INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE

Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

Ministério da Educação

DIRLIC

105 anos Rede Federal de Educação Profissional e Tecnológica

matemática LICENCIATURA

RELATÓRIO LEAMAT

ÂNGULOS NA CIRCUNFERÊNCIA: UM OLHAR SOBRE AS QUESTÕES DE VESTIBULAR

ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA

IGOR CARDOSO DE ABREU
LARISSA CONSOLE DE OLIVEIRA
THIAGO FRAGOSO GONÇALVES

Aprovado em 24/3/2015

CAMPOS DOS GOYTACAZES / RJ
2014.2

IGOR CARDOSO DE ABREU
LARISSA CONSOLE DE OLIVEIRA
THIAGO FRAGOSO GONÇALVES

RELATÓRIO LEAMAT

ÂNGULOS NA CIRCUNFERÊNCIA: UM OLHAR SOBRE AS QUESTÕES DE VESTIBULAR

ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA

Trabalho apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, Campus Campos-Centro, como requisito parcial para conclusão da disciplina Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática III do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Profª. Drª. Mônica Souto da S. Dias

CAMPOS DOS GOYTACAZES / RJ
2014.2

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Nossa justificativa para a escolha do tema reside no fato de que os alunos do Ensino Médio apresentam, em geral, um conhecimento limitado da Geometria; que o conteúdo de ângulos na circunferência é cobrado em alguns vestibulares, mas raramente visto antes do Ensino Superior; e que todos os grandes sites preparatórios para os vestibulares contém questões acerca dos ângulos na circunferência. Tais fatos estão apoiados em nossas experiências como alunos. Também nesse sentido, Passos, citado por Correia, afirma que:

> (...) os livros didáticos tratam a geometria como se fosse um dicionário de definições, nem sempre claras, acompanhadas de desenho protótipos; e raramente os alunos têm a oportunidade de explorar as relações geométricas e entender o porquê dessas definições. [1]

A justificativa para a utilização do software em sala de aula para exposição do tema é que ele torna a aula mais dinâmica, despertando o interesse dos alunos e, assim, facilitando a construção do aprendizado. Esta afirmação é corrobada por Silva (apud RODRIGUES, 2010) quando afirma que:

> Os softwares de Geometria Dinâmica permitem agilidade na investigação, pois figuras que demorariam muito tempo para serem construídas no papel são criadas em segundos na tela do computador. Eles possibilitam que os alunos explorem os mesmos conteúdos da Geometria clássica, mas com um software interativo. [2]

2. OBJETIVOS

As atividades elaboradas objetivam levar os alunos a i) compreender a definição dos ângulos central, inscrito, semi-inscrito e excêntricos; ii) observar as propriedades dos referidos ângulos; e iii) utilizar os conhecimentos construídos para solucionar as questões de vestibular que envolvam o tema do trabalho, otimizando o tempo de resolução.

---

[1] PASSOS *apud* CORREIA, 2011.
[2] SILVA *apud* RODRIGUES, 2010.

3. ATIVIDADES DESENVOLVIDAS

3.1. Elaboração da Sequência Didática

A motivação para a escolha do tema pelos professores em formação está na significativa demanda das questões de vestibular, no que concerne ao tema, aliado ao ensino do conteúdo no Ensino Médio que é superficial, e por vezes ausente, segundo a vivência acadêmica dos autores.

A apostila desenvolvida pelos professores em formação traz no seu Tópico 1 uma questão de vestibular, que visa averiguar os conhecimentos dos alunos sobre os ângulos na circunferência, bem como alertá-los para a presença do conteúdo nos exames de admissão para os cursos superiores. Em seguida, há uma clara provocação (Figura 1) com o intuito de despertar o interesse dos alunos para a sequência didática.

Figura 1 - Questionamento

Como você resolveu? Chegou à resposta certa? Se não, imagine agora que esta pergunta, ou uma muito parecida com essa, poderia estar na sua prova de vestibular, ou no ENEM, e ser a diferença entre ingressar na Faculdade de sua escolha, ou não.

Fonte: Elaboração própria.

O Tópico 2 visa fazer uma revisão de algumas definições necessárias para o entendimento do conteúdo, tais como: circunferência; corda, diâmetro e raio; arco de circunferência; e posições relativas entre reta e circunferência.

O assunto em questão tem início a partir do Tópico 3, que aborda, no item a, a definição de ângulo central e alguns conceitos que dela decorrem, indispensáveis à compreensão dos outros tipos de ângulos na circunferência.

Os itens b e c do Tópico 3, que tratam do ângulo inscrito e semi-inscrito, respectivamente, iniciam-se com a definição deles, e deixam a cargo do aluno a construção de cada um deles no *Geogebra* – *software* de Geometria dinâmica – seguindo o roteiro presente na apostila.

Ao final de cada construção, uma série de questionamentos é feita, com o objetivo de levar os alunos a deduzirem as medidas de cada ângulo em função do ângulo central.

Figura 2 - Dedução da Medida do Ângulo Inscrito

11- Então, se um arco mede o mesmo que seu ângulo central correspondente, o que podemos afirmar sobre as medidas do ângulo inscrito β e do arco $\widehat{BC}$ que ele subentende?

12- Se os pontos B e C fossem extremidades de um diâmetro, quanto mediria o ângulo β? Por quê (use o *Geogebra*, se preciso)?

13- Como podemos classificar quanto à medida de seus ângulos, um triângulo inscrito numa circunferência (quando seus três vértices pertencem à circunferência), quando um de seus lados é um diâmetro?

Fonte: Elaboração própria

Em seguida, vêm as questões 1 e 2, com o intuito de fixar o conhecimento adquirido a respeito desses dois ângulos na circunferência. Os alunos deverão resolver e conferir posteriormente com a resolução dos professores em formação, no quadro.

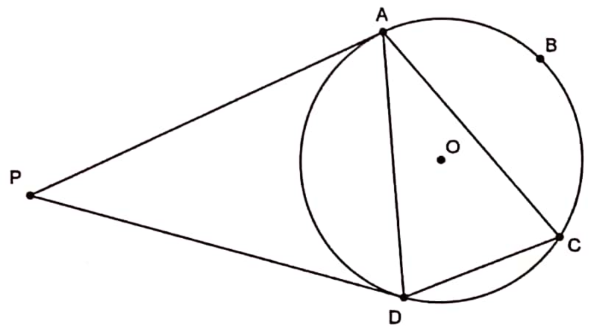
A apostila tem sequência com os itens c e d do Tópico 3, que tratam respectivamente do ângulo excêntrico interno e do ângulo excêntrico externo. Cada um destes, traz *ab initio*[3] a definição do tipo de ângulo em questão, e em seguida o roteiro para a construção de cada um deles no *Geogebra*, culminando com perguntas que objetivam levar os alunos a deduzirem suas medidas com relação às medidas dos arcos que esses ângulos determinam na circunferência.

Finalizando a apostila, estão as questões 3, 4 e 5, para fixar o conhecimento adquirido a respeito dos ângulos excêntricos, devendo os alunos resolverem e conferirem posteriormente com a resolução dos professores em formação, no quadro.

[3] Expressão oriunda do latim, cujo significado é inicialmente.

Figura 3 - Exercício de Fixação

4- (UFES, 2005) Na figura, os segmentos de reta $\overline{AP}$ e $\overline{DP}$ são tangentes à circunferência, o arco $\widehat{ABC}$ mede 110 graus e o ângulo $C\hat{A}D$ mede 45 graus. A medida, em graus, do ângulo $A\hat{P}D$ é:



a) 15° b) 20° c) 25° d) 30° e) 35°

Fonte: Elaboração própria.

3.2. Relato da Aplicação da Sequência Didática na Turma do LEAMAT II

A sequência didática elaborada foi aplicada na turma do LEAMAT II no dia 23 de setembro de 2014, para o cálculo do tempo necessário para sua aplicação numa turma regular, visando também o retorno acerca da condução da aula e do conteúdo da apostila, aproveitando as sugestões para possíveis alterações.

A sequência didática teve início com a resolução da questão que introduz a problemática do tema da sequência didática. Muitos tiveram dificuldade, mesmo já tendo visto o conteúdo.

Após a resolução da questão no quadro pelos professores em formação, foi feita uma revisão de algumas definições que são pré-requisito para o assunto da sequência didática, tais como: circunferência, corda, diâmetro, raio, arco de circunferência, e posições relativas entre reta e circunferência.

Os alunos em formação iniciaram o Tópico 3 apresentando a definição de ângulo central, e mais alguns conceitos dele decorrentes, imprescindíveis para o bom caminhar da sequência didática.

Finalizando a aula, disponibilizou-se os exercícios sobre o tema, objetivo maior da aula. Porém, como o tempo era curto – apenas duas aulas de 50 min foram disponibilizadas – os professores em formação, com aquiescência da orientadora, acharam melhor dividir a turma em dois grupos, ficando um deles encarregado dos ângulos inscrito e semi-inscrito (Tópico 3 itens a e b), e o outro encarregado dos ângulos excêntricos (Tópico 3 itens c e d).

Houve muitas dúvidas e dificuldades por parte dos alunos durante a construção dos ângulos pedidos, algumas já esperadas, mas em sua grande parte, derivadas da impossibilidade de se restringir, em palavras, a infinidade de maneiras de se construir, visando à generalização. Quer isto dizer que algumas partes do roteiro foram feitas diversamente do pretendido pelos professores em formação, não por culpa dos alunos, mas pela dificuldade de se elaborar um roteiro tão coeso que limitasse as opções de construção, haja visto que se trata de uma generalização.

Devido ao tempo, poucos foram aqueles que conseguiram resolver as questões referentes aos ângulos que lhes cabiam. Não houve grandes dificuldades nessas questões, uma vez deduzidas as medidas dos ângulos em relação ao(s) ângulo(s) central(ais) com o uso do *Geogebra*. Também por isso, os professores em formação não foram ao quadro para resolver as questões.

As alterações sugeridas na sequência didática, após a aplicação na turma do LEAMAT II foram:

a) Na questão que introduz a problemática, pedir que os alunos não apaguem suas respostas e perguntar como eles resolveram a questão.

b) No item a do Tópico 2, que trata da definição de circunferência, dizer que o r da fórmula de seu comprimento ($C = 2\pi r$) refere-se a seu raio.

c) No item (b) do Tópico 2, dizer que os extremos de uma corda são dois pontos uma circunferência, porém distintos entre si.

d) Ainda no item (b), alterar a expressão "pode possuir" da observação 1 para "possui", como verifica-se na figura 4 a seguir:

Figura 4 - O Antes e o Depois da Observação 1 do Item (b)

Obs.1: Uma circunferência pode possuir infinitas cordas, raios e diâmetros.

Obs.1: Uma circunferência possui infinitas cordas, raios e diâmetros.

Fonte: Elaboração própria.

e) Reformatar o item (d) do Tópico 2 para sua melhor compreensão, e modificar o ponto de tangência entre reta e circunferência de sua ilustração de A para T.

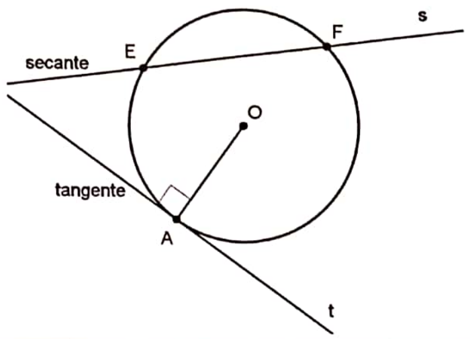
Figura 5 - O Antes do Tópico 2, item (d)

d) Reta Secante a uma Circunferência e Reta Tangente a uma Circunferência

Com relação a uma circunferência, uma reta pode intersectá-la de duas formas:

Reta secante é a reta que intersecta a circunferência em dois pontos distintos.

Reta tangente é a reta que intersecta a circunferência em apenas um ponto, formando com o raio, neste ponto, um ângulo reto (de 90°).



Fonte: Elaboração própria.

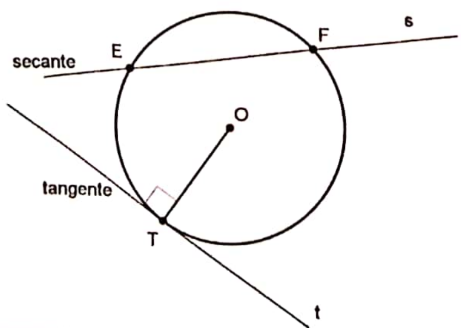
Figura 6 - O Depois do Tópico 2, item (d)

d) Reta Secante a uma Circunferência e Reta Tangente a uma Circunferência

Com relação a uma circunferência, uma reta pode intersectá-la de duas formas:

a) Em dois pontos distintos. Neste caso, dizemos que a reta é secante à circunferência.

b) Em apenas um ponto. Neste caso, dizemos que ela é tangente à circunferência. Deve-se destacar que a reta forma com o raio da circunferência, no ponto de tangência, um ângulo reto (de 90°).



Fonte: Elaboração própria.

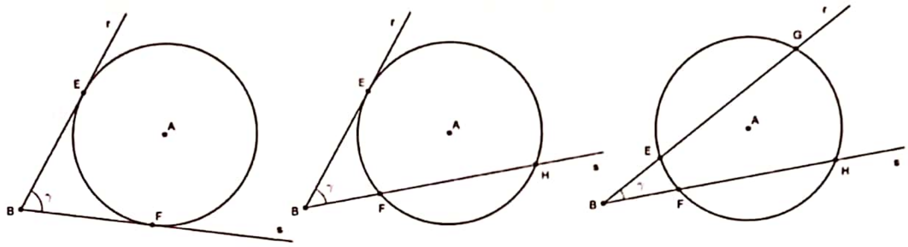
f) No item (a) do Tópico 3, que trata do ângulo central, na frase "Um arco tem medida angular igual a de seu ângulo central correspondente", suprimir a palavra "angular" para não dificultar sua compreensão.

g) Pôr instruções do que fazer no item (c) e (e) do tópico 3, já que muitos alunos alegaram não ter entendido o que pôr nas lacunas.

Figura 7 - O Antes do Tópico 3, item (e)

e) Ângulo Excêntrico Externo

É o ângulo que tem seu vértice no exterior da circunferência, cujos lados: ou são ambos secantes à circunferência, ou são ambos tangentes à circunferência, ou um é tangente e o outro secante.

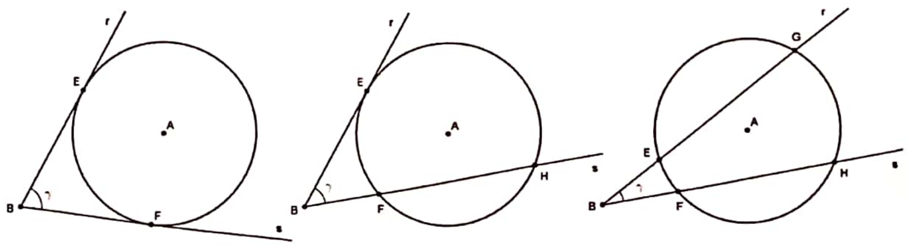


________________ ________________ ________________

Fonte: Elaboração própria.

Figura 8 - O Depois do Tópico 3, item (e)

Observe as figuras abaixo e diga se os lados do ângulo γ estão ambos em retas tangentes à circunferência, ambos em retas secantes à circunferência ou um numa reta tangente e outro numa reta secante à circunferência.



________________ ________________ ________________

Fonte: Elaboração própria

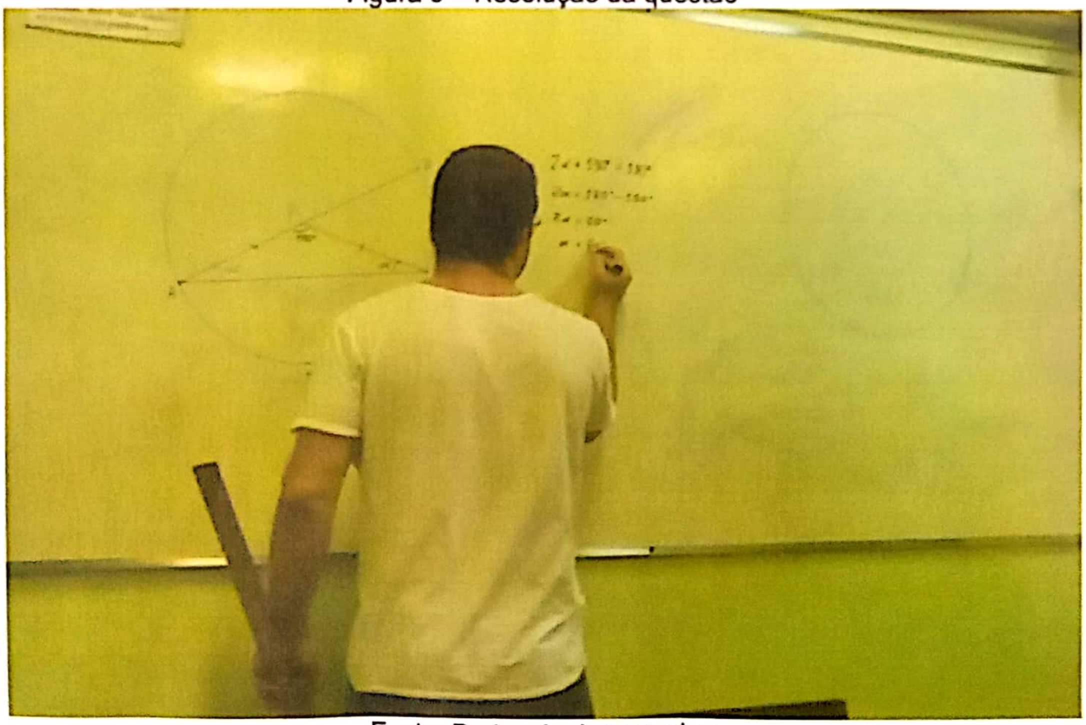
3.3. Relato da Aplicação da Sequência Didática na Turma Regular

A aplicação foi realizada no dia 23 de janeiro de 2015, durante duas horas e trinta minutos, no 3º Ano do Ensino Médio do Instituto Federal Fluminense *Campus* Campos-Centro, na cidade de Campos dos Goytacazes, no bairro Parque Dom Bosco. A aplicação foi realizada no laboratório de informática da instituição com participação de 18 alunos.

A aula começou com a apresentação do grupo e do tema por um dos professores em formação. Em seguida, foi entregue a primeira parte da apostila para cada aluno e pediu-se que a primeira questão fosse resolvida, com o intuito de chamar a atenção para um conteúdo que é pouco visto do Ensino Médio, mas que tem sido cobrado em vestibulares.

A turma não conseguiu acertar a questão, então um dos licenciandos a resolveu no quadro (Figura 9), apresentando alguns conceitos necessários a serem tratados.

Figura 9 – Resolução da questão



Fonte: Protocolo de pesquisa.

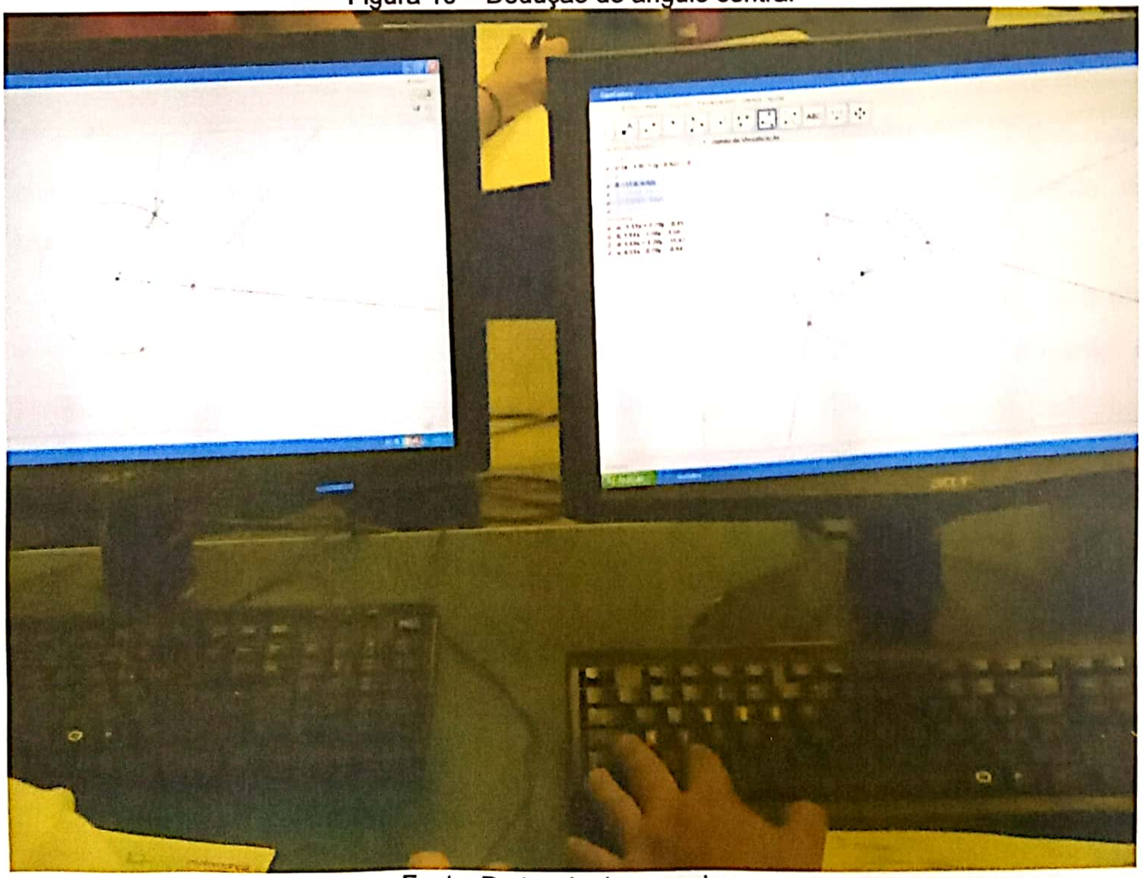
A seguir, foi entregue a segunda parte da apostila que continha os conceitos iniciais acerca da circunferência e seus elementos. Durante a apresentação do conceito de corda, uma aluna abordou os professores em formação e comentou, antes da explicação sobre diâmetro, que este seria também uma corda.

Após a terceira parte da apostila ser entregue, composta pelos ângulos na circunferência, destacando o ângulo central, ângulo inscrito e ângulo de segmento.

Observando as imagens na página 5 da apostila, os alunos foram questionados por um dos licenciandos a respeito da posição do centro da circunferência em relação aos lados do ângulo inscrito na mesma. As perguntas foram respondidas oralmente.

No ítem b.1, os alunos iniciaram as construções no *Geogebra*, visando a dedução da medida do ângulo inscrito na circunferência em relação ao ângulo central ou o arco correspondente ao mesmo (Figura 10).

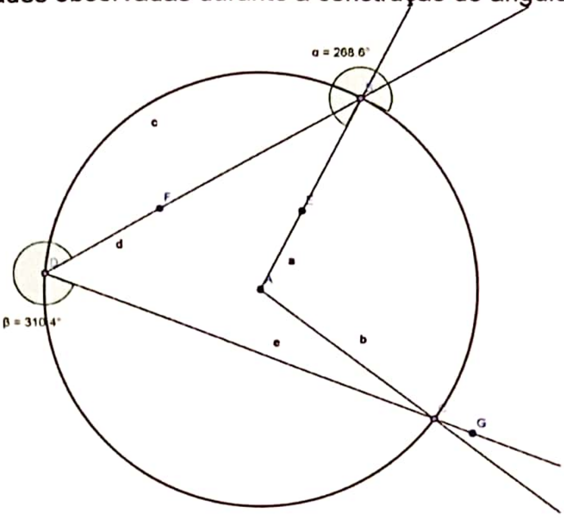
Figura 10 – Dedução do ângulo central



Fonte: Protocolo de pesquisa.

No tópico 6, foi notada a dificuldade dos alunos em traçar as semirretas, criando vários outros pontos além dos necessários na construção. No tópico 7, percebeu-se a dificuldade na marcação dos ângulos, muitas vezes sendo destacado o ângulo replementar ao invés do ângulo pedido (Figura 11).

Figura 11 – Dificuldades observadas durante a construção do ângulo inscrito

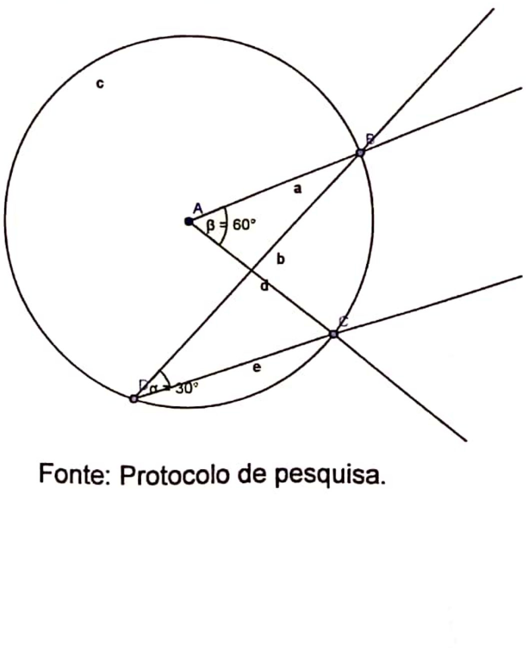


Fonte: Protocolo de pesquisa.

Após a construção concluída, iniciou-se a discussão acerca dos pontos mais relevantes para o grupo de professores em formação, sendo destacados os tópicos 10, 12 e 13.

O tópico 10 referia-se à principal dedução acerca do ângulo inscrito, que era a sua medida em relação ao ângulo central. Como alguns alunos, durante a construção, inverteram os ângulos α e β, estes tiveram dificuldade de perceber essa relação (Figura 12).

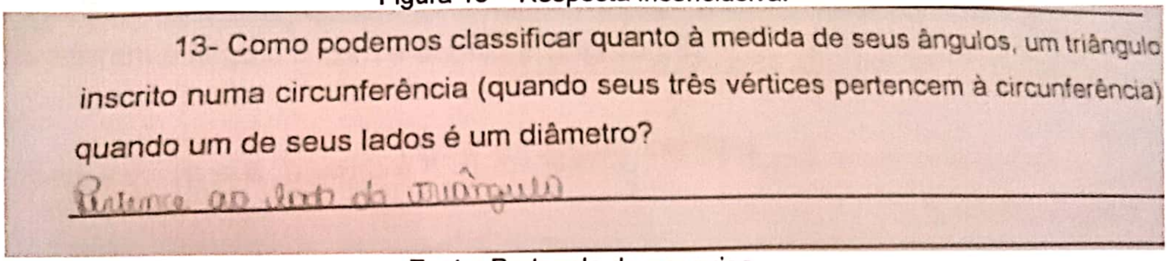
Figura 12 – Ângulos invertidos.



Fonte: Protocolo de pesquisa.

O tópico 13 referia-se à conclusão de que o triângulo formado seria retângulo, entretanto, alguns dos alunos não conseguiram ter essa percepção (Figura 13).

Figura 13 – Resposta inconclusiva.


13- Como podemos classificar quanto à medida de seus ângulos, um triângulo inscrito numa circunferência (quando seus três vértices pertencem à circunferência) quando um de seus lados é um diâmetro?

Pertence ao lado do triângulo

Fonte: Protocolo de pesquisa.

No item c, um dos professores em formação fez uma breve explicação acerca do ângulo de segmento (Figura 14) e, logo após, os alunos foram instruídos a começar a construção do mesmo.

Figura 14 – Dedução do ângulo de segmento

Fonte: Protocolo de pesquisa.

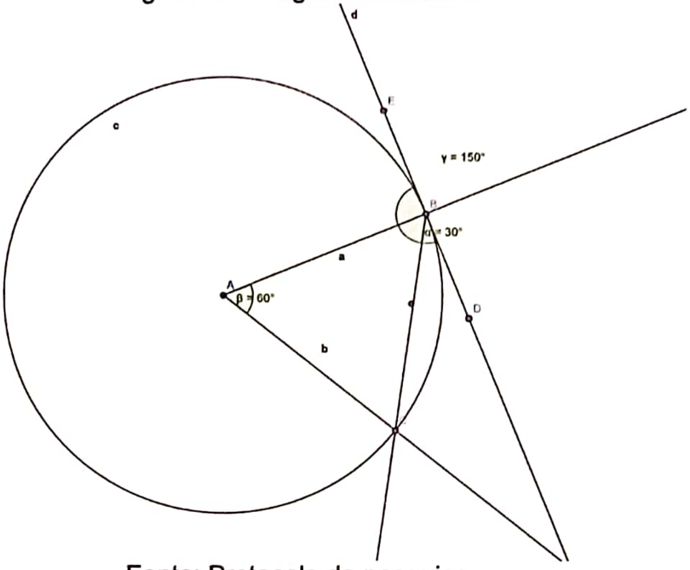
No tópico 1, percebeu-se que muitos [redacted] alunos não leram todas as instruções contidas na apostila, o que os levou a começar uma nova construção do início, ao invés de aproveitar a anterior.

No tópico 2, muitos tiveram dificuldade com a construção da reta tangente à circunferência, pois clicavam sobre o círculo.

No tópico 4, muitos alunos não conseguiram entender o que foi pedido, destacando, assim, o ângulo replementar ao invés do ângulo agudo pedido.

No tópico 6, percebeu-se que, durante a construção, alguns alunos inverteram o ângulo α com o ângulo β (Figura 15).

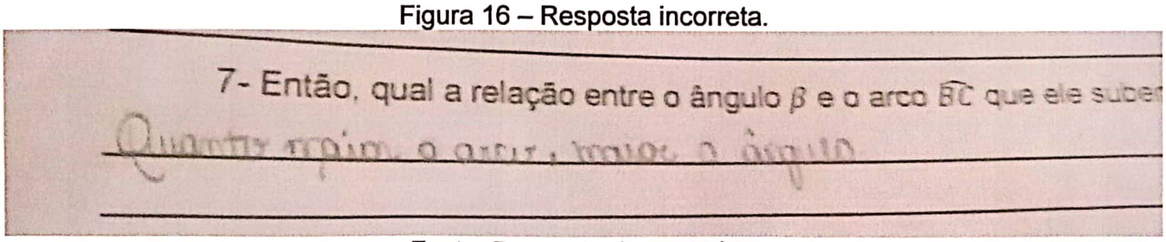
Figura 15 – Ângulos invertidos.



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Após a construção, um dos licenciandos abordou o tópico 7 que se tratava especificamente da principal característica do ângulo de segmento. Alguns alunos responderam sobre a proporcionalidade das relações, não observando que o ângulo de segmento vale a metade do arco que ele subentende (Figura 16).

Figura 16 – Resposta incorreta.



7- Então, qual a relação entre o ângulo β e o arco $\widehat{BC}$ que ele suben

Quanto maior o arco, maior o ângulo

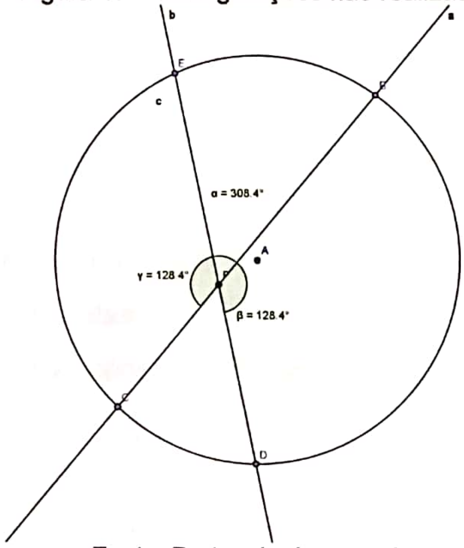
Fonte: Protocolo de pesquisa.

No item d, um dos professores em formação abordou os conceitos de ângulo excêntrico interno, ilustrando, no quadro, suas principais características. Após a explanação, foi solicitado que os alunos fizessem a construção do mesmo.

No tópico 7, alguns alunos tiveram dificuldade na marcação dos pontos de modo que as retas sob os pontos não eram concorrentes, conforme era pedido no item.

Nos tópicos 12 ao 15, que tratavam das configurações de cor, espessura das linhas e outras alterações solicitadas, não foram realizadas em sua totalidade pelos alunos (Figura 17).

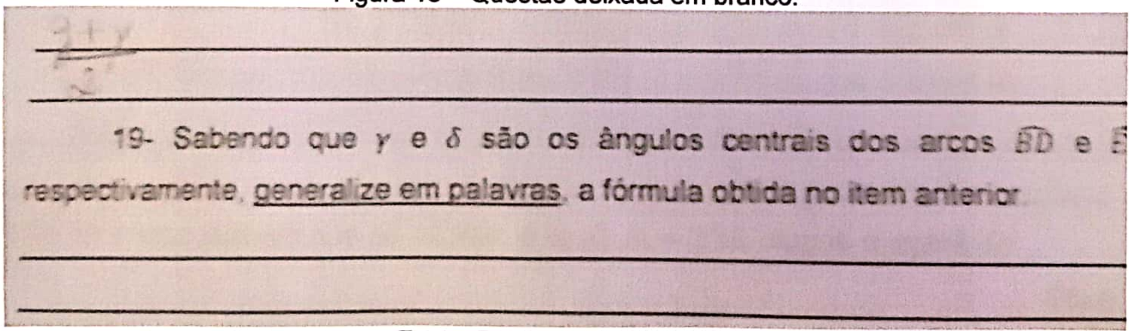
Figura 17 – Configurações não realizadas.



Fonte: Protocolo de pesquisa.

No tópico 19, os alunos tiveram dificuldade em generalizar a fórmula obtida no item anterior (Figura 18).

Figura 18 – Questão deixada em branco.

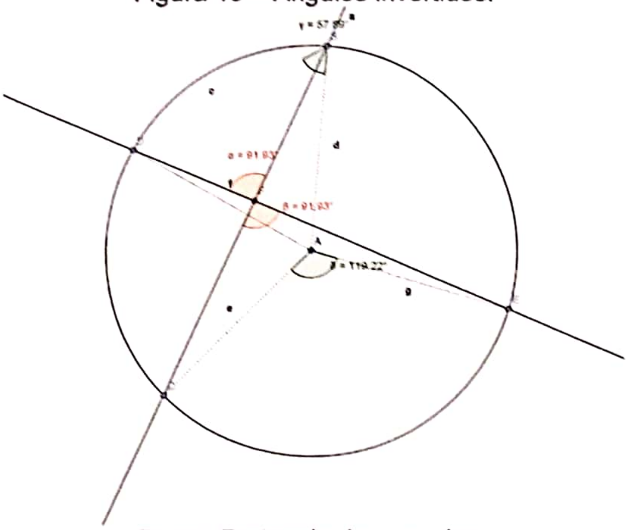


19- Sabendo que γ e δ são os ângulos centrais dos arcos $\widehat{BD}$ e ... respectivamente, generalize em palavras, a fórmula obtida no item anterior.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Ainda neste tópico, durante a construção, alguns dos estudantes trocaram a ordem dos ângulos pedidos, o que pode ter sido um complicador para o cumprimento do que foi pedido no tópico (Figura 19).

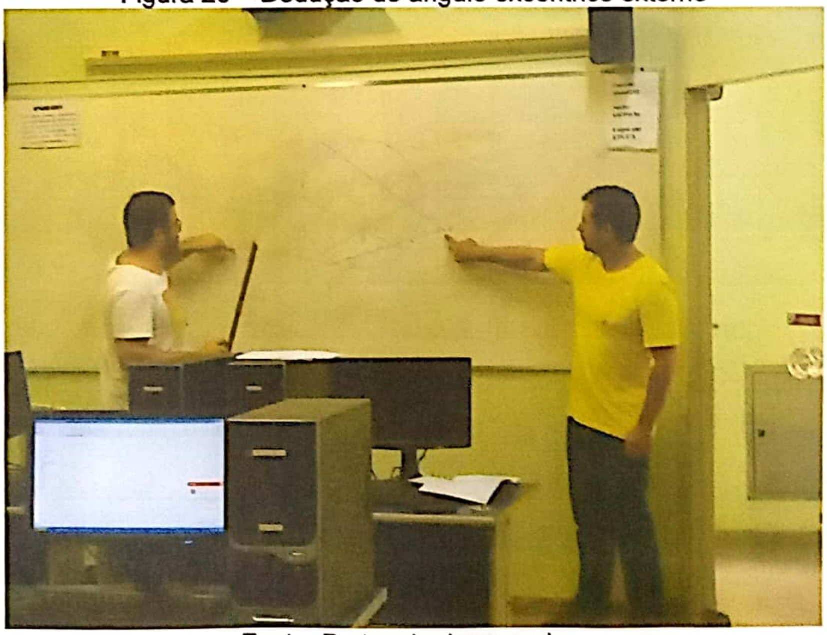
Figura 19 – Ângulos invertidos.



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Após a construção, um dos licenciandos abordou os tópicos 18 e 19 que se tratavam especificamente das principais características do ângulo excêntrico interno. Alguns alunos não conseguiram generalizar a fórmula, embora a maioria tenha percebido sua relação.

Figura 20 – Dedução do ângulo excêntrico externo

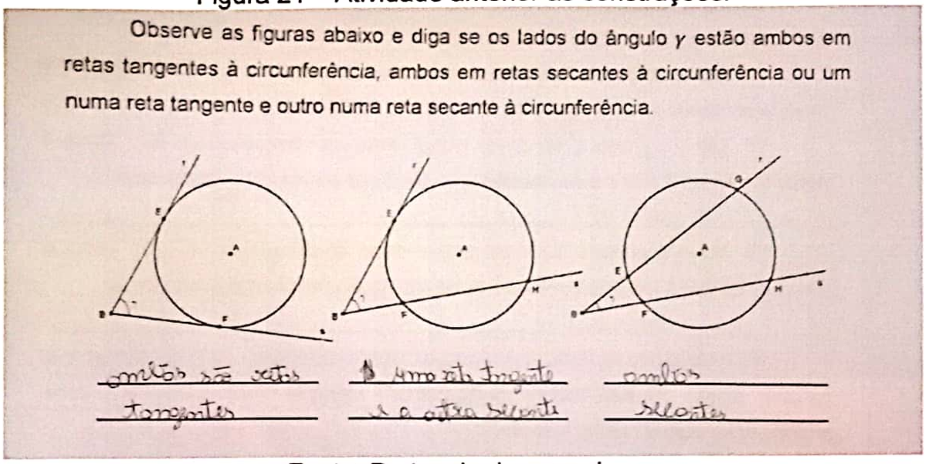


Fonte: Protocolo de pesquisa.

No item e, um dos professores em formação abordou os conceitos de ângulo excêntrico externo, ilustrando, no quadro, suas principais características (Figura

20). Após a explanação, a apostila apresentava três questões sobre a posição das retas secantes e tangentes em relação a uma circunferência (Figura 21).

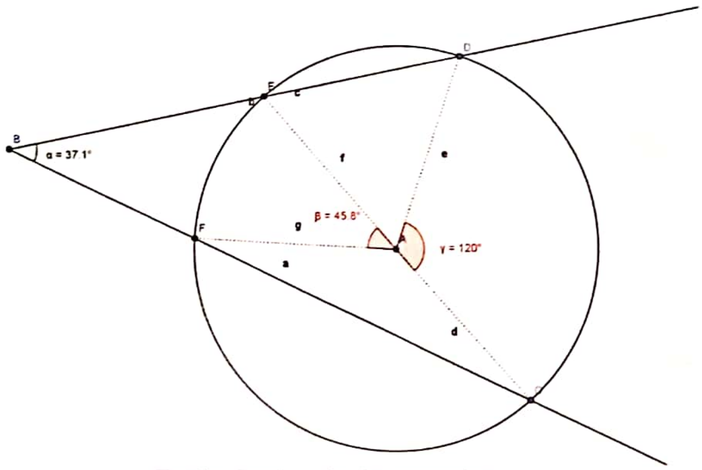
Figura 21 – Atividade anterior as construções.



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Após a resolução das atividades, deu-se início a construção do ângulo excêntrico externo. Pode-se perceber que os alunos não tiveram dificuldades neste item (Figura 22).

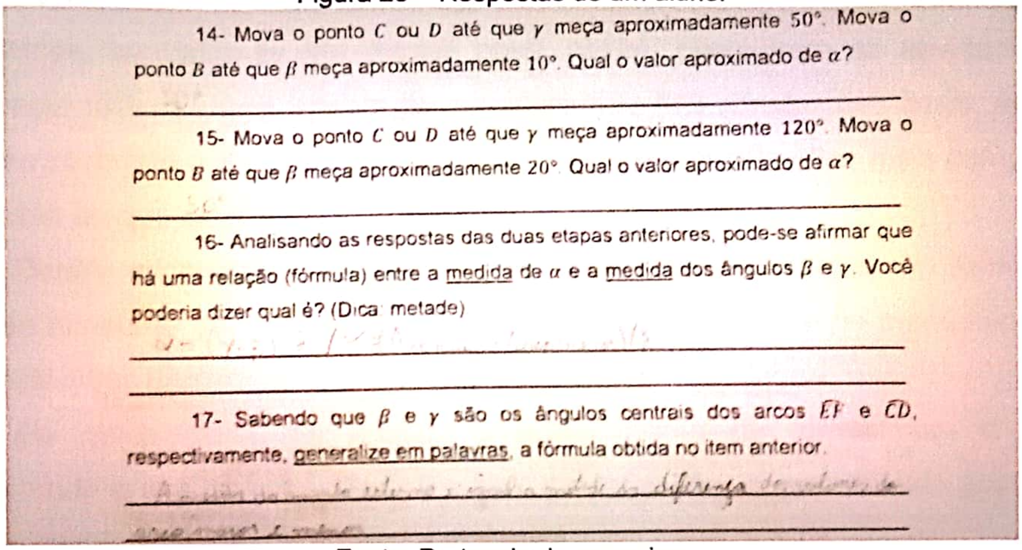
Figura 22 – Construção realizada corretamente por um aluno.



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Um dos licenciandos, retornou, após a construção, aos tópicos 14, 15, 16 e 17, que referiam-se especificamente a principal característica do ângulo excêntrico externo. Percebeu-se que a maioria dos alunos respondeu corretamente aos itens (Figura 23)

Figura 23 – Respostas de um aluno.



14- Mova o ponto C ou D até que γ meça aproximadamente 50°. Mova o ponto B até que β meça aproximadamente 10°. Qual o valor aproximado de α?

15- Mova o ponto C ou D até que γ meça aproximadamente 120°. Mova o ponto B até que β meça aproximadamente 20°. Qual o valor aproximado de α?

16- Analisando as respostas das duas etapas anteriores, pode-se afirmar que há uma relação (fórmula) entre a medida de α e a medida dos ângulos β e γ. Você poderia dizer qual é? (Dica: metade)

17- Sabendo que β e γ são os ângulos centrais dos arcos $\widehat{EF}$ e $\widehat{CD}$, respectivamente, generalize em palavras, a fórmula obtida no item anterior.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Após a dedução das relações entre os ângulos estudados, foram aplicadas questões de vestibular a fim de observar se os alunos utilizariam o conhecimento construído. A resolução foi em grupos e os alunos não apresentaram dificuldades, com exceção de uma dupla que teve dúvidas na questão sobre ângulos excêntricos externos. A dúvida foi referente à interpretação do enunciado, o que desencadeou a não resolução do problema.

4. CONCLUSÕES

O trabalho cumpriu o objetivo, visto que os alunos participaram efetivamente de todas as atividades propostas e demonstraram, ao final da sequência didática, que o conhecimento anterior foi ampliado, levando-se em consideração as respostas tabuladas durante a observação.

A aplicação foi planejada para quatro tempos de aula, entretanto, a turma só tinha disponibilidade para três. Dessa forma, percebeu-se o cansaço dos alunos no decorrer das atividades. Sugere-se que a aplicação deve ser dividida em dois momentos, com dois tempos de aula cada um. O primeiro momento seria composto pelas Atividades 1, 2 3, itens a, b e c, aplicando os exercícios referentes a eles ao final. O segundo momento seria composto pela Atividade 3, itens d e e, finalizando com a aplicação dos exercícios.

Com o cansaço, alguns alunos desistiram da construção dos ângulos excêntricos, sentando-se em duplas para, assim, concluírem as atividades. É importante ressaltar que, apesar da complexidade das construções finais, ao não fazerem sozinhos, a interação entre eles resultou em construções mais completas e corretas do que as primeiras.

Dentre as reflexões realizadas pelo grupo de professores em formação, pode-se constatar que o conhecimento de informática facilitou no manuseio para as construções propostas.

De modo geral, foi notável o envolvimento da turma com o tema apresentado e sua participação até o final da aplicação, demonstrando gostarem das atividades e do uso do *software* dinâmico.

5. REFERÊNCIAS

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio*. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 2000;

CORREIA, Warley M. *Aprendizagem Significativa, Explorando Alguns Conceitos De Geometria Analítica*: Pontos e Retas. Ouro Preto, 2011. Disponível em <http://www.ppgedmat.ufop.br/arquivos/Diss_Warley.pdf> Acesso em 20 mar. 2014;

DORNELES, Beatriz V.; SENA, Rebeca M. *Ensino de Geometria: Rumos da Pesquisa (1991-2011)*. REVEMAT, v. 08, n.1. Florianópolis – SC, 2013;

INSTITUTO FEDERAL FLUMINENSE. *Processo Seletivo 2014 – 1º e 2º semestres: Cursos Técnicos Integrados ao Ensino Médio na Modalidade Regular e Cursos Técnicos Concomitantes*. Edital nº 125, 2013, p. 16.

SILVA, Guilherme H. G. *O trabalho Docente com Geometria Dinâmica em uma Perspectiva Investigativa*. 2010. Disponível em <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Artigo_Guilherme_Henrique_Gomes_da_Silva.pdf>. Acesso em 20 mar. 2014;

Site Questões De Vestibular <http://www.questoesdevestibular.com.br>. Acesso em 23 fev. 2014.

APÊNDICE

APÊNDICE A: Atividade Aplicada à Turma do LEAMAT II

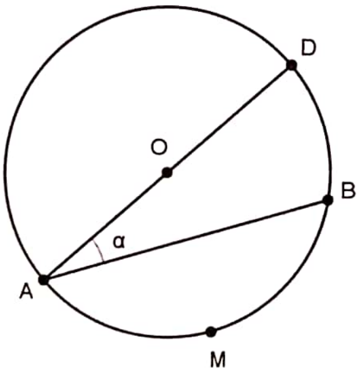
Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática.
Área: Geometria.
Orientadora: Prof^{a.} Dr^{a.} Mônica Souto da Silva Dias
Autores: Igor Abreu, Larissa Console, Thiago Fragoso.
Aluno: ____

Ângulos na Circunferência: um Olhar Sobre as Questões de Vestibular

1) Problemática

Tente responder à questão abaixo:

(CESGRANRIO) Em um círculo de centro O, está inscrito o ângulo α (ver figura). Se o arco $\widehat{AMB}$ mede $130°$, o ângulo α mede:



a) $25°$ b) $30°$ c) $40°$ d) $45°$ e) $50°$

Chegou à resposta certa? Se não, imagine agora que esta pergunta, ou uma muito parecida com essa, poderia estar na sua prova de vestibular, ou no ENEM, e ser a diferença entre ingressar na Faculdade de sua escolha, ou não. Pensando nisso, é que iremos estudar Ângulos na Circunferência, que é o caminho mais fácil pra vocês resolverem este tipo de questão.

2) <u>Conceitos Iniciais</u>

a) Circunferência

É o conjunto de todos os pontos de um plano que equidistam (mantém a mesma distância) de outro ponto do mesmo plano, a que chamamos de centro.

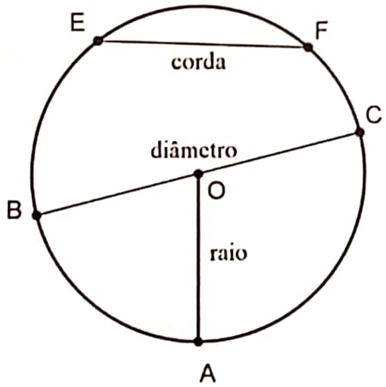
Ou seja, é a linha que delimita o círculo e que mede $2\pi.r$.

b) Corda, Diâmetro e Raio

Corda de uma circunferência é o segmento de reta cujas extremidades são pontos da circunferência.

Diâmetro de uma circunferência é a corda que passa pelo seu centro.

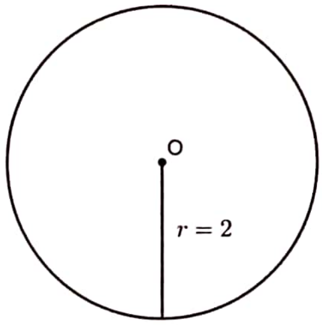
Raio de uma circunferência é o segmento de reta com uma extremidade no centro, e a outra num ponto da circunferência. O raio é metade do diâmetro, ou ainda, o diâmetro é o dobro do raio.



Obs.1: Uma circunferência pode possuir infinitas cordas, raios e diâmetros.

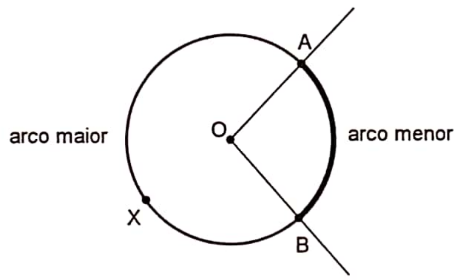
Obs.2: Para que uma circunferência esteja definida, basta que sejam conhecidos seu centro e o seu raio. Exemplo: traçar um círculo de centro O

e $r = 2$.



c) Arco de Circunferência

É a porção da circunferência compreendida entre dois pontos quaisquer da mesma. Dois pontos de uma circunferência determinam sobre ela dois arcos: um maior e um menor, salvo quando estes pontos forem extremos de um diâmetro (os arcos serão iguais).



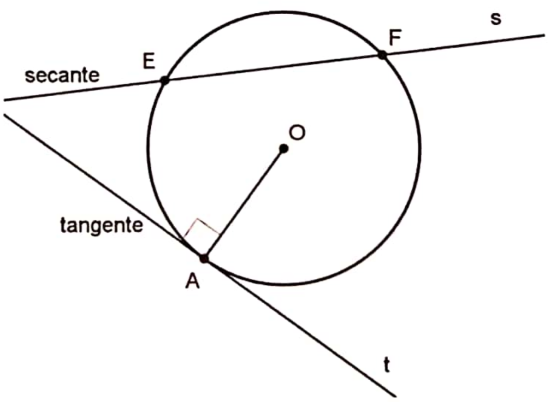
Obs.: Quando o enunciado referir-se, por exemplo, ao arco $\widehat{AB}$, considere o arco menor. Para se referir à maior porção, ou estará escrito "arco maior $\widehat{AB}$", ou haverá um terceiro ponto entre A e B, pertencente ao arco maior, como X, por exemplo, e estará escrito "arco $\widehat{AXB}$".

d) Reta Secante a uma Circunferência e Reta Tangente a uma Circunferência

Com relação a uma circunferência, uma reta pode intersectá-la de duas formas:

Reta secante é a reta que intersecta a circunferência em dois pontos distintos.

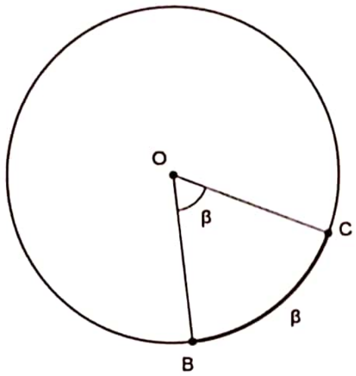
Reta tangente é a reta que intersecta a circunferência em apenas um ponto, formando com o raio, neste ponto, um ângulo reto (de $90°$).



3) Ângulos na Circunferência

a) Ângulo Central

É o ângulo que tem seu vértice no centro da circunferência. Note que seus lados intersectam a circunferência em dois pontos, que por sua vez, determinarão um arco. Um arco tem medida angular igual a de seu ângulo central correspondente.



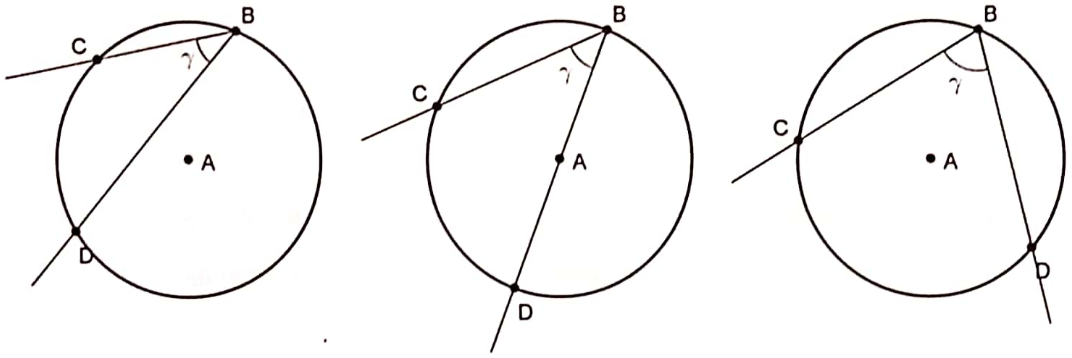
Na figura acima, se o ângulo central $B\hat{O}C$ vale β, então dizemos que o arco $\widehat{BC}$ também mede β.

Obs.: Devemos lembrar que uma circunferência completa tem $360°$, e que, portanto, uma semicircunferência tem $180°$.

Obs.2: O arco $\widehat{BC}$ também tem uma medida linear, que se relaciona com o ângulo central, formando uma proporção. Assim, dizemos que: $\frac{\beta}{360°} = \frac{\widehat{BC}}{2\pi.r}$ para calcularmos o comprimento do arco $\widehat{BC}$.

b) Ângulo Inscrito

É o ângulo que tem o vértice na circunferência e os lados secantes a ela. Na figura abaixo, vemos que o centro pode ser interno ou externo ao ângulo, ou ainda, pode pertencer a um dos lados do ângulo.



b.1) Medida do Ângulo Inscrito

Para deduzirmos a medida do ângulo inscrito, no seu computador abra o *Geogebra*:

1- Clique dentro da *Janela de Visualização* com o <u>botão direito</u> e clique em *Eixos* para suprimi-los.

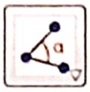
2- Clique na seta inferior direita do ícone *Círculo Dados Centro e um de seus Pontos*  e selecione a opção *Círculo Dados Centro e Raio* .

3- Clique aproximadamente no meio da *Janela de Visualização* para marcar o centro da circunferência (A), e defina o valor do raio, em seguida, para 3.

4- Clique no ícone *Novo Ponto*  e marque 3 pontos sobre a circunferência: B, C e D.

5- Clique na seta inferior direita do ícone  e selecione a opção *Semirreta Definida por Dois Pontos* .

6- Clique no ponto A, em seguida no ponto B, para traçar a semirreta $\overrightarrow{AB}$. Clique no ponto A, em seguida no ponto C, para traçar a semirreta $\overrightarrow{AC}$. Repita o processo para traçar as semirretas $\overrightarrow{DB}$ e $\overrightarrow{DC}$.

7- Clique no ícone *Ângulo* . Clique em B, A e C, para medir o ângulo $B\hat{A}C = \alpha$. Clique em B, D e C, para medir o ângulo $B\hat{D}C = \beta$.

8- Vá na aba *Opções*, *Arredondamento* e marque *1 Casa Decimal.*

9- Clique em *Mover*  e mova o ponto D pela circunferência. Mova novamente. O que você observou com relação ao ângulo β?

10- Mova agora o ponto B. Qual a relação entre as medidas dos ângulos α e β?

11- Então, se um arco mede o mesmo que seu ângulo central correspondente, o que podemos dizer do ângulo inscrito β e o arco $\widehat{BC}$ que ele subentende?

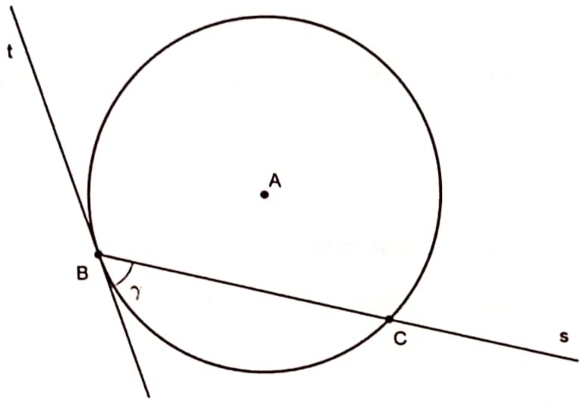
12- Se os pontos B e C fossem extremidades de um diâmetro, quanto mediria o ângulo β? Por quê (use o *Geogebra*, se preciso)?

13- O que podemos dizer de um triângulo inscrito numa circunferência (os três vértices pertencem à circunferência), onde um de seus lados é um diâmetro?

14- Clique na aba *Arquivo, Gravar Como* e salve a construção feita na pasta *Documentos* com o nome de *Ângulo Inscrito.*

c) Ângulo de Segmento (ou Semi-inscrito)

É o ângulo que tem o vértice na circunferência, um lado secante e o outro tangente à circunferência.



c.1) Medida do Ângulo de Segmento

1- Aproveitando a construção feita para o ângulo inscrito, clique com o botão direito sobre o ponto D e selecione *Apagar*. As semirretas que dele dependiam também foram apagadas.

2- Clique na seta inferior direita do ícone *Reta Perpendicular*  e selecione *Reta Tangente* . Clique sobre a circunferência e sobre o ponto B.

3- Clique no ícone *Semirreta Definida por Dois Pontos* . Clique nos pontos B e C, nesta ordem, para traçar a semirreta $\overrightarrow{BC}$.

4- Clique em *Novo Ponto*  e clique na reta tangente d (abaixo do ponto B) para marcar o ponto D.

5- Clique no ícone *Ângulo* . Clique em D, B e C, nessa ordem, para medir o ângulo $D\hat{B}C = \beta$.

6- Clique em *Mover*  e mova o ponto B pela circunferência. Mova novamente. O que podemos dizer com relação às medidas de α e β?

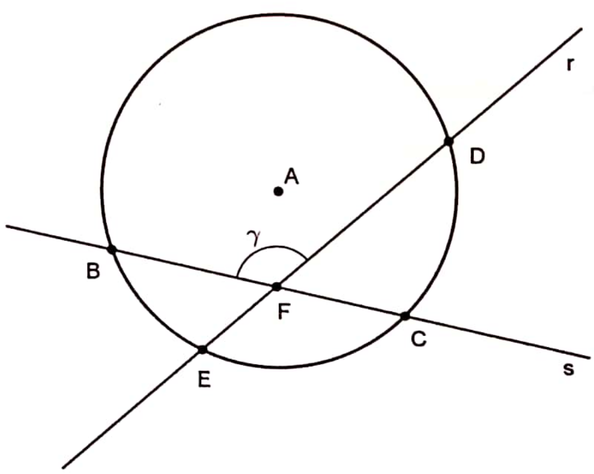
7- Então, qual a relação entre o ângulo β e o arco $\widehat{BC}$ que ele subentende?

8- A reta tangente BD forma com a semirreta $\overrightarrow{BC}$, além de β, um outro ângulo. A qual arco você poderia relacioná-lo? Que relação é essa? (Dica: Marque um ponto E acima do ponto B, na reta tangente BD. Clique no ícone *Ângulo*  e depois nos pontos C, B e E para medir o ângulo $C\hat{B}E = \gamma$.)

9- Clique na aba *Arquivo, Gravar Como* e salve a construção feita na pasta *Documentos* com o nome de *Ângulo de Segmento*.

d) Ângulo Excêntrico Interno

É qualquer um dos quatro ângulos formados por duas cordas que se intersectam num ponto interno à circunferência, distinto do centro.



d.1) Medida do Ângulo Excêntrico Interno

1- Ainda no *Geogebra*, clique na aba *Arquivo* e selecione *Novo.*

2- Clique no ícone *Círculo Dados Centro e Raio* .

3- Clique aproximadamente no meio da *Janela de Visualização* para marcar o centro da circunferência (A), e defina o valor do raio, em seguida, para 3.

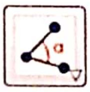
4- Clique no ícone *Novo Ponto*  e clique sobre a circunferência para marcar os pontos B e C.

5- Clique na seta inferior direita do ícone *Semirreta Definida por Dois Pontos*  e selecione a opção *Segmento Definido por Dois Pontos* . Clique no ponto B e no ponto C para traçar o segmento $\overline{BC}$.

6- Clique no ícone *Novo Ponto*  e clique sobre a circunferência, acima do segmento $\overline{BC}$, para marcar o ponto D. Clique sobre a circunferência, abaixo do segmento $\overline{BC}$, para marcar o ponto E.

7- Clique sobre a opção *Segmento Definido por Dois Pontos* . Clique no ponto D e no ponto E para traçar o segmento $\overline{DE}$.

8- Clique em *Novo Ponto*  e clique sobre a intersecção dos segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{DE}$ para marcar o ponto F.

9- Clique no ícone *Ângulo*  e clique sobre os pontos D, F e B, nessa ordem, para medir o ângulo $D\hat{F}B = \alpha$. Ele é um ângulo excêntrico interno? Por quê?

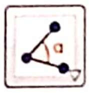
10- Clique sobre os pontos E, F e C, nessa ordem, para medir o ângulo $E\hat{F}C = \beta$. Qual a relação de sua medida com a de α? Por quê?

11- Clique sobre o ícone *Segmento Definido por Dois Pontos* . Clique no ponto A e no ponto B para traçar o segmento $\overline{AB}$. Repita o procedimento para traçar $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ e $\overline{AE}$.

12- Clique com o botão direito sobre qualquer componente da figura e selecione *Propriedades*. A janela *Preferências* será aberta. À esquerda da janela, no grupo *Segmento,* clique sobre o segmento d (não é sobre a bolinha) e, com o shift pressionado, clique no segmento g (não é sobre a bolinha), para selecionar do d ao g.

13- Na aba *Estilo,* defina o estilo da linha para pontilhado, que será aplicada aos segmentos para facilitar a visualização.

14- Da mesma forma, selecione os segmentos a e b. Vá na aba *Cor* e mude a cor deles para vermelho. Feche a janela *Preferências*.

15- Clique no ícone *Ângulo* . Clique sobre os pontos D, A e B, nessa ordem, para medir o ângulo central $D\hat{A}B = \gamma$, correspondente ao arco $\widehat{DB}$. Clique sobre os pontos E, A e C, nessa ordem, para medir o ângulo central $E\hat{A}C = \delta$, correspondente ao arco $\widehat{EC}$.

16- Clique em *Mover*  e mova o ponto B ou D até que γ meça aproximadamente $100°$. Mova o ponto E ou C até que δ meça aproximadamente $50°$. Qual o valor aproximado de α (ou de β)?

____

17- Mova o ponto B ou D até que γ meça aproximadamente $60°$. Mova o ponto E ou C até que δ meça aproximadamente $40°$. Qual o valor aproximado de α (ou de β)?

____

18- Analisando as respostas das duas etapas anteriores, pode-se afirmar que há uma relação (fórmula) entre a medida de α e a medida dos ângulos γ e δ. Você poderia dizer qual é? (Dica: $\alpha = ?$).

____

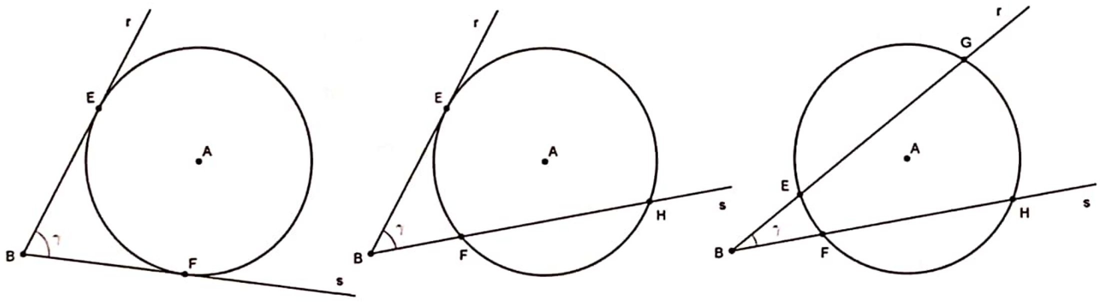
____

19- Sabendo que γ e δ são os ângulos centrais dos arcos $\widehat{BD}$ e $\widehat{EC}$, respectivamente, como podemos generalizar, em palavras, a fórmula obtida no item anterior?

20- Clique na aba *Arquivo, Gravar Como* e salve a construção feita na pasta *Documentos* com o nome de *Ângulo Excêntrico Interno.*

e) Ângulo Excêntrico Externo

É o ângulo que tem seu vértice no exterior da circunferência, cujos lados: ou são ambos secantes à circunferência, ou são ambos tangentes à circunferência, ou um é tangente e o outro secante.



e.1) Medida do Ângulo Excêntrico Externo

1- Ainda no *Geogebra*, clique na aba *Arquivo* e selecione *Novo.*

2- Clique no ícone *Círculo Dados Centro e Raio* .

3- Clique aproximadamente no meio da *Janela de Visualização* para marcar o centro da circunferência (A), e defina o valor do raio, em seguida, para 3.

4- Clique no ícone *Novo Ponto* 

e clique num ponto externo à circunferência para marcar o ponto B.

5- Selecione a opção *Segmento Definido por Dois Pontos* . Clique no ponto B e sobre o círculo em um ponto, de forma que o segmento $\overline{BC}$ fique secante à circunferência. Clique novamente no ponto B e sobre o círculo em outro ponto, de forma que o segmento $\overline{BD}$ também fique secante à circunferência.

6- Clique no ícone *Novo Ponto*  e marque a intersecção de $\overline{BC}$ com a circunferência, o ponto E. Marque também a intersecção do segmento $\overline{BD}$ com a circunferência, o ponto F.

7- Clique sobre a opção *Segmento Definido por Dois Pontos* . Clique no ponto A e no ponto C para traçar o segmento $\overline{AC}$. Repita o procedimento para marcar $\overline{AD}$, $\overline{AE}$ e $\overline{AF}$.

8- Clique com o botão direito sobre qualquer componente da figura e selecione *Propriedades*. A janela *Preferências* será aberta. À esquerda da janela, no grupo *Segmento,* clique sobre o segmento d (não é sobre a bolinha) e, com o shift pressionado, clique no segmento g (não é sobre a bolinha), para selecionar do d ao g.

9- Na aba *Estilo,* defina o estilo da linha para pontilhado, que será aplicada aos segmentos para facilitar a visualização.

10- Da mesma forma, selecione os segmentos a e b. Vá na aba *Cor* e mude a cor deles para vermelho. Feche a janela *Preferências*.

11- Clique no ícone *Ângulo*  e clique sobre os pontos C, B e D, para medir o ângulo $C\hat{B}D = \alpha$. Ele é um ângulo excêntrico externo? Por quê?

____

____

12- Clique sobre os pontos F, A e E, para medir o ângulo central $F\hat{A}E = \beta$. Clique sobre os pontos C, A e D, para medir o ângulo central $C\hat{A}D = \gamma$.

15- Clique em *Mover*  e mova o ponto C ou D até que γ meça aproximadamente $50°$. Mova o ponto B até que β meça aproximadamente $10°$. Qual o valor aproximado de α?

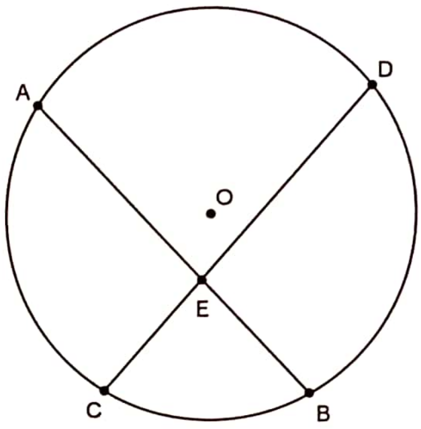
16- Mova o ponto C ou D até que γ meça aproximadamente $120°$. Mova o ponto B até que β meça aproximadamente $20°$. Qual o valor aproximado de α?

17- Analisando as respostas das duas etapas anteriores, pode-se afirmar que há uma relação (fórmula) entre a <u>medida</u> de α e a <u>medida</u> dos ângulos β e γ. Você poderia dizer qual é? (Dica: $\alpha = ?$).

18- Sabendo que β e γ são os ângulos centrais dos arcos $\widehat{EF}$ e $\widehat{CD}$, respectivamente, como podemos <u>generalizar</u>, <u>em palavras</u>, a fórmula obtida no item anterior?

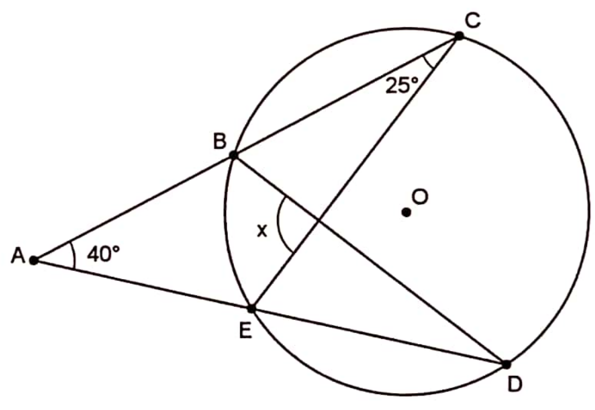
4) Questões de Vestibular

1 - (Cefet-MG) Na figura ao lado, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são cordas de um círculo de centro O, que se cortam no ponto E. Se $B\hat{A}C = 30°$ e $B\hat{E}C = 85°$, então o ângulo $A\hat{O}D$ mede:



a) $85°$ b) $90°$ c) $100°$ d) $110°$ e) $125°$

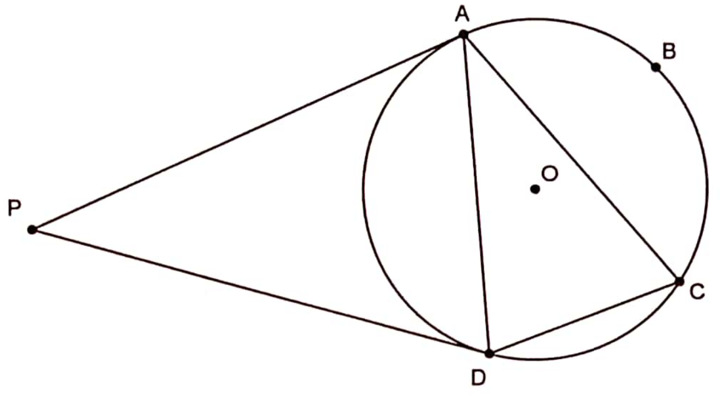
2 - (UNIFOR CE – 1998) Considere a figura abaixo:



A medida x do ângulo assinalado é:

a) $90°$ b) $85°$ c) $80°$ d) $75°$ e) $70°$

3 - (UFES – 2005) Na figura, os segmentos de reta $\overline{AP}$ e $\overline{DP}$ são tangentes à circunferência, o arco $\widehat{ABC}$ mede 110 graus e o ângulo $C\hat{A}D$ mede 45 graus. A medida, em graus, do ângulo $A\hat{P}D$ é:



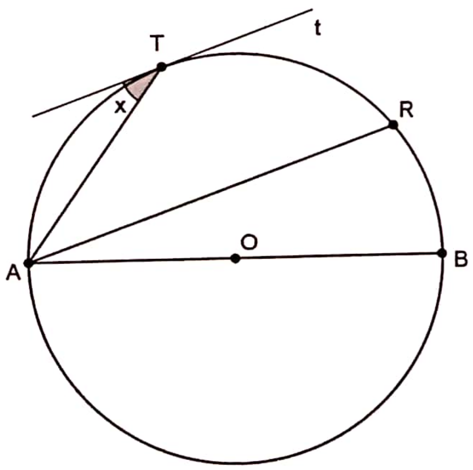
a) $15°$ b) $20°$ c) $25°$ d) $30°$ e) $35°$

4 - (Unificado-RJ – 1996) Em relação à figura abaixo, considere:

I. $\overline{AB}$ é um diâmetro da circunferência de centro O;

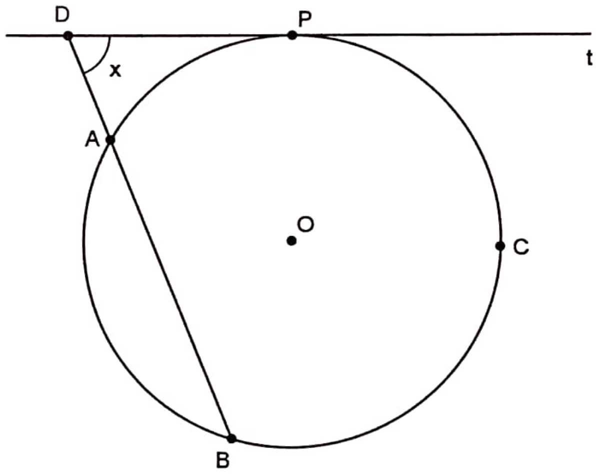
II. a reta "t", paralela à corda $\overline{AR}$, é tangente à circunferência no ponto T;

III. o ângulo $B\hat{A}R$ mede $20°$.



a) $25°$ b) $35°$ c) $40°$ d) $45°$ e) $60°$

5 – (G1 - IFSP – 2011) Na figura, a reta t é tangente, no ponto P, ao círculo de centro O. A medida do arco $\widehat{AB}$ é $100°$ e a do arco $\widehat{BCP}$ é $194°$. O valor de x, em graus, é:



a) 53° b)57° c) 61° d) 64° e) 66°

APÊNDICE B: Atividade Aplicada à Turma Regular

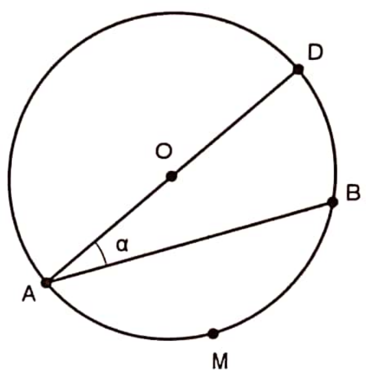
Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática.
Área: Geometria.
Orientadora: Profª. Drª. Mônica Souto da Silva Dias
Autores: Igor Abreu, Larissa Console, Thiago Fragoso.
Aluno: ____ Data: ____/____/____

Ângulos na Circunferência: um Olhar Sobre as Questões de Vestibular

1) Problemática

Tente responder à questão abaixo (não apague sua resposta):

(CESGRANRIO) Em um círculo de centro O, está inscrito o ângulo α (ver figura). Se o arco $\widehat{AMB}$ mede $130°$, o ângulo α mede:



a) $25°$ b) $30°$ c) $40°$ d) $45°$ e) $50°$

Como você resolveu? Chegou à resposta certa? Se não, imagine agora que esta pergunta, ou uma muito parecida com essa, poderia estar na sua prova de vestibular, ou no ENEM, e ser a diferença entre ingressar na Faculdade de sua escolha, ou não. Pensando nisso, é que iremos estudar Ângulos na Circunferência, que é o caminho mais fácil para vocês resolverem este tipo de questão.

2) Conceitos Iniciais

a) Circunferência

É o conjunto de todos os pontos de um plano que equidistam (mantém a mesma distância) de outro ponto do mesmo plano, a que chamamos de centro.

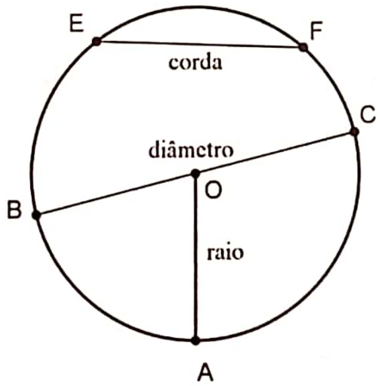
Ou seja, é a linha que delimita o círculo e que mede $2\pi.r$, sendo r o raio da circunferência.

b) Corda, Diâmetro e Raio

Corda de uma circunferência é o segmento de reta cujas extremidades são dois pontos distintos da circunferência.

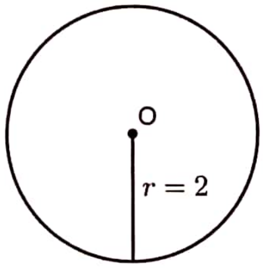
Diâmetro de uma circunferência é a corda que passa pelo seu centro.

Raio de uma circunferência é o segmento de reta com uma extremidade no centro e a outra num ponto da circunferência. O raio é metade do diâmetro, ou pode-se dizer que o diâmetro é o dobro do raio.



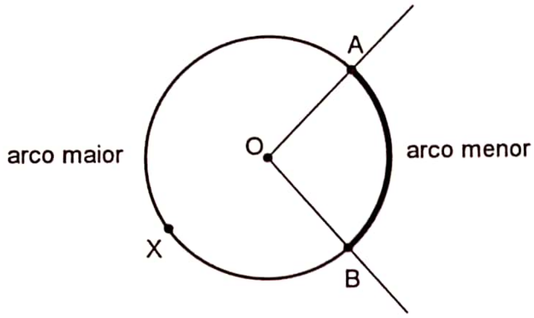
Obs.1: Uma circunferência possui infinitas cordas, raios e diâmetros.

Obs.2: Para que uma circunferência esteja definida, basta que sejam conhecidos seu centro e o seu raio. Exemplo: traçar uma circunferência de centro O e $r = 2$.



c) Arco de Circunferência

É a porção da circunferência compreendida entre dois pontos quaisquer da mesma. Dois pontos de uma circunferência determinam sobre ela dois arcos de medidas diferentes: um maior e um menor, salvo quando estes pontos forem extremos de um diâmetro (os arcos serão iguais).



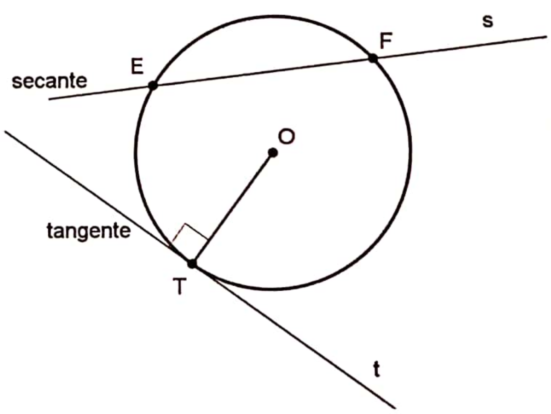
Obs.: Quando o enunciado referir-se, por exemplo, ao arco $\widehat{AB}$, considere o arco menor. Para se referir à maior porção, ou estará escrito "arco maior $\widehat{AB}$", ou haverá um terceiro ponto entre A e B, pertencente ao arco maior, como X, por exemplo, e estará escrito "arco $\widehat{AXB}$".

d) Reta Secante a uma Circunferência e Reta Tangente a uma Circunferência

Com relação a uma circunferência, uma reta pode intersectá-la de duas formas:

a) <u>Em dois pontos distintos</u>. Neste caso, dizemos que a reta é <u>secante</u> à circunferência.

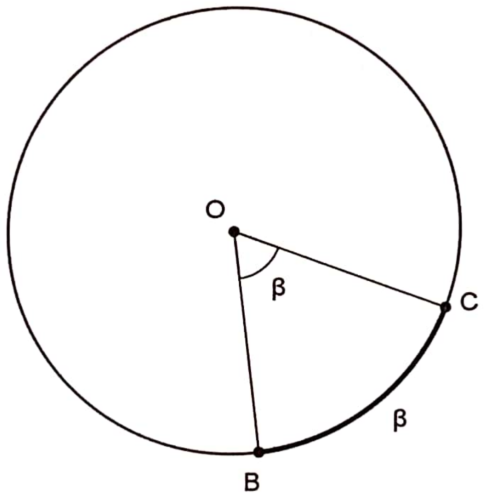
b) <u>Em apenas um ponto</u>. Neste caso, dizemos que ela é <u>tangente</u> à circunferência. Deve-se destacar que a reta forma com o raio da circunferência, no ponto de tangência, um ângulo reto (de 90°).



3) Ângulos na Circunferência

a) Ângulo Central

É o ângulo que tem seu vértice no centro da circunferência. Note que seus lados intersectam a circunferência em dois pontos que, por sua vez, determinarão um arco. Um arco tem medida igual a de seu ângulo central correspondente.



Na figura acima, se o ângulo central $B\hat{O}C$ mede β, então dizemos que o arco $\widehat{BC}$ também mede β.

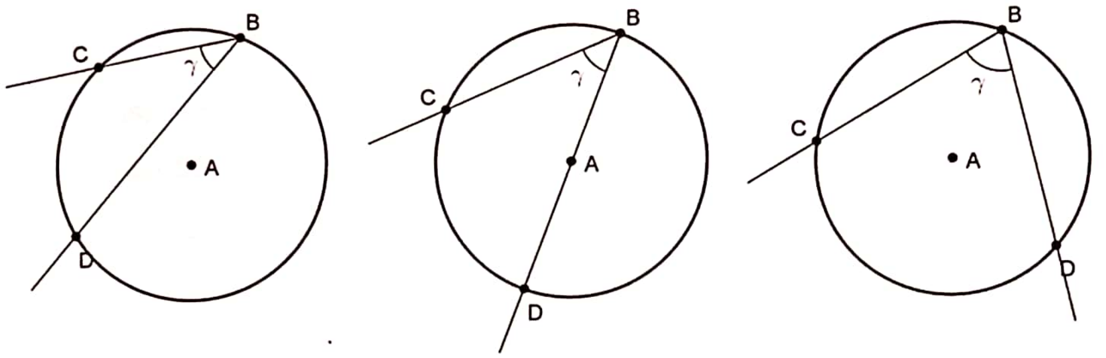
Obs.1: Devemos lembrar que uma circunferência completa tem $360°$ e que, portanto, uma semicircunferência tem $180°$.

Obs.2: O arco $\widehat{BC}$ também tem uma medida linear (comprimento) que se relaciona com o ângulo central, formando uma proporção. Assim, dizemos que: $\frac{\beta}{360°} = \frac{\widehat{BC}}{2\pi.r}$ ou $\frac{\beta}{180°} = \frac{\widehat{BC}}{\pi.r}$ para calcularmos o comprimento do arco $\widehat{BC}$.

b) Ângulo Inscrito

É o ângulo que tem o vértice na circunferência e os lados contidos em retas secantes a ela. O centro da circunferência pode ser interno ou externo ao ângulo, ou ainda, pode pertencer a um dos lados do ângulo.

Observe as figuras abaixo e diga se o centro da circunferência A é interno, externo ou pertencente ao lado do ângulo γ.



____________________ ____________________ ____________________

b.1) Medida do Ângulo Inscrito

Para deduzirmos a medida do ângulo inscrito, no seu computador, abra o *Geogebra*:

1- Clique dentro da *Janela de Visualização* com o <u>botão direito</u> e clique em *Eixos* para suprimi-los.

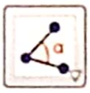
2- Clique na seta inferior direita do ícone *Círculo Dados Centro e um de seus Pontos*  e selecione a opção *Círculo Dados Centro e Raio* .

3- Clique aproximadamente no centro da *Janela de Visualização* para marcar o centro da circunferência (A), e defina o valor do raio, em seguida, igual 3.

4- Clique no ícone *Ponto*  e marque 3 pontos sobre a circunferência: B, C e D.

5- Clique na seta inferior direita do ícone *Reta*  e selecione a opção *Semirreta* .

6- Clique no ponto A, em seguida no ponto B, para traçar a semirreta $\overrightarrow{AB}$. Clique no ponto A, em seguida no ponto C, para traçar a semirreta $\overrightarrow{AC}$. Repita o processo para traçar as semirretas $\overrightarrow{DB}$ e $\overrightarrow{DC}$.

7- Clique no ícone *Ângulo* . Clique em B, A e C, (ou C, A e B) para medir o ângulo $B\hat{A}C = \alpha$. Clique em B, D e C (ou C, D e B) para medir o ângulo $B\hat{D}C = \beta$.

8- Vá na aba *Opções*, *Arredondamento* e marque *1 Casa Decimal.*

9- Clique em *Mover*  e mova o ponto D pela circunferência (sem que "ultrapasse" os pontos B e C). O que observou com relação à medida do ângulo β?

10- Atento aos ângulos α e β, mova o ponto B. Qual a relação entre as medidas dos ângulos α e β?

11- Então, se um arco mede o mesmo que seu ângulo central correspondente, o que podemos afirmar sobre as medidas do ângulo inscrito β e do arco $\widehat{BC}$ que ele subentende?

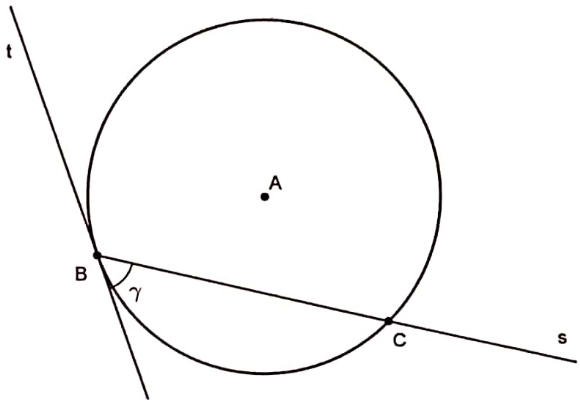
12- Se os pontos B e C fossem extremidades de um diâmetro, quanto mediria o ângulo β? Por quê (use o *Geogebra*, se preciso)?

13- Como podemos classificar quanto à medida de seus ângulos, um triângulo inscrito numa circunferência (quando seus três vértices pertencem à circunferência), quando um de seus lados é um diâmetro?

14- Clique na aba *Arquivo, Gravar Como* e salve a construção feita na pasta *Documentos* com o nome de *Ângulo Inscrito.*

c) Ângulo de Segmento (ou Semi-inscrito)

É o ângulo que tem o vértice pertencente à circunferência, um lado sobre uma reta secante à circunferência e o outro sobre uma reta tangente à circunferência.



c.1) Medida do Ângulo de Segmento

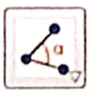
1- Aproveitando a construção feita para o ângulo inscrito, clique com o botão direito sobre o ponto D e selecione *Apagar.* As semirretas que dele dependiam também foram apagadas.

2- Clique na seta inferior direita do ícone *Reta Perpendicular*  e selecione *Reta Tangente* . Clique sobre a circunferência e sobre o ponto B.

3- Clique no ícone *Semirreta* . Clique nos pontos B e C, nesta ordem, para traçar a semirreta $\overrightarrow{BC}$.

4- Clique em *Ponto* 

e marque o ponto D na reta tangente d (D deve ser marcado de forma que $D\hat{B}C$ seja um ângulo agudo).

5- Clique no ícone *Ângulo* . Clique em D, B e C (ou C, B e D) para medir o ângulo $D\hat{B}C = \beta$.

6- <u>Atento aos ângulos α e β</u>, clique em *Mover*  e mova o ponto B pela circunferência. Qual a relação entre as medidas de α e β?

____

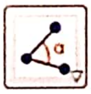
____

7- Então, qual a relação entre o ângulo β e o arco $\widehat{BC}$ que ele subentende?

____

____

8- A reta tangente d forma com a semirreta $\overrightarrow{BC}$, além de β, outro ângulo. A qual arco você poderia relacioná-lo? Que relação é essa?

Dica: Marque um ponto E na semirreta oposta à semirreta $\overrightarrow{BD}$. Clique no ícone *Ângulo*  e depois nos pontos C, B e E (ou E, B e C) para medir o ângulo $C\hat{B}E = \gamma$.

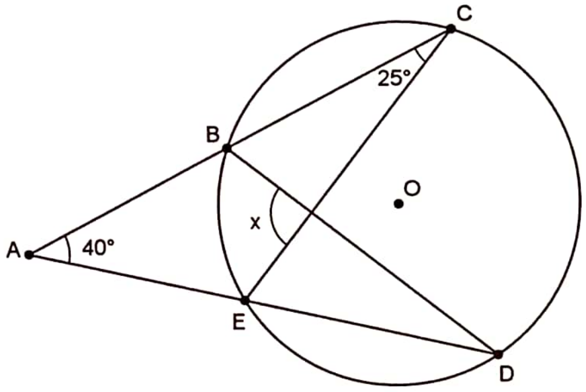
____

____

9- Clique na aba *Arquivo, Gravar Como* e salve a construção feita na pasta *Documentos* com o nome de *Ângulo de Segmento*.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO (NÃO APAGUE SUAS RESOLUÇÕES)

1- (UNIFOR–CE, 1998) Considere a figura abaixo:



A medida x do ângulo assinalado é:

a) $90°$ b) $85°$ c) $80°$ d) $75°$ e) $70°$

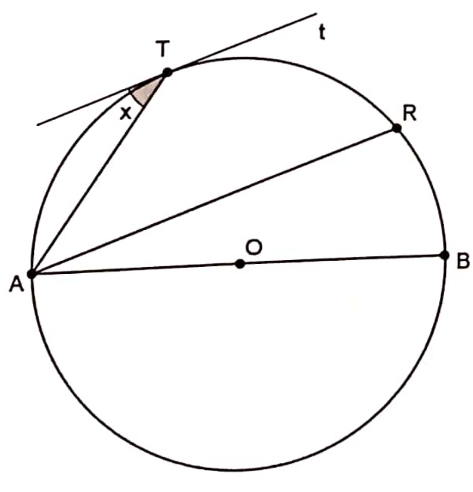
2- (Unificado–RJ, 1996) Em relação à figura abaixo, considere:

I. $\overline{AB}$ é um diâmetro da circunferência de centro O;

II. a reta "t", paralela à corda $\overline{AR}$, é tangente à circunferência no ponto T;

III. o ângulo $B\hat{A}R$ mede 20°.

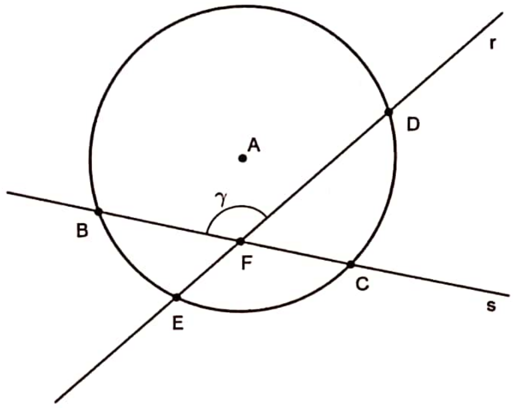
Então, a medida do ângulo x formado pela reta t e pela corda $\overline{AT}$ é:



a) $25°$ b)$35°$ c) $40°$ d) $45°$ e) $60°$

d) Ângulo Excêntrico Interno

É qualquer um dos quatro ângulos formados por duas cordas que se intersectam num ponto interno à circunferência, distinto do centro.



d.1) Medida do Ângulo Excêntrico Interno

1- Clique na aba *Arquivo* e selecione *Novo*, não se esquecendo de suprimir os eixos.

2- Vá na aba *Opções*, *Arredondamento* e marque *1 Casa Decimal.*

3- Faça uma circunferência de raio igual a 3 (de centro A).

4- Marque sobre a circunferência, os pontos B e C.

5- Trace a reta $\overleftrightarrow{BC}$.

6- Marque sobre a circunferência, os pontos D e E.

7- Trace a reta $\overleftrightarrow{DE}$ (mova o ponto D ou E pra que $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{DE}$ sejam retas concorrentes, com ponto de intersecção interno à circunferência).

8- Marque o ponto F, intersecção das retas $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{DE}$.

9- Meça o ângulo $D\hat{F}B = \alpha$. Ele é um ângulo excêntrico interno? Por quê?

____

____

10- Meça o ângulo $E\hat{F}C = \beta$. Qual a relação de sua medida com a de α? Por quê?

____

____

11- Clique na seta inferior direita do ícone *Reta*  e selecione a opção *Segmento* . Clique no ponto A e no ponto B para traçar o segmento $\overline{AB}$. Repita o procedimento para traçar $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ e $\overline{AE}$.

12- Clique com o <u>botão direito</u> sobre qualquer componente da figura e selecione *Propriedades*. A janela *Preferências* será aberta. À esquerda da janela, clique sobre *Segmento* para selecionar todos os segmentos (do d ao g).

13- Na aba *Estilo,* defina o estilo da linha para <u>pontilhado</u>, que será aplicado aos segmentos para facilitar a visualização.

14- Da mesma forma, selecione os ângulos α e β. Vá na aba *Cor* e mude a cor deles para <u>vermelho</u>. Feche a janela *Preferências*.

15- Meça o <u>ângulo central</u> $D\hat{A}B = \gamma$, correspondente ao arco $\widehat{DB}$ e o <u>ângulo central</u> $E\hat{A}C = \delta$, correspondente ao arco $\widehat{EC}$.

16- Mova o ponto B ou D até que γ meça aproximadamente $100°$. Mova o ponto E ou C até que δ meça aproximadamente $50°$. Qual o valor aproximado de α?

____

17- Mova o ponto B ou D até que γ meça aproximadamente $60°$. Mova o ponto E ou C até que δ meça aproximadamente $40°$. Qual o valor aproximado de α?

____

18- Analisando as respostas das duas etapas anteriores, pode-se afirmar que há uma relação (fórmula) entre a <u>medida</u> de α (ou de β) e a <u>medida</u> dos ângulos γ e δ. Você poderia dizer qual é? (Dica: metade).

____

____

19- Sabendo que γ e δ são os ângulos centrais dos arcos $\widehat{BD}$ e $\widehat{EC}$, respectivamente, <u>generalize em palavras</u>, a fórmula obtida no item anterior.

____

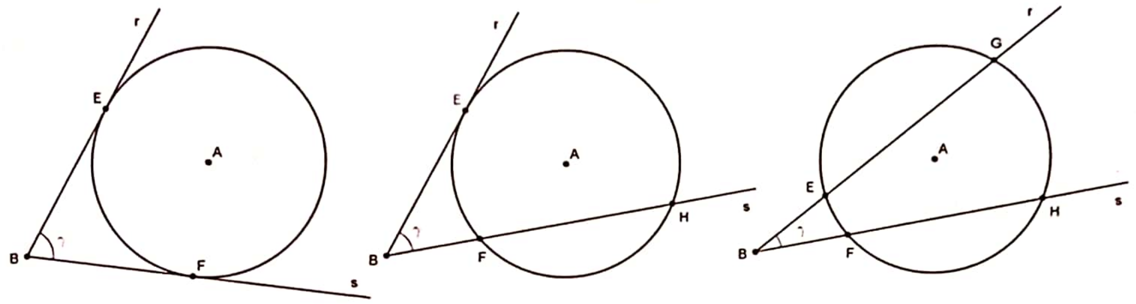
____

20- Salve a construção feita na pasta *Documentos* com o nome de *Ângulo Excêntrico Interno.*

e) Ângulo Excêntrico Externo

É o ângulo que tem seu vértice no exterior da circunferência, cujos lados estão contidos: ambos em retas secantes à circunferência, ou ambos em retas tangentes à circunferência, ou numa reta tangente e o outro numa reta secante à circunferência.

Observe as figuras abaixo e diga se os lados do ângulo γ estão ambos em retas tangentes à circunferência, ambos em retas secantes à circunferência ou um numa reta tangente e outro numa reta secante à circunferência.



______________________ ______________________ ______________________

______________________ ______________________ ______________________

e.1) Medida do Ângulo Excêntrico Externo

1- Clique na aba *Arquivo* e selecione *Novo*, não se esquecendo de suprimir os eixos.

2- Vá na aba *Opções*, *Arredondamento* e marque *1 Casa Decimal.*

3- Faça uma circunferência de raio igual a 3 (de centro A).

4- Crie um ponto B, externo à circunferência.

5- Marque os pontos C e D na circunferência. Mova-os para que fiquem o mais distantes possíveis de B.

6- Trace as semirretas $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BD}$.

7- Marque o ponto E, intersecção de $\overrightarrow{BC}$ com a circunferência. Marque também o ponto F, intersecção de $\overrightarrow{BD}$ com a circunferência.

8- Trace os segmentos $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$ e $\overline{AF}$.

9- Meça o ângulo $C\hat{B}D = \alpha$. Ele é um ângulo excêntrico externo? Por quê?

____

____

10- Meça o ângulo central $F\hat{A}E = \beta$. Meça também o ângulo central $C\hat{A}D = \gamma$.

11- Clique com o botão direito sobre qualquer componente da figura e selecione *Propriedades*. A janela *Preferências* será aberta. À esquerda da janela, clique sobre Segmento para selecionar todos os segmentos (do d ao g).

12- Na aba *Estilo,* defina o estilo da linha para pontilhado, que será aplicada aos segmentos para facilitar a visualização.

13- Use o *Shift* ou o *Ctrl* para selecionar os ângulos β e γ. Vá na aba *Cor* e mude a cor deles para vermelho. Feche a janela *Preferências.*

14- Mova o ponto C ou D até que γ meça aproximadamente $50°$. Mova o ponto B até que β meça aproximadamente $10°$. Qual o valor aproximado de α?

____

15- Mova o ponto C ou D até que γ meça aproximadamente $120°$. Mova o ponto B até que β meça aproximadamente $20°$. Qual o valor aproximado de α?

____

16- Analisando as respostas das duas etapas anteriores, pode-se afirmar que há uma relação (fórmula) entre a medida de α e a medida dos ângulos β e γ. Você poderia dizer qual é? (Dica: metade).

____

____

17- Sabendo que β e γ são os ângulos centrais dos arcos $\widehat{EF}$ e $\widehat{CD}$, respectivamente, generalize em palavras, a fórmula obtida no item anterior.

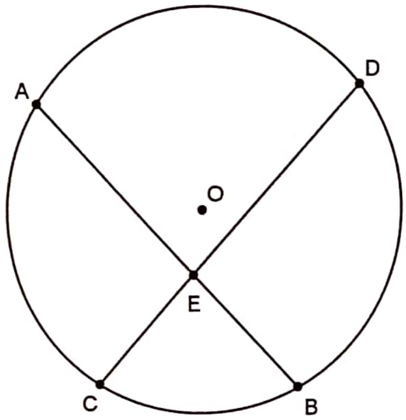
____

____

18- Salve a construção feita na pasta *Documentos* com o nome de *Ângulo Excêntrico Externo.*

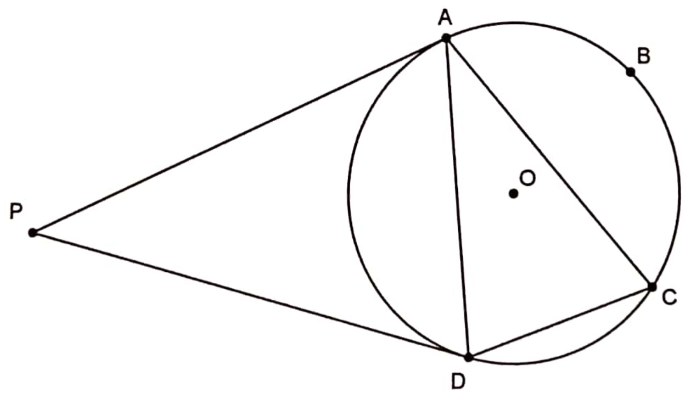
EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO (NÃO APAGUE SUAS RESOLUÇÕES)

3- (CEFET–MG) Na figura ao lado, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são cordas de um círculo de centro O, que se cortam no ponto E. Se $B\hat{A}C = 30°$ e $B\hat{E}C = 85°$, então o ângulo $A\hat{O}D$ mede:



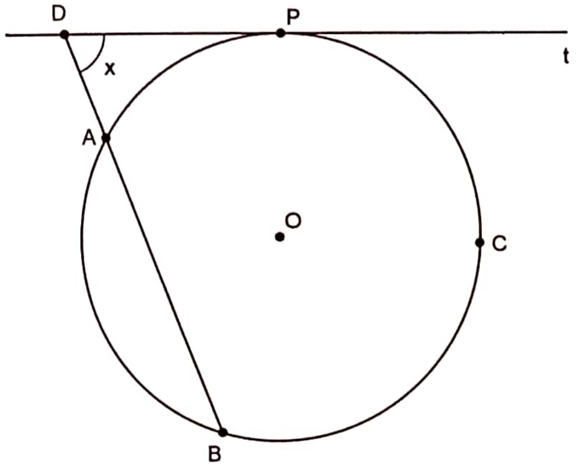
a) $85°$ b) $90°$ c) $100°$ d) $110°$ e) $125°$

4- (UFES, 2005) Na figura, os segmentos de reta $\overline{AP}$ e $\overline{DP}$ são tangentes à circunferência, o arco $\widehat{ABC}$ mede 110 graus e o ângulo $C\hat{A}D$ mede 45 graus. A medida, em graus, do ângulo $A\hat{P}D$ é:



a) $15°$ b) $20°$ c) $25°$ d) $30°$ e) $35°$

5- (G1-IFSP, 2011) Na figura, a reta t é tangente, no ponto P, ao círculo de centro O. A medida do arco $\widehat{AB}$ é $100°$ e a do arco $\widehat{BCP}$ é $194°$. O valor de x, em graus, é:



a) $53°$ b) $57°$ c) $61°$ d) $64°$ e) $66°$

Campos dos Goytacazes, 16 de dezembro de 2014.

Igor Cardoso de Abreu

Larissa Consolo de Oliveira

Thiago Fragoso Gonçalves