INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE
Campus Campos-Centro

Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Ministério da Educação
GOVERNO FEDERAL BRASIL
PAÍS RICO É PAÍS SEM POBREZA

RELATÓRIO LEAMAT III

ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA

RELAÇÃO ENTRE CIRCUNFERÊNCIAS E OS PONTOS NOTÁVEIS: INCENTRO E CIRCUNCENTRO

JOSUÉ RANGEL DE SIQUEIRA
JULIANA BERNARDO PEPE
MAYCK GOMES MARVILA

CAMPOS DOS GOYTACAZES / RJ
2013.2

JOSUÉ RANGEL DE SIQUEIRA
JULIANA BERNARDO PEPE
MAYCK GOMES MARVILA

RELATÓRIO LEAMAT III

RELAÇÃO ENTRE CIRCUNFERÊNCIAS E OS PONTOS NOTÁVEIS: INCENTRO E CIRCUNCENTRO

ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA

Trabalho apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, *campus* Campos-Centro, como requisito parcial para conclusão da disciplina Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática III do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Profª MSc. Mylane dos Santos Barreto

CAMPOS DOS GOYTACAZES / RJ
2013.2

Sumário

Introdução

A sequência didática elaborada e aplicada ao longo dos três semestres do LEAMAT trata de dois dos pontos notáveis de um triângulo: incentro e circuncentro, enfatizando as relações com circunferências. O estudo de tais pontos é importante, pois é uma oportunidade de explicar aos alunos alguns conceitos da Geometria, tais como bissetriz e mediatriz. Além disso, permite que o aluno manuseie instrumentos de construções geométricas e aplique algumas propriedades destes pontos notáveis.

Em relação à importância do uso destes materiais e da aplicação de propriedades de figuras, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) destacam:

> O trabalho com espaço e forma pressupõe que o professor de matemática explore situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, como visualização e aplicação de propriedades de figuras, além da construção de outras relações (BRASIL, 1998, p.51).

Além disso,

> Também neste quarto ciclo, os problemas de Geometria vão fazer com que o aluno tenha seus primeiros contatos com a necessidade e as exigências estabelecidas por um raciocínio dedutivo. Isso não significa fazer um estudo absolutamente formal e axiomático, da Geometria (BRASIL, 1998, p.86).

Os PCN ainda apresentam como conceitos e procedimentos para o quarto ciclo do Ensino Fundamental, no ramo do espaço e forma a: "identificação e construção das alturas, bissetrizes, medianas e mediatrizes de um triângulo, utilizando régua e compasso" (BRASIL, 1998, p. 92).

Assim, foi elaborada uma sequência didática visando levar o aluno a realizar investigações na busca de pontos comuns entre as bissetrizes e as mediatrizes de triângulos.

1) Objetivos

Levar o aluno a utilizar instrumentos geométricos para construir o conceito de bissetriz e mediatriz, suas propriedades e suas relações com circunferências inscritas e circunscritas aos triângulos.

2) Atividades Desenvolvidas

2.1) Elaboração da Atividade

A sequência didática foi elaborada tendo em vista ser algo prático, de modo que todos os alunos pudessem participar e construir o conhecimento individualmente.

A atividade começa com um desafio cuja finalidade é estimular os alunos a participarem da aula, já que a resolução do mesmo só será possível no final da sequência, após a resolução das questões.

A seguir, será apresentado o conceito da bissetriz e da mediatriz, de modo que os alunos participem da construção desses entes geométricos e observem as propriedades relacionadas aos mesmos.

O *software* Geogebra será utilizado para generalizar as hipóteses observadas.

Na próxima etapa os alunos devem construir as três bissetrizes internas de um triângulo dado e perceberem que estas se intersectam num único ponto, o qual recebe o nome de incentro, que é o centro de uma circunferência inscrita ao triângulo.

Logo em seguida, os alunos devem construir as três mediatrizes de outro triângulo e percebem que estas se intersectam num único ponto, o qual recebe o nome de circuncentro, que é o centro de uma circunferência circunscrita ao triângulo.

Ao final da construção de cada um destes pontos notáveis, um professor pesquisador irá utilizar o *software* Geogebra com o objetivo de levar o aluno a perceber que, em qualquer triângulo, o incentro e o circuncentro serão sempre os centros da circunferência inscrita e circunscrita ao triângulo, respectivamente.

A atividade se encerra com o aluno retornando ao desafio inicial e tentando resolvê-lo.

2.2) Relato da aplicação da atividade na turma do LEAMAT II

A atividade foi aplicada na turma do LEAMAT II para as professoras e alunas presentes. Elas não tiveram dificuldade na resolução da atividade, pois os conceitos abordados eram conhecidos por todas.

A aula começou com a entrega das apostilas com as atividades e dos instrumentos geométricos necessários para as construções propostas, ou seja, compasso e par de esquadros.

Foi elogiada a utilização de recurso digital e do *software* Geogebra para visualização e confirmação dos conceitos e das propriedades da bissetriz, da mediatriz, do incentro e do circuncentro.

Houve unanimidade na aprovação e recomendação da apresentação do trabalho, salvo algumas sugestões de alterações e acréscimos, tais como: correções de formatação e escrita de alguns enunciados, orientações quanto à algumas conclusões discutidas e a utilização do *software* Geogebra também para análise e discussão do desafio.

2.3) Relato da aplicação da atividade para a turma regular

A sequência didática foi aplicada no dia 11 de fevereiro de 2014, para 36 alunos de uma turma do 1º. ano do Ensino Médio de uma escola Federal de Campos dos Goytacazes.

A aula iniciou-se com a apresentação dos professores em formação, a distribuição da apostila e dos instrumentos geométricos necessários para realização das construções propostas nas atividades.

Em seguida, foram discutidas formas para solucionar o desafio que era descobrir a posição correta do centro de uma circunferência dada.

Todos conseguiram construir uma circunferência qualquer e marcar seu centro. Porém, tratando-se da circunferência dada, poucos foram os alunos que pensaram e expressaram uma forma de resolver o desafio.

Em seguida, foi apresentada a definição de bissetriz e, com o auxílio do *software* Geogebra, mostrou-se que para qualquer ângulo, a bissetriz é sempre uma semirreta com origem no vértice do ângulo que o divide em dois ângulos congruentes.

Ficando clara a definição, um professor em formação apresentou o passo a passo da construção de uma bissetriz, utilizando instrumentos geométricos adaptados para o quadro branco (Figura 1).

Figura 1 - Construção de uma bissetriz com a utilização de instrumentos geométricos

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Posteriormente, outro professor em formação, conferiu com os alunos a veracidade da propriedade das bissetrizes utilizando tanto os instrumentos geométricos, quanto o *software* Geogebra. Assim, os alunos puderam concluir que qualquer ponto de uma bissetriz é equidistante aos lados do ângulo.

Após, definiu-se e verificou-se, com o auxílio do *software* Geogebra, que a mediatriz é uma reta perpendicular que passa pelo ponto médio de um segmento dado.

Prosseguindo com a sequência didática, um professor em formação apresentou o passo a passo da construção de uma mediatriz de um segmento dado utilizando instrumentos geométricos.

Durante as construções da bissetriz e da mediatriz, tanto os professores em formação quanto a professora orientadora foram de carteira em carteira para auxiliar os alunos, pois estes tiveram dificuldade em alguns momentos.

Em seguida, foi feita uma discussão sobre a propriedade das mediatrizes explorando as construções com os instrumentos geométricos e com o *software* Geogebra. Com isso, os alunos perceberam que qualquer ponto da mediatriz é equidistante aos extremos do segmento dado.

Antes de rever o desafio, os alunos resolveram, junto com os professores em formação, duas questões. Na primeira os alunos construíram as bissetrizes internas de um triângulo, verificaram que as três intersectavam-se em um único ponto e que a distância desse ponto aos lados do triângulo era igual.

Os alunos concluíram, que existe uma relação entre a circunferência com centro no ponto de intersecção e o triângulo e que tal circunferência está inscrita no triângulo (Figura 2). Um professor em formação explicou que este ponto é chamado de incentro e mostrou, por meio do *software* Geogebra que esta relação estará presente em qualquer triângulo.

Figura 2 - Respostas de alguns alunos

b)Trace um segmento perpendicular a AC, passando por O, um segmento perpendicular a AB, passando por O e um segmento perpendicular a BC passando por O. Qual a relação entre as medidas destes segmentos? A medida dela é a mesma.

A medida de AR = AP / CR = CQ e BP = BQ são iguais

c) Construa uma circunferência com centro no ponto O e raio igual a medida dos segmentos perpendiculares traçados no item b. Qual a relação entre essa circunferência e o triângulo ABC?

A circunferência se [illegible] perfeitamente dentro do triângulo

A circunferência está inscrita no triângulo, e seu ponto de [illegible] chama-se incentro, a circunferência tangencia o triângulo.

b)Trace um segmento perpendicular a AC, passando por O, um segmento perpendicular a AB, passando por O e um segmento perpendicular a BC passando por O. Qual a relação entre as medidas destes segmentos?

[illegible]

c) Construa uma circunferência com centro no ponto O e raio igual a medida dos segmentos perpendiculares traçados no item b. Qual a relação entre essa circunferência e o triângulo ABC?

[illegible]

Fonte: Protocolo de pesquisa

Na segunda questão os alunos construíram as três mediatrizes de um triângulo, e perceberam que intersectam-se num único ponto, que é o centro de uma circunferência de raio igual a distância deste ponto a qualquer vértice do triângulo.

Sem dificuldades, os alunos perceberam que a circunferência estava circunscrita ao triângulo e seu centro coincidia com a intersecção das mediatrizes (Figura 3). Um professor em formação explicou que este ponto é chamado de circuncentro e mostrou, por meio do *software* Geogebra que esta relação ocorre em qualquer triângulo.

Figura 3 - Respostas de alguns alunos

b) Use o compasso para medir a distância de O até A, de O até B e de O até C. O que você observa? As medidas são todas iguais.

c) Construa uma circunferência com centro no ponto O e raio igual ao segmento OB. Qual a relação entre essa circunferência e o triângulo ABC? A circunferência toca nos vértices do triângulo.

---

b) Use o compasso para medir a distância de O até A, de O até B e de O até C. O que você observa? A distância é a mesma

c) Construa uma circunferência com centro no ponto O e raio igual ao segmento OB. Qual a relação entre essa circunferência e o triângulo ABC? [illegible] 3 vértices do triângulo. [illegible] → circuncentro

---

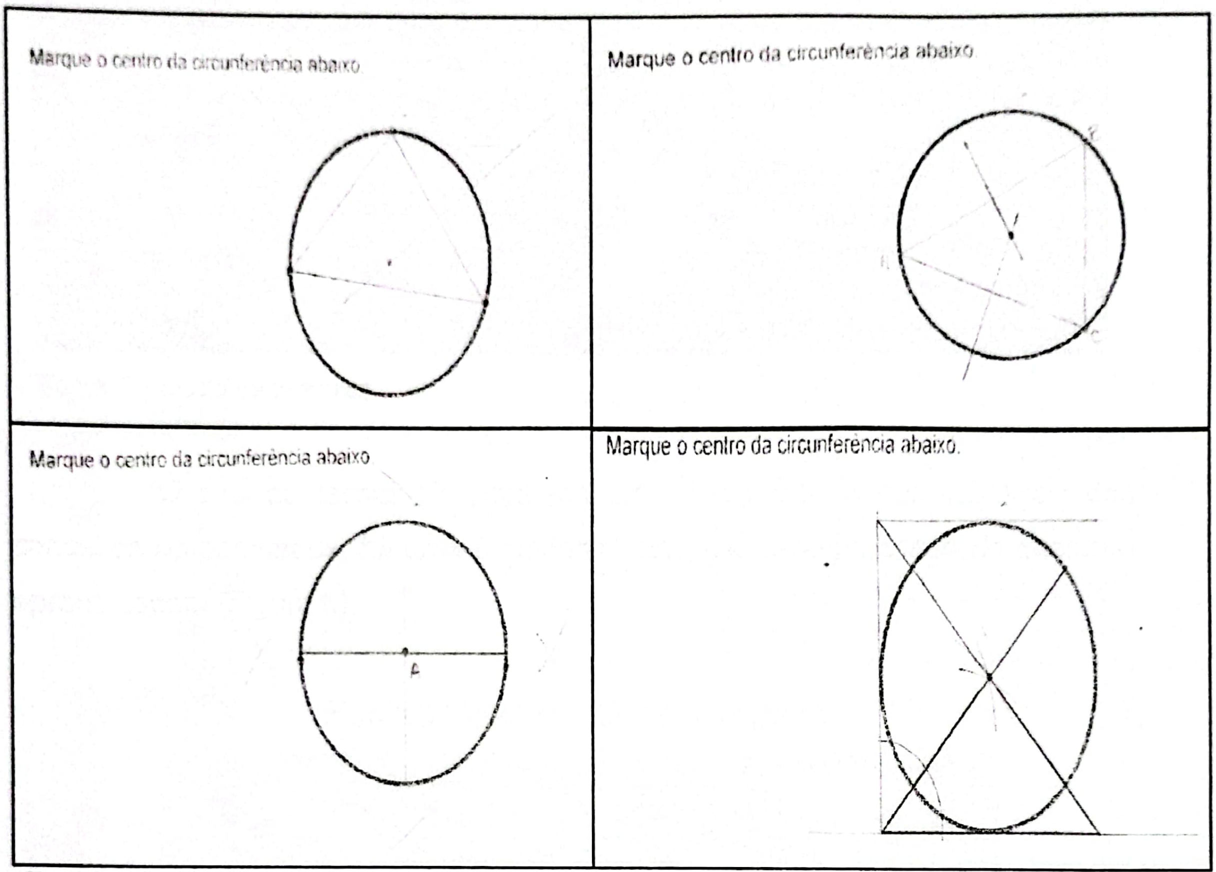
b) Use o compasso para medir a distância de O até A, de O até B e de O até C. O que você observa? [illegible]

c) Construa uma circunferência com centro no ponto O e raio igual ao segmento OB. Qual a relação entre essa circunferência e o triângulo ABC? A [illegible]

Fonte: protocolo de pesquisa

Após a resolução de toda a atividade, os professores em formação questionaram os alunos em relação ao desafio lançado no início da aula. Alguns alunos disseram que tinham que marcar três pontos na circunferência, construir o triângulo com vértice nesses pontos e em seguida, construir as mediatrizes do triângulo que assim encontrariam o centro da circunferência. Outros tiveram dúvida se deveriam construir as mediatrizes ou bissetrizes do triângulo. Algumas das resoluções do desafio por parte dos alunos estão apresentadas na figura 4, a seguir.

Figura 4 - Resoluções do desafio



Fonte: protocolo de pesquisa

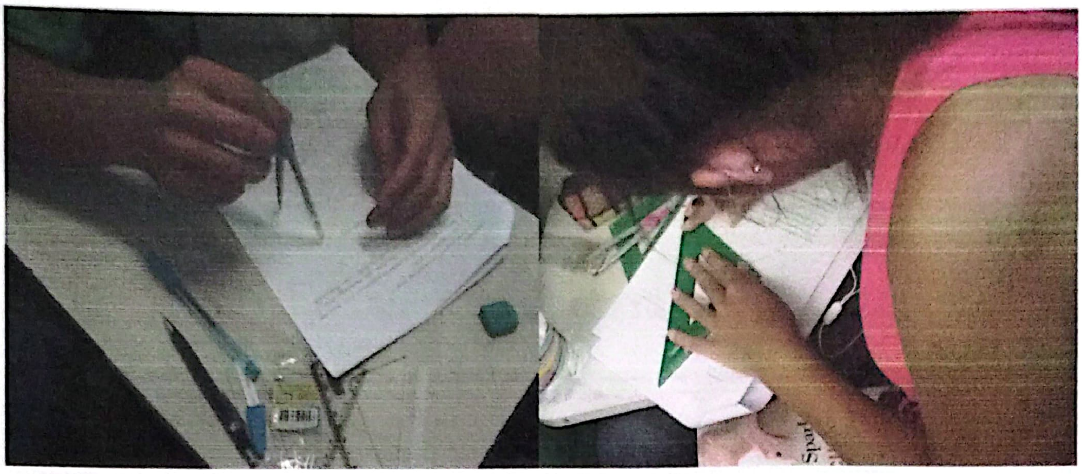
Foi notável e estimulante a participação dos alunos no decorrer da sequência didática.

No final, pediu-se que os alunos fizessem uma avaliação da aula, a qual teve total aprovação.

Conclusão

Os alunos conseguiram manusear com sucesso os instrumentos geométricos, o que contribuiu para o alcance do objetivo do trabalho (Figura 5).

Figura 5 - Alunos utilizando os instrumentos geométricos.



Fonte: Protocolo de pesquisa.

O uso da tecnologia para melhor visualização e generalização dos conceitos apresentados, foi uma importante ferramenta no processo de ensino e aprendizagem (Figura 6).

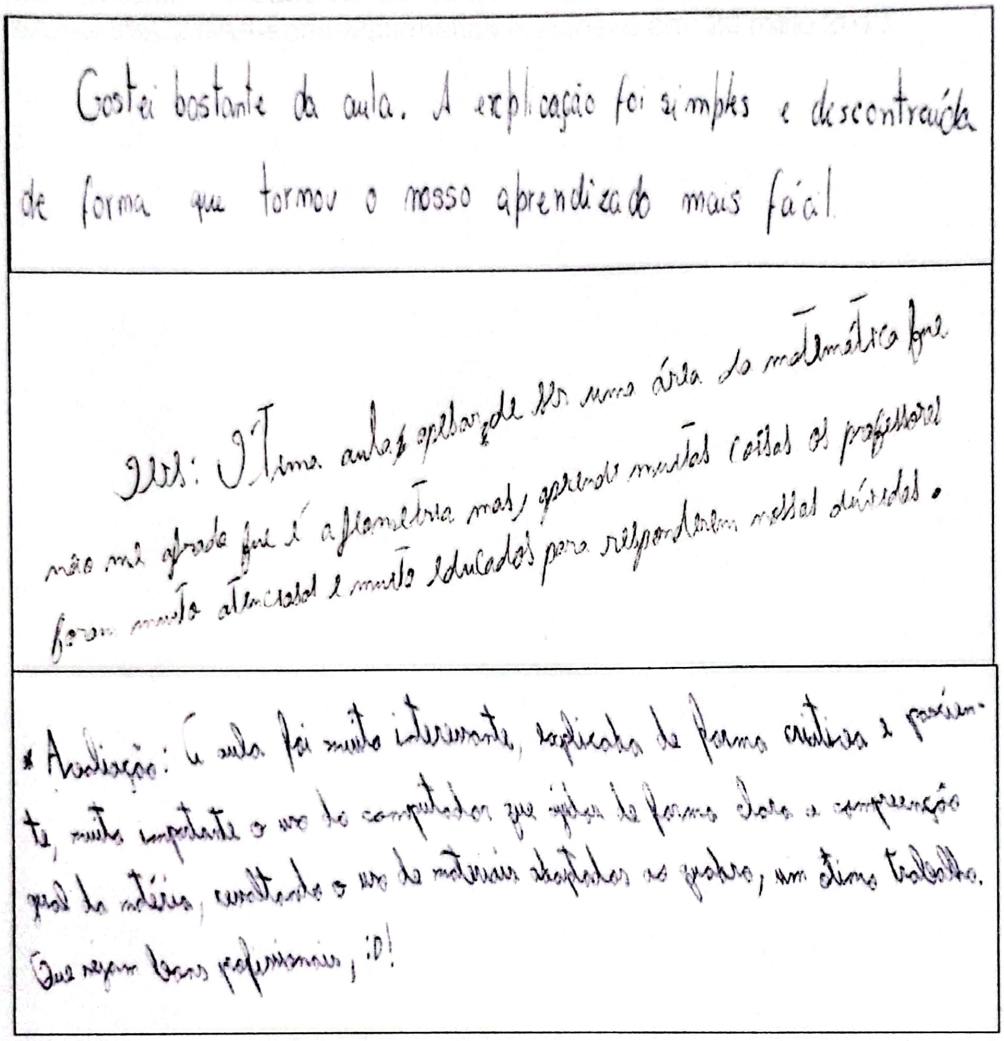
Figura 6 - Uso do *software* Geogebra

Fonte: Protocolo de pesquisa.

A resolução das questões no quadro branco pelos professores em formação contou com a utilização dos instrumentos de construção geométrica próprios para o mesmo, o que auxiliou os alunos nas suas construções.

A análise das avaliações feitas pelos alunos mostrou que a aula teve uma boa aceitação e a metodologia utilizada agradou (Figura 7).

Figura 7 - Avaliações dos alunos


Gostei bastante da aula. A explicação foi simples e descontraída de forma que tornou o nosso aprendizado mais fácil.

Obs: Ótima aula, apesar de ser uma área da matemática que não me agrada que é a geometria mas, aprendi muitas coisas os professores foram muito atenciosos e muito educados para responderem nossas dúvidas.

* Avaliação: A aula foi muito interessante, explicada de forma criativa e paciente, muito importante o uso do computador que ajudou de forma clara a compreensão geral da matéria, ressaltando o uso de materiais adaptados ao quadro, um ótimo trabalho. Que sejam bons profissionais, :D!

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Referências

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: 5ª. a 8ª. Série – Matemática.** Brasília: MEC/SEMT, 1998. Disponível em: < http://pt.scribd.com/doc/56750446/PCN-Parametros-Curriculares-Nacionas-5%C2%AA-a-8%C2%AA-serie-Matematica >. Acesso em: 20 maio 2013.

APÊNDICES

Apêndice A: Atividades aplicadas na turma do LEAMAT II

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE
Campus Campos-Centro

Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

Ministério da Educação

GOVERNO FEDERAL BRASIL PAIS RICO E PAIS SEM POBREZA

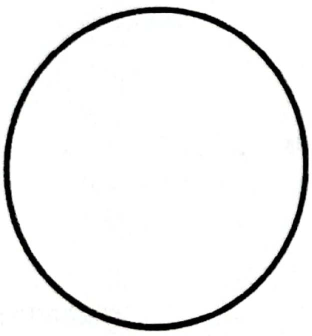
Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática – LEAMAT

Nome:____ Data:___/___/_____

DESAFIO

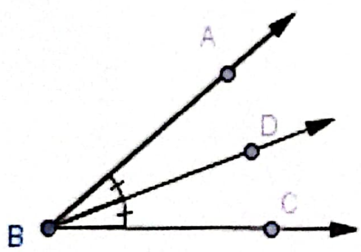
Construa uma circunferência com raio qualquer e identifique seu centro.

Marque o centro da circunferência abaixo.



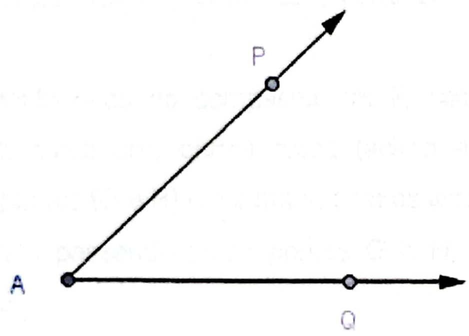
Bissetriz

Definição: A bissetriz de um ângulo $A\hat{B}C$ é uma semirreta $\overrightarrow{BD}$ que divide o ângulo $A\hat{B}C$ em dois ângulos de mesma medida.



<u>Construção</u>: Os passos a seguir determinam a construção da bissetriz de um ângulo usando os instrumentos geométricos.
Material: compasso, régua.

- Posicione a ponta seca do compasso no vértice do ângulo;
- Com uma abertura qualquer, construa um arco que intersecte os lados do ângulo, determinando os pontos P e Q;
- Coloque a ponta seca do compasso no ponto P, com uma abertura qualquer, trace um arco;
- Com a mesma abertura usada anteriormente, posicione a ponta seca do compasso no ponto Q, trace um arco de modo que este tenha um ponto B em comum com o arco anterior.
- A seguir, trace uma semirreta com extremidade em A passando pelo ponto B.
- Esta semirreta é a bissetriz do ângulo Â.



Propriedade:

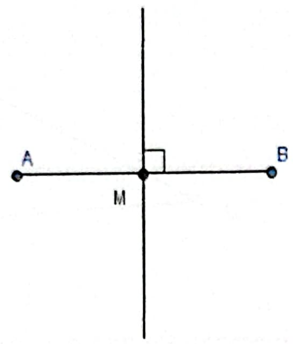
- Marque um ponto O sobre a bissetriz;
- Trace um segmento perpendicular à $\overrightarrow{AP}$, passando por O;
- Trace um segmento perpendicular à $\overrightarrow{AQ}$, passando por O;
- Usando o compasso, compare a medida desses segmentos. O que você observa?

____

____

Mediatriz

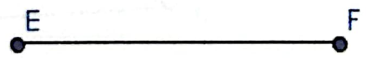
Definição: A mediatriz de um segmento $\overline{AB}$ é uma reta perpendicular a $\overline{AB}$, que passa pelo seu ponto médio M.



Construção: Os passos a seguir determinam a construção da mediatriz de um segmento usando instrumentos geométricos.

Material: compasso, régua.

- Posicione a ponta seca do compasso no ponto E, com abertura maior que a metade da medida do segmento $\overline{EF}$, trace um arco acima e outro abaixo do segmento;
- Coloque a ponta seca do compasso em F, com a mesma abertura utilizada anteriormente, trace dois outros arcos (acima e abaixo) de modo que estes tenham dois pontos (G e H) em comum com os arcos anteriores;
- Trace uma reta passando pelos pontos G e H, esta reta m é a mediatriz do segmento $\overline{EF}$.



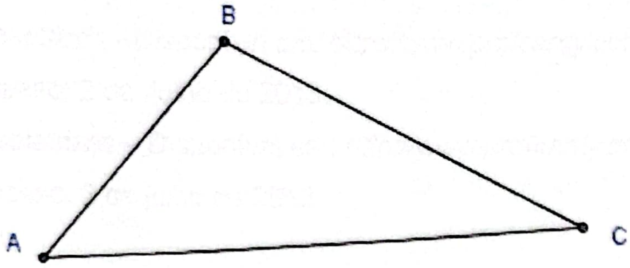
Propriedade:

- Marque um ponto O sobre a reta m;
- Trace os segmentos $\overline{OE}$ e $\overline{OF}$;
- Usando o compasso compare as medidas dos segmentos $\overline{OE}$ e $\overline{OF}$. O que você observa? ____

____

Exercícios

1) Construa as bissetrizes internas do triângulo abaixo.



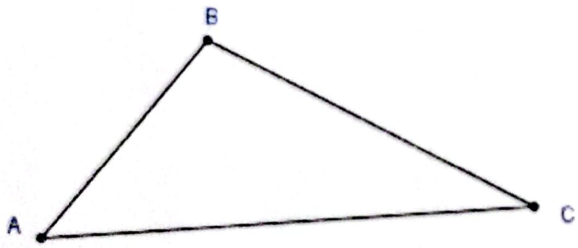
a) As três bissetrizes se cortam em um ponto? (Nomear de O)
b) Trace um segmento perpendicular a AC, passando por O, um segmento perpendicular a AB, passando por O e um segmento perpendicular a BC passando por O. Qual a relação entre as medidas destes segmentos?

____

c) Construa uma circunferência com centro no ponto O e raio igual a medida dos segmentos perpendiculares traçados no item b. Qual a relação entre essa circunferência e o triângulo ABC?

____

2) Construa as mediatrizes do triângulo abaixo.



a) As três mediatrizes se cortam em um ponto? (Nomear de O).
b) Use o compasso para medir a distância de O até A, de O até B e de O até C. O que você observa? ____
c) Construa uma circunferência com centro no ponto O e raio igual ao segmento OB. Qual a relação entre essa circunferência e o triângulo ABC? ____________________

____

Agora tente resolver o desafio que está no início desta apostila.

Bisssetrizes - Disponível em: *http://www.profcardy.com/dicionario/matepedia.php?rg=21*
Acesso: 2 de Julho de 2013.
Mediatrizes – Disponível em: *http://www.profcardy.com/dicionario/matepedia.php?rg=51*
Acesso: 2 de julho de 2013.

Apêndice B: Atividades aplicadas na turma regular

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE
Campus Campos-Centro
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica
Ministério da Educação
GOVERNO FEDERAL BRASIL PAIS RICO É PAIS SEM POBREZA

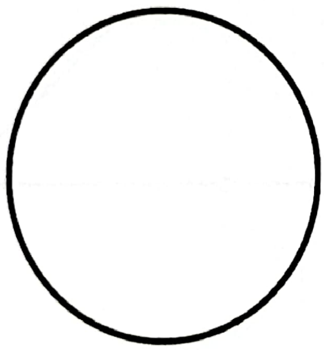
Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática – LEAMAT

Nome:____ Data:___/___/_____

DESAFIO

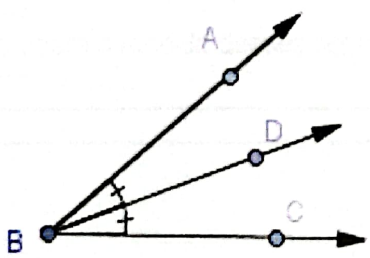
Usando o compasso, construa uma circunferência com raio qualquer e marque seu centro.

Marque o centro da circunferência abaixo.



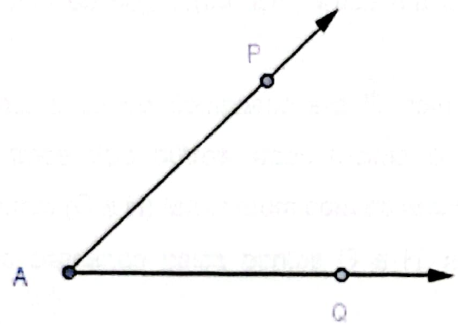
BISSETRIZ

Definição: A bissetriz de um ângulo $A\hat{B}C$ é uma semirreta $\overrightarrow{BD}$ que divide o ângulo $A\hat{B}C$ em dois ângulos de mesma medida.



<u>Construção</u>: Os passos a seguir determinam a construção da bissetriz de um ângulo usando os instrumentos geométricos.
Material: compasso e par de esquadros.

- Posicione a ponta seca do compasso no vértice do ângulo;
- Com uma abertura qualquer, construa um arco que intersecte os lados do ângulo, determinando os pontos P e Q;
- Coloque a ponta seca do compasso no ponto P, com uma abertura qualquer, trace um arco;
- Com a mesma abertura usada anteriormente, posicione a ponta seca do compasso no ponto Q, trace um arco de modo que este tenha um ponto B em comum com o arco anterior;
- A seguir, trace um semirreta com extremidade em A passando pelo ponto B;
- Esta semirreta é a bissetriz do ângulo Â.



Propriedade:

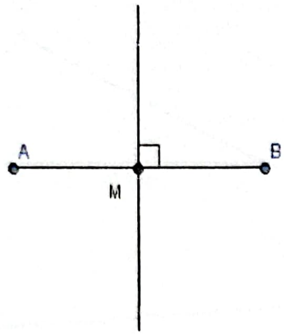
- Marque um ponto O sobre a bissetriz;
- Usando o par de esquadros, trace um segmento perpendicular à $\overrightarrow{AP}$, passando por O;
- Ainda com o par de esquadros, trace um segmento perpendicular à $\overrightarrow{AQ}$, passando por O;
- Usando o compasso, compare a medida desses segmentos. O que você observa?

____

____

MEDIATRIZ

Definição: A mediatriz de um segmento $\overline{AB}$ é uma reta perpendicular a $\overline{AB}$, que passa pelo seu ponto médio M.



Construção: Os passos a seguir determinam a construção da mediatriz de um segmento usando instrumentos geométricos.

Material: compasso e par de esquadros.

- Posicione a ponta seca do compasso no ponto E, com abertura maior que a metade da medida do segmento $\overline{EF}$, trace um arco acima e outro abaixo do segmento;
- Coloque a ponta seca do compasso em F, com a mesma abertura utilizada anteriormente, trace dois outros arcos (acima e abaixo) de modo que estes tenham dois pontos (G e H) em comum com os arcos anteriores;
- Trace uma reta passando pelos pontos G e H, esta reta m é a mediatriz do segmento $\overline{EF}$.

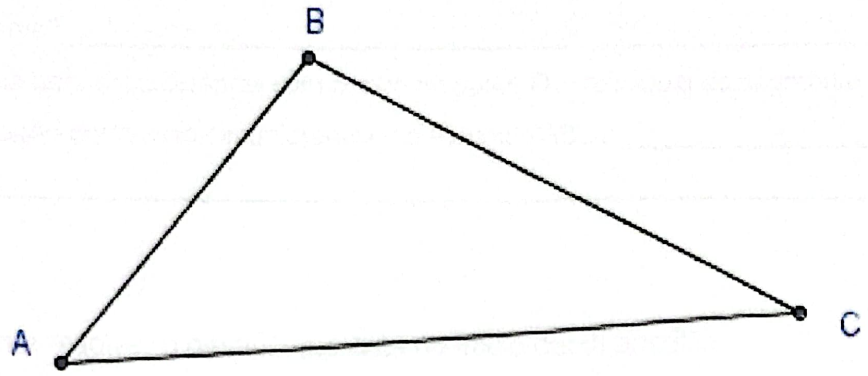
Propriedade:

- Marque um ponto O sobre a reta m;
- Trace os segmentos $\overline{OE}$ e $\overline{OF}$;
- Usando o compasso compare as medidas dos segmentos $\overline{OE}$ e $\overline{OF}$. O que você observa? ____

____

EXERCÍCIOS

1) Construa as bissetrizes internas do triângulo abaixo.



a) As três bissetrizes se cortam em um ponto? Caso sim, nomeie-o de O.

b)Trace um segmento perpendicular a AC, passando por O, um segmento perpendicular a AB, passando por O e um segmento perpendicular a BC passando por O. Qual a relação entre as medidas destes segmentos?

____

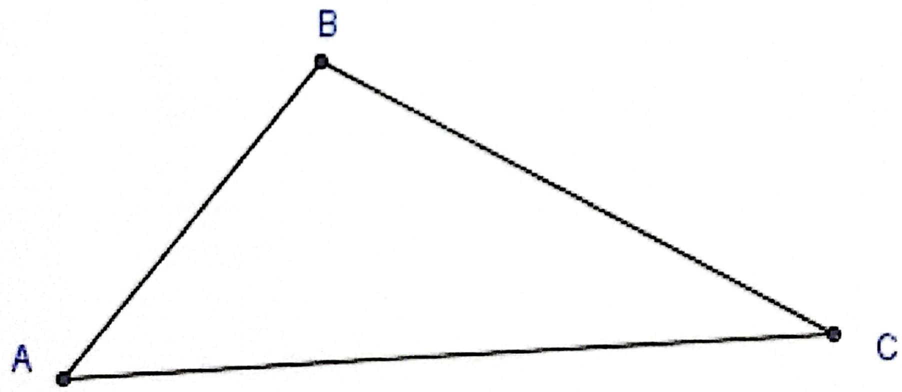
c) Construa uma circunferência com centro no ponto O e raio igual a medida dos segmentos perpendiculares traçados no item b. Qual a relação entre essa circunferência e o triângulo ABC?

____

____

____

2) Construa as mediatrizes do triângulo abaixo.



a) As três mediatrizes se cortam em um ponto? Caso sim, nomeie-o de O.

b) Use o compasso para medir a distância de O até A, de O até B e de O até C. O que você observa? ____

c) Construa uma circunferência com centro no ponto O e raio igual ao segmento OB. Qual a relação entre essa circunferência e o triângulo ABC? ____________________

____

Agora tente resolver o desafio que está no início desta apostila