

RELATÓRIO DO LEAMAT

ALÉM DA FÓRMULA: RELAÇÃO ENTRE OS VOLUMES DO CILINDRO E DO CONE

ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA

GABRIEL OLIVEIRA MARINHO
LEOMARIO RIBEIRO MACIEL DA SILVA
ROMARIO DE AZEREDO GOMES

Recebido em 21/08/18
[Assinatura]

CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
2018.1

GABRIEL OLIVEIRA MARINHO
LEOMARIO RIBEIRO MACIEL DA SILVA
ROMARIO DE AZEREDO GOMES

RELATÓRIO DO LEAMAT

ALÉM DA FÓRMULA: RELAÇÃO ENTRE OS VOLUMES DO CILINDRO E DO CONE

ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA

Trabalho apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, *campus* Campos-Centro, como requisito parcial para conclusão da disciplina Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Prof^ª Me. Poliana Cardoso

**CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
2018.1**

SUMÁRIO

1) Relatório do LEAMAT I	p. 3
1.1) Atividades desenvolvidas	3
1.2) Elaboração da sequência didática.....	4
1.2.1) Tema	4
1.2.2) Justificativa	5
1.2.3) Objetivo Geral	8
1.2.4) Público Alvo	8
2) Relatório do LEAMAT II	9
2.1) Atividades desenvolvidas	9
2.2) Elaboração da sequência didática	9
2.2.1) Planejamento da sequência didática	9
2.2.2) Aplicação da sequência didática na turma do LEAMAT II .	13
3) Relatório do LEAMAT III	15
3.1) Atividades desenvolvidas	15
3.2) Elaboração da sequência didática	15
3.2.1) Versão final da sequência didática	15
3.2.2) Experimentação da sequência didática na turma regular ..	16
Considerações Finais	20
Referências	22
Apêndices	24
Apêndice A - Material didático aplicado na turma do LEAMAT II	25
Apêndice B - Material didático experimentado na turma regular	31

1) Relatório do LEAMAT I

1.1) Atividades desenvolvidas

Na aula inaugural, 09/05/2017, a disciplina foi apresentada à turma. Recebemos informações referentes às atividades que seriam desenvolvidas nas quatro linhas de pesquisa: Aritmética, Álgebra, Educação Matemática Inclusiva e Geometria. O objetivo da disciplina foi exposto, bem como a forma de avaliação e a organização em grupos para o desenvolvimento dos trabalhos.

No início da aula do dia 16/05/2017, a professora Vanice se apresentou para a turma por meio de uma conversa informal. Em seguida foi feita uma reflexão em relação à Geometria por meio de algumas perguntas como: O que significa a Geometria para você? Como você vivenciou a Geometria na escola? Que Geometria você gostaria de ensinar para o seu aluno? Foi mencionada a importância da utilização do material concreto no ensino da Geometria, entretanto foi destacado que o uso dele por si só não é suficiente para atingir bons resultados, sendo necessário que o professor saiba utiliza-lo de forma a despertar o interesse do aluno bem como a construção de conhecimentos. Por fim, iniciamos a leitura e análise do texto “Ensino da Geometria: Rumos da pesquisa (1991 – 2011)”, que aborda quais linhas de pesquisa no Brasil, dissertações e teses, que tratam da Geometria, evidenciando o descaso e a falta de preparo do professor nesta área de conhecimento.

Na aula do dia 30/05/2017, os dois grupos B1 e B2 apresentaram seminário referente à análise da Geometria nos Ensinos Fundamental e Médio nos Parâmetros Nacionais Curriculares (PCN). Após as apresentações, concluímos que a Geometria está presente nas formas naturais e construídas, sendo essencial à descrição, à representação, à medida e ao dimensionamento de uma infinidade de objetos e espaços. Apesar disso, nas escolas, quando é apresentada, não é feita uma relação da Geometria com a vida diária. Foi analisado que o objetivo da Geometria não é a memorização de fórmulas, e sim proporcionar o desenvolvimento do pensamento lógico dedutivo e dos aspectos mais estruturados da linguagem Matemática.

Na aula do dia 13/06/2017, um grupo que já concluiu a disciplina LEAMAT nos apresentou seus trabalhos nas linhas de pesquisa de Álgebra e Geometria. A linha de pesquisa de Geometria foi sobre o comportamento das retas no plano cartesiano,

analisando quando serão paralelas ou concorrentes, por meio de software e instrumentos de construção. Falou-se da experiência no LEAMAT, o que aconteceu, como foi a apresentação do trabalho e a confecção do relatório final.

No dia 20/06/2017, outro grupo que já concluiu a disciplina LEAMAT nos mostrou seu trabalho na linha de pesquisa de Geometria, que foi sobre volume de prismas. O grupo utilizou em seu trabalho, embalagens para abordar o conteúdo de uma forma dinâmica. Com o uso de material concreto e *software*, eles mostraram o conceito de volume de prisma, facilitando o entendimento dos alunos.

Na aula do dia 27/06, apresentamos nossa dúvida quanto à proposta, na linha de pesquisa de Geometria, que foi: Trabalhar o Volume do Tronco de Pirâmide e de Cone ou Relação entre Volume de Cone e Cilindro por meio de experimentos práticos em sala de aula. Após discussão e pesquisas no laboratório, decidimos trabalhar o segundo tema anteriormente exposto.

Na aula do dia 11/07/2017, continuamos a discussão sobre o tema que pretendemos trabalhar e a forma que pretendemos abordar o conteúdo. A partir disso definimos que iríamos utilizar material concreto e o *software* GeoGebra, para melhor entendimento do aluno quanto a Relação entre Volume de Cone e Cilindro. Assim, o objetivo do nosso trabalho foi definido. Por fim, fizemos pesquisas para fundamentação teórica.

No dia 08/08/2017, a professora Poliana assumiu a disciplina LEAMAT na linha de pesquisa de Geometria e passamos para ela o que havia sido desenvolvido no nosso trabalho. Além disso, discutimos a elaboração da justificativa do tema escolhido.

A partir do dia 15/08/2017, os encontros foram destinados ao desenvolvimento da Justificativa. Assim, focamos na finalização do relatório e na preparação da apresentação.

1.2) Elaboração da sequência didática

1.2.1) Tema

Além da fórmula: Relação entre os Volumes do Cilindro e do Cone.

1.2.2) Justificativa

As formas geométricas estão presentes em nosso cotidiano e são úteis na compreensão do espaço em que estamos inseridos. Nas Orientações Educacionais Complementares dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) observa-se que

A Geometria, ostensivamente presente nas formas naturais e construídas, é essencial à descrição, à representação, à medida e ao dimensionamento de uma infinidade de objetos e espaços na vida diária e nos sistemas produtivos e de serviços (BRASIL, 2002, p. 123).

Sendo assim, é importante que a Geometria seja trabalhada de forma clara para os alunos, porém observa-se certa dificuldade nesse sentido. Sena e Dorneles (2013), em seu trabalho que busca verificar quais linhas de pesquisas estão produzindo conhecimento sobre Geometria no Brasil, concluem que há um descaso com o tema, assim como a falta de preparo do professor no trato dessa área de conhecimento. Assim, a Geometria, na maioria das vezes, é desprezada ou não é ensinada de forma efetiva. Sustentando isso Baldissera (2011) argumenta:

Hoje, percebe-se que a geometria apresenta muitos problemas em seu ensino e em sua aprendizagem, principalmente no Ensino Médio, o qual é sustentado pela memorização de fórmulas algébricas, reconhecimento de sólidos geométricos e ainda aplicação, muitas vezes padronizadas e sem significado algum para quem está aprendendo (BALDISSERA, 2011, p. 07).

Ainda, corroborando com o fato anteriormente exposto, Rogenski e Pedroso (2007) afirmam com base em suas experiências da prática pedagógica, que os alunos do Ensino Médio apresentam dificuldades com relação à Geometria Espacial quanto à visualização e nas relações que existem entre as formas. Além disso, expõem que quando os alunos se deparam com cálculos de área e volume, os fazem de forma mecânica e não entendem suas aplicações em novas situações.

Com base no que foi apresentado, nota-se uma grande dificuldade por parte dos alunos do Ensino Médio em compreenderem a Geometria Espacial. Assim, na maioria das vezes, há memorização de fórmulas de áreas e volumes sem o mínimo entendimento. Por isso a importância do professor explicar ao aluno o porquê das fórmulas, bem como estabelecer relações entre elas, superando o ensino mecânico.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio afirmam “Quanto ao trabalho com comprimentos, áreas e volumes, considera-se importante que o aluno consiga perceber os processos que levam ao estabelecimento das fórmulas, evitando-se a sua simples apresentação” (BRASIL, 2006, p. 76).

Nesse sentido, segundo Brasil (1998), no texto dos PCN, para o ensino de volumes dos sólidos geométricos, é relevante que o professor estabeleça as relações existentes entre os volumes de um cilindro e de um cone que tenham a mesma base e mesma altura.

Além disso, para explicar as fórmulas aos alunos, é interessante o uso de *softwares* de geometria dinâmica, que segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio “enriquecem as imagens mentais associadas às propriedades geométricas” (BRASIL, 2006, p. 88). De fato, o uso da tecnologia auxilia nessa questão, pois faz o aluno visualizar o objeto mais precisamente, como afirma Alves (2007):

Através dos recursos de animação de alguns softwares geométricos, o aluno pode construir, mover e observar de vários ângulos as figuras geométricas, além de modificar algumas de suas características. Há desenhos de execução bastante complicada e até mesmo impossível com as tecnologias tradicionais (papel e lápis e quadro e giz, por exemplo) e que se tornam facilmente exequíveis com o uso do computador (ALVES, 2007, p. 3).

Assim, o trabalho utilizando a tecnologia deve ser colocado em prática, de forma a dinamizar o processo de ensino e aprendizagem da Geometria. Dentre os vários *softwares* disponíveis para serem usados, destaca-se o GeoGebra, que segundo Fanti “é um *software* livre e pode ser usado facilmente como uma importante ferramenta para despertar o interesse pela busca do conhecimento matemático” (FANTI, 2010, p. 01). E o autor complementa que o GeoGebra permite uma abordagem mais dinâmica de diversos conteúdos.

Para tornar o ensino da Geometria ainda mais efetivo, além do uso da tecnologia, convém a utilização de material concreto, o que contribuirá para um aprendizado significativo e superação do aprender mecânico. O uso do material concreto permite que o aluno “toque” a Geometria e veja que não é um conteúdo fictício, mas sim, real, em que suas formas estão ao redor e são percebidas pelos

sentidos. Fiorentini e Miorim (1990) defendem o uso de material concreto dentro de sala de aula ao afirmarem que

Ao aluno deve ser dado o direito de aprender. Não um 'aprender' mecânico, repetitivo, de fazer sem saber o que faz e por que faz. Muito menos um 'aprender' que se esvazia em brincadeiras. Mas um aprender significativo do qual o aluno participe raciocinando, compreendendo, reelaborando o saber historicamente produzido e superando, assim, sua visão ingênua, fragmentada e parcial da realidade. O material ou o jogo pode ser fundamental para que isto ocorra. Neste sentido, o material mais adequado, nem sempre, será o visualmente mais bonito e nem o já construído. Muitas vezes, durante a construção de um material o aluno tem a oportunidade de aprender matemática de forma mais efetiva (FIORENTINI; MIORIM, 1990, p. 4).

Todavia, é um equívoco o professor pensar que só em apresentar material concreto para o aluno estará contribuindo em seu aprendizado. Assim como qualquer metodologia é necessário selecionar aquilo que realmente fará sentido para o aluno. Nesse sentido, segundo Carraher e Schilemann (1998) "não precisamos de objetos na sala de aula, mas de objetivos na sala de aula, mas de situações em que a resolução de um problema implique a utilização dos princípios lógico-matemáticos a serem ensinados". Isto porque o material "apesar de ser formado por objetivos, pode ser considerado como um conjunto de objetos 'abstratos' porque esses objetos existem apenas na escola, para a finalidade de ensino, e não tem qualquer conexão com o mundo da criança" (CARRAHER; SCHILEMANN, 1988, p. 179 – 180 apud FIORENTINI; MIORIM, 1990, p. 2).

Portanto, é necessário que o professor se organize, definindo seus objetivos com a aula que pretende dar. O material concreto não é necessariamente o que pode ser manipulado, mas as situações que o aluno se depara. Por esse motivo, é essencial que o professor trabalhe a Geometria de modo a explorar o cotidiano do aluno e apresente materiais que façam sentido para ele. Os PCN+ defendem que a utilização de formas geométricas na representação e visualização do mundo real "é uma capacidade importante para a compreensão e construção de modelos para resolução de questões da Matemática e de outras disciplinas" (BRASIL, 2002, p. 123). O que nos leva a concluir que o uso do material concreto contribui de forma significativa no processo de ensino e aprendizagem da Geometria.

A partir do que foi apresentado e discutido, decidimos abordar o volume do cone e do cilindro em uma turma do segundo ano do Ensino Médio. Faremos o uso

do GeoGebra para apresentarmos os elementos desses sólidos e de material concreto para deduzir com os alunos as fórmulas que permitem calcular os seus volumes. Acreditamos que dessa forma, estaremos dando mais sentido à Geometria, indo além da fórmula e superando sua simples memorização.

1.2.3) Objetivo Geral

Deduzir e relacionar as fórmulas de volume do cilindro e do cone circular utilizando material concreto.

1.2.4) Público Alvo

Alunos do segundo ano do Ensino Médio.

2) Relatório do LEAMAT II

2.1) Atividades desenvolvidas

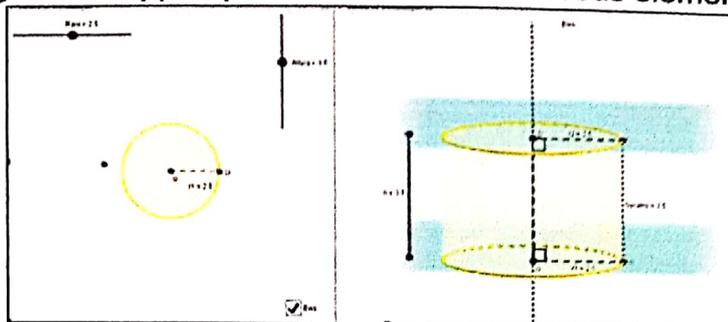
As aulas foram destinadas às discussões referentes à sequência didática. As ideias foram sendo aprimoradas à medida que pesquisas eram realizadas no laboratório, tanto por meio de livros didáticos bem como por trabalhos acadêmicos consultados no meio digital. Debates do grupo com auxílio da orientadora no que tange ao tema da linha de pesquisa foram realizados ao longo do período e foram imprescindíveis para a consolidação da sequência didática. Ressalta-se que as aulas também foram aproveitadas para confecção de materiais manipuláveis, como também para criação de lista de exercícios. Foram realizadas apresentações pelos grupos, com as sequências didáticas concluídas, visando testá-las e aprimorá-las, tendo em vista a contribuição da turma e dos orientadores com seus comentários sobre o trabalho exposto.

2.2) Elaboração da sequência didática

2.2.1) Planejamento da sequência didática

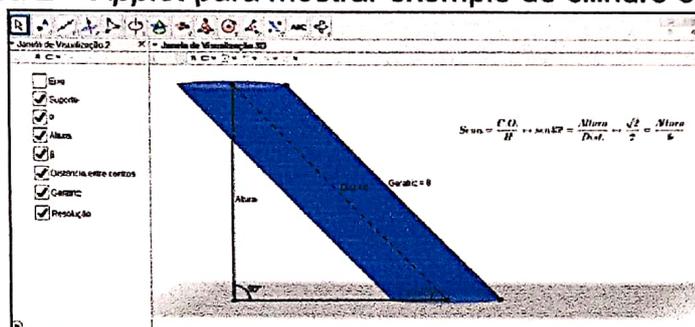
A primeira etapa consiste em definir cilindro utilizando um slide que contém a definição e uma imagem para facilitar no entendimento por meio da visualização. Após isso, abre-se um *applet* no *software* GeoGebra para apresentar os elementos de tal sólido geométrico (Figura 1). Aproveita-se desse recurso tecnológico para definir e analisar cilindro reto, equilátero e oblíquo (Figura 2). O cilindro reto será apresentado no GeoGebra como formado pela rotação de um retângulo em torno de um de seus lados, associando-o assim ao cilindro de revolução (Figura 3). O objetivo dessa etapa é propiciar ao aluno melhor visualização do cilindro e de seus elementos além de levá-lo a entender mais claramente as definições, a fim de torná-lo capaz de resolver alguns problemas envolvendo cálculo de volume de cilindro.

Figura 1 – Applet para mostrar cilindro e seus elementos



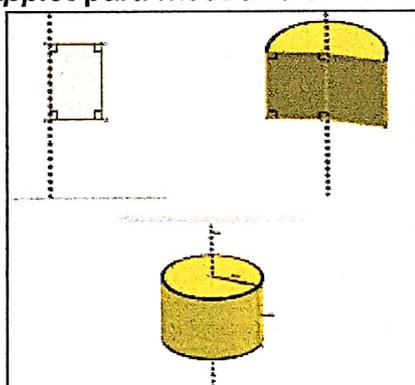
Fonte: Elaboração própria.

Figura 2 – Applet para mostrar exemplo de cilindro oblíquo



Fonte: Elaboração própria.

Figura 3 – Applet para mostrar o cilindro de revolução



Fonte: Elaboração própria.

Na segunda etapa, utiliza-se material concreto visando à dedução da fórmula do volume de um cilindro. CDs são inseridos em um suporte - porta CDs - e à medida que a base representada por um CD é repetida, determina-se uma altura (Figura 4). Deduz-se com a turma que o volume de um cilindro é o produto entre a área a base e a altura. Um exemplo que envolve calcular volume de cilindro é então resolvido juntamente com os alunos de forma a familiarizá-los com a fórmula.

Na terceira etapa, são propostos exercícios relacionados a volume de cilindro com o intuito de se praticar o que foi anteriormente exposto, verificando assim o entendimento da turma.

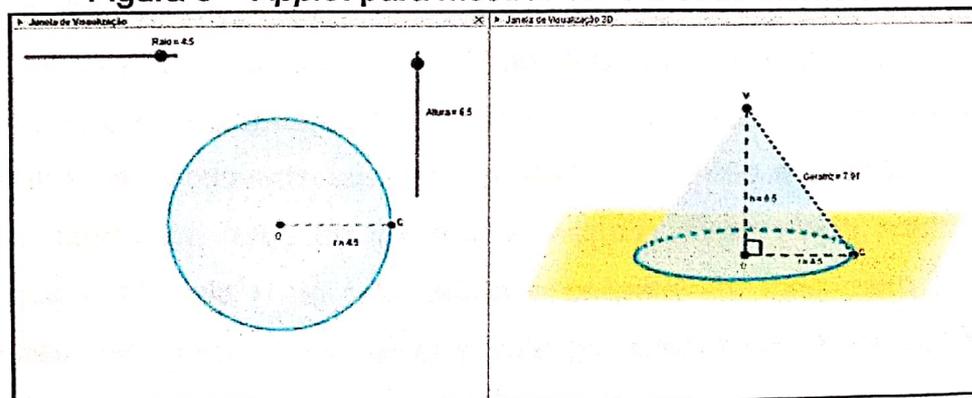
Figura 4 – Suporte e CDs



Fonte: Elaboração própria.

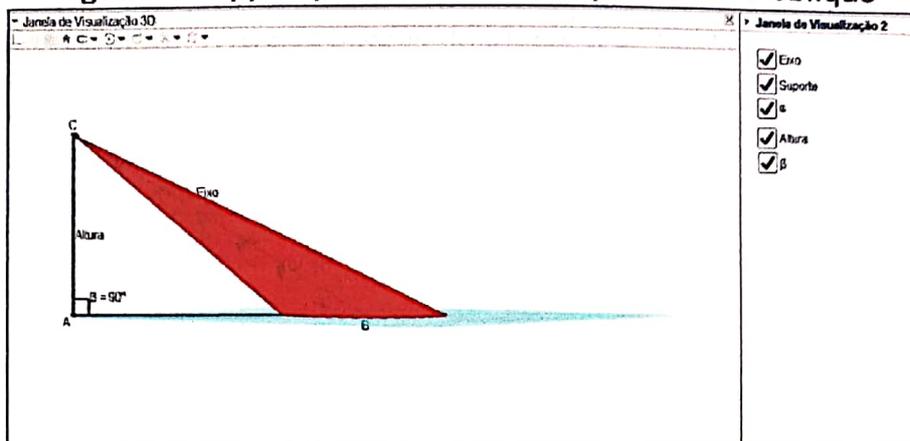
A quarta etapa consiste em definir cone utilizando um slide que contém a definição e uma imagem para facilitar no entendimento por meio da visualização. Após isso, abre-se novamente o GeoGebra para apresentar os elementos de tal sólido geométrico por meio de um *applet* (Figura 5). Aproveitando-se mais uma vez desse *software*, define-se e analisa-se cone reto, equilátero e oblíquo (Figura 6). O cone reto será apresentado no GeoGebra como formado pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos, associando-o assim ao cone de revolução (Figura 7). O objetivo dessa etapa é propiciar ao aluno melhor visualização do cone e de seus elementos além de levá-lo a entender mais claramente as definições, a fim de torná-lo capaz de resolver alguns problemas envolvendo cálculo de volume de cone.

Figura 5 – Applet para mostrar cone e seus elementos



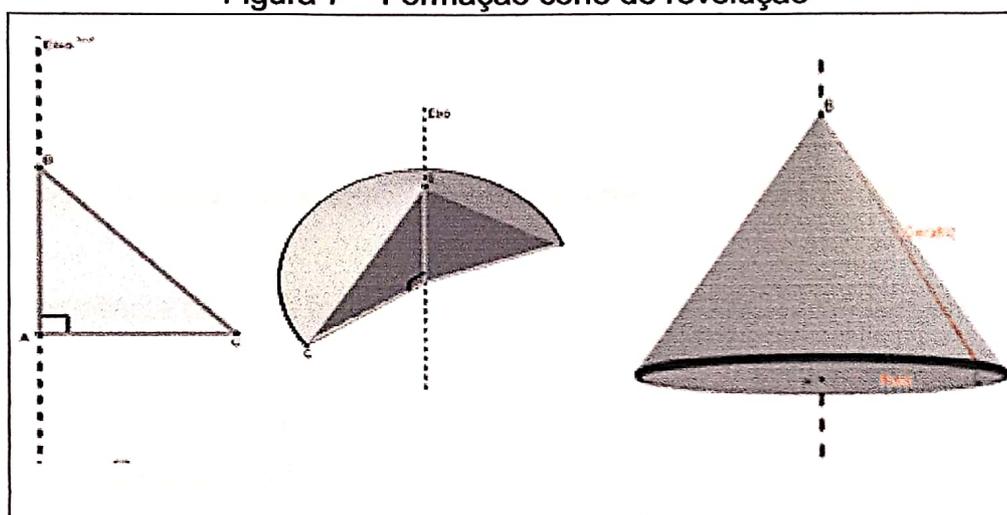
Fonte: Elaboração própria.

Figura 6 – Applet para mostrar exemplo de cone oblíquo



Fonte: Elaboração própria.

Figura 7 – Formação cone de revolução

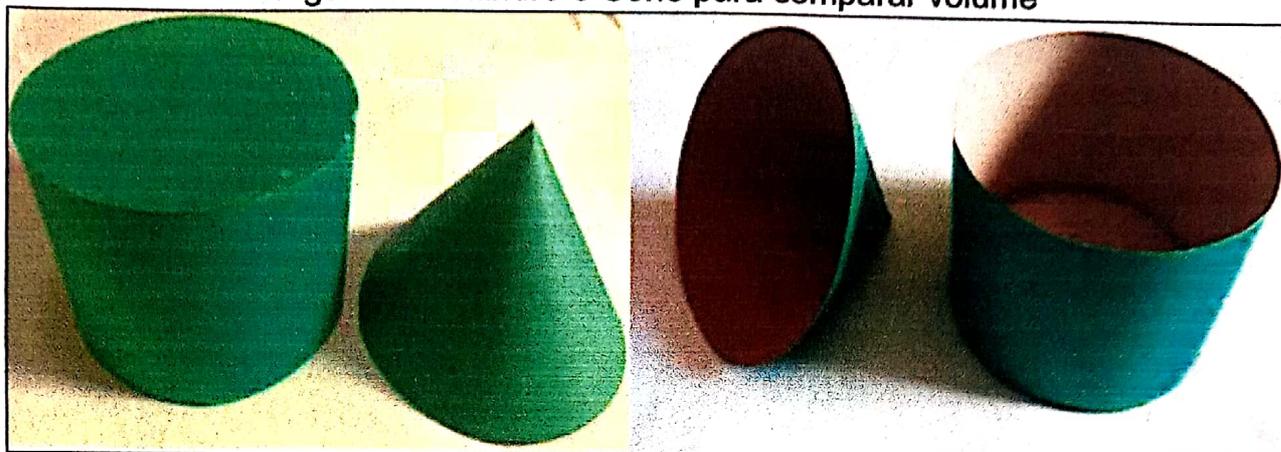


Fonte: Elaboração própria.

Na quinta etapa, utilizam-se materiais concretos para dedução da fórmula de volume de um cone. São utilizados um cilindro e um cone confeccionados com papel cartão, ambos com base e altura apresentando as mesmas medidas (Figura 8). Preenche-se então um cone com areia colorida e depois é depositado tal volume no interior do cilindro. Esse procedimento é repetido até que o cilindro fique totalmente preenchido com areia colorida. Após observar que são necessários 3 cones com areia para se preencher totalmente um cilindro, deduz-se então a fórmula de volume do cone como sendo um terço do volume do cilindro. Essa etapa permite ao aluno entender que a fórmula é de fato válida e consistente, indo além de sua mera memorização. Um exemplo que envolve calcular volume de cone é então resolvido juntamente com os alunos de forma a familiarizá-los com a fórmula.

Na última etapa, são propostos exercícios relacionados ao volume de cone e cilindro a fim de verificar o entendimento da turma. A aula finaliza com a correção das questões e esclarecimentos de dúvidas.

Figura 8 – Cilindro e Cone para comparar volume



Fonte: Elaboração própria.

2.2.2) Aplicação da sequência didática na turma do LEAMAT II

A sequência didática foi apresentada no dia 12/12/2017 na turma do LEAMAT II. Observou-se que os materiais concretos utilizados bem com o *software* GeoGebra foram importantes para o entendimento do conteúdo exposto. Após a apresentação, alguns comentários foram feitos e estão descritos a seguir.

Ao utilizar o porta CDs a fim de deduzir o volume do cilindro, foi citada a necessidade de melhor exploração de tal material, tendo em vista que na aula o seu uso foi bem rápido, comprometendo assim a sua eficácia.

No momento da utilização de materiais concretos para a dedução do volume do cone, havia sobre a mesa 3 (três) copos com areia colorida, correspondendo cada um ao volume de um cone. Foi mencionado que seria interessante deixar sobre a mesa mais de 3 copos, ou seja, não o número exato de copos que seriam utilizados, a fim de despertar o interesse dos alunos quanto à conclusão da dedução.

Na resolução da terceira questão da lista de exercícios sobre volume de cilindros, foram analisadas as alternativas fora da ordem em que estavam dispostas, a fim de mostrar o motivo das outras estarem erradas. Foi sugerido adaptar a questão, colocando as alternativas na ordem que se deseja, ou seja, deixando a última alternativa como correta.

Na lista de exercícios referente a volume de cilindro, observou-se a ausência de figuras de forma a ajudar o aluno na compreensão das questões. Por isso, foi sugerido inseri-las em duas questões.

Na lista de exercícios sobre volume de cone e cilindro, observou-se que em 2 (duas) questões o enunciado está em uma página e a figura da questão em outra, o que poderia ser facilmente mudado alterando a ordem em que as questões foram dispostas, facilitando a leitura e interpretação já que teria a imagem e o texto na mesma página.

3) Relatório do LEAMAT III

3.1) Atividades desenvolvidas

No primeiro dia, a aula serviu para expor o objetivo do LEAMAT III e apresentar o calendário das aulas. As aulas seguintes foram usadas para conclusão dos últimos detalhes da sequência didática e preparação para aplicação na turma regular. Após a aplicação, os encontros foram destinados à escrita do relatório e apresentação final do LEAMAT, em que mostramos à turma os resultados finais do trabalho desenvolvido ao longo dos três semestres.

3.2) Elaboração da sequência didática

3.2.1) Versão final da sequência didática

Como sugestão após aplicação na turma no LEAMAT II, a ordem das questões das listas de exercícios sofreu alteração de modo a otimizar o espaço das folhas. Na primeira lista de exercícios, a que aborda apenas volume de cilindro, a questão 2 passou a ser questão 4, a 3 passou a ser 2 e a 4 passou a ser 3. Enquanto na segunda lista, a que aborda volume de cilindro e cone, houve troca de posição entre as questões 2 e 3.

Além disso, as questões 1 e 3 da primeira lista, considerando a nova posição das questões, foram acrescidas de imagens de modo a facilitar o entendimento delas (Figura 9). Houve também, conforme sugerido, troca das alternativas da segunda questão da primeira lista (também considerando a nova posição das questões) com isso o gabarito alterou da letra "a" para "e".

Figura 9 - Questões 1 e 3 após adaptação



Fonte: Protocolo de pesquisa.

3.2.2) Experimentação da sequência didática na turma regular

A aplicação na turma regular ocorreu no dia 08/06/2018 no Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia Fluminense *Campus* Centro, Campos dos Goytacazes, na turma de terceiro ano do curso técnico integrado em informática. Foram usados dois tempos de aula, com um pequeno atraso no primeiro horário, e compareceram 17 alunos na aplicação.

Primeiramente o grupo se apresentou à turma e explicou que estava ali para aplicar uma sequência didática que foi desenvolvida no Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática do curso de Licenciatura em Matemática do IFF.

Após isso, iniciou-se a aula definindo cilindro e apresentando seus elementos. Com o uso do *software* GeoGebra, foram apresentados alguns tipos de cilindro e suas características (Figura 10). Nesse momento, percebeu-se que a turma ficou empolgada com o modo em que o conteúdo estava sendo exposto – uso de tecnologia – e observavam com bons olhos o material que estava sendo usado.

Figura 10 - Utilização do GeoGebra para apresentar alguns tipos de cilindro



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Finalizada essa parte, o grupo utilizou o material concreto para deduzir a fórmula de volume de cilindro que já era de conhecimento da turma, porém com o uso do material, os alunos puderam entender o porquê de tal fórmula (Figura 11).

Figura 11 - Utilização de material concreto para deduzir o volume do cilindro



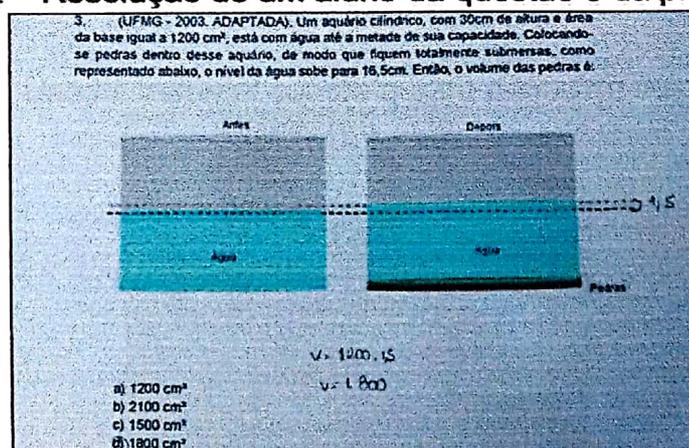
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Feito isso, foi distribuída a primeira lista de exercícios e dado um tempo para que os alunos resolvessem as questões. Foi percebido uma certa dificuldade da turma em resolver a segunda questão da lista, uma vez que para resolução da mesma é necessário utilizar conversão de unidades e, no caso dessa questão, os alunos precisavam converter centímetros cúbicos para litros ou vice-versa.

Após o tempo dado, foi iniciada a correção das questões, mas antes foi ressaltada a necessidade de não apagar o que foi feito na lista e que a correção deveria ser feita no caderno ou em outra folha, pois o grupo iria recolher as listas no final da aula para análise das resoluções.

Após a correção da questão 3, um aluno comentou o jeito que tinha resolvido. Ele percebeu que como o deslocamento da água no aquário foi de 1,5 cm, então as pedras no fundo do recipiente formavam um cilindro com altura igual à deslocada pela água, logo o volume das pedras era igual ao produto da área da base, que se mantinha, por 1,5 (Figura 12).

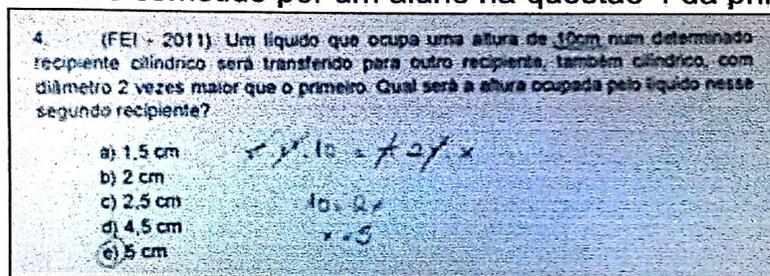
Figura 12 – Resolução de um aluno da questão 3 da primeira lista



Fonte: Protocolo de pesquisa.

A questão 4 dessa lista teve um grande número de erros, pois alguns alunos tentaram fazer por raciocínio proporcional. Eles pensaram erroneamente que como o diâmetro da base do recipiente passaria a ser duas vezes maior, a altura da mesma quantidade de líquido nesse recipiente seria duas vezes menor e marcaram a alternativa “e”. Apenas um aluno que resolveu dessa forma se atentou que como o diâmetro da base seria duas vezes maior, a área da base seria 4 vezes maior, logo a altura quatro vezes menor. Outro erro comum nessa questão foi com relação à problema com matemática básica ou falta de atenção, alguns dos alunos que representaram os volumes desses dois recipientes e igualaram erraram ao escrever que $(2r)^2 = 2r^2$ (Figura 13).

Figura 13 – Erro cometido por um aluno na questão 4 da primeira lista



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Após a correção da primeira lista, foi definido cone circular e mais uma vez, com o uso do GeoGebra, mostrado seus elementos, alguns tipos e suas características. Depois foi deduzido, com o uso de material concreto, o volume de cone ao comparar os volumes de um cilindro e um cone com mesma medida de área da base e mesma medida de altura (Figura 14). Nesse momento um aluno exclamou “Nunca mais vou esquecer isso agora” e uma aluna comentou “Essa é a matemática que funciona”.

Figura 14 - Uso de material concreto para deduzir o volume do cone



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Deduzido o volume de cone, foi entregue a segunda lista de exercícios e dado um tempo para resolução.

Devido ao curto tempo restante e o fato de alguns alunos precisarem sair mais cedo, foi necessário adiantar a correção e não seria possível corrigir todas as questões, devido a isso, foi pedido que a turma escolhesse duas das questões da lista para correção e eles escolheram as questões 2 e 3.

Como o tempo dado precisou ser curto, poucos alunos conseguiram fazer a quarta questão, devido a isso, foi pedido que tentassem fazer após as listas serem devolvidas e caso surgisse dúvida, para que fosse esclarecida com a professora deles, que se prontificou a fazer isso. Dos que fizeram a quarta questão, foi possível identificar que eles conseguiram compreender que ao rotacionar em 360° um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos haverá a formação de um cone reto cuja altura será igual à medida do cateto que houve a rotação em torno e a medida do raio da base do cone será igual à medida do outro cateto, como foi mostrado a eles usando o GeoGebra (Figura 15).

Figura 15 – Resolução de um aluno da questão 4 da segunda lista

4. (Mackenzie - 2004). Na rotação do triângulo ABC da figura a seguir em torno da reta r , o lado AB descreve um ângulo de 270° . Desta forma, o sólido obtido tem volume:

$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$ $360^\circ \rightarrow 48\pi$
 $V = \frac{144\pi}{3}$ $270^\circ \rightarrow 36\pi$

a) 48π b) 144π c) 108π d) 72π e) 36π

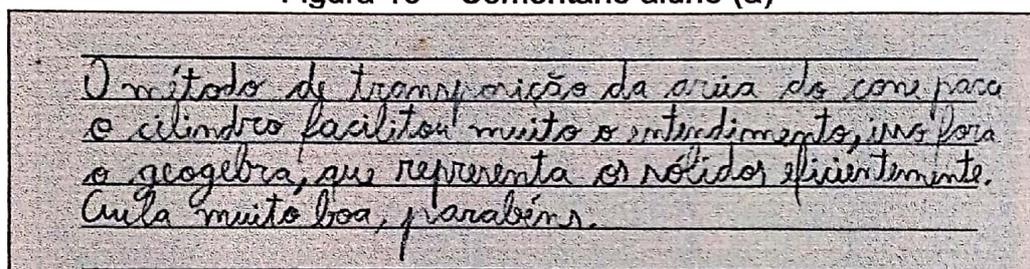
Fonte: Protocolo de pesquisa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O grupo ficou muito satisfeito com o resultado do trabalho. A partir dos comentários dos alunos sobre a aula, pode-se comprovar o que o grupo percebeu no decorrer da aula: Os alunos gostaram bastante do modo com que o conteúdo foi exposto, tanto por conta do uso da tecnologia como do material concreto.

Um (a) aluno (a) escreveu que o uso do material concreto para deduzir o volume do cone facilitou bastante o seu entendimento e acrescentou que o GeoGebra representa os sólidos eficientemente (Figura 16). Outro (a) aluno (a) escreveu que os materiais utilizados na aula ajudaram bastante a entender e visualizar o que estava sendo falado (Figura 17). Além dos vários elogios e comentários positivos que o grupo recebeu quanto à aula (Figura 18).

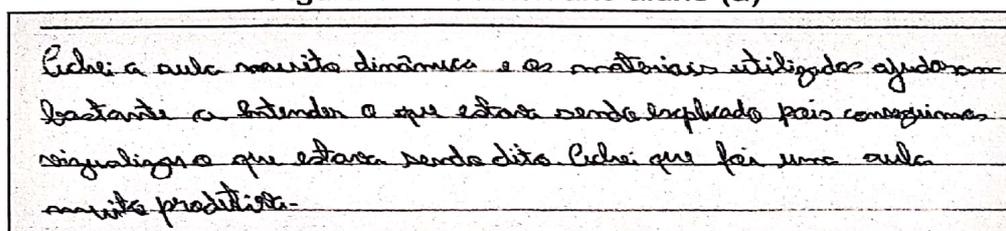
Figura 16 – Comentário aluno (a)



O método de transposição da aula do cone para o cilindro facilitou muito o entendimento, mas para o geogebra, que representa os sólidos eficientemente. Aula muito boa, parabéns.

Fonte: Protocolo de Pesquisa.

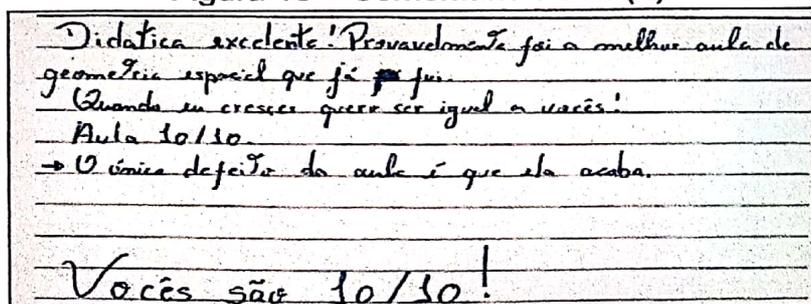
Figura 17 – Comentário aluno (a)



Liciei a aula muito dinâmica e os materiais utilizados ajudaram bastante a entender o que estava sendo explicado pois conseguimos visualizar o que estava sendo dito. Liciei que foi uma aula muito produtiva.

Fonte: Protocolo de Pesquisa.

Figura 18 – Comentário aluno (a)



Didática excelente! Provavelmente foi a melhor aula de geometria espacial que já ~~foi~~ foi.
Quando eu crescer quero ser igual a vocês!
Aula 10/10.
→ O único defeito da aula é que ela acaba.

Vocês são 10/10!

Fonte: Protocolo de pesquisa.

De fato, a utilização do GeoGebra permitiu um ambiente de aprendizagem muito enriquecedor ao possibilitar uma aula mais dinâmica e o uso do material concreto foi um ponto muito positivo, pois tornou possível mostrar aos alunos o porquê da fórmula e não a sua simples memorização.

A partir da análise das resoluções das questões dos alunos, pode-se perceber que o conteúdo foi muito bem entendido e que com a aula foi possível resolver os problemas dados.

Com relação à segunda questão da primeira lista de exercícios, alguns alunos não lembraram como converter de dm^3 para litros, o que gerou certa dificuldade para resolver a questão. Devido a isso, o grupo sugere a utilização de um cubo de acrílico com aresta igual a 1 dm para encher de água e mostrar aos alunos que 1 dm^3 tem 1 l. Para isso, fazer as devidas conversões.

REFERÊNCIAS

ALVES, George. Um estudo sobre o desenvolvimento da visualização geométrica com o uso do computador: In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 18., 2007. **Anais...** São Paulo: Mackenzie. 2007. p. 1-10. Disponível em: <<http://www.br-ie.org/pub/index.php/sbie/article/view/550>>. Acesso em: 18 ago. 2017.

BALDISSERA, Altair. **A Geometria Trabalhada a partir da Construção de Figuras e Sólidos Geométricos**. 2011. Disponível em: <<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/>>. Acesso em: 10 ago. 2017.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília, DF, 135 p. 2006. Disponível em: <<https://goo.gl/zUdCM5>>. Acesso em: 16 ago. 2017.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretariada Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília, DF, 2002. Disponível em: <<https://goo.gl/zUdCM5>>. Acesso em: 16 ago. 2017.

BRASIL. Ministério da Educação/Secretariada Educação Média e Tecnológica. **PCN Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental: Parâmetros Curriculares Nacionais**. MATEMÁTICA. Brasília DF, 1998. Disponível em: <<https://goo.gl/zUdCM5>>. Acesso em: 16 ago. 2017

FANTI, Ermínia. Utilizando o Software GeoGebra No Ensino de Certos Conteúdos. In: SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 5., 2010, Paraíba. **Anais...** São Paulo: UNESP, 2010. p. 1-18. Disponível em: <<https://goo.gl/DJg1dy>>. Acesso em: 10 ago. 2017.

MIORIM, Maria Angela; FIORENTINI, Dario. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino de Matemática. **Boletim SBEM-SP**, São Paulo, v. 7, p. 5- 10, 1 ago. 1990. Disponível em: <<https://goo.gl/yfLRKB>>. Acesso em: 18 ago. 2017.

ROGENSKI, Maria Lucia Cordeiro; PEDROSO, Sandra Mara Dias. **O Ensino da Geometria na Educação Básica: Realidade e Possibilidades**. 2007. Disponível em: <<https://goo.gl/foA56B>>. Acesso em: 10 ago. 2017.

SENA, Rebeca Moreira; DORNELES, Beatriz Vargas. Ensino de Geometria: Rumos da Pesquisa (1991-2011). **Revemat: revista eletrônica de educação matemática**, v. 8, n. 1, p.138-155, 26 jul. 2013. Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8n1p138>>. Acesso em: 16 ago. 2017.

Campos dos Goytacazes (RJ), 08 de Agosto de 2018.

Memoroso Ribeiro Manoel da Silva
Romário de Azevedo Gomes
Gabriel P. Pariz

APÊNDICES

Apêndice A: Material didático aplicado na turma do LEAMAT II

Diretoria de Ensino Superior

Licenciatura em Matemática

Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática

Linha de Pesquisa: Geometria

Licenciandos: Gabriel Marinho, Leomario Ribeiro e Romario Gomes

Orientadora: Profª Me. Poliana Cardoso

Nome: _____ Data: ___/___/2017

1) (ENEM-2015) Para resolver um problema de abastecimento de água foi decidida, numa reunião de condomínio, a construção de uma nova cisterna. A cisterna atual tem formato cilíndrico, com 3m de altura e 2m de diâmetro, e estimou-se que a nova cisterna deverá comportar 81m^3 de água, mantendo o formato cilíndrico e a altura atual. Após a inauguração da nova cisterna a antiga será desativada. Utilize 3,0 como aproximação para π . Qual deve ser o aumento, em metros, no raio da cisterna para atingir o volume desejado?

- a) 0,5
- b) 1,0
- c) 2,0
- d) 3,5
- e) 8,0

2) (FEI-2011) Um líquido que ocupa uma altura de 10cm num determinado recipiente cilíndrico será transferido para outro recipiente, também cilíndrico, com diâmetro 2 vezes maior que o primeiro. Qual será a altura ocupada pelo líquido nesse segundo recipiente?

- a) 1,5 cm
- b) 2 cm
- c) 2,5 cm
- d) 4,5 cm
- e) 5 cm

3) (UFRGS-2010-adaptada) Um pedaço de cano de 30cm de comprimento e 10cm de diâmetro interno encontra-se na posição vertical e possui a base inferior vedada. Colocando-se dois litros de água em seu interior, a água (adote $\pi = 3,14$)

- a) ultrapassa o meio do cano.
- b) transborda.
- c) não chega ao meio do cano.
- d) enche o cano até a borda.
- e) atinge exatamente o meio do cano.

4) (UFMG-2003) Um aquário cilíndrico, com 30cm de altura e área da base igual a 1200 cm^2 , está com água até a metade de sua capacidade. Colocando-se pedras dentro desse aquário, de modo que fiquem totalmente submersas, o nível da água sobe para 16,5cm. Então, o volume das pedras é

- a) 1200 cm^3
- b) 2100 cm^3
- c) 1500 cm^3
- d) 1800 cm^3

Diretoria de Ensino Superior

Licenciatura em Matemática

Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática

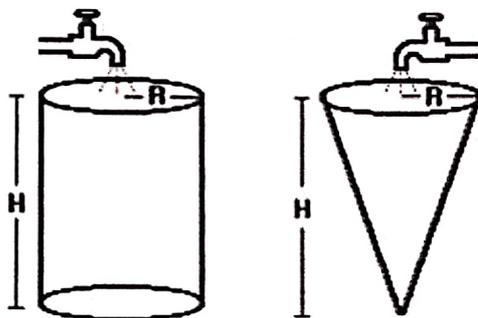
Linha de Pesquisa: Geometria

Licenciandos: Gabriel Marinho, Leomario Ribeiro e Romario Gomes

Orientadora: Prof^ª Me. Poliana Cardoso

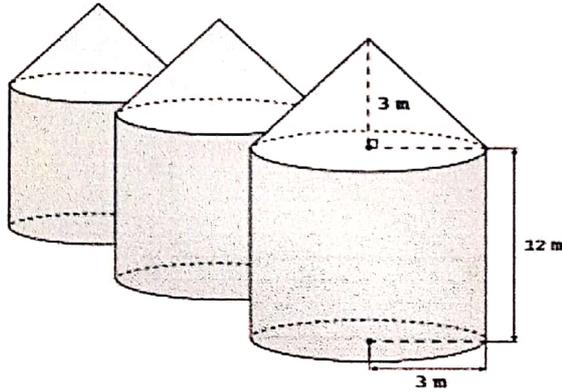
Nome: _____ Data: ___ / ___ / 2017

- 1) (Cesgranrio-2010) No desenho a seguir, dois reservatórios de altura H e de raio R , um cilíndrico e outro cônico, estão totalmente vazios e cada um será alimentado por uma torneira, ambas de mesma vazão. Se o reservatório cilíndrico leva 2 horas e meia para ficar completamente cheio, o tempo necessário para que isto ocorra com o reservatório cônico será de:



- a) 2h
- b) 1h e 30 min
- c) 1h
- d) 50 min
- e) 30 min

- 2) (ENEM-2016) Em regiões agrícolas é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposto por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte de grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de 20m^3 . Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.



Utilize 3 como aproximação de π .

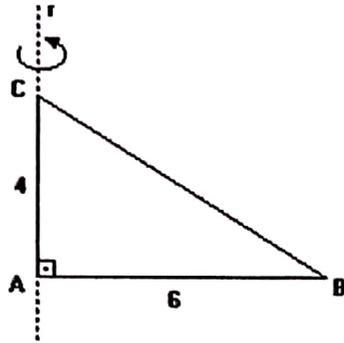
O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é:

- a) 6
- b) 16
- c) 17
- d) 18
- e) 21

3) (FAETEC-2002) A altura de um cone circular reto mede o triplo da medida do raio da base. Se o comprimento da circunferência dessa base é de 8π cm, então o volume do cone, em centímetros cúbicos, é:

- a) 64π
- b) 48π
- c) 32π
- d) 16π
- e) 8π

4) (Mackenzie-2004) Na rotação do triângulo ABC da figura a seguir em torno da reta r, o lado AB descreve um ângulo de 270° . Desta forma, o sólido obtido tem volume:



- a) 48π
- b) 144π
- c) 108π
- d) 72π
- e) 36π

Apêndice B: Material didático experimentado na turma regular

Diretoria de Ensino Superior

Licenciatura em Matemática

Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática

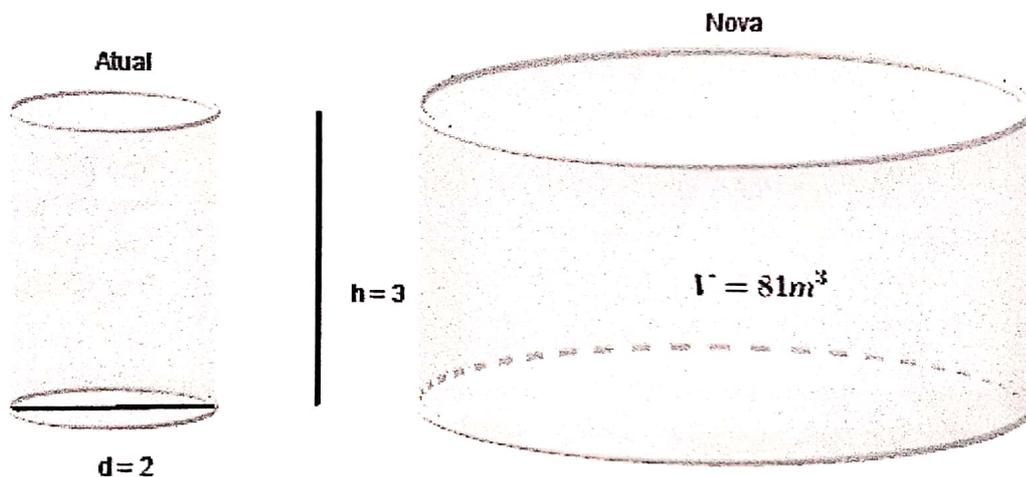
Linha de Pesquisa: Geometria

Licenciandos: Gabriel Marinho, Leomario Ribeiro e Romario Gomes

Orientadora: Prof^a Me. Poliana Cardoso

Nome: _____ Data: ___ / ___ / 2018

1. (ENEM – 2015. ADAPTADA). Para resolver um problema de abastecimento de água foi decidida, numa reunião de condomínio, a construção de uma nova cisterna. A cisterna atual tem formato cilíndrico, com 3m de altura (h) e 2m de diâmetro (d), e estimou-se que a nova cisterna deverá comportar 81m^3 de água, mantendo o formato cilíndrico e a altura atual (Observe a ilustração abaixo). Após a inauguração da nova cisterna a antiga será desativada. Utilize 3,0 como aproximação para π . Qual deve ser o aumento, em metros, no raio da cisterna para atingir o volume desejado?

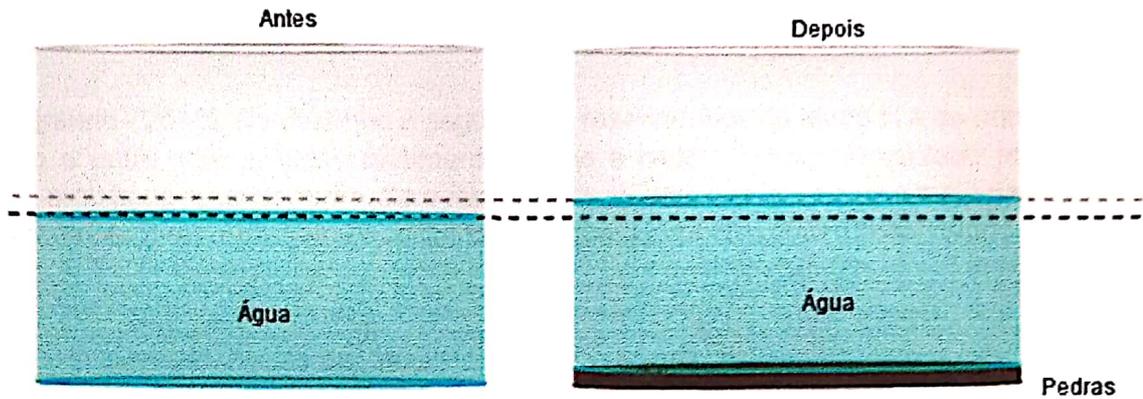


- a) 0,5
- b) 1,0
- c) 2,0
- d) 4,0

2. (UFRGS-2010 - ADAPTADA). Um pedaço de cano de 30cm de comprimento e 10cm de diâmetro interno encontra-se na posição vertical e possui a base inferior vedada. Colocando-se dois litros de água em seu interior, a água: (adote $\pi = 3,14$)

- e) Transborda.
- f) Não chega ao meio do cano.
- g) Enche o cano até a borda.
- h) Atinge exatamente o meio do cano.
- i) Ultrapassa o meio do cano.

3. (UFMG - 2003. ADAPTADA). Um aquário cilíndrico, com 30cm de altura e área da base igual a 1200 cm^2 , está com água até a metade de sua capacidade. Colocando-se pedras dentro desse aquário, de modo que fiquem totalmente submersas, como representado abaixo, o nível da água sobe para 16,5cm. Então, o volume das pedras é:



- j) 1200 cm^3
- k) 2100 cm^3
- l) 1500 cm^3
- m) 1800 cm^3

4. (FEI - 2011). Um líquido que ocupa uma altura de 10cm num determinado recipiente cilíndrico será transferido para outro recipiente, também cilíndrico, com diâmetro 2 vezes maior que o primeiro. Qual será a altura ocupada pelo líquido nesse segundo recipiente?

- n) 1,5 cm
- o) 2 cm
- p) 2,5 cm
- q) 4,5 cm
- r) 5 cm

Diretoria de Ensino Superior

Licenciatura em Matemática

Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática

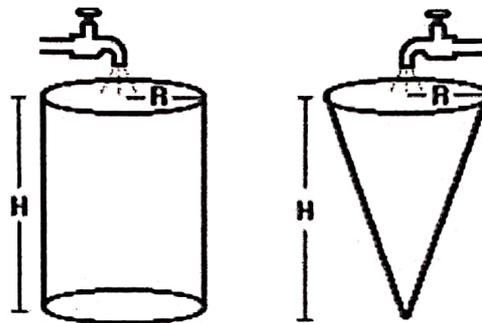
Linha de Pesquisa: Geometria

Licenciandos: Gabriel Marinho, Leomario Ribeiro, Romario Gomes

Orientadora: Prof.^a Me. Poliana Cardoso

Nome: _____ Data: ___ / ___ / 2018

1. (Cesgranrio - 2010). No desenho a seguir, dois reservatórios de altura H e de raio R , um cilíndrico e outro cônico, estão totalmente vazios e cada um será alimentado por uma torneira, ambas de mesma vazão. Se o reservatório cilíndrico leva 2 horas e meia para ficar completamente cheio, o tempo necessário para que isto ocorra com o reservatório cônico será de:

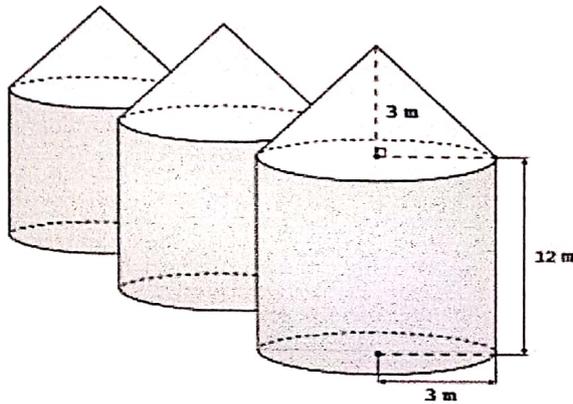


- a) 2h
- b) 1h e 30 min
- c) 1h
- d) 50 min
- e) 30 min

2. (FAETEC - 2002). A altura de um cone circular reto mede o triplo da medida do raio da base. Se o comprimento da circunferência dessa base é de 8π cm, então o volume do cone, em centímetros cúbicos, é:

- a) 64π
- b) 48π
- c) 32π
- d) 16π
- e) 8π

3. (ENEM - 2016). Em regiões agrícolas é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposto por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte de grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de 20m^3 . Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.

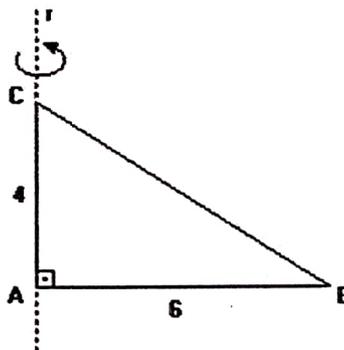


Utilize 3 como aproximação de π .

O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é:

- a) 6
- b) 16
- c) 17
- d) 18
- e) 21

4. (Mackenzie - 2004). Na rotação do triângulo ABC da figura a seguir em torno da reta r , o lado AB descreve um ângulo de 270° . Desta forma, o sólido obtido tem volume:



- a) 48π
- b) 144π
- c) 108π
- d) 72π
- e) 36π