



Ministério da  
Educação

Secretaria de  
Educação Profissional  
e Tecnológica



**matemática**  
LICENCIATURA

# RELATÓRIO DO LEAMAT

## TEOREMA DE PICK

ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA

ISABELLA PEREIRA

SILVANA LEAL DA SILVA

SUÉLLEN TERRA FAGUNDES DOS SANTOS FERNANDES

CAMPOS DOS GOYTACAZES  
2015.2

ISABELLA PEREIRA  
SILVANA LEAL DA SILVA  
SUÉLLEN TERRA FAGUNDES DOS SANTOS FERNANDES

## **RELATÓRIO DO LEAMAT**

### **TEOREMA DE PICK**

**ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA**

Trabalho apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, *campus* Campos-Centro, como requisito parcial para conclusão da disciplina Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática III do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Mônica Souto da Silva  
Dias

**CAMPOS DOS GOYTACAZES**  
2015.2

## SUMÁRIO

1. Relatório do LEAMAT I.....	03
1.1. Atividades desenvolvidas .....	03
1.2. Elaboração da sequência didática.....	03
1.2.1.Tema .....	03
1.2.2. Justificativa.....	04
1.2.3. Objetivo .....	04
1.2.4. Público alvo .....	04
2. Relatório do LEAMAT II.....	05
2.1. Atividades desenvolvidas .....	05
2.2. Elaboração da sequência didática.....	05
2.2.1.Tema .....	05
2.2.2. Justificativa.....	05
2.2.3. Objetivo .....	06
2.2.4. Público alvo .....	06
2.2.5. A sequência didática .....	06
2.2.6. Aplicação da sequência na turma do LEAMAT .....	09
3. Relatório do LEAMAT III.....	11
3.1. Atividades desenvolvidas .....	11
3.2. Elaboração da sequência didática.....	11
3.2.1. A sequência didática .....	11
3.2.2. Aplicação da sequência na turma regular .....	11
CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	17
REFERÊNCIAS.....	18
APÊNDICES.....	20
Apêndice A - Primeira versão da Apostila .....	21
Apêndice B - Versão final da Apostila .....	27

## **1. Relatório do LEAMAT I**

### **1.1. Atividades desenvolvidas**

Inicialmente foram apresentados os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Estes são referências para o Ensino Fundamental de todo país e serve de base para trabalhos na área educacional. Seu objetivo é garantir a todas as crianças e jovens o direito de usufruir do conjunto de conhecimentos básicos. Não é obrigatório e nem um conjunto de regras, são diretrizes.

Ocorreu a apresentação de atividades tipo Caixa-preta, que são atividades de caráter investigativo, nas quais é dada uma figura construída em ambiente de Geometria Dinâmica, e o aluno deve reproduzi-la, sem acesso às etapas de construção da figura original, podendo apenas movimentá-la na tela do computador pelos seus pontos. É importante para o desenvolvimento do pensamento dedutivo do aluno na área de Geometria, possibilitando conjecturar, explorar e reformular construções.

Outra atividade trabalhada foi a construção de polígonos utilizando a técnica de Origami. Esta é uma técnica que surgiu em 1880 à partir das palavras "ori" (dobrar) e "kami" (papel), porém sua origem é desconhecida, mas acredita-se que tenha surgido naturalmente da invenção e divulgação do papel e pode estar relacionada à crenças e costumes. No Brasil é conhecido como dobraduras.

### **1.2. Elaboração da sequência didática**

#### **1.2.1. Tema**

Estudo das propriedades de pirâmide e prisma com o auxílio do geogebra 3D.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>10 tema foi alterado no LEAMAT II.



### **1.2.2. Justificativa**

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de matemática, o estudo dos conceitos geométricos pode desenvolver nos alunos um tipo especial de pensamento que permite compreender, perceber propriedades, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive (BRASIL, 1998).

Segundo o PCN (BRASIL, 1997) de Matemática, através da observação e da experimentação, os alunos são capazes de perceber as características de uma figura nos espaços bidimensionais e tridimensionais.

Rodrigues (2011) evidencia que muitos educandos não entendem que a representação bidimensional se relaciona com um objeto tridimensional e como consequência, as questões relacionadas com o tema do ensino da geometria são desenvolvidas com muita dificuldade em sala de aula.

Bento (2010) destaca que o ambiente de Geometria Dinâmica, possui vantagens sobre as desenvolvidas com lápis e papel, pois apresenta maior precisão nas medições e nos cálculos e proporciona a manipulação das construções desenvolvidas.

Em relação às tecnologias digitais, Zotto (2013) afirma que a manipulação direta de objetos possibilitada pelas mesmas, contribui para o desenvolvimento dos conceitos propostos em uma aula, neste aspecto, o autor considera que a proposta de utilizar objetos virtuais construídos no Geogebra 5.0 contribuiu na construção dos conceitos envolvendo geometria espacial.

### **1.2.3. Objetivo**

Estimular o desenvolvimento da visualização espacial, por meio de atividades no ambiente de Geometria Dinâmica, o software Geogebra versão 5.0, e levar o aluno a reconhecer prismas e pirâmides a partir de suas propriedades.

### **1.2.4. Público-alvo**

Esta atividade será elaborada para alunos do 2º. ano do Ensino Médio.

## **2. Relatório do LEAMAT II**

### **2.1. Atividades desenvolvidas**

Durante o Leamat II, as licenciandas foram convidadas a participar do Projeto Fábrica de Matemática para professores da rede Municipal que estava acontecendo no IFFluminense. O Projeto tinha como principal objetivo apresentar aos professores materiais didáticos que auxiliassem no processo de ensino-aprendizagem. Apresentamos o geoplano, utilizando-o como ferramenta para o estudo do Teorema de Pick. Desse modo, nos interessamos por tal conteúdo e optamos por mudar o tema desta linha de pesquisa.

### **2.2. Elaboração da sequência didática**

#### **2.2.1. Tema**

O tema do projeto é o Cálculo de Áreas por meio do Teorema de Pick.

#### **2.2.2. Justificativa**

De acordo com Souza (2013), o Teorema de Pick permite calcular áreas de polígonos simples, contidos em uma malha reticulada, através da contagem dos nós, ou seja, por meio da contagem dos pontos de intersecção das retas da malha.

Junior e Micena (2014), afirmam que o Teorema de Pick não é apenas útil para calcular áreas de polígonos simples, mas também é eficaz para estimar valores aproximados de  $\pi$  e estimar áreas de regiões geográficas, podendo ser estudado no ensino de Matemática da Educação Básica por meio de software como Geogebra e malhas reticuladas, sendo possível trabalhar conceitos de perímetros, semelhança de figuras, entre outros conceitos básicos de geometria.

Segundo Cousin (2013), o Teorema de Pick é pouco estudado no ensino regular da Educação Básica, porém, sua aplicação no estudo de áreas associado ao estudo de mapas, pode tornar a aprendizagem de Matemática e de Geografia mais significativos.

O Teorema de Pick foi publicado pelo matemático tcheco Georg Alexander Pick em 1899. A divulgação do mesmo foi realizada por H. Steinhaus em seu livro "Mathematical Snapshots", após a sua publicação num periódico tcheco (LIMA, 2012).

Será utilizado o recurso didático Geoplano, pois, Sobrinho (2011) afirma que este é um artefato que permite ao aluno descrever, reproduzir, montar, identificar, explorar e reconhecer as diferenças e semelhanças das formas planas e propor soluções para questionamento de cunho geométrico, algébrico, aritmético entre outros temas da matemática.

### **2.2.3. Objetivo**

Calcular áreas de figuras planas utilizando conceitos do Teorema de Pick.

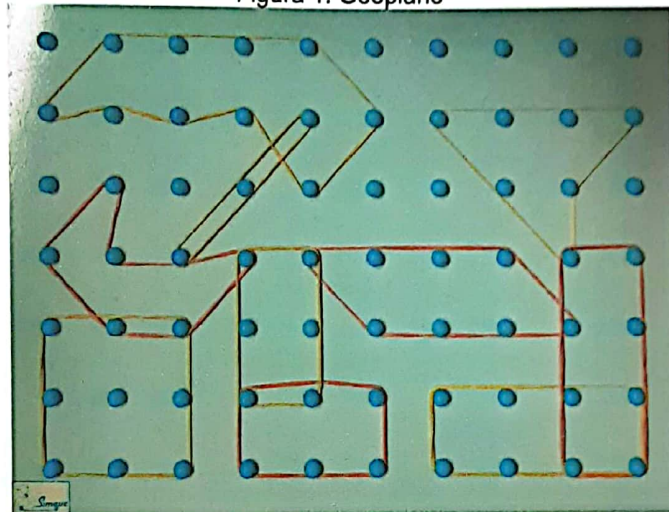
### **2.2.4. Público-alvo**

A atividade será desenvolvida para alunos do 3º ano do Ensino Médio.

### **2.2.5. Sequência didática**

Inicialmente será apresentado o recurso didático geoplano. Nesta atividade será trabalhada a versão física do geoplano, que é um tabuleiro de madeira com uma malha quadriculada impressa, com os pontos de encontro evidenciados por uma pequena esfera, de modo que se possam marcar polígonos com uso de elásticos (Figura 1).

Figura 1: Geoplano



Fonte: Elaboração própria.

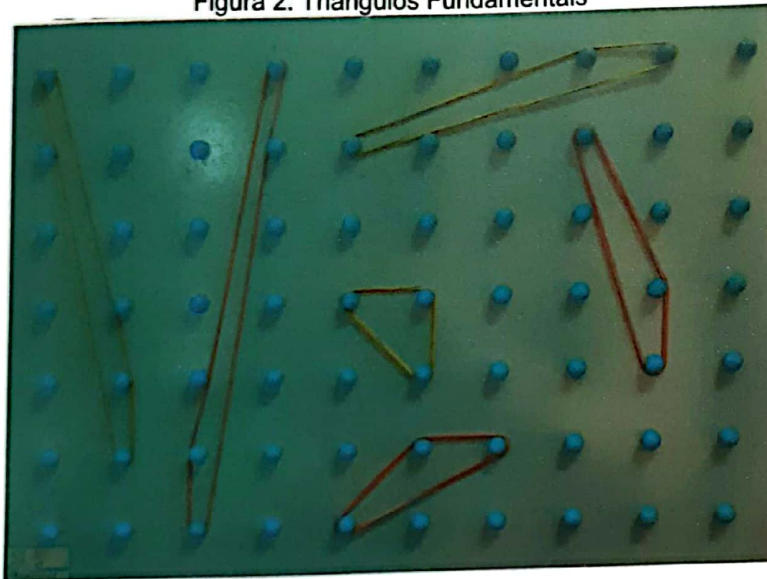
Primeiramente, os participantes serão agrupados em trios. Logo após, será entregue o material didático impresso (Apêndice A) e um geoplano por trio. Além disso, o quadro será utilizado durante toda a aula, de modo tal que todas as questões terão suas soluções registradas.

Na primeira atividade, será pedido que os alunos representem algumas figuras no geoplano com o objetivo de reconhecerem as potencialidades de tal recurso didático. Logo após, será exposto pelas licenciandas o que são pontos internos de uma figura no geoplano e será pedido que os alunos os reconheçam nas figuras elaboradas. Na próxima atividade, será destacada a importância da diferenciação de pontos internos e pontos da borda de uma figura.

Em seguida, o conceito de triângulos fundamentais (Figura 2) será definido (LIMA, 2012).



Figura 2: Triângulos Fundamentais



Fonte: Elaboração própria.

A próxima atividade foi elaborada com o objetivo de validar se os alunos aprenderam de fato a reconhecer e quantificar os triângulos fundamentais de uma figura, visto que essa definição é crucial para a demonstração do Teorema de Pick abordada, posteriormente.

As próximas atividades terão o objetivo de relacionar a área das figuras apresentadas com a quantidade de triângulos fundamentais. À medida que as atividades serão propostas, será dado um tempo para os alunos pensarem sobre cada desafio. Depois disso, as licenciandas desenvolverão no quadro as resoluções das mesmas.

Enfim, a fórmula de Pick será deduzida juntamente com os alunos. Tal processo será possível devido às construções e questionamentos pedidos nos itens anteriores. Tais como a construção de figuras, que, ao serem analisadas, possibilitaram a percepção da relação entre os pontos na borda destas e a quantidade de triângulos fundamentais que as compõem. A restrição do Teorema de Pick será discutida por meio de uma questão proposta aos alunos, na qual é solicitado o cálculo da área de um polígono não simples. Ao calcular a área utilizando o teorema, corretamente, será encontrado um resultado equivocado, o que desencadeará a reflexão sobre as condições de validade do teorema. Logo após esse processo, será pedido que os alunos solucionem a última atividade proposta, sem o uso do geoplano, com o objetivo de mostrar que o Teorema de Pick é útil na

resolução de problemas em várias áreas do conhecimento, como por exemplo: no cálculo de áreas de difícil acesso – manchas de petróleo no mar, queimadas em florestas, destroços de enchentes, etc.

#### **2.2.6. Aplicação da sequência didática na turma do Leamat**

A sequência didática foi aplicada na turma do Leamat II no dia 18 de novembro de 2015, com duração de 1h40min. Primeiramente, a turma foi dividida em trios. Logo após foi entregue a apostila de exercícios com dois geoplanos por trio. A apostila estava disponibilizada na televisão para que os alunos pudessem acompanhar o trabalho também na tela. Além disso, o quadro foi utilizado durante toda a aula, de modo tal que todas as questões tiveram suas soluções registradas à medida que eram solucionadas, juntamente, pelos alunos e pelas licenciandas.

Na primeira atividade, foi pedido que os alunos representassem algumas figuras no geoplano com o objetivo de aprenderem a manusear o objeto. Logo após, as licenciandas explicaram o que são pontos internos de uma figura no geoplano, além de destacar os pontos internos de algumas das figuras construídas pelos alunos. Na atividade 2, foi destacada a importância da diferenciação de pontos internos e pontos da borda de uma figura.

Até este momento, os alunos conseguiram facilmente resolver os exercícios propostos. E, quando surgiram pequenas dúvidas em relação ao manuseio do geoplano, as licenciandas esclareceram individualmente as indagações dos alunos.

Na segunda parte da apostila, foi definido triângulo fundamental, segundo Lima (2012). A Atividade 3 foi elaborada com o objetivo de verificar se os alunos aprenderam a reconhecer e a quantificar os triângulos fundamentais de uma figura, visto que essa definição é crucial para a demonstração do Teorema de Pick que será abordada, posteriormente, na aula.

As atividades 4, 5 e 6 tiveram o objetivo de relacionar a área das figuras apresentadas na figura 1 da apostila com a quantidade de triângulos fundamentais. Depois disso, as licenciandas desenvolveram no quadro as resoluções de tais exercícios.

Na terceira parte da apostila, foi deduzida a fórmula de Pick juntamente com os alunos. Tal processo foi possível devido às construções e questionamentos pedidos nos itens da Atividade 7, como a análise da relação entre os pontos na



borda e a quantidade de triângulos fundamentais nas figuras construídas. Os alunos tiveram dificuldades em resolver o Item "d" desta Atividade, que tratava da dedução da expressão matemática do Teorema de Pick. A dificuldade consistiu em escrever uma única expressão relacionando a quantidade de pontos na borda, a quantidade de triângulos fundamentais e a quantidade de pontos Internos. Após a intervenção das licenciandas, os alunos compreenderam a dedução.

Uma conversa sobre a aplicação do Teorema de Pick no cotidiano foi o desfecho do trabalho. Os alunos ficaram surpresos com a quantidade de situações em que a utilização deste Teorema é útil. Sendo assim, foi proposta uma questão contextualizada – Atividade 10 – que deveria ser respondida pelos alunos utilizando o Teorema de Pick. Um tempo foi dado aos alunos para a resolução da atividade. Alguns alunos tiveram problemas em identificar o que estava sendo proposto, no entanto, os mesmos alegaram que tal fato ocorreu devido à falta de habilidade que possuíam na resolução de questões deste tipo. No fim, as licenciandas corrigiram a questão e iniciaram o momento para discussões acerca da sequência didática.

Em relação aos comentários acerca das atividades, as sugestões tangem a quantidade de questões, visto que, para alguns alunos, as Atividades 2, 3, 7, item c, devem conter uma menor quantidade de figuras (questões 2 e 7, item c) e imagens (atividade 3). Os alunos e as professoras elogiaram o trabalho, enfatizando o ineditismo do tema.

### **3. Relatório do LEAMAT III**

#### **3.1. Atividades desenvolvidas**

Nesse semestre, foram realizadas a adequação da sequência didática, o agendamento de escola para a experimentação desta, a elaboração e apresentação do relatório final

#### **3.2. Elaboração da sequência didática**

##### **3.2.1. Sequência didática**

Após a leitura do material didático impresso pela professora da turma na qual foi experimentado a sequência didática, a mesma fez várias sugestões e observações. Tendo em vista este fato, o material didático (Apêndice B) sofreu alterações, a fim de tornar mais clara a visualização de regularidades entre os pontos internos, os pontos da borda e o número de triângulos fundamentais do polígono e a relação entre os mesmos.

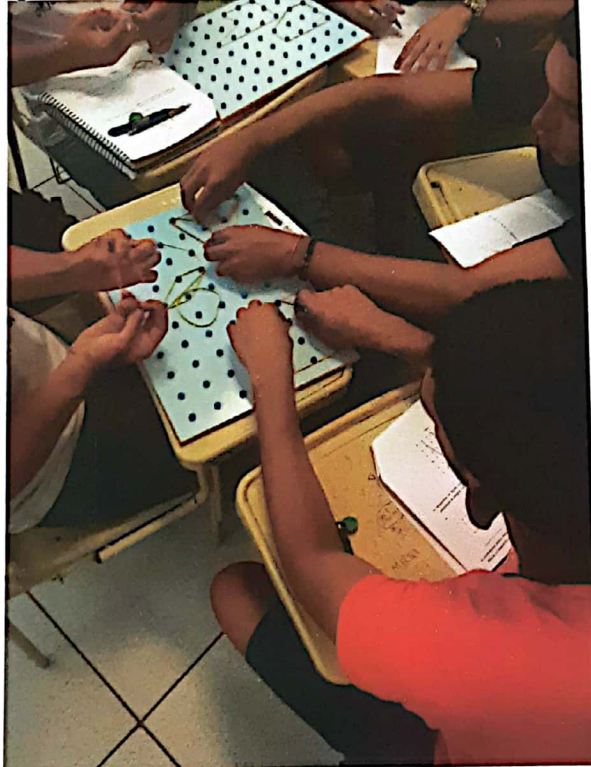
##### **3.2.2. Aplicação da sequência didática na turma regular**

A sequência didática foi aplicada na turma de 3º ano do curso Técnico em Edificações integrado ao Ensino Médio do Instituto Federal Fluminense, com 27 alunos presentes, no dia 09 de março de 2016, com duração de 1h40min. Inicialmente, as licenciandas foram apresentadas pela orientadora do trabalho, que enfatizou a importância da participação da turma para a experimentação eficiente da proposta.

Primeiramente, foi perguntado a turma se eles conheciam o geoplano e se já haviam utilizado em alguma aula de Matemática, obtendo resposta negativa para ambas as perguntas. A turma foi dividida em grupos de três a cinco alunos. Logo após foi entregue a apostila de exercícios com um geoplano por grupo. Além disso, o quadro foi utilizado durante toda a aula, de modo tal que todas as questões tiveram suas soluções registradas à medida que eram solucionadas, juntamente, pelos alunos e pelas licenciandas.

Para um contato inicial do aluno com o geoplano, a primeira atividade solicitava a representação de algumas figuras no geoplano.

Figura 3: Alunos representando figuras no geoplano

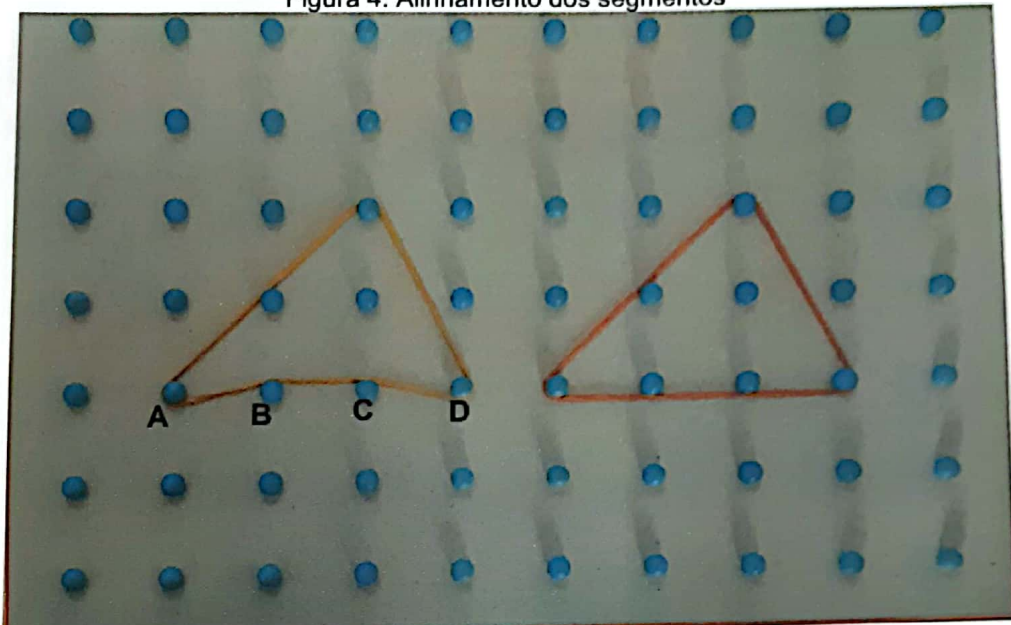


Fonte: Protocolo de pesquisa.

Logo após, as licenciandas explicaram o que são pontos internos de uma figura no geoplano, além de destacar os pontos internos de algumas das figuras construídas pelos alunos. Uma aluna perguntou se a configuração da esquerda mostrada na Figura 4 seria considerada uma linha reta, uma vez que os segmentos AB, BC e CD não parecem estar alinhados. Uma das licenciandas explicou que, no contexto do geoplano, tal configuração constituiria um segmento, ou seja, o lado do pino pelo qual passa o elástico não interfere no alinhamento dos segmentos, sendo estes sempre considerados alinhados, assim como apresentado na configuração da direita na Figura 4. Este fato surpreendeu as licenciandas e a orientadora, porque não havia-se pensado sobre esta possibilidade.



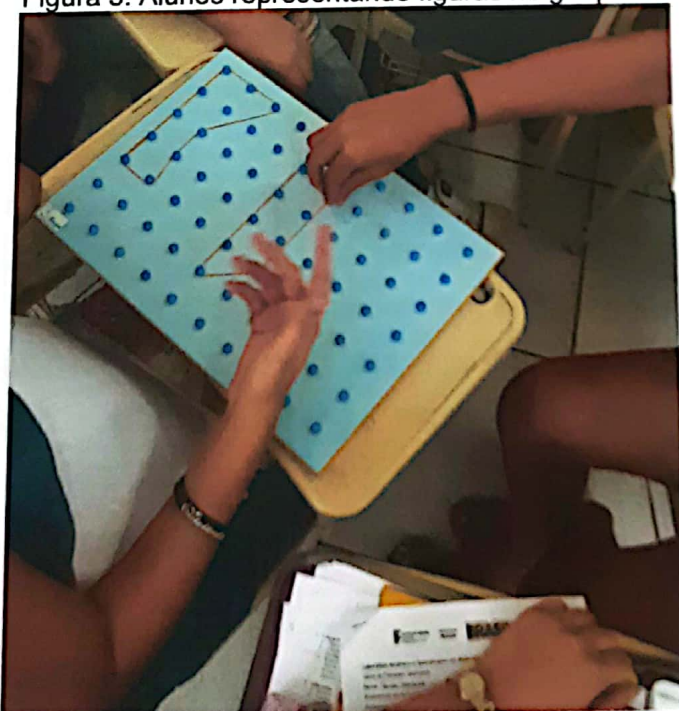
Figura 4: Alinhamento dos segmentos



Fonte: Elaboração própria.

Na atividade 2, muitos alunos fizeram figuras além das pedidas, tais como: figuras com 9 pontos sendo dois internos e 11 pontos sendo dois internos.

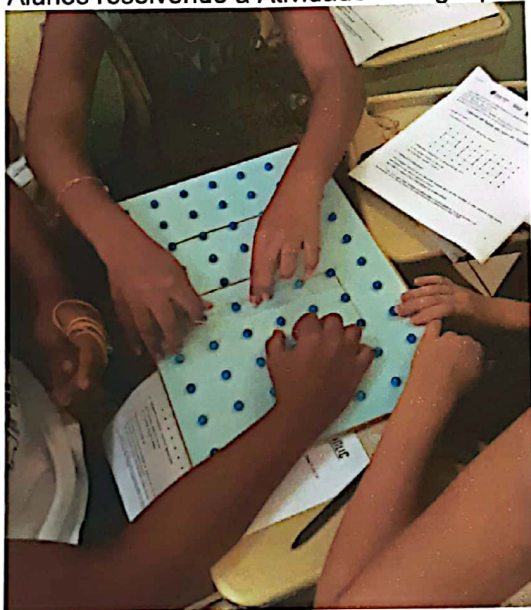
Figura 5: Alunos representando figuras no geoplano



Fonte: Protocolo de pesquisa.

É importante destacar que os alunos resolveram a Atividade 3 no geoplano, reproduzindo cada figura neste e, com outros elásticos, destacaram os triângulos fundamentais delas. Tal processo foi feito por todos os grupos, embora isto não tenha sido solicitado.

Figura 6: Alunos resolvendo a Atividade 3 no geoplano



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Este episódio pode indicar que os alunos possuem necessidade de recursos que permitam a visualização de objetos matemáticos, auxiliando assim, a compreensão de afirmações matemáticas.

À medida que as atividades foram propostas, foi dado um tempo para os alunos pensarem sobre cada desafio. Depois disso, as licenciandas desenvolveram no quadro as resoluções de tais exercícios. Foi observado que os alunos não tiveram dificuldades em relacionar a área das figuras e o número de triângulos fundamentais.

Figura 7: Preenchimento da tabela da Atividade 7

B	I	T	Área
0	0	4	2,00
6	1	6	3,00
	2	8	4,00
	3	10	5,00
	0		
	1		
12	2		
	3		

B	I	T	Área
0	2	2	1,00
4	1	4	2,00
	2	6	3,00
	3	8	4,00
	0	3	1,50
5	1	5	2,50
	2	7	3,50
	3	9	4,50

Fonte: Protocolo de pesquisa.

A fórmula de Pick foi deduzida juntamente com os alunos. Cabe ressaltar que os alunos preencheram a tabela rapidamente, inclusive sem recorrer a representação gráfica dos polígonos solicitados. Observou-se que eles logo perceberam a regularidade entre o número de pontos na borda, o número de triângulos fundamentais e o número de pontos internos para cada polígono. Entretanto, não conseguiram perceber a relação existente entre tais números simultaneamente.

Figura 8: Anotações de um aluno

Observando os dados da tabela acima, encontre:

a) Uma relação entre T e B, considerando  $I=0$ .

$T = B - 2$

---

b) Uma relação entre T, B e I.

$T = B + 2I - 2$

---

8) Considerando os resultados obtidos nas questões 6 e 7, deduza a seguir a fórmula para se encontrar a área das figuras numa malha, considerando o número B o número de pontos na borda, T número de triângulos fundamentais e I número de pontos internos. Tal relação é chamada de Teorema de Pick.

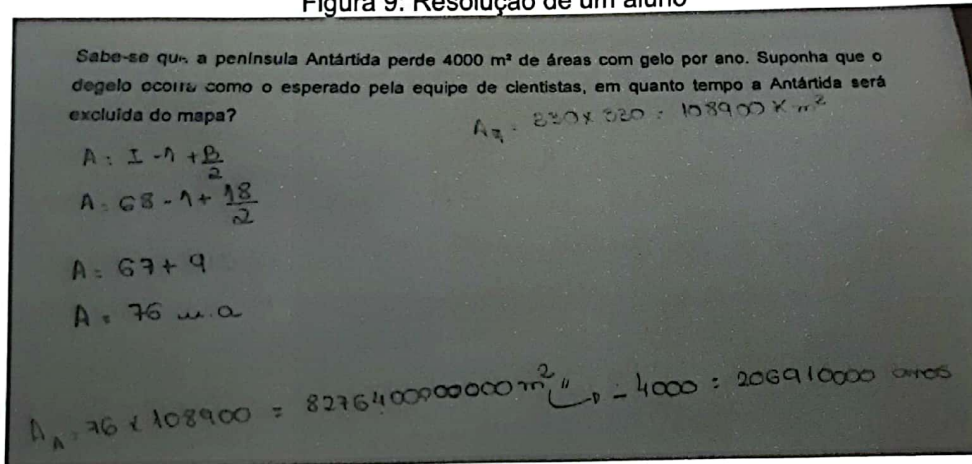
$A = \frac{T}{2} \quad A = \frac{B - 2 + 2 \cdot I}{2} = \frac{B}{2} - 1 + I$

Fonte: Protocolo de pesquisa.



Em seguida, foi solicitado que os alunos fizessem a Atividade 9, sem o uso do geoplano. A maioria dos alunos teve muita facilidade em utilizar a fórmula de Pick. Uma conversa sobre a aplicação do Teorema de Pick no cotidiano foi o desfecho do trabalho. Ao final, a atividade 10 foi solucionada juntamente com os alunos.

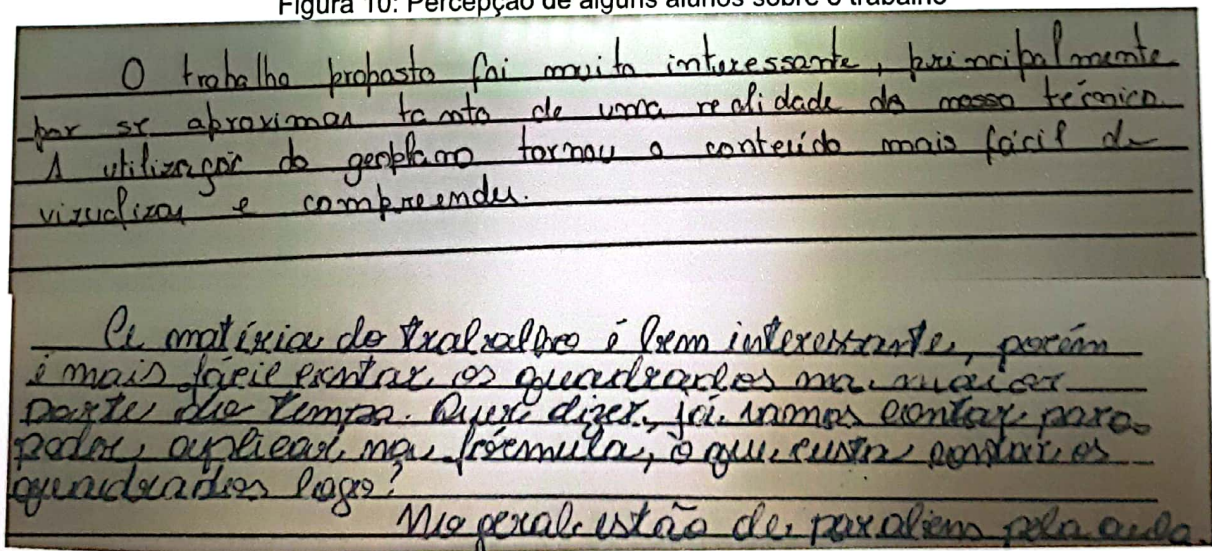
Figura 9: Resolução de um aluno



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Segue a percepção dos alunos sobre o trabalho apresentado:

Figura 10: Percepção de alguns alunos sobre o trabalho



Fonte: Protocolo de pesquisa.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

A turma na qual foi aplicada a proposta, não conhecia o recurso didático Geoplano. Este fato pode evidenciar que os recursos didáticos não estão sendo utilizados nas aulas de Matemática.

O episódio da dúvida de uma aluna a respeito do alinhamento de segmentos relatado no item 3.2.2, permite refletir sobre o uso cuidadoso de recursos didáticos como o geoplano. Este, assim como tantos outros, possui particularidades que muitas vezes não são observadas pelos professores, como neste caso, as licenciandas e a orientadora nunca haviam pensado sobre tal configuração, nem tampouco que ela poderia ocorrer.

Os alunos não tiveram dificuldades em reconhecer as regularidades e identificá-las. Porém, apresentaram dificuldades em escrever uma única expressão algébrica, relacionando três variáveis (número de pontos internos, número de pontos na borda e número de triângulos fundamentais). Cabe ressaltar que não foi observada dificuldade para relacionar algebricamente duas variáveis. Este fato permite conjecturar que a habilidade relacionada a manipulação algébrica não deve ter sido desenvolvida na medida necessária para resolução de atividades propostas neste trabalho, durante toda a educação básica, uma vez que estes alunos já estão na última série deste nível de ensino.

Recomenda-se que essa proposta pedagógica seja desenvolvida em mais de 1h40min, pois esta experimentação mostrou que este tempo não foi suficiente para que os alunos desenvolvessem de modo autônomo a dedução do Teorema de Pick, sendo necessário a intervenção das licenciandas para que todas as atividades fossem concluídas no tempo previsto (1h40min).

Deste modo, considera-se que os objetivos propostos foram atingidos.

## REFERÊNCIAS

- BENTO, H. A. (2010). **O Desenvolvimento do Pensamento Geométrico como a Construção de Figuras Geométricas Planas utilizando o software Geogebra.** Belo Horizonte, Minas Gerais.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática.** Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/ SEF, 1998.
- COUSIN, A. O. A. **Da Teoria Para A Prática: Um Trabalho Interdisciplinar Envolvendo Matemática E Geografia.** XIX Eremats. Santa Maria, 2013.
- JUNIOR, F. S. S., Micena, F. P. **Sugestões para Aplicação do Teorema de Pick na Educação Básica.** 2014.
- LIMA, Elon Lages. **Meu professor de Matemática e outras histórias.** 6. ed. Rio de Janeiro: Sbm, 2012.
- RODRIGUES, G. C. **Introdução ao Estudo de Geometria Espacial pelos caminhos da arte e por meio de recursos computacionais.** Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemáticas. Blumenau, Universidade Federal de Blumenau, UFSC Campus Blumenau, 2011.
- SOBRINHO, C. J. **Geoplano no Ensino de Geometria: Cálculo de Áreas.** Anápolis, 2011.
- SOUZA, F. O. **O Teorema de Pick: Uma Nova Abordagem Sobre Áreas de Figuras Planas Para o Ensino Básico.** Vitória, ES. Universidade Federal Do Espírito Santo, 2013
- ZOTTO, N. D. ; MACHADO, G. M. Z. ; MELLO, K. B. de ; SILVA, R. S. **Geogebra 3D e quadro interativo: uma possibilidade para o ensino de geometria espacial no**

ensino médio. In: Anais... Congresso Internacional de Ensino de Matemática –  
Canoas, 2013.

**Data e assinatura dos autores**

Campos dos Goytacazes, 18 de julho de 2016.

Silvana Leal da Silva  
Suelter Leira Laguardis dos S. Fernandes.

# APÊNDICES



## APÊNDICE A: Primeira versão da Apostila



INSTITUTO FEDERAL DE  
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
FLUMINENSE

Secretaria de  
Educação Profissional  
e Tecnológica

Ministério da  
Educação



Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática II

Linha de Pesquisa: Geometria

Nome: \_\_\_\_\_ Data: / /

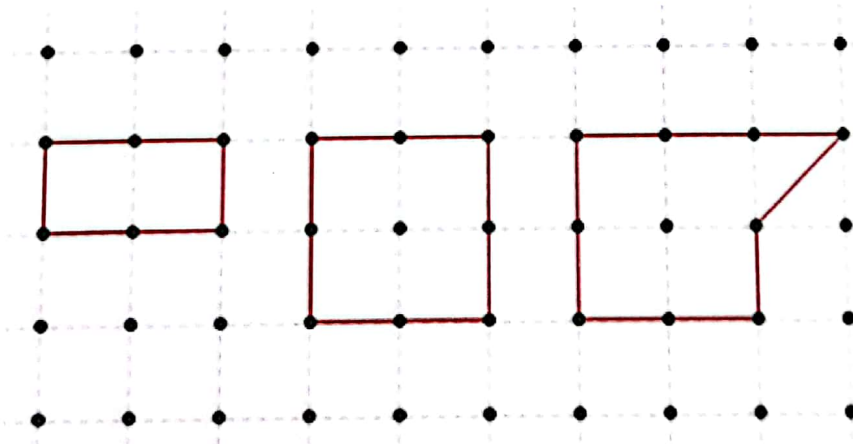
Professoras em formação: Isabella Pereira, Silvana Leal e Suellen Fernandes. Professora

Orientadora: Mônica Souto da Silva Dias

### Cálculo de Áreas por meio do Teorema de Pick

I – Figuras na malha

1) Represente no Geoplano as figuras dadas:



2) Utilizando o Geoplano, construa figuras com:

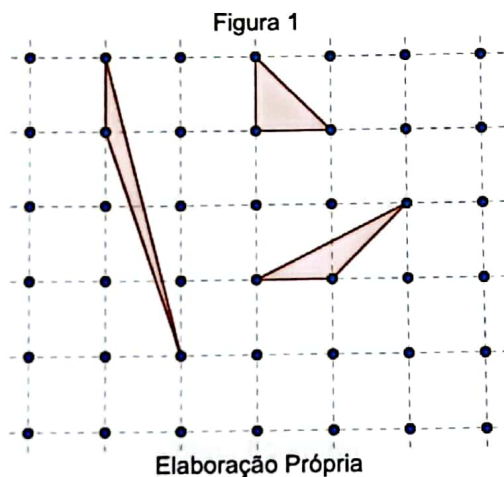
- a) 10 pontos, sendo 2 internos.
- b) 11 pontos, sendo 1 interno.
- b) 13 pontos, sendo 1 interno.



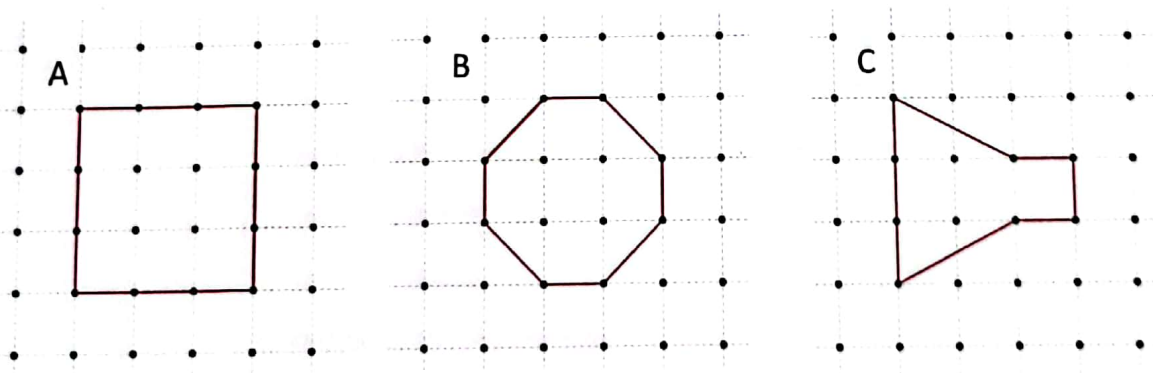
## II – Triângulo Fundamental

Um triângulo chama-se fundamental quando tem os três vértices e mais nenhum outro ponto (da borda ou do interior) sobre a malha<sup>2</sup>.

Na malha a seguir temos três triângulos fundamentais:

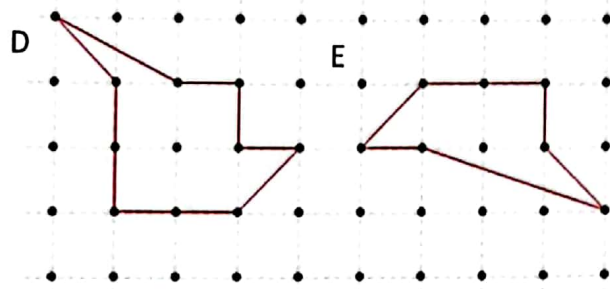


3) Reconheça e determine, quantos triângulos fundamentais estão contidos nas imagens abaixo:



---

<sup>2</sup>LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. Coleção Professor de Matemática, 5ª Ed., CIDADE: EDITORA, 2006, p.103. Sociedade Brasileira de Matemática.



4) Considerando como unidade de área  $A$  um quadrado sem pontos internos



, qual a área de um triângulo fundamental? Para responder, analise os triângulos da figura 1.

5) Qual a relação entre a área de cada figura da questão três e o número de triângulos fundamentais?

### III – Teorema de Pick

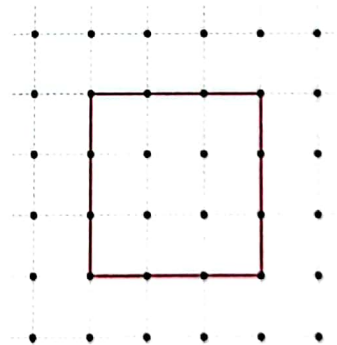
Neste item vamos deduzir o Teorema de Pick.

A figura ao lado apresenta:

12 Pontos na **BORDA**

4 Pontos **INTERNOS**

18 **TRIÂNGULOS** Fundamentais



5) Considerando  $B$  o número de pontos na Borda,  $I$  o número de pontos internos e  $T$  o número de triângulos fundamentais, **construa** figuras no geoplano e determine suas respectivas **áreas** de modo que atendam as condições em cada item.

- a) Três figuras com diferentes números de pontos na bordas, sendo que nenhuma delas apresente ponto interno:

B	I	T
	0	
	0	
	0	

- b) Ao aumentar um ponto na borda, quantos triângulos fundamentais foram acrescentados?

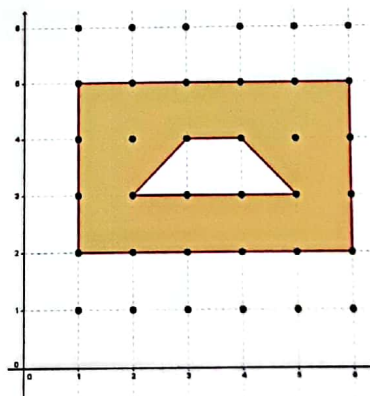
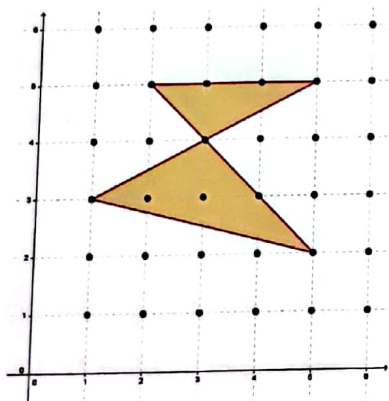
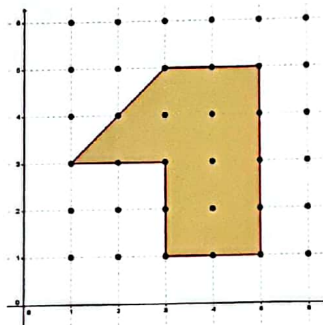
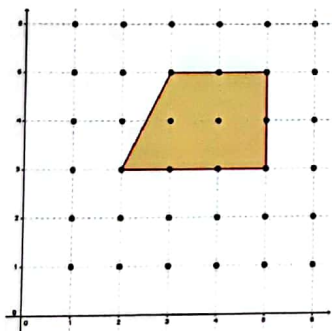
- c) Escolha duas figuras da questão anterior. Faça figuras que apresentem o mesmo número de pontos na borda delas, sendo que as novas figuras tenham o número de pontos internos pedido.

B	I	T
	1	
	2	
	3	
	1	
	2	
	3	

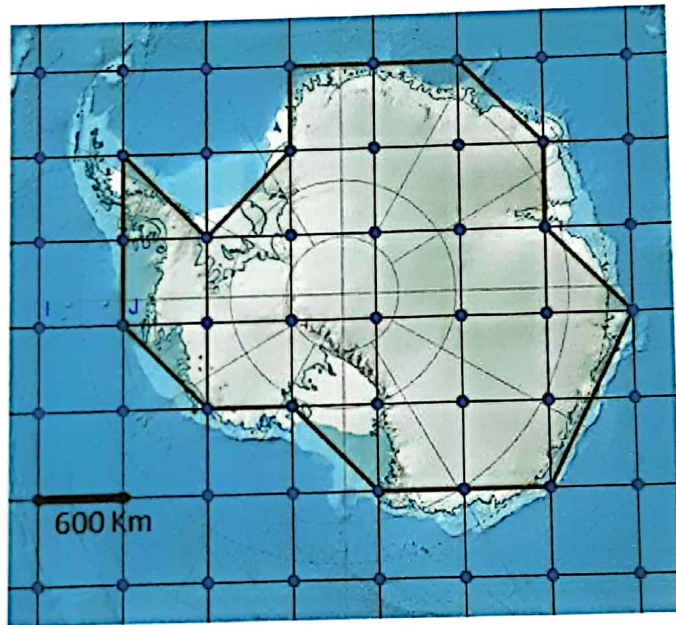
- d) Ao analisar uma figura com o mesmo número de pontos nas bordas, sendo que cada uma possui uma quantidade de pontos internos diferentes, qual a relação entre o número de pontos internos? Qual o acréscimo na quantidade de triângulos fundamentais?

- 7) Com base na informação acima e na relação de T com a Área A, escreva abaixo a fórmula para se encontrar a área das figuras numa malha, considerando o número B o número de pontos na borda, T número de triângulos fundamentais e I número de pontos internos. Tal relação é chamada de Teorema de Pick.

8) Com base nas fórmulas das áreas de figuras planas, comprove a validade do teorema de Pick nas figuras abaixo:



9) “Geleiras em parte da Antártida começaram a derreter rapidamente, contribuindo ainda mais para o aumento do nível do mar que ameaça os litorais e cidades de Nova York a Xangai, afirmou uma equipe de cientistas num estudo publicado na revista “Science”. Outro especialista na área, no entanto, imediatamente lançou dúvidas sobre as conclusões, sugerindo que o estudo superestimou consideravelmente a taxa de perda do gelo. As geleiras ao longo de um trecho da costa de cerca de 750 quilômetros quadrados na península Antártica, que se estende em direção à América do Sul, começaram a adinar de repente por volta de 2009, disse a equipe que produziu o estudo.”



Disponível em: [www.g1.globo.com](http://www.g1.globo.com). Acesso em: 31 ago 2015 (adaptado)

Sabe-se que a península Antártica perde  $4000 \text{ m}^2$  de áreas com gelo por ano. Suponha que o degelo ocorra como o esperado pela equipe de cientistas, em quanto tempo a Antártida será reduzida à uma ilha circular de 800 km de diâmetro?

## APÊNDICE B: Versão final da Apostila



Ministério da  
Educação



Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática III

Linha de Pesquisa: Geometria

Nome: \_\_\_\_\_

Data: / /

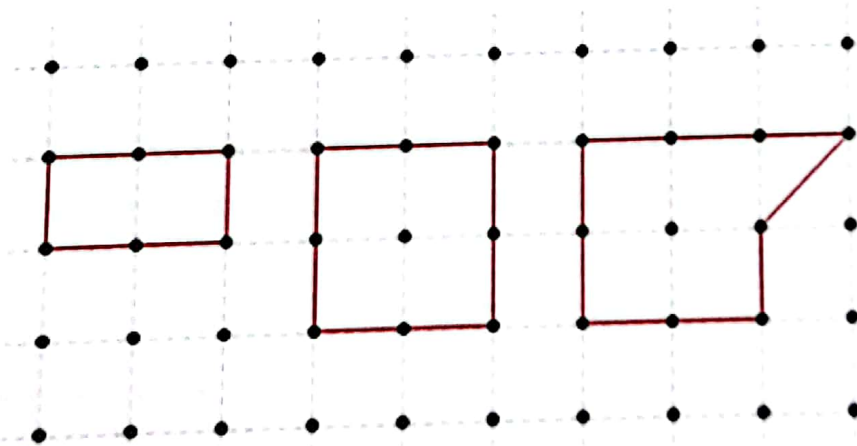
Professoras em formação: Isabella Pereira, Silvana Leal e Suéllen Fernandes.

Professora Orientadora: Mônica Souto da Silva Dias

### Cálculo de Áreas por meio do Teorema de Pick

I – Figuras na malha

1) Represente no Geoplano as figuras dadas:



2) Utilizando o Geoplano, construa figuras com:

a) 10 pontos, sendo 2 internos.

b) 11 pontos, sendo 1 interno.

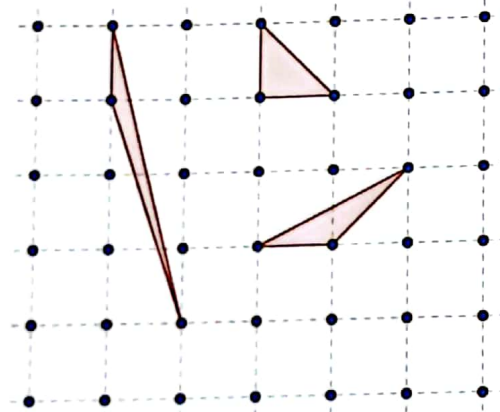


## II – Triângulo Fundamental

Um triângulo chama-se fundamental quando tem os três vértices e mais nenhum outro ponto (da borda ou do interior) sobre a malha<sup>3</sup>.

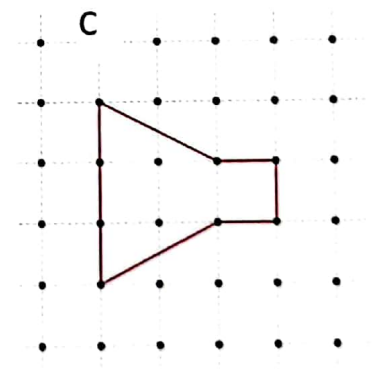
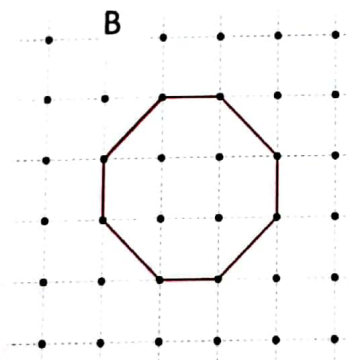
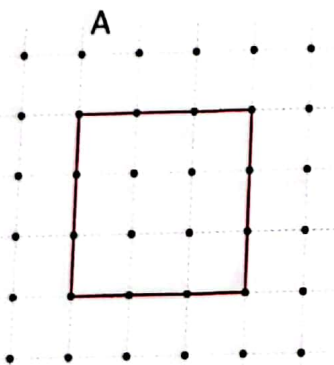
Na malha a seguir temos três triângulos fundamentais:

Figura 1




Elaboração Própria

- 3) Decomponha as figuras abaixo em triângulos fundamentais de forma que não haja sobreposição de triângulo, nem sobra de espaço.



<sup>3</sup> LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática e outras histórias.** (Coleção Professor de Matemática), 5ª ed., Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006, p.103.

- 4) Considerando como a unidade de área (u.a.) de um quadrado sem pontos internos , qual a área de um triângulo fundamental? Para responder, analise os triângulos da figura 1.
- 

- 5) Qual a área de cada figura da questão três?
- 

- 6) Qual a relação entre a área das figuras e o número de triângulos fundamentais?
- 

### III – Teorema de Pick

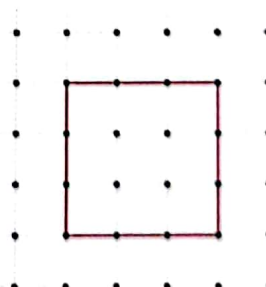
Neste item vamos deduzir o Teorema de Pick.

A figura ao lado apresenta:

12 Pontos na **BORDA**

4 Pontos **INTERNOS**

18 **TRIÂNGULOS** Fundamentais



7) Considerando **B** o número de pontos na Borda, **I** o número de pontos internos e **T** o número de triângulos fundamentais. Para fixar ideias, vamos escolher 3 figuras com diferentes pontos na borda e computar na tabela abaixo. Trabalhe com o geoplano.

<b>B</b>	<b>I</b>	<b>T</b>	<b>Área</b>
	0		
	1		
	2		
	3		
	0		
	1		
	2		
	3		
	0		
	1		
	2		
	3		

Observando os dados da tabela acima, encontre:

a) Uma relação entre **T** e **B**, considerando  $I=0$ .

---

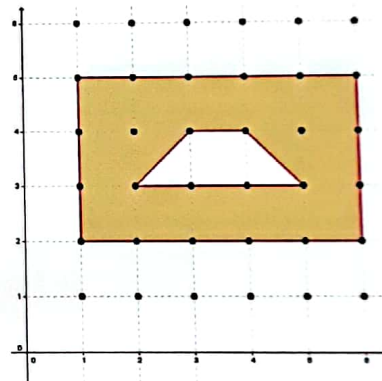
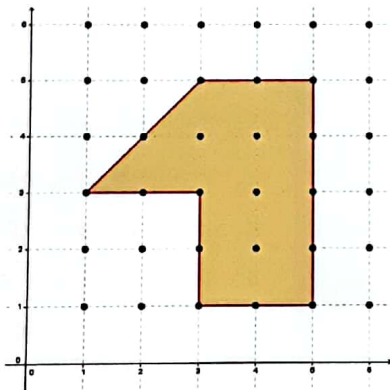
b) Uma relação entre **T**, **B** e **I**.

---

8) Considerando os resultados obtidos nas questões 6 e 7, deduza a seguir a fórmula para se encontrar a área das figuras numa malha, considerando o número  $B$  o número de pontos na borda,  $T$  número de triângulos fundamentais e  $I$  número de pontos internos. Tal relação é chamada de Teorema de Pick.

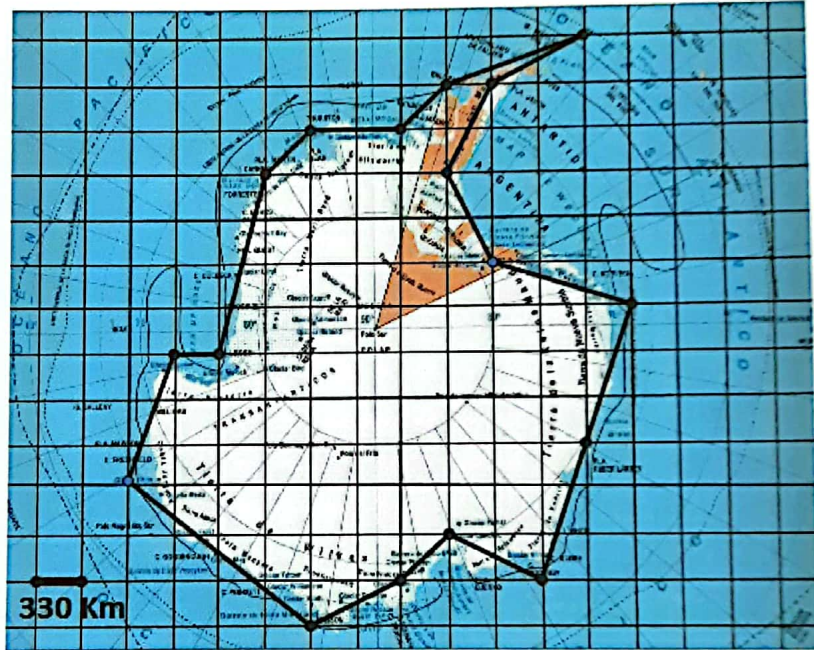
---

9) Com base nas fórmulas das áreas de figuras planas, a validade do teorema de Pick nas figuras abaixo:



10) “Geleiras em parte da Antártida começaram a derreter rapidamente, contribuindo ainda mais para o aumento do nível do mar que ameaça os litorais e cidades de Nova York a Xangai, afirmou uma equipe de cientistas num estudo publicado na revista “Science”. Outro especialista na área, no entanto, imediatamente lançou dúvidas sobre as conclusões, sugerindo que o estudo superestimou

consideravelmente a taxa de perda do gelo. As geleiras ao longo de um trecho da costa de cerca de 750 quilômetros quadrados na península Antártica, que se estende em direção à América do Sul, começaram a afundar de repente por volta de 2009, disse a equipe que produziu o estudo.”



Disponível em: [www.g1.globo.com](http://www.g1.globo.com). Acesso em: 31 ago 2015 (adaptado)

Sabe-se que a península Antártica perde 4000 m<sup>2</sup> de áreas com gelo por ano. Suponha que o degelo ocorra como o esperado pela equipe de cientistas, em quanto tempo a Antártida será excluída do mapa?