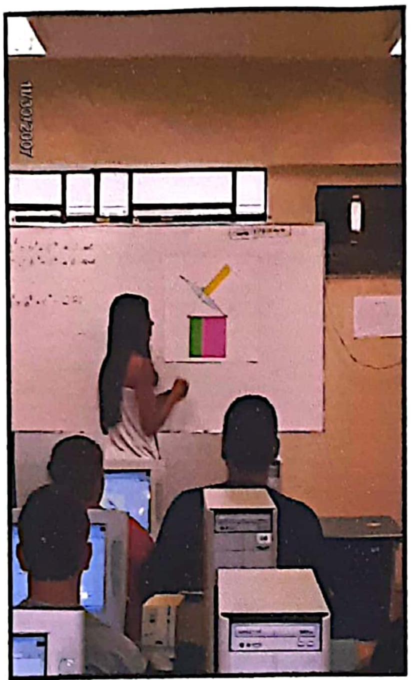


Figura 12: Atividades de dedução: Triângulos Acutângulos

Os alunos resolveram também, atividades para dedução da lei dos cossenos para o triângulo obtusângulo, o que foi feito de maneira análoga ao que descrevemos anteriormente para o triângulo acutângulo.

Neste caso, porém, a partir da resolução da atividade 3.1 foi possível concluir que a área do quadrado formado sobre o lado BC é maior do que a soma das áreas dos quadrados formados sobre os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ **($a^2 > b^2 + c^2$), ou seja, $a^2 = b^2 + c^2 + (A\ fig_1 + A\ fig_2)$**.

A atividade 3.2 possibilitou concluir que as áreas dos retângulos que "faltam", para completar o quadrado sobre o maior lado, são equivalentes **($A\ fig_1 = A\ fig_2$)**. E, assim, chegamos à seguinte sentença:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 + 2A\ fig_1}$$

Fizemos uma reprodução da terceira imagem da figura 13 em cartolina. Utilizamos esta figura para demonstrar a lei dos cossenos para triângulo obtusângulo. Para determinar a área do paralelogramo azul o dividimos em dois triângulos congruentes, e utilizarmos a fórmula para cálculo de área de triângulos já citada na demonstração para triângulos acutângulos. Iniciamos determinando o ângulo obtuso do paralelogramo azul (Figura 13).

Seja ß a medida do ângulo obtuso do paralelogramo azul (Figura 13) podemos afirmar que **ß = 90° + x (I)**, sendo x a medida do ângulo externo A do ΔABC.

Para determinar ß em função dos ângulos internos do triângulo ABC, precisamos expressar x em função da medida de um dos ângulos internos do triângulo ABC. Como Â e x são ângulos suplementares podemos afirmar que **x = 180° - Â (II)**

Substituindo I em II, temos:

ß = 90° + 180° - Â

ß = 270° - Â

Como a área do paralelogramo azul é dada por **A fig_1**= 2. ½ c.b.senß (área de dois triângulos). Substituindo ß por 270° - Â temos que **A fig_1** = c.b.sen (270 – Â). Como sen(270 – Â) = - cosÂ, podemos afirmar que **A fig_1 = -c.b.cosÂ**.

Assim a relação **$a^2 = b^2 + c^2 + 2Afig_1$** , deduzida anteriormente, pode ser escrita da forma: **$a^2 = b^2 + c^2 - 2$ c.b.cos Â,** que é a lei dos cossenos deduzida a partir de um triângulo obtusângulo.

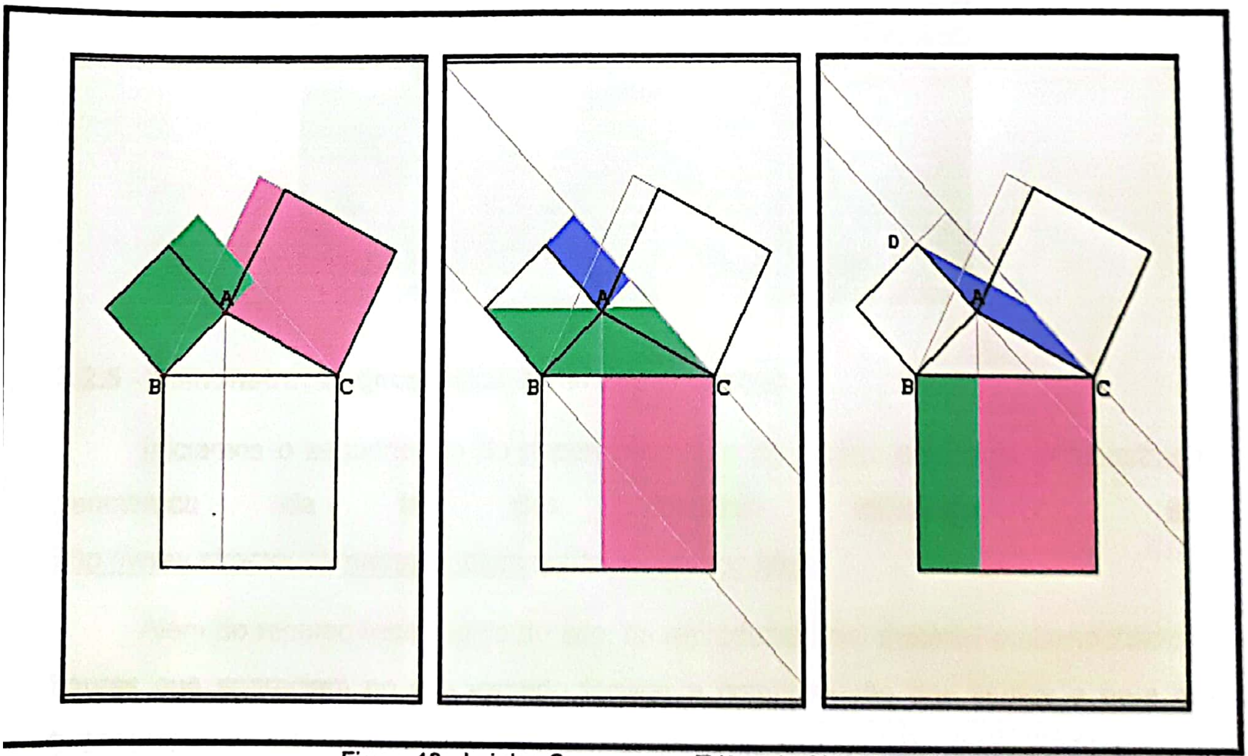


Figura 13 - Lei dos Cossenos no Triângulo Obtusângulo

Após, utilizamos as relações deduzidas nas atividades 2.1 e 3.1, solicitamos, oralmente, aos alunos que classificassem o triângulo cujos lados medem 11cm, 8cm e 6cm quanto a medida de seus ângulos. Após alguns cálculos os alunos responderam corretamente.

De maneira geral, percebemos que na atividade 3 (Triângulo Obtusângulo) os alunos responderam com maior facilidade, pois já haviam feito as atividades 1 (Triângulo Retângulo) e 2 (Triângulo Acutângulo) que eram parecidas. Constatamos então que nosso objetivo foi atingido, pois a maioria dos alunos participou ativamente e chegaram as conclusões pedidas nas atividades corretamente.

Finalizamos o primeiro encontro (duas aulas) nesta etapa, no segundo encontro com a turma continuamos o desenvolvimento realizando as demais etapas conforme descrevemos a seguir.

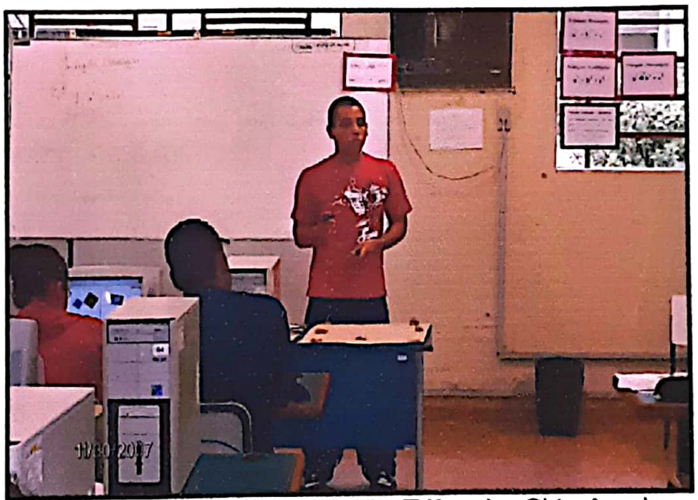


Figura 14: Atividades de dedução: Triângulos Obtusângulos

2.2.5 - Demonstração geométrica da lei dos cossenos

Iniciamos o segundo dia do desenvolvimento do projeto com uma demonstração geométrica da lei dos cossenos utilizando o *site*: http://www.atractor.pt/mat/sem_palavras/*lei_cossenos.html*.

Além do recurso tecnológico do *site*, foi reproduzido em material emborrachado as figuras que apareciam no *site* visando facilitar a compreensão dos alunos e para que tivéssemos um outro recurso que substituísse o *site* caso ocorresse algum problema.

Ao abrir o *site* aparece a figura 15 que é utilizada para a demonstração da lei dos cossenos.

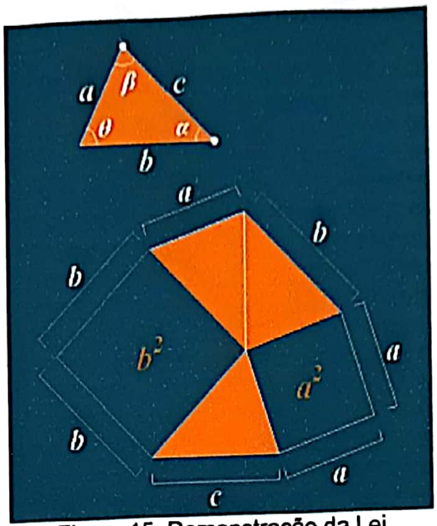


Figura 15: Demonstração da Lei

Consideramos um triângulo ABC acutângulo, a partir dele formamos o heptágono (Figura 15) contendo três triângulos congruentes ao triângulo ABC e dois quadrados.

A área do heptágono é, portanto: $\boxed{A_{hep} = a^2 + b^2 + (3 \times A_{\Delta ABC})}$ ⟶ I

É importante ressaltar que no desenvolvimento do projeto sobrepomos os triângulos (feitos em material emborrachado) para justificar que os triângulos eram congruentes.

Transladando os triângulos congruentes, obtemos uma nova decomposição do heptágono como mostra a figura 16.

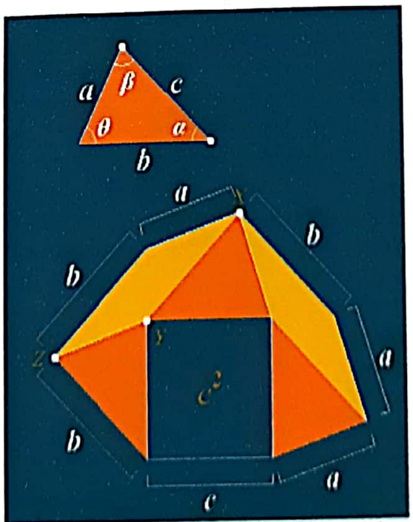


Figura 16: Demonstração da Lei 2

Podemos observar que os paralelogramos são congruentes, mostramos aos alunos esta parte sobrepondo os paralelogramos feitos em emborrachado.

Observando a figura 16 podemos afirmar que a área do heptágono é:

$$\boxed{A_{hep} = c^2 + 3 \times A_{\Delta ABC} + 2 \times \text{área do } ▱} \longrightarrow \text{II}$$

Igualando I e II, temos:

$a^2 + b^2 + (3 \times A_{\Delta ABC}) = c^2 + (3 \times A_{\Delta ABC}) + 2$ área do ▱ , ou seja

$c^2 = a^2 + b^2 - 2$ área do ▱ (III), resta agora expressar a área do paralelogramo em função dos elementos do triângulo ABC.

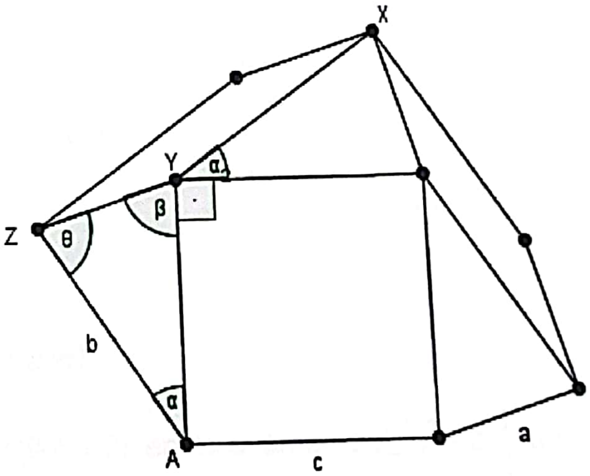


Figura 17: Demonstração da Lei 3

Observando o triangulo AYZ (Figura 17), temos:

$\theta + \alpha + \beta = 180° \longrightarrow \alpha + \beta = 180° - \theta$ (IV)

Na figura 17, também podemos observar que:

$X\hat{Y}Z + \alpha + \beta + 90° = 360°$

$X\hat{Y}Z + \alpha + \beta = 270°$ (V)

Substituindo IV em V:

$X\hat{Y}Z + 180° - \theta = 270°$

$X\hat{Y}Z = 90 + \theta$

Sabendo que a área de um triângulo qualquer PQR (Figura 18) pode ser calculada pela fórmula $A = \frac{1}{2}\overline{PQ}.\ \overline{QR}.\text{sen}P\hat{Q}R$, conforme já descrito na seção anterior.

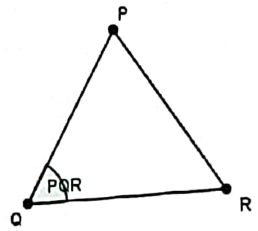
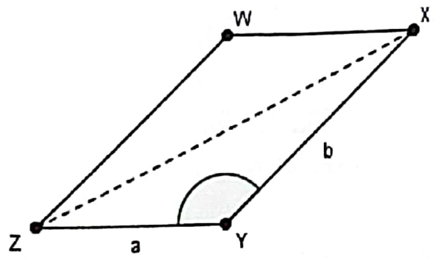


Figura 18: Área do triângulo

Assim, podemos afirmar que:



Sendo $X\hat{Y}Z = 90° + \theta$

Figura 19: Área do paralelogramo

A área do ▱ = (2 x $A_{\Delta XYZ}$)

Como $A_{\Delta XYZ} = \frac{1}{2}$ab.sen(90° + θ), então a área do ▱ $= 2.\frac{1}{2}$.ab.sen(90° + θ)

Como sen (90 + θ) = cos θ·, temos que:

A área do ▱ = a.b.cos θ. (VI)

Substituindo VI em III, temos:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2.\ a.b.\cos\theta}$$

Toda esta parte, a demonstração geométrica, foi feita de uma forma dialogada com os alunos. Recebemos um ótimo retorno dos alunos, e percebemos que eles estavam bastante entusiasmados com esta demonstração, atribuímos este fato ao uso do *site* e do material emborrachado.

No link: http://www.atractor.pt/mat/sem_palavras/lei_cossenos1.html, podemos conferir uma demonstração similar para triângulo obtusângulo.

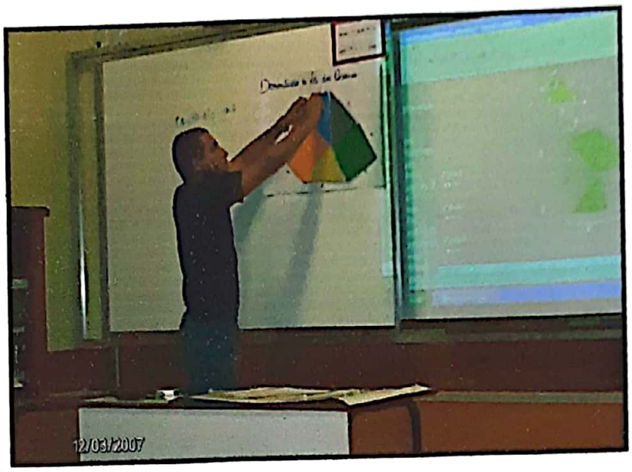


Figura 20: Demonstração Geométrica da Lei dos Cossenos

Essa etapa, atividades de dedução, possibilitou a percepção do quanto é importante o uso de recursos inovadores na construção de conhecimentos.

2.2.6 - Demonstração formal da lei dos cossenos

Tínhamos o intuito de nesta etapa do projeto, explicar uma demonstração formal, que é geralmente a encontrada nos livros, mas devido ao tempo, pois no segundo dia da aplicação do projeto só tínhamos um horário (50 minutos) para finalizar o projeto, não foi possível a realização dessa etapa. Isto não prejudicou nosso trabalho, pois já havia sido demonstrado a lei dos cossenos de duas maneiras.

Pretendíamos utilizar um cartaz contendo o desenho do triângulo acutângulo, como mostra a figura 23, sendo **a**, **b**, e **c** são as medidas dos lados do triângulo; o segmento $\overline{BD}$ é a altura relativa ao lado $\overline{AC}$; $\overline{AD}$ é a projeção ortogonal do lado $\overline{AB}$ sobre o lado $\overline{AC}$ e $\overline{CD}$ é a projeção ortogonal do lado $\overline{BC}$ sobre o lado $\overline{AC}$.

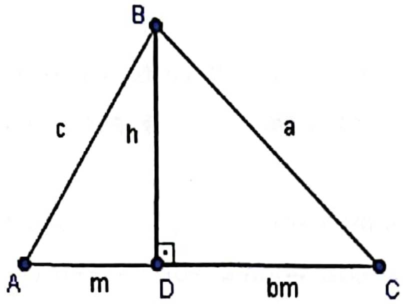


Figura 21: Triângulo Acutângulo ABC

Para começar a demonstração, aplica-se o teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos **CBD** e **ABD,** com isso temos:

$$a^2 = h^2 + (b - m)^2 \quad \textbf{(I)}$$

$$h^2 = c^2 - m^2 \quad \textbf{(II)}$$

Substituindo **(II)** em **(I)**, temos que:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bm$ **(III)**

No triângulo **CAD**, temos que:

$\cos \hat{A} = \dfrac{m}{c}$

$m = c.\cos \hat{A}$ **(IV)**

Substituindo **(IV)** em **(III)**, temos que:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{A}$

Por extensão, a lei dos cossenos também permite escrever:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2.c.b.\cos \hat{B}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2.c.b.\cos\hat{C}$

Com isso, podemos afirmar que:

Num triângulo **ABC** qualquer, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados menos duas vezes o produto dessas medidas pelo cosseno do ângulo formado por eles.

2.2.7 Aplicação na Física

Retomamos ao problema inicial antes de iniciar esta etapa. Como já havia sido demonstrada a lei dos cossenos todos sabiam como resolver o problema. Não houve dúvida nesta etapa do projeto.

Na aplicação da lei dos cossenos a física, fizemos uma reprodução da figura 22 em cartolina, para facilitar, a compreensão dos alunos aos explicarmos. Essa etapa foi bastante corrida, pois só tínhamos um tempo de aula disponível para esta etapa e a seguinte.

Explicamos que a fórmula utilizada na física para determinar o vetor resultante é a lei dos cossenos só que com o sinal invertido, devido ao ângulo considerado na fórmula (suplemento do ângulo usado na lei dos cossenos).

Segundo Dante (2004), alguns alunos notam que os professores de Física, quando estudam forças, ensinam a "lei dos cossenos com o sinal de +", enquanto os professores de matemática ensinam essa lei com o "sinal de –" .

Física: $R^2 = a^2 + b^2 + 2ab.\cos\theta$

Matemática: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\hat{C}$

A bem da verdade é que poucos professores de física citam a lei dos cossenos, preferindo ensinar tal fórmula como "cálculo do módulo do vetor resultante" ou apenas "vetor resultante" (DANTE, 2004).

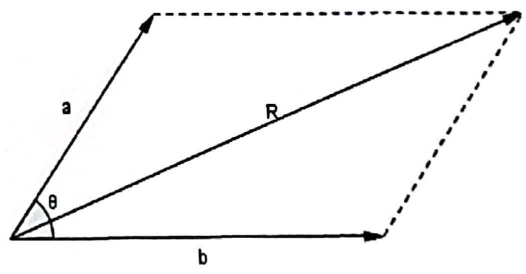


Figura 22: Força Resultante

O que acontece é que nas situações de soma vetorial da física temos que o ângulo θ é o ângulo entre os dois vetores que serão somados para se obter o vetor resultante R (Figura 22). Olhando a mesma situação do ponto de vista matemático, a, b, R não formam um triângulo, porém, considerando o lado do paralelogramo paralelo ao vetor a, formamos um triângulo no qual podemos utilizar o ângulo suplementar a θ e aplicar a lei dos cossenos (DANTE, 2004).

Utilizamos o cartaz contendo polígonos apresentadas na figura 23 e relacionamos a fórmula usada na física com a lei dos cossenos.

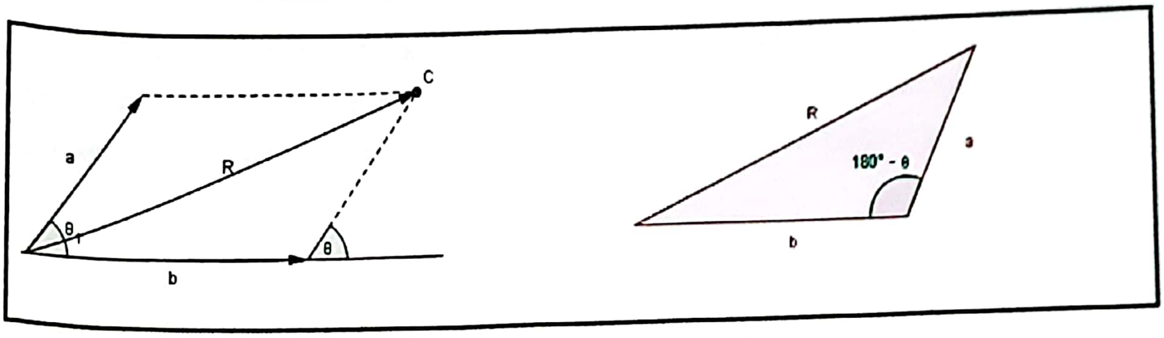


Figura 23: Força Resultante – Lei dos Cossenos

Assim, $R^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos(180° - \theta)$.

Como sabemos que $\cos(180° - \hat{R}) = -\cos\theta$, então poderíamos reescrever essa fórmula:

$R^2 = a^2 + b^2 - 2ab.(-\cos\theta) =$

$$\boxed{R^2 = a^2 + b^2 + 2ab.\cos\theta}$$

A fórmula é a mesma, apenas o ângulo utilizado na Física não é o mesmo utilizado na Matemática (DANTE, 2004). Todos entenderam a explicação, não apresentando dúvidas.

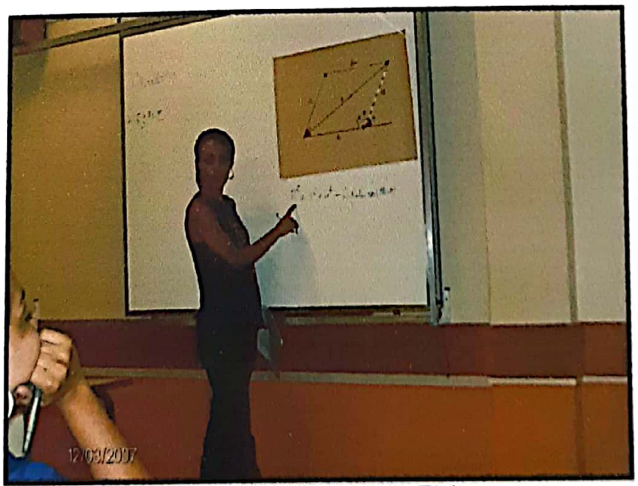


Figura 24: Aplicação na Física

2.2.8 Atividades de aplicação

Nesta etapa foram propostas e corrigidas algumas atividades de aplicação (Anexo 2). Foram excluídas as questões 4 e 7 devido a falta de tempo para aplicação do projeto.

Determinamos um tempo para que os alunos fizessem cada questão e logo após corrigíamos junto com os mesmos. Obtivemos um ótimo retorno dos alunos na resolução dos exercícios e a maioria deles conseguiu resolver as questões de forma correta.

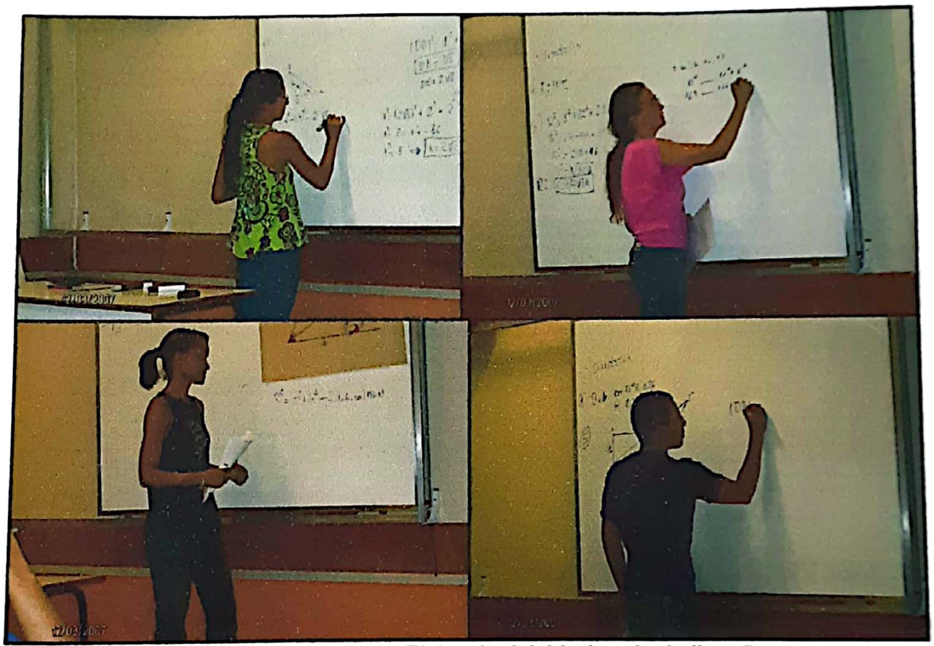


Figura 25: Correção da Ficha de Atividades de Aplicação

3 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na aplicação deste projeto abordamos a lei dos cossenos, de maneira diferente das encontradas nos livros didáticos, utilizamos algumas *sites* educacionais, visando contribuir para a aprendizagem do tema, já que o uso da mesma facilita a compreensão e desperta o interesse dos alunos.

A tecnologia é uma ferramenta eficiente na construção de conhecimentos, visto que a utilização de recursos complementares contribui como um meio para melhorar a qualidade de ensino. E esses recursos devem ser utilizados de maneira integrada e inteligente para propiciar a construção do conhecimento do aluno e não apenas para motivá-lo (SILVA, 2005).

Na aplicação do projeto buscamos fazer o que foi descrito por Silva (2005) e analisando o desenvolvimento do projeto percebemos que conseguimos, pois nas atividades de dedução os alunos desenvolveram suas próprias respostas, o que era o nosso propósito, utilizando recurso tecnológico como instrumento que auxilia no desenvolvimento e organização do pensamento.

Percebemos, porém que deveríamos ter solicitado mais a participação dos alunos para que expusessem suas observações.

Analisando as fichas de atividades respondidas, pudemos constatar que 30% dos alunos deixaram a última questão incompleta. Atribuímos isto ao fato de não termos tido tempo suficiente para concluir esta questão visto que nela encerramos o primeiro dia de aplicação do projeto.

De acordo com os comentários dos alunos verificamos que a maioria se interessou pela aula, pelo fato da mesma ser interativa, dinâmica e inovadora devido ao uso das tecnologias, o que segundo eles não é comum em sala de aula. Alguns desses comentários se encontram no anexo 4.

Sendo assim, vimos que apesar de algumas falhas, este projeto de laboratório de ensino e Aprendizagem de Matemática foi muito construtivo para o grupo, devido ao fato de termos a oportunidade de estudar o tema de forma aprofundada. Consideramos ser difícil preparar um projeto como esse, com tanto vigor, quando exercemos de fato a função de educador.

Temos consciência de que como educadores teremos que propor situações de aprendizagem que exijam investigação, reflexão e crítica, pois dependerá de nós para que o processo de ensino e aprendizagem ocorra de forma eficaz.

4 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYER, Carl B. *História da matemática*. Tradução: Elza F. Gomide. 2.ed.São Paulo: Edgard Blúcher Ltda, 2001.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC/ SEF, 1999.

DANTE, Luiz Roberto. *Matemática. 2ª Série (Ensino Médio)*. São Paulo: Ática, 2004.

DANTE, Luiz Roberto. *Matemática*: Livro do professor, contexto e aplicação, volume único. 2.ed. São Paulo:Ática, 2005.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO,Roberto; ALMEIDA, Nilze de. *Matemática: Ciências e aplicações.* 1ª série do Ensino Médio. São Paulo: Atual, 2004.

SILVA, Divina Salvador. A importância da tecnologia na educação. 2005. Disponível em: <http://www.centrorefeducacional.com.br/importecn.htm>
Último acesso: 23/02/2008

ANEXOS

ANEXO 1: Atividades de Dedução

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE CAMPOS
CEFET CAMPOS Universidade da Tecnologia e do Trabalho
Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

Nome: ______________________________ Série: __________
Turma: _________

Estas atividades foram elaboradas por Heloiza Rangel, Josie Vasconcellos, Luis Gustavo Soares, Rosana Barcelos, Tatiele Nascimento para um projeto que será desenvolvido no âmbito da disciplina Laboratório de Ensino na Licenciatura em Matemática do CEFET-Campos.

Ficha de atividades – Lei dos cossenos

1. Triangulo retângulo:

a) Abra o site:
http://www.ies.co.jp/math/java/geo/pythafv/pythafv.html
b) Observe as figuras e vá ao final da página.
c) Clique em "Define".
d) Clique na seta para a direita $\boxed{>}$ e observe.
e) Repita o item "d" até preencher o quadrado.
f) Compare a área do quadrado que está sobre a hipotenusa (após as movimentações já realizadas) com a soma das áreas dos outros dois quadrados. Descreva o que você observou.

____
____
____.

g) Clique em "Init".
h) Movimente o vértice do ângulo reto (ponto vermelho).
i) Refaça os itens *c*, *d*, *e*, e *f*.

____
____
____.

j) Considerando que a hipotenusa de um triângulo mede **a**, os catetos medem **b** e **c**, que a área do quadrado é calculada pelo quadrado da medida do seu lado e o que foi observado nos itens anteriores, estabeleça uma relação entre a área do quadrado que está sobre a hipotenusa (**a**) e a soma das áreas dos quadrados formados sobre os catetos (**b** e **c**).

____.

2. Triangulo acutângulo:

2.1 Abra o site:
http://euler.mat.ufrgs.br/~edumatec/atividades/ativ18/CabriJava/todas.htm
b) Observe a figura.
c) Arraste os pontos X e Z até o final das retas.
d) Compare a área do quadrado que está sobre o lado oposto ao ângulo Â (após as movimentações já realizadas) com a soma das áreas dos outros dois quadrados. Descreva o que você observou.

____

____

____.

e) Volte os pontos X e Z para a posição inicial, movimente o ponto A, mantendo o triângulo acutângulo e refaça os itens **c** e **d**.

____

____

____.

f) Considerando que o maior lado do triângulo mede **a** e os outros dois lados do triângulo medem **b** e **c**. que a área do quadrado é calculada pelo quadrado da medida do seu lado e o que foi observado nos itens anteriores, estabeleça uma relação entre a área do quadrado que está sobre o maior lado (a) com a soma das áreas dos quadrados formados pelos outros dois lados (b e c).

____.

2.2 Abra o site: :
http://www.ies.co.jp/math/java/trig/yogen_auto/yogen_auto.html
a) Vá ao final da página.
b) Clique na seta para a direita $\boxed{>}$ 3 vezes observando a tela.
c) Clique em "pink" e repita o item anterior.
d) Clique em "blue" e repita o mesmo procedimento do item **c**.
e) Descreva o que você observou no item **d**.

____

____

____.

f) Clique em "Init", a seguir em "green". Movimente o ponto A, mantendo o triângulo acutângulo e refaça os itens **b, c, d** e **e**.

____

____

____.

Comentários:

____

____

____.

3. Triangulo Obtusângulo

3.1 Abra o site:
http://euler.mat.ufrgs.br/~edumatec/atividades/ativ18/CabriJava/todas.htm
a) Observe a figura que contém dois triângulos obtusângulos.
b) No primeiro triângulo obtusângulo arraste os pontos X e Y até o final das retas.
c) No segundo triângulo obtusângulo arraste os pontos X e Z até o final das retas. Observe a figura. Arraste os pontos Y e W até o final das retas.
d) Compare a área do quadrado que está sobre o lado BC (após as movimentações já realizadas) com a soma das áreas dos outros dois quadrados. Descreva o que você observou.

____
____
______________________________________.

e) Volte os pontos X, Y, Z e W para a posição inicial, movimente o ponto A mantendo o triângulo obtusângulo e refaça os itens **c** e **d**.

____
____
______________________________________.

f) Considerando que o maior lado do triângulo mede **a** e os outros dois lados do triângulo medem **b** e **c**. que a área do quadrado é calculada pelo quadrado da medida do seu lado e o que foi observado nos itens anteriores, estabeleça uma relação entre a área do quadrado que está sobre o maior lado (**a**) com a soma das áreas dos quadrados formados pelos outros dois lados (**b** e **c**).

____.

3.2 Retorne ao site:
http://www.ies.co.jp/math/java/trig/yogen_auto/yogen_auto.html e clique "green" e em "Init".

a) Movimente o vértice A, tornando $B\hat{A}C$ um ângulo obtuso.
b) Clique na seta para a direita $\boxed{>}$ 3 vezes.
c) Clique em "pink" e repita o item anterior.
d) Clique em "blue" e repita o mesmo procedimento do item **b.**
e) Descreva o que você observou no item **d**.

____
____
______________________________________.

f) Clique em "Init", a seguir, em "green". Movimente o ponto A, tornando o novamente um ângulo obtuso e refaça os itens **b**, **c**, **d**, **e**.

____
____
______________________________________.

Comentários:

____
______________________________________.

ANEXO 2: Atividades de Aplicação

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE CAMPOS

Ministério da Educação

CEFET CAMPOS Universidade da Tecnologia e do Trabalho

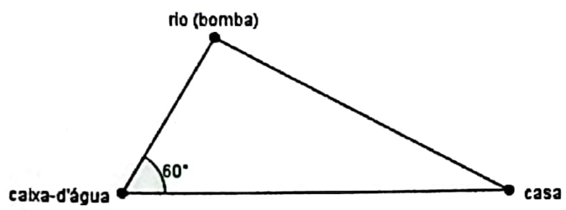
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

Nome: ________________________________ Série: __________

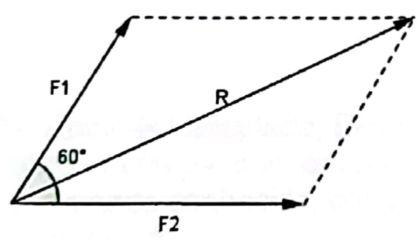
Turma: __________

Estas atividades foram selecionadas por Heloiza Rangel, Josie Vasconcellos, Luis Gustavo Soares, Rosana Barcelos, Tatiele Nascimento para um projeto que será desenvolvido no âmbito da disciplina Laboratório de Ensino na Licenciatura em Matemática do CEFET-Campos.

1- (Unicamp-SP - adaptada) A água utilizada na casa de um sítio é captada e bombeada do rio para uma caixa-d'água a 50 m de distância. A casa está a 80 m de distância da caixa-d'água e o ângulo formado pelas direções caixa-d'água/bomba e caixa-d'água/casa é de 60°. Se pretende-se bombear a água do mesmo ponto de captação até a casa, quantos metros de encanamento são necessários?



2- Duas forças de intensidade F1=8N e F2= 12N formam entre si um ângulo de 60°. Qual é a intensidade **R** resultante dessas duas forças?

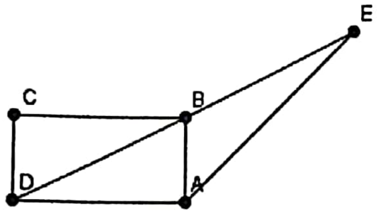


3- Classifique os triângulos quanto à medida de seus ângulos:

a) cujos lados medem 6,12 e 13.
b) cujos lados medem 6, 10, e 12.
c) cujos lados medem 5, 12 e 13.

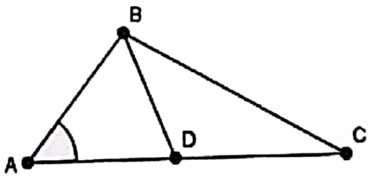
4 – (DANTE, 2000 – adaptada) Um terreno triangular tem frentes de 6m e 8m em ruas que formam um ângulo de 75°. Quanto mede o terceiro lado do terreno?

5- (UF-MG) Na figura, B é o ponto médio do segmento $\overline{DE}$ e ABCD é um retângulo de lados DC=1 e AD=2. Determine AE;

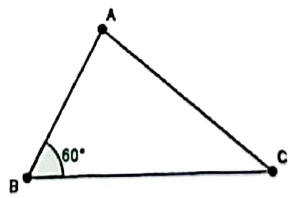


6- (Fuvest- SP) Na figura abaixo. AD = 2 cm, AB = $\sqrt{3}$ cm, a medida do ângulo $B\hat{A}C$ é 30° e BD = DC, onde D é um ponto do lado $\overline{AC}$. A medida do lado $\overline{BC}$, em cm, é:

a) $\sqrt{3}$
b) 2
c) $\sqrt{5}$
d) $\sqrt{6}$
e) $\sqrt{7}$



7- (Unirio-RJ adaptada) Deseja-se medir a distância entre duas cidades A e C sobre um mapa, sem escala. Sabe-se que BA = 80 km e BC = 120 km, onde B é uma cidade conhecida, como mostra a figura abaixo. Logo, a distância entre A e C, em km, é:



a) menor que 90
b) maior que 90 e menor que 100
c) maior que 100 e menor que 110
d) maior que 110 e menor que 120
e) maior que 120

ANEXO 3: Atividades de dedução respondidas pelos alunos

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE CAMPOS

CEFET CAMPOS Universidade da Tecnologia e do Trabalho

Ministério da Educação

Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

Nome: Annelise Martins de Sousa Série: 3º ano

Turma: 301-T 30/11/07

Estas atividades foram elaboradas por Heloiza Rangel, Josie Vasconcellos, Luis Gustavo Soares, Rosana Barcelos, Tatiele Nascimento para um projeto que será desenvolvido no âmbito da disciplina Laboratório de Ensino na Licenciatura em Matemática do CEFET-Campos.

Ficha de atividades – Lei dos cossenos

1. Triangulo retângulo:

a) Abra o site:
http://www.ies.co.jp/math/java/geo/pythafv/pythafv.html

b) Observe as figuras e vá ao final da página.

c) Clique em "Define".

d) Clique na seta para a direita $\boxed{>}$ e observe.

e) Repita o item "d" até preencher o quadrado.

f) Compare a área do quadrado que está sobre a hipotenusa (após as movimentações já realizadas) com a soma das áreas dos outros dois quadrados. Descreva o que você observou.

A soma da área dos quadrados dos catetos é igual a área do quadrado da hipotenusa.

g) Clique em "Init".

h) Movimente o vértice do ângulo reto (ponto vermelho).

i) Refaça os itens *c*, *d*, *e*, e *f*.

não importa quanto seja a medida dos ângulos complementares do triângulo retângulo, porque a área da hipotenusa é igual às áreas dos catetos.

j) Considerando que a hipotenusa de um triângulo mede **a**, os catetos medem **b** e **c**, que a área do quadrado é calculada pelo quadrado da medida do seu lado e o que foi observado nos itens anteriores, estabeleça uma relação entre a área do quadrado que está sobre a hipotenusa (**a**) e a soma das áreas dos quadrados formados sobre os catetos (**b** e **c**).

$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow$ teorema de pitágoras

2. Triangulo acutângulo:

2.1 Abra o site:

[illegible]

b) Observe a figura.
c) Arraste os pontos X e Z até o final das retas.
d) Compare a área do quadrado que está sobre o lado oposto ao ângulo Â (após as movimentações já realizadas) com a soma das áreas dos outros dois quadrados. Descreva o que você observou.

O quadrado formado é menor que a soma da área dos outros dois quadrados.

e) Volte os pontos X e Z para a posição inicial, movimente o ponto A, mantendo o triângulo acutângulo e refaça os itens **c** e **d**.

Não importa a medida do ângulo A, pois o quadrado formado ~~é~~ sempre a soma das áreas dos outros quadrados.

f) Considerando que o maior lado do triângulo mede **a** e os outros dois lados do triângulo medem **b** e **c**. que a área do quadrado é calculada pelo quadrado da medida do seu lado e o que foi observado nos itens anteriores, estabeleça uma relação entre a área do quadrado que está sobre o maior lado (a) com a soma das áreas dos quadrados formados pelos outros dois lados (b e c).

$a^2 < b^2 + c^2 \rightarrow$ triângulo acutângulo

2.2 Abra o site: :
http://www.ies.co.jp/math/java/trig/yogen_auto/yogen_auto.html
a) Vá ao final da página.
b) Clique na seta para a direita $\boxed{>}$ 3 vezes observando a tela.
c) Clique em "pink" e repita o item anterior.
d) Clique em "blue" e repita o mesmo procedimento do item **c**.
e) Descreva o que você observou no item **d**.

A área que sobra do menor retângulo é igual a área que falta do quadrado oposto ao ângulo B.

f) Clique em Init, a seguir em "green". Movimente o ponto A, mantendo o triângulo acutângulo e refaça os itens **b, c, d** e **e**.

Não importa a medida do ângulo A, pois a área que sobra do menor retângulo é igual a área que falta do quadrado oposto ao ângulo B.

Comentários:

$a^2 = b^2 + c^2 - (A_{f_1} + A_{f_2})$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2A_f$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\theta$

3

3. Triangulo Obtusângulo

3.1 Abra o site:

a) Observe a figura que contém dois triângulos obtusângulos.
b) No primeiro triângulo obtusângulo arraste os pontos X e Y até o final das retas.
c) No segundo triângulo obtusângulo arraste os pontos X e Z até o final das retas. Observe a figura. Arraste os pontos Y e W até o final das retas.
d) Compare a área do quadrado que está sobre o lado BC (após as movimentações já realizadas) com a soma das áreas dos outros dois quadrados. Descreva o que você observou.

A área do quadrado resultando é maior que a soma dos outros dois quadrados.

e) Volte os pontos X, Y, Z e W para a posição inicial movimente o ponto A mantendo o triângulo obtusângulo e refaça os itens **c** e **d**.

Quanto mais se aproxima para formar o triângulo retângulo, menor é a área que sobra do quadrado resultante.

f) Considerando que o maior lado do triângulo mede **a** e os outros dois lados do triângulo medem **b** e **c**. que a área do quadrado é calculada pelo quadrado da medida do seu lado e o que foi observado nos itens anteriores, estabeleça uma relação entre a área do quadrado que está sobre o maior lado (**a**) com a soma das áreas dos quadrados formados pelos outros dois lados (**b** e **c**).

$a^2 > b^2 + c^2 \rightarrow$ triângulo obtusângulo.

3.2 Retorne ao site:
http://www.ies.co.jp/math/java/trig/yogen_auto/yogen_auto.html e clique green e em "Init".

a) Movimente o vértice A, tornando $B\hat{A}C$ um ângulo obtuso.
b) Clique na seta para a direita $\boxed{>}$ 3 vezes.
c) Clique em "pink" e repita o item anterior.
d) Clique em "blue" e repita o mesmo procedimento do item **b** .
e) Descreva o que você observou no item **d**.

As áreas que sobraram dos dois quadrados são iguais.

f) Clique em "Init", a seguir, em "green". Movimente o ponto A, tornando o novamente um ângulo obtuso e refaça os itens **b**, **c**, **d**, **e**.

$a^2 > b^2 + c^2$

$a^2 = b^2 + c^2 + A_{f_1} + A_{f_2}$

$a^2 = b^2 + c^2 + 2A_{fig}$

Comentários:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\theta$

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE CAMPOS
CEFET CAMPOS Universidade da Tecnologia e do Trabalho

Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

Nome: Rodrigo Pereira dos Santos Série: 3ª
Turma: 301 THRDE

Estas atividades foram elaboradas por Heloiza Rangel, Josie Vasconcellos, Luis Gustavo Soares, Rosana Barcelos, Tatiele Nascimento para um projeto que será desenvolvido no âmbito da disciplina Laboratório de Ensino na Licenciatura em Matemática do CEFET-Campos.

Ficha de atividades – Lei dos cossenos

1. Triangulo retângulo:

a) Abra o site:
http://www.ies.co.jp/math/java/geo/pythafv/pythafv.html
b) Observe as figuras e vá ao final da página.
c) Clique em "Define".
d) Clique na seta para a direita $\boxed{>}$ e observe.
e) Repita o item "d" até preencher o quadrado.
f) Compare a área do quadrado que está sobre a hipotenusa (após as movimentações já realizadas) com a soma das áreas dos outros dois quadrados. Descreva o que você observou.
A área do quadrado que está sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos outros dois quadrados. Com isso observei que a hipotenusa ao quadrado é igual à soma dos quados dos catetos.

g) Clique em "Init".
h) Movimente o vértice do ângulo reto (ponto vermelho).
i) Refaça os itens *c*, *d*, *e*, e *f*.
Mesmo após as mudanca no comprimento da hipotenusa e dos catetos, a área do quadiddo que está sobre a hipotenusa continua sendo igual à soma das áreas dos outros quadrados.

j) Considerando que a hipotenusa de um triângulo mede **a**, os catetos medem **b** e **c**, que a área do quadrado é calculada pelo quadrado da medida do seu lado e o que foi observado nos itens anteriores, estabeleça uma relação entre a área do quadrado que está sobre a hipotenusa (**a**) e a soma das áreas dos quadrados formados sobre os catetos (**b** e **c**).
$a^2 = b^2 + c^2$

2. Triangulo acutângulo:

2.1 Abra o site:

b) Observe a figura.
c) Arraste os pontos X e Z até o final das retas.
d) Compare a área do quadrado que está sobre o lado oposto ao ângulo Â (após as movimentações já realizadas) com a soma das áreas dos outros dois quadrados. Descreva o que você observou.

A área do quadrado que está sobre o lado oposto ao ângulo Â é menor do que a soma das áreas dos outros dois quadrados.

e) Volte os pontos X e Z para a posição inicial, movimente o ponto A, mantendo o triângulo acutângulo e refaça os itens **c** e **d**.

Quanto mais agudo for o ângulo Â maior será a soma das área dos outros dois quadrados (pois seus lados aumentam) Independente do tamanho dos lados do triângulo acutângulo a área do quadrado que esta sobre o lado oposto ao ângulo Â será menor que a soma da área dos outros dois.

f) Considerando que o maior lado do triângulo mede **a** e os outros dois lados do triângulo medem **b** e **c**. que a área do quadrado é calculada pelo quadrado da medida do seu lado e o que foi observado nos itens anteriores, estabeleça uma relação entre a área do quadrado que está sobre o maior lado (a) com a soma das áreas dos quadrados formados pelos outros dois lados (b e c).

$a^2 < b^2 + c^2$

2.2 Abra o site: :
http://www.ies.co.jp/math/java/trig/vogen_auto/vogen_auto.html
a) Vá ao final da página.
b) Clique na seta para a direita [>] 3 vezes observando a tela.
c) Clique em "pink" e repita o item anterior.
d) Clique em "blue" e repita o mesmo procedimento do item **c**.
e) Descreva o que você observou no item **d**.

O que sobrou no quadrado que está sobre o segmento AC é igual ao que sobrou no quadrado que está sobre o segmento AB.

f) Clique em Init, a seguir em "green". Movimente o ponto A, mantendo o triângulo acutângulo e refaça os itens **b, c, d** e **e**.

O que sobrou no quadrado que está sobre o segmento AC é igual ao que sobrou no quadro que está sobre o segmento AB

Comentários:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\theta$

3. Triangulo Obtusângulo

3.1 Abra o site:

a) Observe a figura que contém dois triângulos obtusângulos.
b) No primeiro triângulo obtusângulo arraste os pontos X e Y até o final das retas.
c) No segundo triângulo obtusângulo arraste os pontos X e Z até o final das retas. Observe a figura. Arraste os pontos Y e W até o final das retas.
d) Compare a área do quadrado que está sobre o lado BC (após as movimentações já realizadas) com a soma das áreas dos outros dois quadrados. Descreva o que você observou.

A área do quadrado que está sobre o lado oposto ao ângulo Â é maior que a soma das áreas dos outros dois quadrados.

e) Volte os pontos X, Y, Z e W para a posição inicial movimente o ponto A mantendo o triângulo obtusângulo e refaça os itens **c** e **d**.

A área do quadrado formado sobre o lado oposto ao ângulo Â será maior que a soma das áreas dos outros dois quadrado

f) Considerando que o maior lado do triângulo mede **a** e os outros dois lados do triângulo medem **b** e **c**. que a área do quadrado é calculada pelo quadrado da medida do seu lado e o que foi observado nos itens anteriores, estabeleça uma relação entre a área do quadrado que está sobre o maior lado (**a**) com a soma das áreas dos quadrados formados pelos outros dois lados (**b** e **c**).

$a^2 > b^2 + c^2$.

3.2 Retorne ao site:
http://www.ies.co.jp/math/java/trig/yogen_auto/yogen_auto.html e clique green e em "Init".

a) Movimente o vértice A, tornando $B\hat{A}C$ um ângulo obtuso.
b) Clique na seta para a direita $\boxed{>}$ 3 vezes.
c) Clique em "pink" e repita o item anterior.
d) Clique em "blue" e repita o mesmo procedimento do item **b** .
e) Descreva o que você observou no item **d**.

As áreas que sobraram nos outros dois quadrados são iguais.

f) Clique em "Init", a seguir, em "green". Movimente o ponto A, tornando o novamente um ângulo obtuso e refaça os itens **b**, **c**, **d**, **e**.

As áreas que sobraram nos outros dois quadrados são iguais.

Comentários:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\theta$

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE CAMPOS

CEFET CAMPOS Universidade da Tecnologia e do Trabalho

Ministério da Educação

Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

Nome: Alexandre Belém Série: 3
Turma: 301-T

Estas atividades foram elaboradas por Heloiza Rangel, Josie Vasconcellos, Luis Gustavo Soares, Rosana Barcelos, Tatiele Nascimento para um projeto que será desenvolvido no âmbito da disciplina Laboratório de Ensino na Licenciatura em Matemática do CEFET-Campos.

Ficha de atividades – Lei dos cossenos

1. Triangulo retângulo:

a) Abra o site:
http://www.ies.co.jp/math/java/geo/pythafv/pythafv.html
b) Observe as figuras e vá ao final da página.
c) Clique em "Define".
d) Clique na seta para a direita $\boxed{>}$ e observe.
e) Repita o item "d" até preencher o quadrado.
f) Compare a área do quadrado que está sobre a hipotenusa (após as movimentações já realizadas) com a soma das áreas dos outros dois quadrados. Descreva o que você observou.

Que a soma dos dois quadrados que estão sobre os catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

g) Clique em "Init".
h) Movimente o vértice do ângulo reto (ponto vermelho).
i) Refaça os itens *c*, *d*, *e*, e *f*.

Observei o mesmo do item anterior, pois é valido para qualquer triangulo retangulo.

j) Considerando que a hipotenusa de um triângulo mede **a**, os catetos medem **b** e **c**, que a área do quadrado é calculada pelo quadrado da medida do seu lado e o que foi observado nos itens anteriores, estabeleça uma relação entre a área do quadrado que está sobre a hipotenusa (**a**) e a soma das áreas dos quadrados formados sobre os catetos (**b** e **c**).

$a^2 = b^2 + c^2$

2. Triangulo acutângulo:

2.1 Abra o site:

[illegible]

b) Observe a figura.
c) Arraste os pontos X e Z até o final das retas.
d) Compare a área do quadrado que está sobre o lado oposto ao ângulo Â (após as movimentações já realizadas) com a soma das áreas dos outros dois quadrados. Descreva o que você observou.

A soma da área do quadrado oposto a Â não é igual a soma dos outros quadrados, pois o quadrado oposto é menor

e) Volte os pontos X e Z para a posição inicial, movimente o ponto A, mantendo o triângulo acutângulo e refaça os itens **c** e **d**.

O mesmo

f) Considerando que o maior lado do triângulo mede **a** e os outros dois lados do triângulo medem **b** e **c**. que a área do quadrado é calculada pelo quadrado da medida do seu lado e o que foi observado nos itens anteriores, estabeleça uma relação entre a área do quadrado que está sobre o maior lado (a) com a soma das áreas dos quadrados formados pelos outros dois lados (b e c).

$a^2 < b^2 + c^2$

2.2 Abra o site: :
http://www.ies.co.jp/math/java/trig/yogen_auto/yogen_auto.html
a) Vá ao final da página.
b) Clique na seta para a direita $\boxed{>}$ 3 vezes observando a tela.
c) Clique em "pink" e repita o item anterior.
d) Clique em "blue" e repita o mesmo procedimento do item **c**.
e) Descreva o que você observou no item **d**.

A área dos retângulos que sobram são iguais

f) Clique em Init, a seguir em "green". Movimente o ponto A, mantendo o triângulo acutângulo e refaça os itens **b, c, d** e **e**.

o mesmo

Comentários:

3. Triangulo Obtusângulo

3.1 Abra o site:

[illegible]

a) Observe a figura que contém dois triângulos obtusângulos.
b) No primeiro triângulo obtusângulo arraste os pontos X e Y até o final das retas.
c) No segundo triângulo obtusângulo arraste os pontos X e Z até o final das retas. Observe a figura. Arraste os pontos Y e W até o final das retas.
d) Compare a área do quadrado que está sobre o lado BC (após as movimentações já realizadas) com a soma das áreas dos outros dois quadrados. Descreva o que você observou.

É MAIOR DO que a área dos outros dois

e) Volte os pontos X, Y, Z e W para a posição inicial movimente o ponto A mantendo o triângulo obtusângulo e refaça os itens **c** e **d**.

a mesma

f) Considerando que o maior lado do triângulo mede **a** e os outros dois lados do triângulo medem **b** e **c**. que a área do quadrado é calculada pelo quadrado da medida do seu lado e o que foi observado nos itens anteriores, estabeleça uma relação entre a área do quadrado que está sobre o maior lado (**a**) com a soma das áreas dos quadrados formados pelos outros dois lados (**b** e **c**).

3.2 Retorne ao site:
http://www.ies.co.jp/math/java/trig/yogen_auto/yogen_auto.html e clique green e em "Init".

a) Movimente o vértice A, tornando $B\hat{A}C$ um ângulo obtuso.
b) Clique na seta para a direita $\boxed{>}$ 3 vezes.
c) Clique em "pink" e repita o item anterior.
d) Clique em "blue" e repita o mesmo procedimento do item **b** .
e) Descreva o que você observou no item **d**.

f) Clique em "Init", a seguir, em "green". Movimente o ponto A, tornando o novamente um ângulo obtuso e refaça os itens **b**, **c**, **d**, **e**.

Comentários:

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE CAMPOS
CEFET CAMPOS Universidade da Tecnologia e do Trabalho

Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

30/11/07

Nome: Francillaine Magalhães Pecanha Série: 3ª
Turma: 301-T Barcelos.

Estas atividades foram elaboradas por Heloiza Rangel, Josie Vasconcellos, Luis Gustavo Soares, Rosana Barcelos, Tatiele Nascimento para um projeto que será desenvolvido no âmbito da disciplina Laboratório de Ensino na Licenciatura em Matemática do CEFET-Campos.

Ficha de atividades – Lei dos cossenos

1. Triangulo retângulo:

a) Abra o site:
http://www.ies.co.jp/math/java/geo/pythafv/pythafv.html
b) Observe as figuras e vá ao final da página.
c) Clique em "Define".
d) Clique na seta para a direita $\boxed{>}$ e observe.
e) Repita o item "d" até preencher o quadrado.
f) Compare a área do quadrado que está sobre a hipotenusa (após as movimentações já realizadas) com a soma das áreas dos outros dois quadrados. Descreva o que você observou.

A soma das áreas dos quadrados dos catetos é igual a área do quadrado da hipotenusa.

g) Clique em "Init".
h) Movimente o vértice do ângulo reto (ponto vermelho).
i) Refaça os itens *c*, *d*, *e*, e *f*.

Não importa a medida dos ângulos complementares do triângulo retângulo, porque a área da hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados dos catetos.

j) Considerando que a hipotenusa de um triângulo mede **a**, os catetos medem **b** e **c,** que a área do quadrado é calculada pelo quadrado da medida do seu lado e o que foi observado nos itens anteriores, estabeleça uma relação entre a área do quadrado que está sobre a hipotenusa (**a**) e a soma das áreas dos quadrados formados sobre os catetos (**b** e **c**).

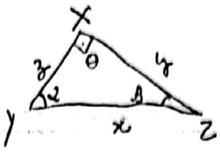
$a^2 = b^2 + c^2$

cálculo de área

2

$A = \frac{1}{2} \cdot z \cdot y \cdot \text{sen}\,\theta.$

2. Triangulo acutângulo:



2.1 Abra o site:

b) Observe a figura.

c) Arraste os pontos X e Z até o final das retas.

d) Compare a área do quadrado que está sobre o lado oposto ao ângulo Â (após as movimentações já realizadas) com a soma das áreas dos outros dois quadrados. Descreva o que você observou.

O quadrado formado é menor que a soma das áreas dos outros quadrados.

e) Volte os pontos X e Z para a posição inicial, movimente o ponto A, mantendo o triângulo acutângulo e refaça os itens **c** e **d**.

Não importa a medida do ângulo A, pois o quadrado formado é sempre a soma das áreas dos outros quadrados.

f) Considerando que o maior lado do triângulo mede **a** e os outros dois lados do triângulo medem **b** e **c**. que a área do quadrado é calculada pelo quadrado da medida do seu lado e o que foi observado nos itens anteriores, estabeleça uma relação entre a área do quadrado que está sobre o maior lado (a) com a soma das áreas dos quadrados formados pelos outros dois lados (b e c).

$a^2 < b^2 + c^2$ (triângulo acutângulo).

2.2 Abra o site: :
http://www.ies.co.jp/math/java/trig/yogen_auto/yogen_auto.html

a) Vá ao final da página.

b) Clique na seta para a direita $\boxed{>}$ 3 vezes observando a tela.

c) Clique em "pink" e repita o item anterior.

d) Clique em "blue" e repita o mesmo procedimento do item **c**.

e) Descreva o que você observou no item **d**.

A área que sobra do menor retângulo → oposto ao ângulo c. é igual a área que falta do retângulo oposto ao ângulo B.

f) Clique em Init, a seguir em "green". Movimente o ponto A, mantendo o triângulo acutângulo e refaça os itens **b, c, d** e **e**.

não importa a medida do ângulo Â, pois a área que sobra do retângulo do menor quadrado é igual a área que falta do retângulo do quadrado oposto ao ângulo B.

Comentários:

$a^2 = b^2 + c^2 - (A_1 + A_2)$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2A_2$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$

$5, 7, 11$

$11^2 — 5^2+7^2$

$121 — 25+49$

$121 > 74$

3. Triangulo Obtusângulo

3.1 Abra o site:

[illegible]

a) Observe a figura que contém dois triângulos obtusângulos.
b) No primeiro triângulo obtusângulo arraste os pontos X e Y até o final das retas.
c) No segundo triângulo obtusângulo arraste os pontos X e Z até o final das retas. Observe a figura. Arraste os pontos Y e W até o final das retas.
d) Compare a área do quadrado que está sobre o lado BC (após as movimentações já realizadas) com a soma das áreas dos outros dois quadrados. Descreva o que você observou.

A área do quadrado formado (lado BC) é maior que a soma das áreas dos outros dois quadrados.

e) Volte os pontos X, Y, Z e W para a posição inicial movimente o ponto A mantendo o triângulo obtusângulo e refaça os itens **c** e **d**.

Quanto mais se aproxima p/ formar do triângulo retângulo menor é a área que sobra do quadrado resultante.

f) Considerando que o maior lado do triângulo mede **a** e os outros dois lados do triângulo medem **b** e **c**. que a área do quadrado é calculada pelo quadrado da medida do seu lado e o que foi observado nos itens anteriores, estabeleça uma relação entre a área do quadrado que está sobre o maior lado (**a**) com a soma das áreas dos quadrados formados pelos outros dois lados (**b** e **c**).

$a^2 > b^2 + c^2$

3.2 Retorne ao site:
http://www.ies.co.jp/math/java/trig/yogen_auto/yogen-auto.html **e clique green** e em "Init".

a) Movimente o vértice A, tornando $B\hat{A}C$ um ângulo obtuso.
b) Clique na seta para a direita $\boxed{>}$ 3 vezes.
c) Clique em "pink" e repita o item anterior.

d) Clique em "blue" e repita o mesmo procedimento do item **b** .
e) Descreva o que você observou no item **d**.

As áreas que sobraram dos dois quadrados são iguais

f) Clique em "Init", a seguir, em "green". Movimente o ponto A, tornando o novamente um ângulo obtuso e refaça os itens **b**, **c**, **d**, **e**.

$a^2 > b^2 + c^2$

$a^2 = b^2 + c^2 + Af_1 + Af_2$

$a^2 = b^2 + c^2 + 2Af_1$

Comentários:

Num triângulo obtusângulo (ABC) cuja m(AB) = c, m(BC) = a, m(AC) = b e m($B\hat{A}C$) = θ, podemos afirmar que:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\theta$.

ANEXO 4: Comentários dos alunos sobre a aula

Comentários:

A aula foi boa, interativa e criativa. Fez com que aprendêssemos mais fácil.

Comentários:

Tanto a aula de sexta quanto a de hj foram muito boa, bem dinâmicas.

Comentários:

A aula foi muito interessante! É só "medir" melhor o tempo, e ficar mais seguro! Fora a isso, foi ótimo! Parabéns e Sucesso!!!

Comentários:

A aula foi interessante pelo fato de nos proporcionar o conhecimento sobre como se chegou ao trauma dos consenos, que nos dias de hoje é muito raro ver um professor fazer.