



CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE CAMPOS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

RELATÓRIO LEAMAT III

INTERPRETAÇÃO DA SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES
LINEARES ATRAVÉS DO CALQUES3D

ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA

INTERPRETAÇÃO DA SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES
LINEARES ATRAVÉS DO CALQUES3D

ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA

DIEGO DE LIMA SANTANA
ÉRICA BARRETO PINTO
JOSELANE DE OLIVEIRA GOMES

Orientadora: Prof. Mylene de
Santos Barreto

CAMPOS DOS GOYTACAZES / RJ
2008.2

DIEGO DE LIMA SANTANA
ÉRICA BARRETO PINTO
JOSELANE DE OLIVEIRA GOMES

RELATÓRIO LEAMAT III

INTERPRETAÇÃO DA SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES ATRAVÉS DO CALQUES3D

ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA

Trabalho apresentado ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Campos como requisito parcial para conclusão da disciplina Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática III do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Prof^ª. Mylane dos Santos Barreto

CAMPOS DOS GOYTACAZES / RJ
2008.2

1) Justificativa

No ensino tradicional, a abordagem utilizada pela maioria dos professores na resolução de sistemas de equações esconde a riqueza geométrica por trás da solução de tais problemas principalmente pela dificuldade de visualização dos alunos quando o problema envolve três dimensões (três equações e três incógnitas).

Existem softwares com plataformas capazes de traçar gráficos e apresentar ao aluno a solução de um sistema de equações com duas incógnitas. Isso se torna fácil visto que os gráficos são bidimensionais. Porém sistemas de equações com três incógnitas exigem uma plataforma tridimensional que permita a manipulação dos gráficos a fim de interpretar resultados algébricos. Esta é a proposta deste trabalho. Usar o software *Calques3D* para obter tais resultados.

O site da 3ª. Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática apresenta um minicurso intitulado "*Calques3D: Um software de Geometria Dinâmica Espacial Gratuito*", de autoria de Humberto José Bortolossi e Cláudia Santos Bastos, cujo objetivo é divulgar o software e partilhar propostas de exercício que possam tirar proveito do mesmo.

O *Calques3D* permite construções de planos, retas, entre outros elementos, a partir de pontos definidos pelo usuário. Possibilita ainda, a manipulação desses elementos em um ambiente tridimensional, bem como a determinação das intersecções de planos e retas.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998, p. 122) reforçam a importância da visualização tridimensional atrelada ao pensamento geométrico:

Situações cotidianas e o exercício de diversas profissões, como engenharia, a bioquímica, a coreografia, arquitetura, a mecânica etc., demandam no indivíduo capacidade de pensar geometricamente. Também cada vez mais indispensáveis que as pessoas desenvolvam a capacidade de observar o espaço tridimensional e de elaborar modos de comunicar-se a respeito dele, pois a imagem é um instrumento de formação essencial no mundo moderno.

Na página 44 dos Parâmetros Curriculares Nacionais, é recomendado o uso do computador atentando às seguintes questões:

- Evidencia para os alunos a importância do papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, permitindo novas estratégias de abordagem de variados problemas;

- Possibilita o desenvolvimento, nos alunos, de um crescente interesse pela realização de projetos e atividades de investigação e exploração como parte fundamental de sua aprendizagem;
- Permite que os alunos construam uma visão mais completa da verdadeira natureza da atividade matemática e desenvolvam atitudes positivas diante de seu estudo
- Como fonte de informação, poderoso recurso para alimentar o processo de ensino e aprendizagem;
- Como auxiliar no processo de construção de conhecimento;
- Como meio para desenvolver autonomia pelo uso de softwares que possibilitem pensar, refletir e criar soluções;
- Como ferramenta para realizar determinadas atividades - uso de planilhas eletrônicas, processadores de texto, banco de dados etc.

2) Objetivos

A atividade aplicada pretendeu desenvolver a interpretação geométrica embutida na solução de sistemas de equações com três incógnitas através do ambiente tridimensional virtual do software *Calques3D*. A proposta é que o aluno compare a solução algébrica com a solução geométrica do sistema.

3) Metodologia ou Atividades desenvolvidas

Durante as aulas do LEMAT II foi planejado o roteiro de aula e depois de prontas as atividades foram aplicadas ao grupo de alunos que compunham a turma do LEAMAT II. O objetivo foi verificar a eficiência dos métodos de abordagem do conteúdo e dos problemas propostos.

Na aplicação cada aluno recebeu uma folha contendo os elementos da atividade. Tal atividade encontra-se no anexo. Durante a aula foi utilizado um projetor multimídia para visualização das construções feitas no software *Calques3D*.

A partir de observações e sugestões dos alunos e dos professores do LEAMAT que acompanharam e participaram da aplicação da atividade, foram feitas alterações no enunciado de algumas questões.

A atividade proposta nesse trabalho pretende que o aluno compreenda a composição de um sistema linear bem como saiba interpretar a sua solução.

Inicialmente são dados três conjuntos, com três pontos cada um, cada conjunto de pontos determina um plano. É perguntado se tais planos intersectam-se e se isso ocorre, o que representa essa intersecção, um plano, reta ou ponto.

O objetivo é que o aluno entenda que três pontos determinam um plano e a intersecção existirá se tais planos têm pontos comuns.

Responder tal pergunta algebricamente significa determinar a equação dos planos através das coordenadas dos três pontos e resolver um sistema linear de três equações com três incógnitas.

Os alunos devem resolver os sistemas algebricamente e verificarem através do software *Calques3D* a representação de tal solução.

A seguir estão exemplos das atividades propostas.

Item 1

Um plano α é definido pelos pontos A (0,0,2); B (1,1,1) e C (4,0,0).

Um plano β é definido pelos pontos D (0,1,0); A (0,0,2) e E (2,2,0).

Um plano γ é definido pelos pontos B (1,1,1); E (2,2,0) e F (0,2,3).

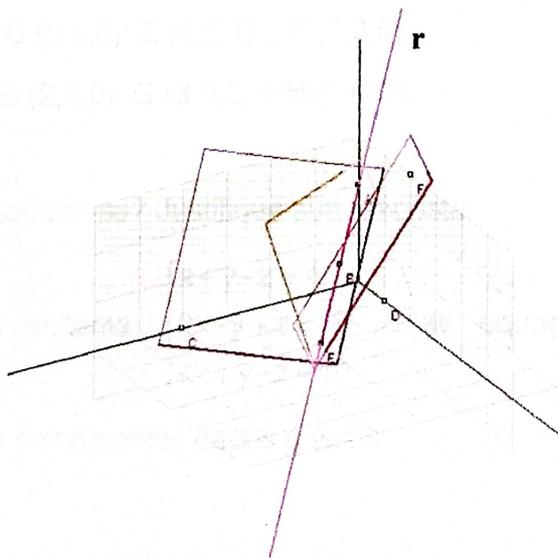
Os planos α , β e γ intersectam-se? Justifique sua resposta.

A solução algébrica do sistema
$$\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ -x + 2y + z = 2 \\ 3x - y + 2z = 4 \end{cases}$$
 cujas equações

representam os planos determinados pelos pontos dados é a reta r de equação

paramétrica
$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}$$
 com $t \in \mathbb{R}$.

A figura ao lado apresenta a reta r que é a intersecção dos planos α , β e γ . Tal construção foi feita no software *Calques3D*.



Item 2

Um plano α é definido pelos pontos A (0,0,2); B (6,0,0) e C (4,1,0).

Um plano β é definido pelos pontos D (2,0,0); E (1,1,1) e F (5,1,0).

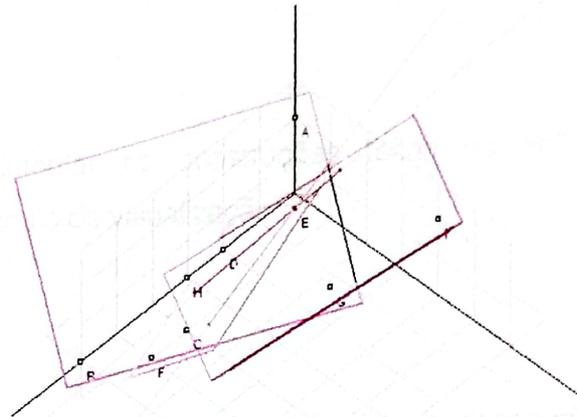
Um plano γ é definido pelos pontos G (2,3,1); H (3,0,0) e I (0,4,2).

Os planos α , β e γ intersectam-se? Justifique sua resposta.

A solução algébrica do sistema
$$\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ x-3y+4z=2 \\ 2x-y+5z=6 \end{cases}$$
 cujas equações

representam os planos determinados pelos pontos dados é o ponto E de coordenadas (1, 1, 1).

A figura ao lado apresenta o ponto E que é a intersecção dos planos α , β e γ . Tal construção foi feita no software *Calques3D*.



Item 3

Um plano α é definido pelos pontos A (5,0,1); B (2,2,0) e C (0,4,0).

Um plano β é definido pelos pontos D (0,1,0); E (0,2,1) e F (1,3,0).

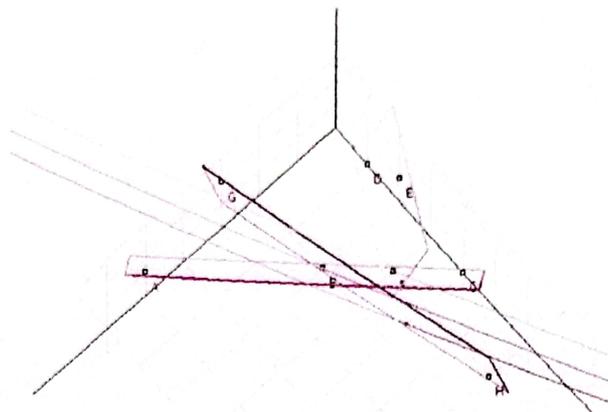
Um plano γ é definido pelos pontos B (2,2,0); G (3,0,2) e H (1,6,0).

Os planos α , β e γ intersectam-se? Justifique sua resposta.

A solução algébrica do sistema
$$\begin{cases} x+y-z=4 \\ 2x-y+z=-1 \\ 4x+y-z=10 \end{cases}$$
 cujas equações

representam os planos determinados pelos pontos dados é vazia.

A figura ao lado apresenta os planos α , β e γ . Não existe intersecção entre os três planos. Tal construção foi feita no software *Calques3D*.



O usuário pode movimentar as construções feitas no software *Calques3D* para obter o melhor ângulo de visualização.

4) Relato da atividade

A atividade abordada neste relatório foi elaborada e desenvolvida durante três semestres, como requisito para conclusão da disciplina Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Educação Matemática (LEAMAT) do curso de Licenciatura em Matemática do CEFET Campos.

No segundo semestre da disciplina a atividade foi aplicada ao grupo de professores em formação do LEAMAT para testar a eficácia de sua abordagem e métodos. Algumas sugestões foram feitas e acatadas para o melhoramento da qualidade da atividade em questão.

No terceiro semestre da disciplina, a atividade desenvolvida ao longo do LEAMAT foi aplicada a uma turma do 3º. ano do Ensino Médio como parte de um curso de Ação e Extensão oferecido pela Diretoria de Trabalho e Extensão do CEFET Campos sob o título "Estudo de funções e sistemas lineares". A divulgação do curso foi feita pelos professores em formação que ministraram o curso e o público alvo foram alunos do 3º. ano do Ensino Médio. A aplicação da atividade contou com a participação de quatorze alunos e teve duração de 2h/a.

Fig. 1 - Cartaz de divulgação do curso



CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE CAMPOS
 Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense

Ministério da Educação
 Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

LABORATÓRIO DE ENSINO E APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA

CURSO - ESTUDO DE FUNÇÕES E SISTEMAS LINEARES

| GRUPO | ASSUNTO | DATA | HORA | LOCAL | ASSUNTO |
|-------|-----------|-----------------------|----------------|------------|-------------------------|
| A1 | CÁLCULO | 13/10 - segunda-feira | 13:20 às 15:00 | SALA F 201 | FUNÇÕES QUADRÁTICAS |
| B1 | CÁLCULO | 14/10 - terça-feira | 13:20 às 15:00 | SALA F 201 | FUNÇÕES EXPONENCIAIS |
| B2 | CÁLCULO | 20/10 - segunda-feira | 13:20 às 15:00 | SALA F 201 | SISTEMAS LINEARES 2 x 2 |
| A2 | GEOMETRIA | 21/10 - terça-feira | 13:20 às 15:00 | SALA F 201 | SISTEMAS LINEARES 3 x 3 |
| A2 | CÁLCULO | 23/10 - quinta-feira | 13:20 às 15:00 | SALA A 225 | LOGARITMOS |

MINISTRANTES: LICENCIANDOS DE MATEMÁTICA DO CEFET CAMPOS

PROFESSORES ORIENTADORES: PROF.^a CARLA ANTUNES FONTES
 PROF.^a MYLANE BARRETO
 PROF SALVADOR TAVARES

VAGAS LIMITADAS

Como o software, *Calques3D*, utilizado para resolução da atividade, era desconhecido pelos alunos a aula iniciou-se com a apresentação do software e demonstração dos recursos que ele dispõe. Os alunos aprenderam os passos para traçar pontos, planos e verificar a equação de planos, ferramentas do software que seriam necessárias para resolução da atividade.

Fig. 2 - Tela inicial do software *Calques3D*

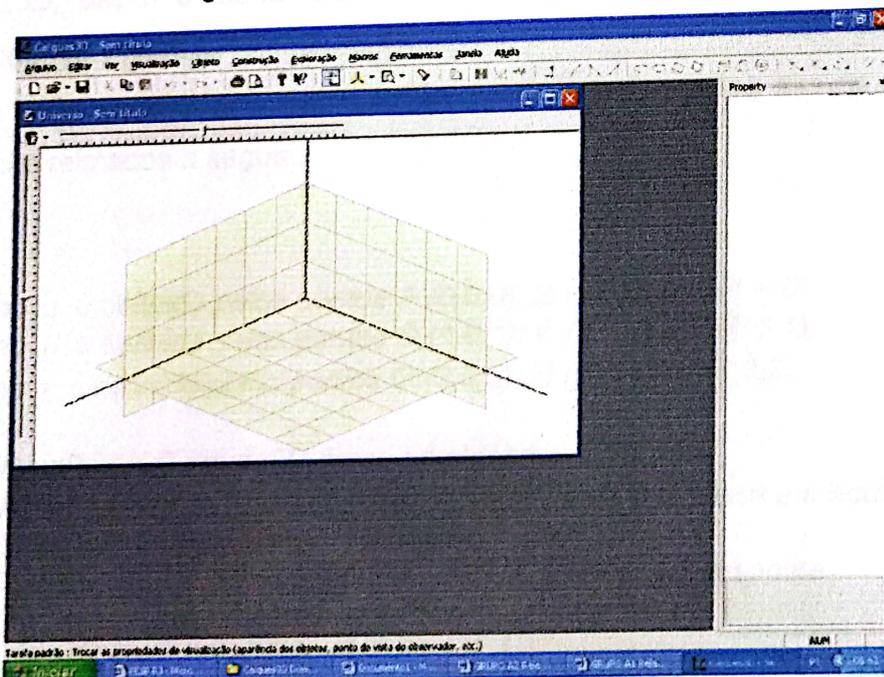
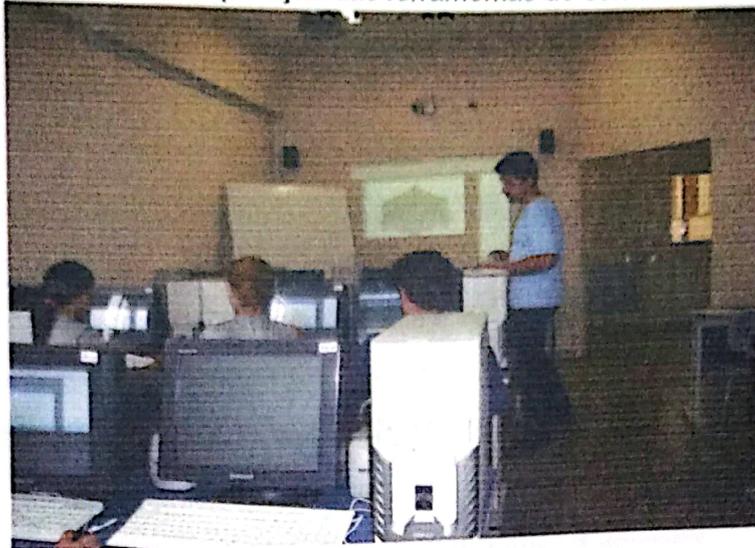


Foto 1 - Explicação das ferramentas do software



Cada aluno recebeu uma folha com a atividade proposta. Depois da apresentação do software os alunos iniciaram a resolução das atividades.

Em todas as questões da atividade foram dadas as coordenadas de três pontos que determinam os planos α , β e γ . O aluno deveria responder se tais planos tem pontos de intersecção. O objetivo era que o aluno determina-se algebricamente a equação dos planos usando as coordenadas dos três pontos e resolvesse o sistema formado pelas equações dos três planos. Se esse sistema for possível significa que os planos tem pontos de intersecção. Paralelamente a resolução algébrica a atividade solicita que os planos sejam traçados no software *Calques3D*, assim o aluno terá o recurso visual para confirmar se existe a intersecção dos planos.

Os comentários e conclusões apresentados pelos alunos durante a aula estão relatados a seguir.

1)

Um plano α é definido pelos pontos $A(0,0,0)$; $B(2,0,0)$ e $C(1,4,0)$.

Um plano β é definido pelos pontos $D(1,0,1)$; $E(1,2,1)$ e $F(0,3,1)$.

Um plano γ é definido pelos pontos $G(3,0,3)$; $H(2,2,3)$ e $I(1,3,3)$.

- a) No software *Calques3D*, trace os planos α , β e γ .
- b) Determine, algebricamente, a equação dos planos. Confira a equação usando as ferramentas do software *Calques3D*.
- c) Os planos α , β e γ intersectam-se? Justifique sua resposta.

Inicialmente alguns alunos apresentaram dificuldades para traçar os pontos no software. Os professores em formação sanaram as dificuldades dos alunos através de uma explicação oral.

A determinação das equações dos planos ocorreu através da visualização dos planos traçados no *Calques3D*, os alunos perceberam que os planos são paralelos ao plano horizontal xy e intersectam o eixo z nos valores 0, 1 e 3, portanto as equações são $z = 0$, $z = 1$ e $z = 3$, respectivamente.

Ao traçar os planos no *Calques3D* os alunos verificaram que eram paralelos e, portanto não teriam pontos de intersecção.

Fig. 3 – Respostas de dois alunos para a primeira questão

1)

Um plano α é definido pelos pontos A (0,0,0); B (2,0,0) e C (1,4,0). $x = 0$
 Um plano β é definido pelos pontos D (1,0,1); E (1,2,1) e F (0,3,1). $x = 1$
 Um plano γ é definido pelos pontos G (3,0,3); H (2,2,3) e I (1,3,3). $x = 3$

a) No software *Calques3D*, trace os planos α , β e γ .
 b) Determine, algebricamente, a equação dos planos. Confira a equação usando as ferramentas do software *Calques3D*.
 c) Os planos α , β e γ intersectam-se? Justifique sua resposta.
res: com base nos planos marcados no programa, eles não tem pontos em comum

1)

Um plano α é definido pelos pontos A (0,0,0); B (2,0,0) e C (1,4,0).
 Um plano β é definido pelos pontos D (1,0,1); E (1,2,1) e F (0,3,1).
 Um plano γ é definido pelos pontos G (3,0,3); H (2,2,3) e I (1,3,3).

a) No software *Calques3D*, trace os planos α , β e γ .
 b) Determine, algebricamente, a equação dos planos. Confira a equação usando as ferramentas do software *Calques3D*.
 c) Os planos α , β e γ intersectam-se? Justifique sua resposta.
esse plano não se encontram, pois não apresentam

2) ponto em comum

2)

Um plano α é definido pelos pontos A (0,3,0); B (1,0,1) e C (0,0,1).
 Um plano β é definido pelos pontos D (0,0,0); E (2,3,-1) e F (2,0,0).
 Um plano γ é definido pelos pontos G (0,0,-1); H (3,0,-1) e I (-1,3,-2).

- a) No software *Calques3D*, trace os planos α , β e γ .
 b) Determine, algebricamente, a equação dos planos. Confira a equação usando as ferramentas do software *Calques3D*.
 c) Os planos α , β e γ intersectam-se? Justifique sua resposta.

Cumprindo a solicitação do item a os alunos traçaram os planos. Alguns apresentaram dificuldades na marcação dos pontos com coordenadas negativas.

Os professores em formação apresentaram aos alunos um método, usando determinantes, que determina a equação de um plano dadas as coordenadas de três pontos desse plano.

Visualizando as imagens dos planos traçados no *Calques3D* os alunos afirmaram que os planos não intersectam-se pois são paralelos.

Fig. 4 – Respostas de um aluno para a segunda questão

2)

Um plano α é definido pelos pontos A (0,3,0); B (1,0,1) e C (0,0,1).
 Um plano β é definido pelos pontos D (0,0,0); E (2,3,-1) e F (2,0,0).
 Um plano γ é definido pelos pontos G (0,0,-1); H (3,0,-1) e I (-1,3,-2).

a) No software Calques3D, trace os planos α , β e γ .
 b) Determine, algebricamente, a equação dos planos. Confira a equação usando as ferramentas do software Calques3D.
 c) Os planos α , β e γ intersectam-se? Justifique sua resposta.

res: Os planos não têm pontos em comum.

2-b) A(0,3,0) B(1,0,1) C(0,0,1) (x,y,z) no programa: 2

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 0-0 & 3-0 & 0-1 \\ 1-0 & 0-0 & 0-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$0x + \frac{1}{3}y + 1z = 1$$

$$\frac{1}{3}y + z = 1$$

$$\frac{z}{3} + \frac{3z}{3} = \frac{3}{3}$$

$$y + 3z = 3$$

$$0 = -y - 3z + 3$$

$$-y - 3z = -3$$

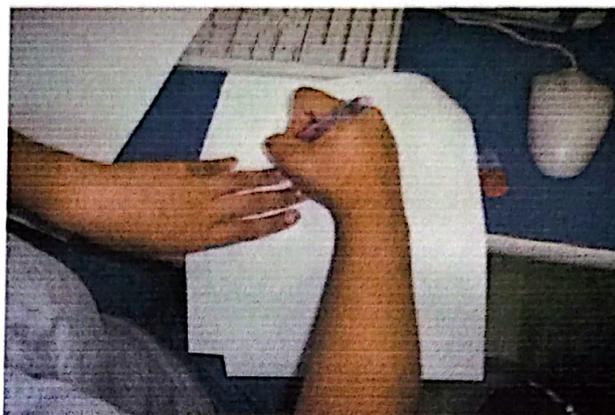
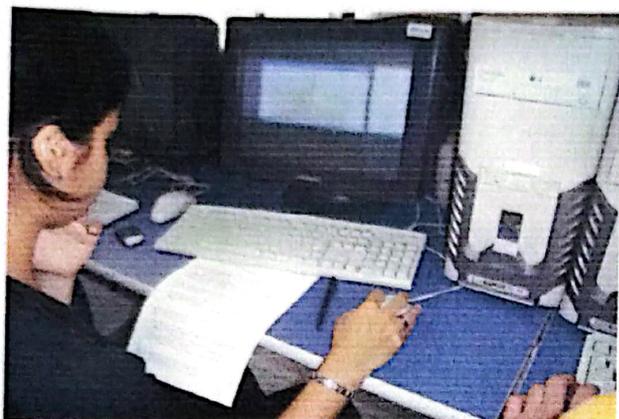
G(0,0,-1) H(3,0,-1) I(-1,3,-2)

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z+1 \\ 3-0 & 0-0 & -1-1 \\ -1-0 & 3-0 & -2+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z+1 & x & y \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$0 + 0 - 3y + 0 + 0 - 9z + 9 = 0$$

$$3y + 9z = -9$$

Foto 2 e 3- Alunos resolvendo as questões algebricamente e geometricamente



3)

Um plano α é definido pelos pontos A (-1, 1, 0); B (0, 5, 3) e C (4, 1, 0).

Um plano β é definido pelos pontos D (3, 1, 3); E (2, 5, 0) e F (0, 5, 0).

Um plano γ é definido pelos pontos G (1, 0, 0); H (1, 0, 3) e I (1, 6, 0).

- No software Calques3D, trace os planos α , β e γ .
- Determine, algebricamente, a equação dos planos. Confira a equação usando as ferramentas do software Calques3D.
- Os planos α , β e γ intersectam-se? Justifique sua resposta.
- Usando o software Calques3D determine a intersecção dos planos. É um ponto, reta ou plano? Qual sua coordenada ou equação?
- Compare os resultados encontrados nos itens d e c. Qual sua conclusão?

Usando determinantes, são encontradas as equações dos planos α , β e γ

$$\alpha: 3y - 4z = 3$$

$$\beta: 3y + 4z = 15$$

$$\gamma: x = 1.$$

Os alunos resolveram o sistema formado pelas três equações. Concluíram que se tratava de um sistema possível e determinado tendo como solução o ponto de coordenadas $\left(1, 3, \frac{3}{2}\right)$. Através das ferramentas do software Calques3D verificaram que a solução encontrada no sistema representa a intersecção dos planos α , β e γ .

Fig. 5 – Respostas de um aluno para a terceira questão

$$3). \alpha: (-1, 1, 0); (0, 5, 3), (4, 1, 0)$$

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-5 & z-3 \\ -1-0 & 1-5 & 0-3 \\ 4-0 & 1-5 & 0-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y-5 & z-3 \\ -1 & -4 & -3 \\ 4 & -4 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y-5 \\ -1 & -4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}$$

$$15y - 20z = 15$$

$$D(3, 1, 3) \quad E(2, 5, 0) \quad F(0, 5, 0)$$

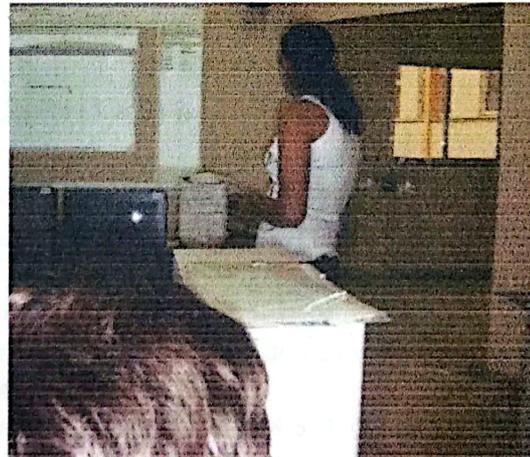
$$\begin{vmatrix} x-0 & y-5 & z-0 \\ 3-0 & 1-5 & 3-0 \\ 2-0 & 5-5 & 0-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y-5 & z \\ 3 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y-5 \\ 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$-8z + 0 + 0 - 0 - 6y + 30 + 0$$

$$-8z - 6y + 30 = 0$$

$$\boxed{-8z - 6y = -30}$$

Foto 4 e 5 - Alguns momentos da aula



4)

Um plano α é definido pelos pontos A (-1,1,0); B (0,5,3) e C (4,1,0).

Um plano β é definido pelos pontos D (3,1,3); E (2,5,0) e F (0,5,0).

Um plano γ é definido pelos pontos G (4,3,0); H (4,3,3) e I (0,3,0).

- No software Calques3D, trace os planos α , β e γ .
- Determine, algebricamente, a equação dos planos. Confira a equação usando as ferramentas do software Calques3D.
- Os planos α , β e γ intersectam-se? Justifique sua resposta.
- Usando o software Calques3D determine a intersecção dos planos. É um ponto, reta ou plano? Qual sua coordenada ou equação?
- Compare os resultados encontrados nos itens d e c. Qual sua conclusão?

Usando determinantes, são encontradas as equações dos planos α , β e γ

$$\alpha : 3y - 4z = 3$$

$$\beta : 3y + 4z = 15$$

$$\gamma : y = 3.$$

Os alunos resolveram o sistema formado pelas três equações. Concluíram que se tratava de um sistema possível e indeterminado tendo como solução o conjunto de pontos com coordenadas $\left(x, 3, \frac{3}{2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$. Através das ferramentas do software *Calques3D* verificaram que a solução encontrada no sistema representa uma reta que é a intersecção dos planos α , β e γ .

5)

Um plano α é definido pelos pontos A (5,0,3); B (0,1,0) e C (0,5,0).

Um plano β é definido pelos pontos D (4,0,0); E (2,1,0) e F (2,6,3).

Um plano γ é definido pelos pontos G (1,1,2); H (1,4,0) e I (2,6,0).

- No software Calques3D, trace os planos α , β e γ .
- Determine, algebricamente, a equação dos planos. Confira a equação usando as ferramentas do software Calques3D.
- Os planos α , β e γ intersectam-se? Justifique sua resposta.
- Usando o software Calques3D determine a intersecção dos planos. É um ponto, reta ou plano? Qual sua coordenada ou equação?
- Compare os resultados encontrados nos itens d e c. Qual sua conclusão?

Como os alunos não conheciam o software utilizado o tempo não foi suficiente para resolver esta questão.

5) Conclusão

A aplicação da atividade teve duração de uma hora e quarenta minutos.

Os alunos foram participativos e se mostraram interessados.

A aplicação da atividade possibilitou concluir que os alunos apresentam dificuldades na marcação de pontos no espaço.

O trabalho com o software *Calques3D* despertou a curiosidade e motivou os alunos na resolução dos exercícios.

A atividade cumpriu seu objetivo que era salientar a interpretação geométrica embutida na solução de sistemas de equações com três incógnitas através do ambiente tridimensional virtual do software *Calques3D*.

6) Referências

FONSECA, Mateus Gianni. *A tecnologia em favor da educação*. <www.somatematica.com.br/artigos.php?pag=2> Acesso em 14/10/2007.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática - 3º. e 4º. ciclos*. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em <<http://portal.mec.gov.br/seb/index.php?option=content&task=view&id=264&Itemid=254>> Acesso em 28/02/2008

BAIRRAL, Marcelo Almeida. *Semelhança na 7ª. série: algumas dificuldades*. Boletim Gepem. Rio de Janeiro. Volume 34. p.35 - 64. 1998.

KALEFF, Ana Maria M. R. *Construindo o conceito de simetria em relação a uma reta: do jardim de infância ao ensino superior*. Boletim Gepem. Rio de Janeiro. Volume 35. p. 42 - 56. 2000.

LOPES, Antonio José. *Ângulos: um ângulo é mais do que duas semi-retas de mesma origem*. <www.tvebrasil.com.br/salto/boletins2001/gq/gqtxt3.htm>. Acesso em 06/11/07>.

OLIVEIRA, Leila Barbosa. MOURA, Anna Regina Lanner de. *A medida, a busca incessante do regular sob o olhar da criança*. Revista de Educação Matemática.

PAVANELLO, Regina Maria. *Por que ensinar/aprender geometria?* <www.sbempaulista.org.br>. Acesso em 26/10/2007.

<<http://www.mat.ufg.br/bienal/2006/mini/claudia.bortolossi.pdf>>, Acesso em 24/02/2008

<<http://www.somatematica.com.br/>>, Acesso em 27/02/2008