

## **RELATÓRIO DO LEAMAT**

### **DEDUÇÃO DAS RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO POR MEIO DE MATERIAL DIDÁTICO MANIPULÁVEL**

**ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA**

**ALICE PEREIRA STELLET DE MENEZES  
ALICE ROCHA BARRETO CORRÊA MANHÃES  
JOÃO VITOR PESSANHA SIMÃO  
MÁRCIA VALÉRIA NOVARINO SILVA  
RODRIGO GARNIER TOMÁS DE OLIVEIRA**

**CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ  
2018.2**

ALICE PEREIRA STELLET DE MENEZES  
ALICE ROCHA BARRETO CORRÊA MANHÃES  
JOÃO VITOR PESSANHA SIMÃO  
MÁRCIA VALÉRIA NOVARINO SILVA  
RODRIGO GARNIER TOMÁS DE OLIVEIRA

## **RELATÓRIO DO LEAMAT**

### **DEDUÇÃO DAS RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO POR MEIO DE MATERIAL DIDÁTICO MANIPULÁVEL**

ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA

Trabalho apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, *campus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão da disciplina Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Prof<sup>ª</sup>. Me. Ana Mary Fonseca Barreto de Almeida

CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ  
2018.2

## SUMÁRIO

1) Relatório do LEAMAT I .....	3
1.1) Atividades desenvolvidas .....	3
1.2) Elaboração da sequência didática.....	5
1.2.1) Tema .....	5
1.2.2) Justificativa .....	5
1.2.3) Objetivo Geral .....	8
1.2.4) Público Alvo .....	8
2) Relatório do LEAMAT II .....	9
2.1) Atividades desenvolvidas .....	9
2.2) Elaboração da sequência didática .....	9
2.2.1) Planejamento da sequência didática .....	9
2.2.2) Aplicação da sequência didática na turma do LEAMAT II ..	13
3) Relatório do LEAMAT III .....	17
3.1) Atividades desenvolvidas .....	17
3.2) Elaboração da sequência didática .....	17
3.2.1) Versão final da sequência didática .....	17
3.2.2) Experimentação da sequência didática na turma regular ..	19
Considerações Finais .....	30
Referências .....	31
Apêndices .....	32
Apêndice A - Material didático aplicado na turma do LEAMAT II .....	33
Apêndice B - Material didático experimentado na turma regular .....	41

## 1) Relatório do LEAMAT I

### 1.1) Atividades desenvolvidas

No dia 3 de outubro de 2017 aconteceu a aula inaugural das linhas de pesquisa de Educação Inclusiva e Geometria, ministrada pelas professoras orientadoras. Foram apresentados a proposta e os objetivos da disciplina, e um cronograma de todas as aulas que teríamos no LEAMAT.

Também foram expostos os critérios de avaliação e reforçada a importância da presença, participação e acompanhamento das aulas, visto a necessidade da entrega de relatório ao final do período, que deverá conter relatos das aulas e a justificativa do tema escolhido pelo grupo.

A professora orientadora da linha de pesquisa de Geometria distribuiu a apostila que seria trabalhada na aula seguinte.

No dia 17 de outubro de 2017, a professora orientadora entregou um cronograma correspondente às aulas da linha de pesquisa de Geometria, marcou e sorteou um seminário sobre os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) dos Ensinos Fundamental (3º e 4º ciclos) e Médio.

Logo após, falou sobre o trabalho final do LEAMAT, dando dicas de como desenvolver os objetivos e elaborar a justificativa do tema escolhido pelo grupo. É importante que uma boa justificativa tenha aspectos epistemológicos, cognitivos e pedagógicos. Fomos aconselhados também a pensar em uma pergunta norteadora que ajudará a desenvolver o objetivo geral da sequência didática.

Também demos início à discussão da dissertação "*Ensino de Geometria: Rumos da Pesquisa (1991-2011)*", escrita por Rebeca Moreira Sena e Beatriz Vargas Dorneles, que traz em discussão as linhas de pesquisas que estão produzindo conhecimento sobre Geometria no Brasil.

No dia 31 de outubro de 2017, os subgrupos<sup>1</sup>  $A_1$  e  $A_2$  apresentaram seminários sobre os PCN, mais especificamente no que diz respeito ao ensino de Geometria nos Ensinos Fundamentais (3º e 4º ciclo) e Médio. O grupo  $A_1$  foi o

---

<sup>1</sup> A turma do LEAMAT foi dividida em dois grupos A e B. Cada grupo é composto por dois subgrupos, nomeados neste relatório por  $A_1$  e  $A_2$ ,  $B_1$  e  $B_2$ .

primeiro a apresentar, falando sobre a Geometria no Ensino Fundamental, enquanto a professora e o grupo A<sub>2</sub> avaliavam. Depois, os papéis se inverteram.

No Ensino Fundamental, já é possível perceber a importância da Geometria para desenvolver as capacidades cognitivas fundamentais. Os alunos serão capazes de: compreender o espaço físico, ter domínio das figuras geométricas e das representações gráficas de figuras planas e espaciais. Ali, eles passarão pela experimentação e por deduções informais.

No Ensino Médio, os alunos estudarão as Geometrias plana, espacial, métrica e analítica, e eles devem perceber que um problema pode ser abordado com diferentes instrumentos matemáticos. Eles também terão a oportunidade de apresentar e validar seus conhecimentos, e desenvolver o pensamento lógico dedutivo.

No dia 14 de novembro de 2017, fizemos a leitura e discussão do texto *"Por que não ensinar geometria?"*, escrito por Sérgio Lorenzato. Foi falado sobre motivos da Geometria estar tão ausente nas salas de aula: falta de conhecimento por parte dos professores; importância dada a seguir fielmente os livros didáticos que, geralmente, só apresentam a Geometria nos capítulos finais; má elaboração da matriz curricular de cursos de professores da área de matemática; o Movimento da Matemática Moderna com a "algebrização" da Geometria. São diversos fatores que causam um ensino ruim da Geometria, principalmente baseado no fato de que não é possível ensinar algo que não se conhece.

Os próprios professores também usam justificativas além do "não saber", como "os alunos preferem trabalhar com números" ou "o problema maior é com as contas". Dessa forma, cria-se um ciclo vicioso, pois se o professor não conhece a Geometria, os alunos também não conhecerão.

Também conversamos sobre a importância de se aprender Geometria e o quanto ela nos ajuda na visualização do mundo ao nosso redor. Por fim, construímos a faixa de Moebius.

No dia 21 de novembro de 2017, todos os grupos se reuniram (A e B) para assistir à apresentação de um grupo que concluiu o LEAMAT III no segundo semestre de 2016, referente às linhas de pesquisa de Geometria e Educação Inclusiva.

Na parte de Geometria, o trabalho falava sobre a sequência didática de aplicação de volume em embalagens em uma turma do ensino médio; já na parte de Educação Inclusiva, o grupo apresentou uma sequência didática com o tema de adição e subtração de matrizes com material concreto, aplicada para uma aluna cega.

Eles nos explicaram os trabalhos ao mesmo tempo em que mostravam como deve ser a apresentação no LEAMAT III. Mostraram fotos da aplicação das aulas e os materiais utilizados. Também destacaram a importância de não deixarmos para fazer tudo de última hora e estarmos preparados para os imprevistos que podem acontecer no dia da aplicação nas turmas regulares.

No dia 28 de novembro de 2017, o grupo  $A_2$  iniciou a aula apresentando um seminário sobre o método de desenvolvimento de pensamento geométrico de Van Hiele. Em seguida, o grupo  $A_1$  falou sobre uma aplicação desse mesmo método que ocorreu em uma escola do Rio de Janeiro. No final, a professora fez os devidos comentários sobre as duas apresentações.

No dia 19 de dezembro de 2017, lemos e discutimos o capítulo de introdução do livro "*Argumentação e Provas no Ensino da Matemática*", escrito por Lílian Nasser e Lucia Tinoco, que fala da importância de se desenvolver a habilidade de justificar, argumentar e demonstrar matematicamente. Foi debatido também a respeito de atividades lúdicas como auxílio para alunos com dificuldade de aprendizagem.

O fim da aula foi destinado à elaboração das justificativas dos temas escolhidos por cada grupo.

## **1.2) Elaboração da sequência didática**

### **1.2.1) Tema**

Dedução das relações métricas no triângulo retângulo por meio de material didático manipulável.

### **1.2.2) Justificativa**

Mediante conversas e pesquisas ao longo dos encontros no LEAMAT, o grupo chegou a conclusão de que a Geometria está presente em tudo no nosso dia a dia: nas formas arquitetônicas, nas estruturas moleculares encontradas na natureza, na tela do pintor, no corpo humano. Ou seja, é um conhecimento fundamental que nos leva a entender e assimilar o meio no qual vivemos. Para Lorenzato (1995):

A Geometria está por toda parte, desde antes de Cristo, mas é preciso conseguir enxergá-la... mesmo não querendo, lidamos em nosso cotidiano com as idéias de paralelismo, perpendicularismo, congruência, semelhança, proporcionalidade, medição (comprimento, área, volume), simetria: seja pelo visual (formas), seja pelo uso no lazer, na profissão, na comunicação oral, cotidianamente estamos envolvidos com a Geometria. (LORENZATO, 1995, p. 5).

Segundo Valente (1999 apud SENA; DORNELES, 2013), o estudo da Geometria no Brasil recebeu uma maior atenção por volta de 1648, no cenário militar, devido à necessidade na preparação dos militares. Sem os conhecimentos matemáticos, os soldados estavam apresentando dificuldades em acertar alvos. "Foi a necessidade de ter noções geométricas que impulsionou estudos matemáticos, incorporados nos currículos oficiais" (SENA; DORNELES, 2013, p. 139).

Ainda que fundamental para o entendimento e compreensão do espaço físico em que o indivíduo está inserido e que tenha recebido tal atenção, o ensino de Geometria vem enfrentando dificuldades para ser trabalhado em sala de aula. Professores com falta de conhecimentos geométricos necessários para aplicação de suas práticas pedagógicas e má formação de docentes são grandes contribuições para essa dificuldade (LORENZATO, 1995), deixando o referido conteúdo matemático muitas vezes no final do livro ou até mesmo não sendo trabalhado.

Outro ponto importante está na maneira de ensinar a Geometria. Segundo D'Ambrósio (1997):

Contextualizar a matemática é essencial para todos, se não, lamentavelmente continuamos a insistir que a inteligência e a racionalidade estão identificadas com matemática, continuando assim a papagaiar teoremas,

decorar tabuada, mecanizar as operações e efetuar derivadas e integrais, que nada tem a ver com nada nas cidades, nos campos ou nas florestas (D'AMBRÓSIO, 1997, p. 52).

Considerando que a Geometria está no cotidiano (LORENZATO, 1995), um conteúdo contextualizado tem muito mais sentido e significado para um aluno do que simplesmente a sua reprodução (D'AMBRÓSIO, 1997).

O conhecimento geométrico não acontece somente na escola. Pode ser construído em um processo gradual, por meio de desenhos, representações e linguagens diversas. Entretanto, esse potencial é pouco aproveitado quando, em algumas situações, o aluno ingressa na escola (VIEIRA, 2010).

Existem muitos professores que se preocupam em utilizar materiais concretos para dar melhor sentido quando trabalham com a educação infantil. Assim, os alunos das séries iniciais estão sempre em contato com os conceitos geométricos, realizando comparações e estabelecendo relações de modo a analisar as propriedades das figuras espaciais e planas. Porém, nas séries mais a frente esse recurso é pouquíssimo utilizado (VIANA, 2000 apud VIEIRA, 2010).

Devido à defasagem ao longo do ensino, à mecanização e à preferência de parte dos docentes por assuntos algébricos e aritméticos, o aluno chega às etapas finais de ensino com um conhecimento muito superficial e limitado geometricamente. De acordo com Vieira (2010):

Quando o aluno se depara com uma situação desconhecida, o uso de um material que possa ilustrar o que está sendo discutido pode ser indispensável, mesmo no ensino médio, quando muitos professores supõem que o aluno já tenha um nível de desenvolvimento mental alto e uma grande capacidade de abstração (VIEIRA, 2010, p. 40).

Conforme Lamas e Mauri (2014):

Modelos concretos no ensino fundamental, em particular, no ensino da geometria, pode ser considerado um recurso didático para o professor, capaz de desenvolver nos alunos a capacidade de visualização e compreensão das propriedades

fundamentais dessa área da matemática, que em geral, os alunos apresentam muita dificuldade [...] (LAMAS; MAURI, 2014, p. 1).

A partir das dificuldades no ensino da Geometria e da necessidade de um ensino claro e conciso dessa unidade temática da Matemática, o grupo decidiu elaborar uma proposta sistemática alternativa para a apresentação das relações métricas no triângulo retângulo, que leve o aluno à compreensão e ao entendimento das aplicações de tal conteúdo, utilizando para isso material didático manipulável.

### **1.2.3) Objetivo geral**

Investigar se o uso de material didático manipulável contribui positivamente para a dedução das relações métricas no triângulo retângulo.

### **1.2.4) Público alvo**

Alunos do 9º ano do Ensino Fundamental.

## **2) Relatório do LEAMAT II**

### **2.1) Atividades desenvolvidas**

No primeiro encontro, dia 24 de abril de 2018, as professoras orientadoras das linhas de pesquisa Educação Matemática Inclusiva e Geometria apresentaram as atividades a serem desenvolvidas no LEAMAT II. As atividades do semestre ficaram divididas em três etapas, sendo a primeira para elaboração da sequência didática, a segunda para aplicação da referida sequência na própria turma do LEAMAT II e a terceira para correção dos relatórios, tendo após esse processo a avaliação final.

Do dia 8 de maio ao dia 12 de junho, foi o período destinado aos grupos para elaboração da sequência didática, sendo em cada encontro um revezamento dos grupos com as orientadoras.

Do dia 19 de junho ao dia 7 de agosto, ocorreram as aplicações das sequências de todos os grupos, tendo também um momento de considerações e sugestões dos colegas e das orientadoras a respeito do que poderia ser melhorado nas sequências.

A aplicação da sequência do nosso grupo aconteceu no dia 19 de junho de 2018. Após essa data, até o final do semestre letivo, o respectivo relatório foi finalizado. A avaliação final ocorreu no dia 5 de setembro de 2018.

### **2.2) Elaboração da sequência didática**

#### **2.2.1) Planejamento da sequência didática**

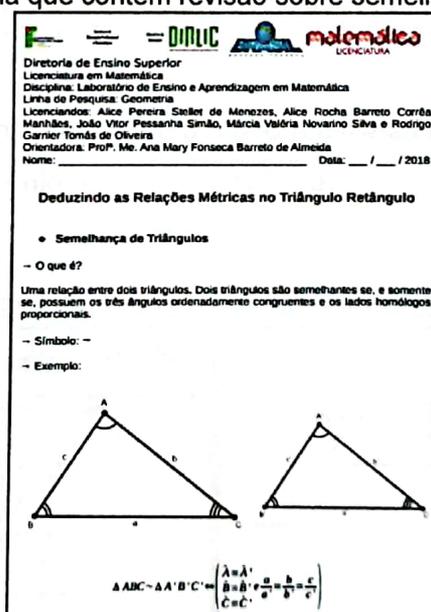
Diante de tantos temas possíveis dentro da linha de Geometria, a ideia de trabalhar com as relações métricas do triângulo retângulo surgiu em uma aula de Construções Geométricas e Geometria Descritiva II, em que a maioria dos participantes do grupo se surpreendeu com as deduções das referidas relações métricas a partir do conceito de semelhança de triângulos, uma vez que nenhum integrante lembrava-se de ter visto tais comprovações.

A ideia inicial era utilizar material concreto nas deduções das fórmulas, com o intuito de facilitar a visualização e proporcionar um aprendizado mais significativo, ajudando os alunos a entender melhor a origem das relações e não apenas decorá-las. Posteriormente, decidiu-se que seria necessária uma revisão de semelhança de triângulos, visto que esse conteúdo é prerequisite para o entendimento do referido tema.

A sequência, basicamente, é organizada na manipulação de dois triângulos e em duas apostilas, sendo uma conceitual e outra de atividades.

A apostila conceitual é estruturada em três partes. A primeira aborda uma revisão de semelhança de triângulos e razão de semelhança (Figura 1). E juntamente com toda a classe, constroem-se as respectivas definições.

Figura 1 – Apostila que contém revisão sobre semelhança de triângulos



Fonte: Elaboração própria.

Na segunda parte, a apostila contempla as orientações, o passo a passo para que o aluno possa, assim, realizar a preparação correta do material concreto para utilização (Figura 2).

Figura 2 – Orientações para uso do material concreto

**Figura 2 – Orientações para uso do material concreto**

**Razão de semelhança:**  
 É o valor da razão entre os lados homólogos. Geralmente é representada pela letra  $k$ .

- O que significa uma razão de semelhança de valor igual a 1?

---

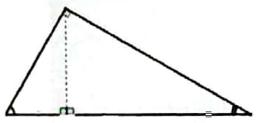


---

• **Relações Métricas no Triângulo Retângulo**

- Usando triângulos retângulos construídos em EVA, siga os passos abaixo:

1. Usando canetas coloridas, marque os ângulos dos dois triângulos que recebeu, utilizando a mesma cor para ângulos correspondentes;
2. Dê nome aos elementos dos triângulos;



3. Um dos triângulos possui uma linha tracejada. O que essa linha representa?

---

4. Corte o triângulo na linha tracejada;
5. Você agora possui três triângulos: o original e mais dois, obtidos a partir do corte. Repare que temos um ângulo não identificado em cada um dos novos triângulos. É possível identificá-los? Como?

**Figura 2 – Orientações para uso do material concreto**

---



---

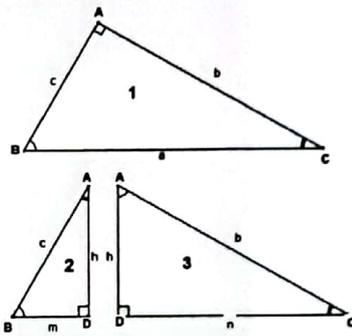
6. Identifique-os, utilizando canetas coloridas e fazendo corresponder com as cores utilizadas no item 1;
7. Observe os três triângulos obtidos. O que podemos concluir sobre eles?

---



---

- Temos, então, três triângulos semelhantes:



Fonte: Elaboração própria.

Em seguida, com os triângulos, o aluno realiza as deduções das fórmulas das relações métricas do triângulo retângulo (Figura 3).

Figura 3 – Espaço, na apostila, para estabelecer as relações

**Figura 3 – Espaço, na apostila, para estabelecer as relações**

- Sabendo agora que os triângulos são semelhantes, podemos deduzir algumas relações métricas, ou seja, relações entre as medidas de seus lados:

$\triangle ABC \sim \triangle DBA$

$\triangle ABC \sim \triangle DAC$

$\triangle DAB \sim \triangle DCA$

- Excluindo as relações repetidas, temos:

- 1) O quadrado de um cateto é igual ao produto de sua projeção sobre a hipotenusa pela hipotenusa:

- 2) O quadrado da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto entre as projeções dos catetos sobre ela:

- 3) O produto entre os catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa a ela:

4) O produto de um cateto pela altura relativa à hipotenusa é igual ao produto de sua projeção sobre a hipotenusa pelo outro cateto:

Anotações:

---



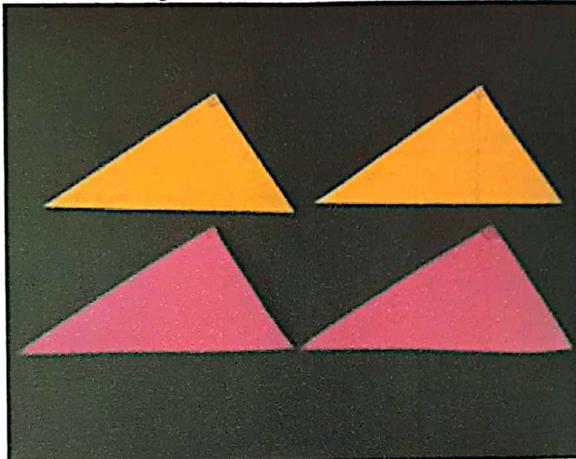
---

Referência:  
 DOLIC, Cláudio. Porquê. José Nicolau. Fundamentos de matemática elementar: geometria plana: V. 7. 64. São Paulo: Atual, 1993.

Fonte: Elaboração própria.

O material concreto utilizado na sequência é composto por dois triângulos feitos de E.V.A<sup>2</sup>, em que ambos possuem as mesmas dimensões, ou seja, são côngruos (Figura 4).

Figura 4 – Triângulos a serem usados na manipulação



Fonte: Elaboração própria.

Um dos triângulos possui a marcação da altura relativa à hipotenusa. Ali, o aluno deve recortar e, assim, outros dois triângulos são formados. Logo, são gerados três triângulos semelhantes, que nesse momento, isso pode ser afirmado utilizando os conceitos revistos na primeira parte da apostila.

Por fim, a terceira e última parte da sequência tem mais uma apostila composta por quatro questões de vestibular que envolvem todos os conceitos abordados ao longo da aula (Figura 5).

<sup>2</sup> Espuma sintética cuja sigla deriva do inglês: *Ethylene Vinyl Acetate*. Em português, acetato-vinilo de etileno.

Figura 5 – Lista de exercícios de múltipla escolha



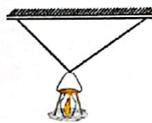
Diretoria de Ensino Superior  
 Licenciatura em Matemática  
 Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática  
 Linha de Pesquisa: Geometria  
 Licenciandos: Alice Pereira Stieff de Menezes, Alice Rocha Barreto Corrêa  
 Manhães, João Vitor Pessanha Simão, Márcia Valéria Novarino Silva e Rodrigo  
 Garner Tomàs de Oliveira  
 Orientadora: Prof.ª. Me. Ana Mary Fonseca Barreto de Almeida  
 Nome: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_/\_\_\_/2018

**ATIVIDADES**

01. (FATEC-SP) Se os catetos de um triângulo T medem, respectivamente, 12 cm e 5 cm, então a altura relativa à hipotenusa é:

a)  $\frac{12}{5}$  cm   b)  $\frac{5}{13}$  cm   c)  $\frac{12}{13}$  cm   d)  $\frac{25}{13}$  cm   e)  $\frac{60}{13}$  cm

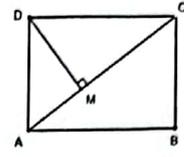
02. (UFRGS-RS) O lampião representado na figura está suspenso por duas cordas perpendiculares presas ao teto. Sabendo-se que essas cordas medem  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{6}{5}$ , a distância do lampião ao teto é:



a) 1,69   b) 1,3   c) 0,8   d)  $\frac{1}{2}$    e)  $\frac{6}{13}$



03. (FAAP-SP) No retângulo ABCD de lados  $AB = 4$  cm e  $BC = 3$  cm, o segmento DM é perpendicular à diagonal AC. Calcule o comprimento do segmento AM.



a) 2 cm   b)  $\frac{9}{5}$  cm   c)  $\frac{12}{5}$  cm   d)  $\frac{5}{2}$  cm   e)  $\frac{5}{9}$  cm

04. (UFU-MG) Num triângulo ABC, o ângulo A é reto. A altura h divide a hipotenusa e em dois segmentos m e n ( $m > n$ ). Sabendo-se que o cateto b é o dobro do cateto c, podemos afirmar que  $\frac{m}{n}$  é igual a:

a) 4   b) 3   c) 2   d)  $\frac{7}{2}$    e) 5

Fonte: Elaboração própria.

Esses exercícios têm por finalidade aplicação e fixação do conteúdo trabalhado. Depois de recolhida a apostila com as respostas dos alunos, as atividades são corrigidas no quadro.

### 2.2.2) Aplicação da sequência didática na turma do LEAMAT II

No dia 19 de junho de 2018, a sequência planejada foi aplicada na turma do LEAMAT II, com duração de 100 minutos, sob a avaliação da orientadora da linha de pesquisa de Geometria. Teve como objetivo a verificação do tempo que posteriormente seria necessário para a aplicação na turma regular e a qualidade do material elaborado para a aula.

Mesmo estando diante de alunos com um conhecimento já consolidado sobre o assunto, percebemos que alguns colegas apresentaram dificuldades pontuais, que serão descritas ao longo do texto.

No início, como prática para aplicação no LEAMAT III, foi explicado à classe que a aula seria dada como parte da linha de pesquisa de Geometria da disciplina Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática, por alunos do Instituto

Federal Fluminense. Os integrantes do grupo e o conteúdo que seria visto foram devidamente apresentados.

Como planejado inicialmente, foi feita a revisão de semelhança de triângulos, conceituando e exemplificando (Figura 6).

Figura 6 – Professora e turma acompanhando a aplicação

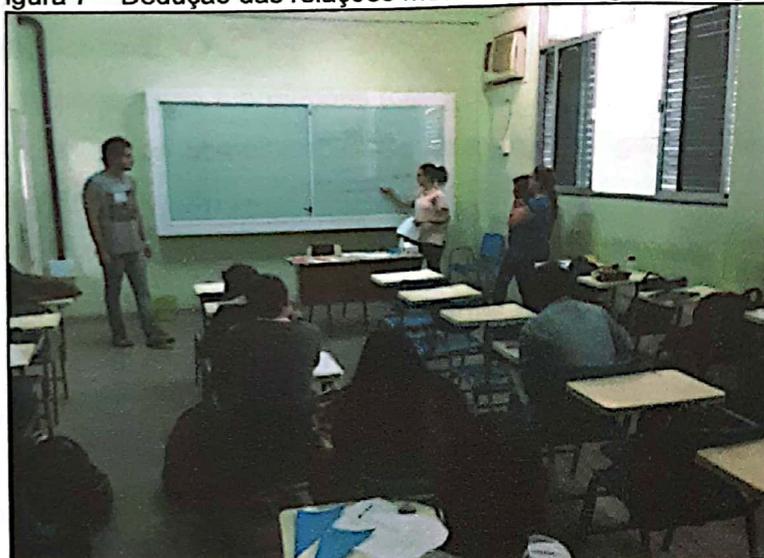


Fonte: Elaboração própria.

Em seguida, os dois triângulos foram entregues. Em um deles, havia a marcação da altura relativa à hipotenusa, que foi cortada, dando origem a outros dois triângulos semelhantes entre si e ao outro que não foi cortado. O material foi manuseado juntamente com as orientações contidas na apostila. Os alunos apresentaram certa dificuldade em marcar os ângulos no material por não conseguirem visualizar quais ângulos eram congruentes.

A partir daí, com os três triângulos em mãos e utilizando a propriedade e conceito de semelhança, foram feitas relações entre os lados homólogos dos triângulos, comparando-os dois a dois, resultando nas relações métricas do triângulo retângulo (Figura 7).

Figura 7 – Dedução das relações métricas no triângulo retângulo



Fonte: Elaboração própria.

Posteriormente, foi distribuída a outra apostila contendo exercícios de vestibular. A turma teve alguns minutos para resolver as questões sem o nosso auxílio e, em seguida, devido à proximidade do término do horário de aula, só foram comentadas as respostas, sem a correção no quadro.

Ao finalizar a aplicação, iniciou-se outro momento em que a professora e os discentes fizeram algumas críticas e sugestões à aula, que foram:

- Interagir e trabalhar mais junto com a turma;
- Anotar as respostas dos alunos no quadro e indagá-los mais;
- Usar triângulo de papel ao invés de E.V.A.;
- Colocar os triângulos padronizados;
- Marcar os triângulos dos dois lados;
- Levá-los a perceber a ordem dos vértices;
- Antes de cortar, marcar os ângulos retos;
- Depois que cortar o triângulo, frisar que é para marcar os ângulos congruentes nos triângulos que surgiram após o corte da altura relativa à hipotenusa;
- Na hora da manipulação, colocar um triângulo maior no quadro, fazendo junto com os alunos mais lentamente;

- Antes de começar a fazer as deduções, pedir que os alunos identifiquem os três triângulos no E.V.A.;
- Explicar o que é altura e projeções (catetos);
- Frisar a questão da semelhança: “Se dois ângulos iguais, o terceiro também é. Por que?”;
- Colocar as relações e os triângulos na mesma página, na apostila conceitual;
- Dar algumas relações completas para ajudar nas outras deduções;
- Deixar um espaço que indique que o teorema de Pitágoras também é uma relação métrica;
- Deixar um espaço para que os alunos coloquem que, ao todo, são seis relações;
- Trocar as frações por números decimais, para que as questões sejam mais tranquilas, principalmente na questão 2 da lista;
- Explorar outras relações nos exercícios.
- Talvez trabalhar em dupla.

Todas as sugestões foram registradas e analisadas pelo grupo. Aquelas consideradas relevantes serão aceitas e a sequência será modificada no decorrer do LEAMAT III, antes da aplicação na turma regular.

### 3) Relatório do LEAMAT III

#### 3.1) Atividades desenvolvidas

O LEAMAT III teve início no dia 26 de setembro de 2018. As atividades do semestre ficaram divididas nas seguintes etapas: a primeira foi voltada para as alterações que seriam feitas nas sequências didáticas antes da aplicação na turma regular; a segunda, para as aplicações das sequências didáticas; a terceira, para análise e avaliação da aplicação, bem como elaboração do relatório final e apresentação de todas as atividades desenvolvidas na disciplina LEAMAT. Ao final de todas essas etapas, aconteceu a avaliação final da disciplina.

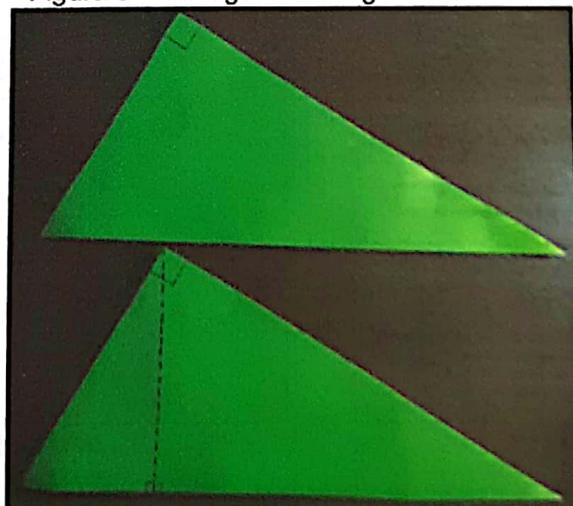
#### 3.2) Elaboração da sequência didática

##### 3.2.1) Versão final da sequência didática

Diante das sugestões feitas na aplicação da sequência na turma do LEAMAT II, foram feitas algumas alterações nos materiais que seriam utilizados na sequência didática.

Todos os triângulos foram padronizados com uma mesma cor e tamanho, e os ângulos retos foram marcados antes da manipulação feita pelos alunos (Figura 8).

Figura 8 – Triângulos retângulos de E.V.A.



Fonte: Elaboração própria.

Foram alterados os espaços para que as relações entre as medidas dos lados de cada triângulo fossem preenchidas (Figura 9).

Figura 9 – Alteração I

$\Delta ABC \sim \Delta DBA$ <div style="display: flex; align-items: center; margin-top: 5px;"> <div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; margin-right: 5px;"></div> <span style="margin: 0 5px;">=</span> <div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; margin-right: 5px;"></div> <span style="margin: 0 5px;">⇒</span> </div> <div style="display: flex; align-items: center; margin-top: 5px;"> <div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; margin-right: 5px;"></div> <span style="margin: 0 5px;">=</span> <div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; margin-right: 5px;"></div> <span style="margin: 0 5px;">⇒</span> </div> <div style="display: flex; align-items: center; margin-top: 5px;"> <div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; margin-right: 5px;"></div> <span style="margin: 0 5px;">=</span> <div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; margin-right: 5px;"></div> <span style="margin: 0 5px;">⇒</span> </div> <div style="display: flex; align-items: center; margin-top: 5px;"> <div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; margin-right: 5px;"></div> <span style="margin: 0 5px;">=</span> <div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; margin-right: 5px;"></div> <span style="margin: 0 5px;">⇒</span> </div>	$\Delta ABC \sim \Delta DBA$ <div style="display: flex; align-items: center; margin-top: 5px;"> <span style="font-size: 2em; margin-right: 5px;">{</span> <span style="margin-right: 5px;">--</span> <span style="margin: 0 5px;">=</span> <span style="margin-right: 5px;">--</span> </div> <div style="display: flex; align-items: center; margin-top: 5px;"> <span style="font-size: 2em; margin-right: 5px;">{</span> <span style="margin-right: 5px;">--</span> <span style="margin: 0 5px;">=</span> <span style="margin-right: 5px;">--</span> </div> <div style="display: flex; align-items: center; margin-top: 5px;"> <span style="font-size: 2em; margin-right: 5px;">{</span> <span style="margin-right: 5px;">--</span> <span style="margin: 0 5px;">=</span> <span style="margin-right: 5px;">--</span> </div>
$\Delta ABC \sim \Delta DAC$ <div style="display: flex; align-items: center; margin-top: 5px;"> <div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; margin-right: 5px;"></div> <span style="margin: 0 5px;">=</span> <div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; margin-right: 5px;"></div> <span style="margin: 0 5px;">⇒</span> </div> <div style="display: flex; align-items: center; margin-top: 5px;"> <div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; margin-right: 5px;"></div> <span style="margin: 0 5px;">=</span> <div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; margin-right: 5px;"></div> <span style="margin: 0 5px;">⇒</span> </div> <div style="display: flex; align-items: center; margin-top: 5px;"> <div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; margin-right: 5px;"></div> <span style="margin: 0 5px;">=</span> <div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; margin-right: 5px;"></div> <span style="margin: 0 5px;">⇒</span> </div> <div style="display: flex; align-items: center; margin-top: 5px;"> <div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; margin-right: 5px;"></div> <span style="margin: 0 5px;">=</span> <div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; margin-right: 5px;"></div> <span style="margin: 0 5px;">⇒</span> </div>	$\Delta ABC \sim \Delta DAC$ <div style="display: flex; align-items: center; margin-top: 5px;"> <span style="font-size: 2em; margin-right: 5px;">{</span> <span style="margin-right: 5px;">--</span> <span style="margin: 0 5px;">=</span> <span style="margin-right: 5px;">--</span> </div> <div style="display: flex; align-items: center; margin-top: 5px;"> <span style="font-size: 2em; margin-right: 5px;">{</span> <span style="margin-right: 5px;">--</span> <span style="margin: 0 5px;">=</span> <span style="margin-right: 5px;">--</span> </div> <div style="display: flex; align-items: center; margin-top: 5px;"> <span style="font-size: 2em; margin-right: 5px;">{</span> <span style="margin-right: 5px;">--</span> <span style="margin: 0 5px;">=</span> <span style="margin-right: 5px;">--</span> </div>
$\Delta DAB \sim \Delta DCA$ <div style="display: flex; align-items: center; margin-top: 5px;"> <div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; margin-right: 5px;"></div> <span style="margin: 0 5px;">=</span> <div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; margin-right: 5px;"></div> <span style="margin: 0 5px;">⇒</span> </div> <div style="display: flex; align-items: center; margin-top: 5px;"> <div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; margin-right: 5px;"></div> <span style="margin: 0 5px;">=</span> <div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; margin-right: 5px;"></div> <span style="margin: 0 5px;">⇒</span> </div> <div style="display: flex; align-items: center; margin-top: 5px;"> <div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; margin-right: 5px;"></div> <span style="margin: 0 5px;">=</span> <div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; margin-right: 5px;"></div> <span style="margin: 0 5px;">⇒</span> </div> <div style="display: flex; align-items: center; margin-top: 5px;"> <div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; margin-right: 5px;"></div> <span style="margin: 0 5px;">=</span> <div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; margin-right: 5px;"></div> <span style="margin: 0 5px;">⇒</span> </div>	$\Delta DAB \sim \Delta DCA$ <div style="display: flex; align-items: center; margin-top: 5px;"> <span style="font-size: 2em; margin-right: 5px;">{</span> <span style="margin-right: 5px;">--</span> <span style="margin: 0 5px;">=</span> <span style="margin-right: 5px;">--</span> </div> <div style="display: flex; align-items: center; margin-top: 5px;"> <span style="font-size: 2em; margin-right: 5px;">{</span> <span style="margin-right: 5px;">--</span> <span style="margin: 0 5px;">=</span> <span style="margin-right: 5px;">--</span> </div> <div style="display: flex; align-items: center; margin-top: 5px;"> <span style="font-size: 2em; margin-right: 5px;">{</span> <span style="margin-right: 5px;">--</span> <span style="margin: 0 5px;">=</span> <span style="margin-right: 5px;">--</span> </div>

Fonte: Elaboração própria.

O espaço para o Teorema de Pitágoras foi acrescentado como a quinta relação métrica (Figura 10).

Figura 10 – Alteração II

<p>4) O produto de um cateto pela altura relativa à hipotenusa é igual ao produto de sua projeção sobre a hipotenusa pelo outro cateto:</p> <div style="border: 1px solid black; width: 150px; height: 20px; margin: 10px auto;"></div> <p>Anotações:</p>	<p>4) O produto de um cateto pela altura relativa à hipotenusa é igual ao produto de sua projeção sobre a hipotenusa pelo outro cateto:</p> <div style="border: 1px solid black; width: 150px; height: 20px; margin: 10px auto;"></div> <p>5) O quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.</p> <div style="border: 1px solid black; width: 150px; height: 20px; margin: 10px auto;"></div> <p>Anotações:</p>
---	--

Fonte: Elaboração própria.

As questões 1 e 3 tiveram a ordem alterada e passaram a ser respectivamente questões 3 e 1.

As frações na questão 2 foram substituídas por números inteiros, e as alternativas, retiradas. Além disso, o ângulo reto foi marcado na imagem (Figura 11).

Figura 11 – Alteração V

<p>02. (UFRGS-RS) O lampião representado na figura está suspenso por duas cordas perpendiculares presas ao teto. Sabendo-se que essas cordas medem <math>\frac{1}{2}</math> e <math>\frac{6}{5}</math>, a distância do lampião ao teto é:</p>  <p>a) 1,69   b) 1,3   c) 0,6   d) <math>\frac{1}{2}</math>   e) <math>\frac{6}{13}</math></p>	<p>2. (UFRGS-RS - adaptada) O lampião representado na figura está suspenso por duas cordas perpendiculares entre si, presas ao teto. Sabendo-se que essas cordas medem 6 cm e 8 cm, a distância do lampião ao teto é:</p> 
---	--

Fonte: Elaboração própria.

Para que a lista de exercícios não ficasse extensa, a questão 4 foi retirada.

Triângulos em tamanho ampliado foram construídos em E.V.A. para serem colados no quadro<sup>3</sup>, de forma que os alunos acompanhassem melhor, e também com o intuito de poupar tempo ao desenhá-los.

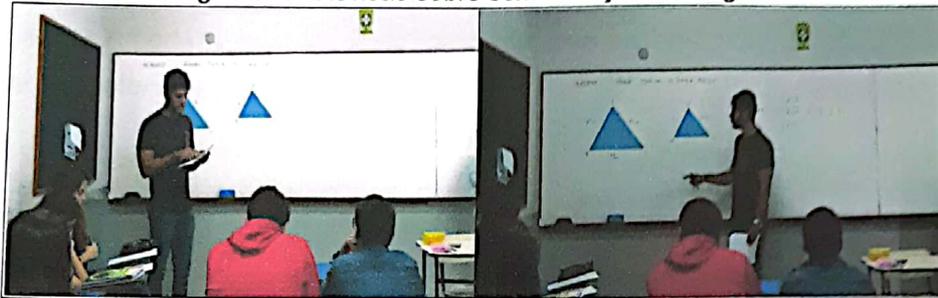
### 3.2.2) Experimentação da sequência didática na turma regular

A aplicação da sequência didática da linha de pesquisa de Geometria aconteceu no dia 31 de outubro de 2018, em uma instituição particular no município de Campos dos Goytacazes, no horário das 7h50min às 9h20min. A aplicação ocorreu em uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental, na qual 26 alunos estavam presentes.

Conforme planejado, o início da aula foi uma revisão sobre semelhança de triângulos e, após a entrega das apostilas, foram lembrados com os alunos os conceitos de semelhança, razão de semelhança e congruência (Figura 12).

<sup>3</sup> É possível encontrar registros sobre isso a partir da página 21.

Figura 12 – Revisão sobre semelhança de triângulos



Fonte: Protocolo de pesquisa.

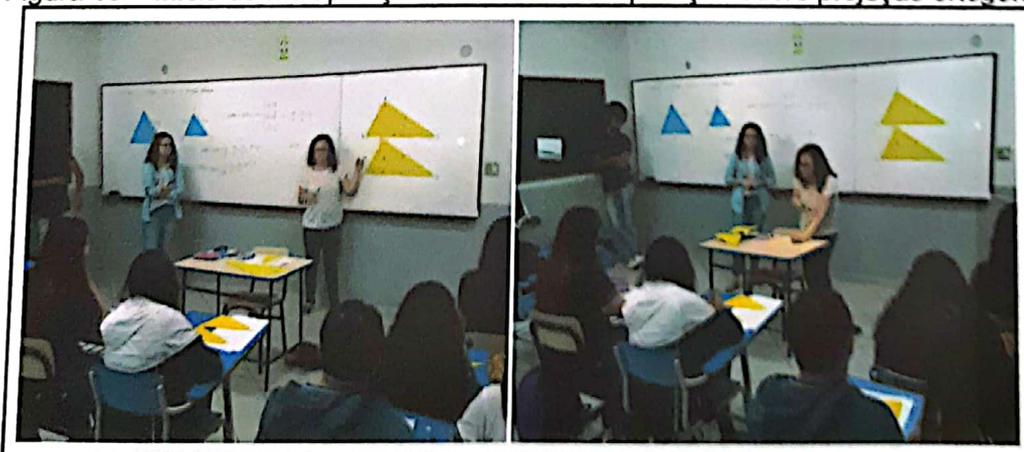
A princípio, alguns alunos tiveram dificuldades com o conceito de lados homólogos, porém, quando não entendiam, expunham suas dúvidas, o que foi muito importante para que fossem sanadas.

Já no início, a turma se mostrou bastante participativa e sempre respondia quando algo era perguntado.

Em seguida, os dois triângulos retângulos de E.V.A. foram entregues aos alunos para que eles explorassem o material e depois acompanhassem as orientações propostas na apostila. Também foram revisados os elementos do triângulo retângulo: catetos, hipotenusa, altura e as projeções dos catetos.

No momento da explicação, uma integrante do grupo mostrou do que se tratava a projeção de um segmento utilizando uma lanterna e uma caneta para produzir uma sombra. Essa sombra seria a projeção da caneta que por sua vez representava um segmento de reta (Figura 13).

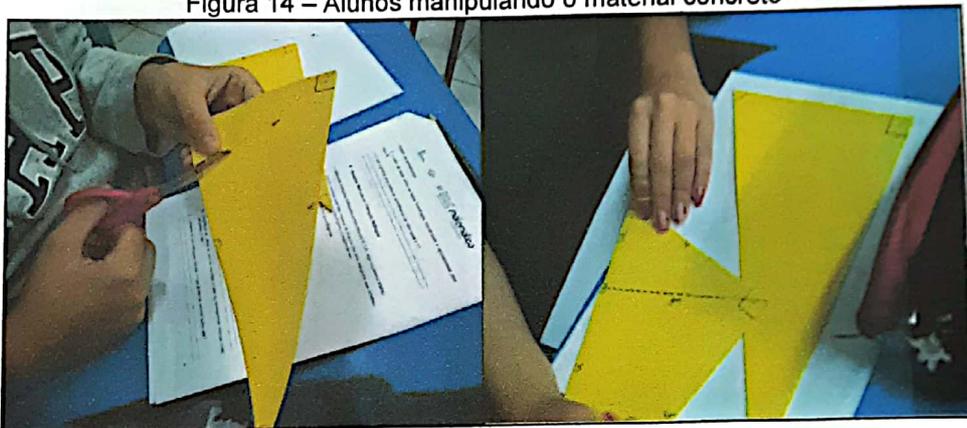
Figura 13 – Início da manipulação do material e explicação sobre projeção ortogonal



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Para realização das atividades, os alunos tinham que marcar os ângulos congruentes e cortar o local da linha tracejada, que simbolizava a altura do triângulo relativa à hipotenusa (Figura 14).

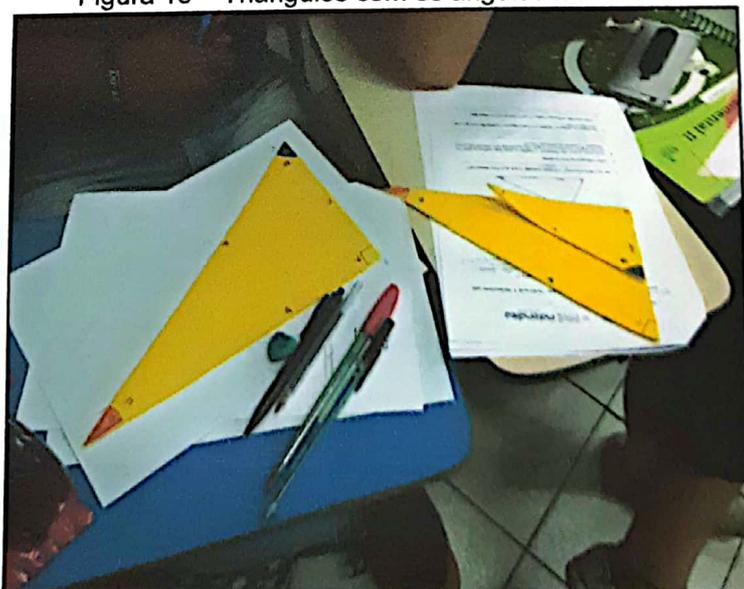
Figura 14 – Alunos manipulando o material concreto



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Apenas um triângulo tinha essa marca. Com isso, eles teriam três triângulos semelhantes. Ao chegarem a essa conclusão, foi pedido que marcassem os novos ângulos com as cores utilizadas anteriormente, ou seja, ângulos congruentes de mesma cor (Figura 15).

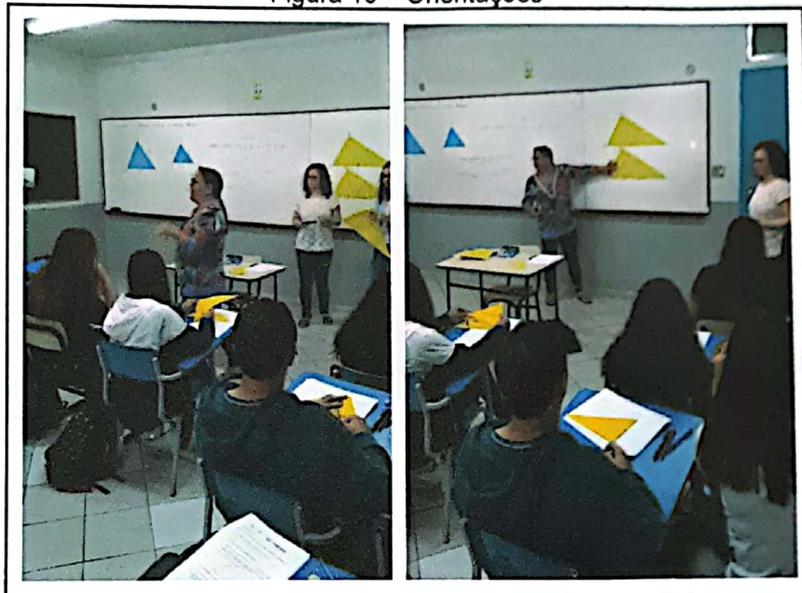
Figura 15 – Triângulos com os ângulos marcados



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Todas as orientações foram feitas no quadro, utilizando os triângulos em tamanho ampliado (Figura 16).

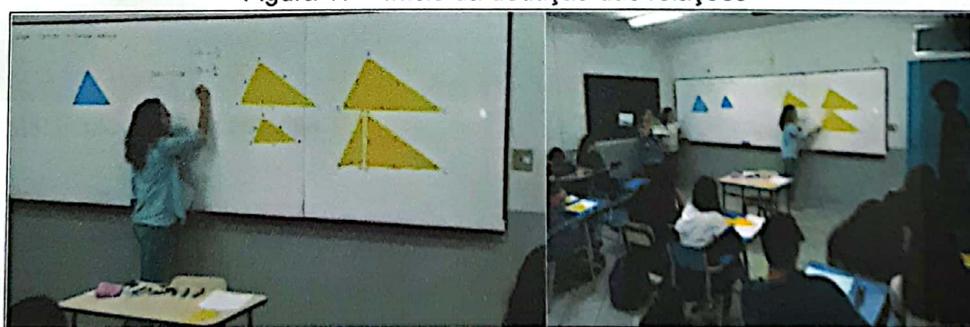
Figura 16 – Orientações



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Depois disso, estando com os três triângulos semelhantes e lembrado o conceito de semelhança, foram feitas relações entre os lados homólogos dos triângulos, sempre de dois em dois. No primeiro par de triângulos, uma integrante do grupo fez essas relações juntamente com os alunos (Figura 17).

Figura 17 – Início da dedução das relações



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Para que fizessem as relações dos outros dois pares, foi dado um tempo para a turma. Assim que terminaram, foi pedido que dois alunos fizessem as relações no quadro (Figura 18).

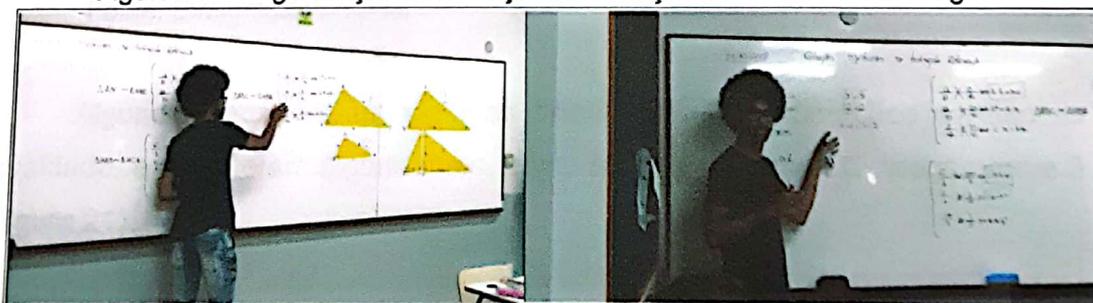
Figura 18 – Alunos participando no quadro



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Depois de estabelecidas as relações, foi pedido que os alunos excluíssem as repetidas a fim de preencher a última parte da apostila. Além disso, um dos integrantes do grupo demonstrou que a partir de duas das relações métricas era possível chegar ao Teorema de Pitágoras (Figura 19).

Figura 19 – Organização das relações e dedução do Teorema de Pitágoras



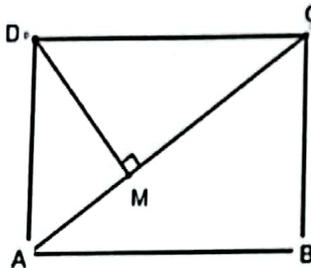
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Por causa da falta de tempo, não foi possível corrigir a folha de exercícios em aula. Então, para que os alunos não deixassem de fazer, foi sugerido que eles realizassem as atividades em outro momento e as entregassem à professora da turma que, por sua vez, as entregaria ao grupo. Posteriormente, as atividades foram corrigidas para avaliar se os objetivos foram alcançados.

Na primeira questão, eram dados uma figura e os valores de alguns segmentos de reta e foi pedido que se encontrasse o valor de um outro segmento de reta. Para isso, era necessário que utilizassem as relações métricas (Figura 20).

Figura 20 – Enunciado da primeira questão

1. (FAAP-SP) No retângulo ABCD de lados  $AB = 4$  cm e  $BC = 3$  cm, o segmento  $DM$  é perpendicular à diagonal  $AC$ . Calcule o comprimento do segmento  $AM$ .



a) 2 cm

b)  $\frac{9}{5}$  cm

c)  $\frac{12}{5}$  cm

d)  $\frac{5}{2}$  cm

e)  $\frac{5}{9}$  cm

Fonte: Elaboração própria.

Alguns alunos tiveram algumas dificuldades nas operações e relações de igualdade, e cometeram alguns erros, como encontrar 6 na multiplicação entre 3 e 3 (Figura 21).

Figura 21 – Registros da primeira questão

01)  $4^2 + 3^2 = x^2$        $\frac{5}{3} = \frac{3}{x}$        $3^2 = 5x$   
 $16 + 9 = x^2$        $5x = 6$        $9 = 5x$   
 $\frac{5}{3} = x$        $x = \frac{6}{5}$        $\frac{9}{5} = x$  ✓

①   $4^2 + 3^2 = x^2$        $\frac{5}{3} = \frac{3}{x}$        $5x = 6$        $3^2 = 5x$   
 $16 + 9 = x^2$        $x = \frac{6}{5}$        $x = \frac{6}{5}$        $9 = 5x$   
 $5x = 9$  ✓       $x = \frac{9}{5}$  ✓

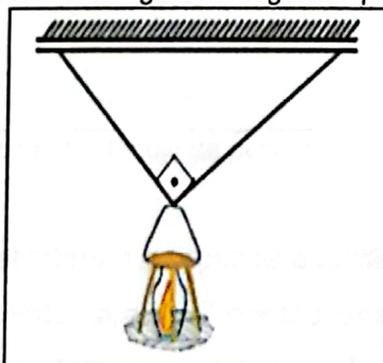
D. Não  $3^2 = 5x$        $\frac{5}{3} = \frac{3}{x}$        $5x = 6$        $3^2 = 5x$  (e)  
 $16 + 9 = x^2$        $x = \frac{6}{5}$        $x = \frac{6}{5}$        $9 = 5x$   
 $\frac{5}{3} = x$  ✓       $\frac{9}{5} = x$  ✓

Fonte: Protocolo de pesquisa.

No total, 15 alunos acertaram a primeira questão.

A segunda questão foi adaptada de um item de Concurso Vestibular da UFRGS-RS, e tratava-se de um lampião "suspenso por duas cordas perpendiculares entre si, presas ao teto". Considerando que as cordas tinham 6cm e 8cm, desejava saber a distância do lampião até o teto (Figura 22).

Figura 22 – Imagem da segunda questão



Fonte: Elaboração própria.

Nessa questão, verificou-se que dez resoluções ficaram incompletas, possivelmente por causa de uma interpretação equivocada. Os alunos calcularam apenas o valor da hipotenusa, porém era pedido a altura, e para isso era necessário

usar a relação que diz que o produto entre os catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa a ela.

Além disso, a falta de unidade de medida no resultado final foi algo muito recorrente nos registros dos alunos (Figura 23).

Figura 23 – Registros da segunda questão

$x^2 = 6^2 + 8^2$   
 $x^2 = 36 + 64$   
 $x^2 = 100$   
 $x = \sqrt{100}$   
 $x = 10 \text{ cm}$  ✓

$x^2 = 8^2 + 6^2$   
 $x^2 = 64 + 36$   
 $x^2 = 100$   
 $x = \sqrt{100}$   
 $x = 10 \text{ cm}$  ✓

2)  $x^2 = 6^2 + 8^2$   
 $x^2 = 36 + 64$   
 $x = \sqrt{100}$   
 $x = 10 \text{ cm}$  ✓

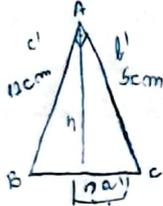
Fonte: Protocolo de pesquisa.

No total, oito alunos acertaram a segunda questão.

A terceira e última questão era de Processo Seletivo da FAETEC-SP e pedia a altura relativa à hipotenusa, dados os catetos iguais a 12 cm e 5 cm. Em um dos registros, foi possível ver uma simplificação equivocada, pois o aluno simplificou apenas o numerador, o que não é correto (Figura 24).

Figura 24 – Registros da terceira questão

a)  $\frac{12}{5} \text{ cm}$   
 b)  $\frac{5}{13} \text{ cm}$   
 c)  $\frac{12}{13} \text{ cm}$   
 d)  $\frac{25}{13} \text{ cm}$   
 e)  $\frac{60}{13} \text{ cm}$



$P_1 +$   
 $a^2 = 12^2 + 5^2$   
 $a^2 = 144 + 25$   
 $a^2 = 169$   
 $a = \sqrt{169}$   
 $a = 13 \text{ cm}$  ✓

$a \cdot h = 12 \cdot 5$   
 $13 \cdot h = 3 \cdot 5$   
 $13h = 60$   
 $h = \frac{60}{13}$  ✓

$h = \frac{60}{13}$  ✓

Fonte: Protocolo de pesquisa.

No total, quinze alunos acertaram a terceira questão.

A partir da análise das respostas dos alunos em cada questão, foi feita uma tabela para indicar quantos alunos acertaram, erraram ou não fizeram cada uma das questões para que possa haver alguma conclusão a respeito da efetividade da sequência.

Quadro 1 – Resultado das correções

	QUESTÃO 1	QUESTÃO 2	QUESTÃO 3
ACERTOS	15	8	15
MEIO ACERTOS	3	10	3
ERROS	-	-	-
NÃO FEITOS	8	8	8

Fonte: Elaboração própria.

Além de tudo isso, no final da aula, foram entregues folhas aos alunos para que eles fizessem avaliações anônimas e incluíssem suas críticas, sugestões, elogios ou qualquer opinião que pudesse ser útil para o trabalho. Sendo assim, foram selecionadas algumas dessas avaliações para serem colocadas nesse relatório (Figura 25).

Figura 25 – Avaliações dos alunos

Aula muito interessante. Gostei muito do modo de explicar e a tranquilidade/paciência com os alunos, e também da maneira que explicam (usando o triângulo, etc). Parabéns!

Amiei a aula. Sempre quis saber de onde vinham essas fórmulas.

A aula foi bem legal, as explicações foram bastante interessantes. Eu nem lembrava dessa matéria e com certeza foi muito bom lembrar e contá-la com ela.

Gostei muito do estilo que ela deu na aula de matemática, gostei do estilo de todos os professores, parabéns e que eles continuem assim!

A aula foi boa, mas ela pode melhorar no uso de alguns termos que eu não conhecia, mas a explicação foi muito boa.

Gostei da aula e dos "professores", é uma dinâmica que incentiva os alunos, até pelo fato de sair da mesma coisa de todos os dias. Sair da rotina é sempre legal, e explicar tudo de uma forma mais "calma" e "desagor" faz com que aqueles que têm dificuldade consigam entender.

Gostei bastante da dinâmica, se acho que precisam ficar mais no canto da sala para que todos possam ver o que está ocorrendo e ajudar a prestar mais atenção.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

O grupo considera que o objetivo geral do trabalho foi atingido, visto que o material manipulável contribuiu e foi um facilitador para a dedução das relações métricas. Além disso, o material despertou o interesse dos alunos que elogiaram a praticidade e o fato de ser um diferencial na aula.

Quanto aos objetivos específicos, também foram atingidos, pois a sequência didática foi elaborada e contemplou o tema principal, que foram as relações métricas no triângulo retângulo e as suas deduções; o material preparado cumpriu com o seu papel de auxiliador na dedução e o fato de ter sido construído com o material E.V.A. evitou que molhasse e estragasse (como seria o caso do papel); também foi criado um meio para avaliar a contribuição da sequência em si e do uso do material no entendimento da origem das deduções, que foi a lista de exercícios.

O grupo considera que a aplicação da sequência na turma do 9º ano foi muito boa, pois como os alunos já tinham visto tais relações, houve uma nova oportunidade de ver o mesmo conteúdo e com uma nova abordagem. Também superou as expectativas porque o desempenho dos integrantes do grupo foi melhor em relação à aplicação na turma do LEAMAT II, que teve alguns pequenos contratempos.

De forma geral, o grupo ficou muito satisfeito por conseguir mostrar a dedução das relações, uma vez que, o fato de elas surgirem da semelhança de triângulos foi algo que causou grande surpresa para alguns integrantes do grupo já na licenciatura.

Outro ponto positivo foi a participação dos alunos, tanto nas respostas, perguntas e interação com o grupo, quanto quando foram ao quadro fazer parte das relações. A turma foi ótima e participativa e, assim como a professora da turma, todos receberam o grupo muito bem.

**REFERÊNCIAS**

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação matemática: teoria à prática**. 16ª ed. Campinas, SP: Papyrus, 1996. Disponível em: <https://bit.ly/2O1TCqy>. Acesso em: 3 jan. 2018.

LAMAS, Rita de Cássia Pavani; MAURI, Juliana. **O teorema de Pitágoras e as relações métricas no triângulo retângulo com material emborrachado**. Universidade de São Paulo, 2014. Disponível em <http://www.unesp.br/prograd/PDFNE2004/artigos/eixo10/oteoremadepitagoras.pdf>. Acesso em: 28 dez. 2018.

LORENZATO, Sérgio. **Por que não ensinar Geometria**. Educação matemática em Revista, v. 4, p. 3-13, 1995.

SENA, Rebeca Moreira; DORNELES, Beatriz Vargas. **Ensino de Geometria: Rumos da Pesquisa (1991-2011)**. REVEMAT, Florianópolis, SC, v. 8, n. 1, p. 138-155, 2013. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2013v8n1p138>. Acesso em: 29 dez. 2017.

VALENTE, Wagner Rodrigues. **Uma história da Matemática escolar no Brasil, 1730-1930**. 2ª ed. São Paulo, SP: Annablume, 2007. Disponível em: <https://bit.ly/2XXv4nj>. Acesso em: 3 jan. 2018.

VIEIRA, Carmem Rosilene. **Reinventando a geometria no ensino médio: uma abordagem envolvendo materiais concretos, softwares de geometria dinâmica e a teoria de Van Hiele**. 2010. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010. Disponível em: <http://repositorio.ufop.br/handle/123456789/3252>. Acesso em: 29 dez. 2017.

Campos dos Goytacazes (RJ), 03 de MAIO de 2019.

Alice Pereira Stellet de Menezes  
ALICE PEREIRA STELLET DE MENEZES

Alice Rocha Barreto Corrêa Manhães  
ALICE ROCHA BARRETO CORRÊA MANHÃES

João Vitor Pessanha Simão  
JOÃO VITOR PESSANHA SIMÃO

Márcia Valéria Novarino Silva  
MÁRCIA VALÉRIA NOVARINO SILVA

Rodrigo Garnier Tomás de Oliveira  
RODRIGO GARNIER TOMÁS DE OLIVEIRA

# APÊNDICES

## **Apêndice A: Material didático aplicado na turma do LEAMAT II**





Secretaria de  
Educação Profissional  
e Tecnológica

Ministério da  
Educação

**DINLIC**  
Departamento de Apoio à Licenciatura em Matemática



**matemática**  
LICENCIATURA

Diretoria de Ensino Superior

Licenciatura em Matemática

Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática

Linha de Pesquisa: Geometria

Licenciandos: Alice Pereira Stellet de Menezes, Alice Rocha Barreto Corrêa Manhães, João Vitor Pessanha Simão, Márcia Valéria Novarino Silva e Rodrigo Garnier Tomás de Oliveira

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Me. Ana Mary Fonseca Barreto de Almeida

Nome: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_ / \_\_\_ / 2018

### Deduzindo as Relações Métricas no Triângulo Retângulo

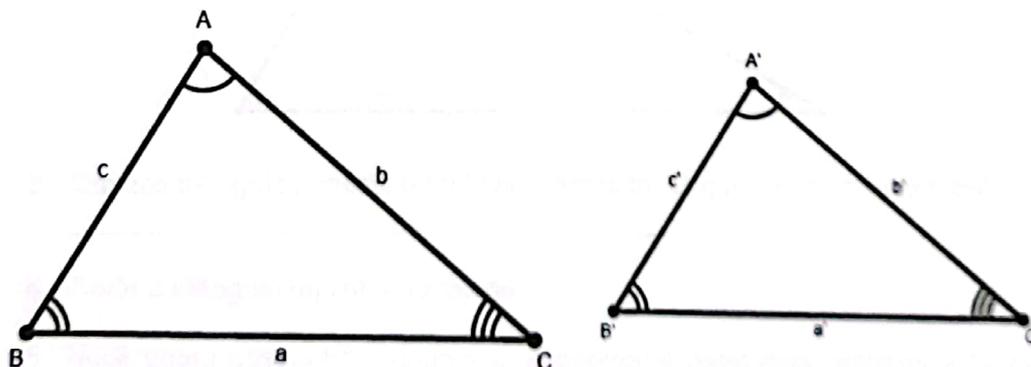
#### ◆ Semelhança de Triângulos

→ O que é?

Uma relação entre dois triângulos. Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais.

→ Símbolo:  $\sim$

→ Exemplo:



$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \hat{A} \cong \hat{A}' \\ \hat{B} \cong \hat{B}' \text{ e } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \\ \hat{C} \cong \hat{C}' \end{pmatrix}$$



Secretaria de  
Educação Profissional  
e Tecnológica

Ministério da  
Educação

**DIP LIC**  
INSTITUTO DE DESENVOLVIMENTO TECNOLÓGICO



**matemática**  
LICENCIATURA

→ Razão de semelhança:

É o valor da razão entre os lados homólogos. Geralmente é representada pela letra  $K$ .

→ O que significa uma razão de semelhança de valor igual a 1?

---



---

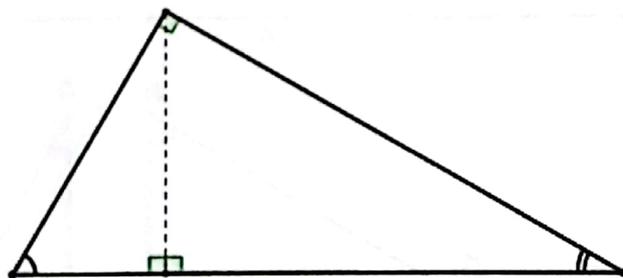


---

#### ◆ Relações Métricas no Triângulo Retângulo

→ Utilizando triângulos retângulos construídos em EVA, siga os passos abaixo:

1. Usando canetas coloridas, marque os ângulos dos dois triângulos que recebeu, utilizando a mesma cor para ângulos correspondentes;
2. Dê nome aos elementos dos triângulos, tendo como base o modelo abaixo;



3. Um dos triângulos possui uma linha tracejada. O que essa linha representa?

---

4. Corte o triângulo na linha tracejada;

5. Você agora possui três triângulos: o original e mais dois, obtidos a partir do recorte. Repare que temos um ângulo não identificado em cada um dos novos triângulos. É possível identificá-los? Como?

---



---



---



Secretaria de  
Educação Profissional  
e Tecnológica

Ministério de  
Educação

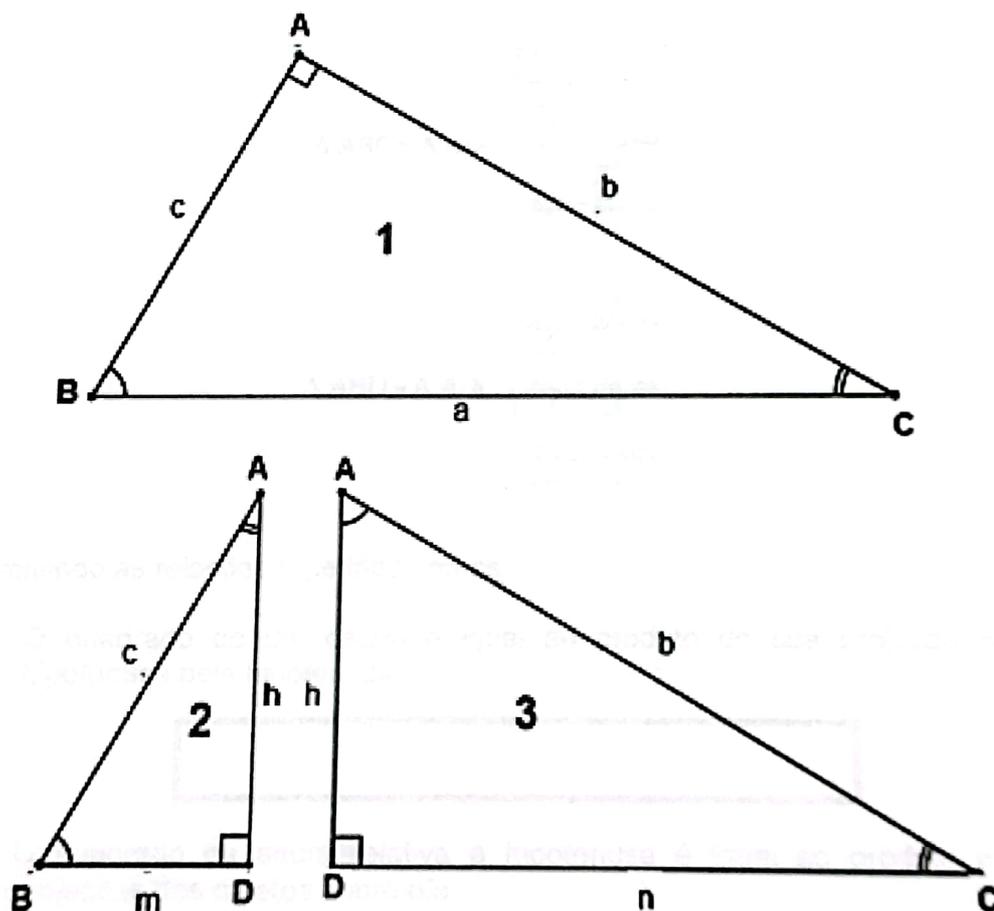
**DIP LIC**  
INSTITUTO DE PLANEJAMENTO E LICENCIATURA



**matemática**  
LICENCIATURA

6. Identifique-os, utilizando canetas coloridas e fazendo corresponder com as cores utilizadas no item 1;
7. Observe os três triângulos obtidos. O que podemos concluir sobre eles?

→ Temos, então, três triângulos semelhantes:





Secretaria de  
Educação Profissional  
e Tecnologia



Ministério de  
Educação

DINUC  
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA



matemática  
LICENCIATURA

→ Sabendo agora que os triângulos são semelhantes, podemos deduzir algumas relações métricas, ou seja, relações entre as medidas de seus lados:

$$\Delta ABC \sim \Delta ABD \left\{ \begin{array}{l} \square = \square \Rightarrow \\ \square = \square \Rightarrow \\ \square = \square \Rightarrow \\ \square = \square \Rightarrow \end{array} \right.$$

$$\Delta ABC \sim \Delta ADC \left\{ \begin{array}{l} \square = \square \Rightarrow \\ \square = \square \Rightarrow \\ \square = \square \Rightarrow \\ \square = \square \Rightarrow \end{array} \right.$$

$$\Delta ABD \sim \Delta ADC \left\{ \begin{array}{l} \square = \square \Rightarrow \\ \square = \square \Rightarrow \\ \square = \square \Rightarrow \\ \square = \square \Rightarrow \end{array} \right.$$

→ Excluindo as relações repetidas, temos:

- 1) O quadrado de um cateto é igual ao produto de sua projeção sobre a hipotenusa pela hipotenusa:

- 2) O quadrado da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto entre as projeções dos catetos sobre ela:

- 3) O produto entre os catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa a ela:



Secretaria de  
Educação Profissional  
e Tecnológica

Ministério de  
Educação

**DINLIC**  
INSTITUTO DE DESENVOLVIMENTO EM LICENCIATURAS



**matemática**  
LICENCIATURA

- 4) O produto de um cateto pela altura relativa à hipotenusa é igual ao produto de sua projeção sobre a hipotenusa pelo outro cateto:

Anotações:

Referência:

Dolce, Osvaldo; Pompeo, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar: geometria plana: v. 9.** 7. ed. São Paulo: Atual, 1993.



Secretaria de  
Educação Profissional  
e Tecnológica

Ministério da  
Educação

**DIPRLIC**  
DEPARTAMENTO DE ENSINO SUPERIOR DO INSTITUTO FATEC



**matemática**  
LICENCIATURA

Diretoria de Ensino Superior

Licenciatura em Matemática

Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática

Linha de Pesquisa: Geometria

Licenciandos: Alice Pereira Stellet de Menezes, Alice Rocha Barreto Corrêa Manhães, João Vitor Pessanha Simão, Márcia Valéria Novarino Silva e Rodrigo Garnier Tomás de Oliveira

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Me. Ana Mary Fonseca Barreto de Almeida

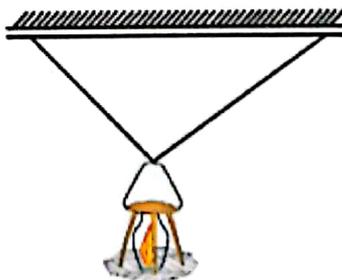
Nome: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_ / \_\_\_ / 2018

### ATIVIDADES

01. (FATEC-SP) Se os catetos de um triângulo T medem, respectivamente, 12 cm e 5 cm, então a altura relativa à hipotenusa é:

- a)  $\frac{12}{5} \text{ cm}$       b)  $\frac{5}{13} \text{ cm}$       c)  $\frac{12}{13} \text{ cm}$       d)  $\frac{25}{13} \text{ cm}$       e)  $\frac{60}{13} \text{ cm}$

02. (UFRGS-RS - adaptada) O lampião representado na figura está suspenso por duas cordas perpendiculares entre si, presas ao teto. Sabendo-se que essas cordas medem 6 cm e 8 cm, a distância do lampião ao teto é:



- a) 1,69      b) 1,3      c) 0,6      d)  $\frac{1}{2}$       e)  $\frac{6}{13}$



Secretaria de  
Educação Profissional  
e Tecnológica

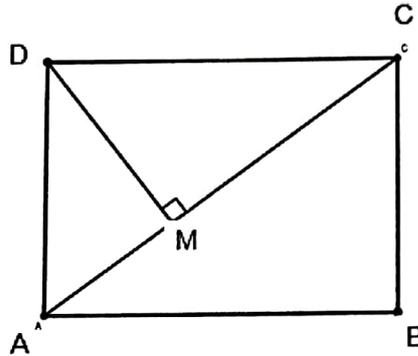
Ministério da  
Educação

**DIP LIC**  
SECRETARIA DE POLÍTICA LÍNGUA EM LICENCIATURA



**matemática**  
LICENCIATURA

03. (FAAP-SP) No retângulo ABCD de lados  $AB = 4$  cm e  $BC = 3$  cm, o segmento DM é perpendicular à diagonal AC. Calcule o comprimento do segmento AM.



- a) 2 cm      b)  $\frac{9}{5}$  cm      c)  $\frac{12}{5}$  cm      d)  $\frac{5}{2}$  cm      e)  $\frac{5}{9}$  cm

04. Num triângulo ABC, ângulo A é reto. A altura h divide a hipotenusa a em dois segmentos m e n ( $m > n$ ). Sabendo-se que o cateto b é o dobro do cateto c, podemos afirmar que  $\frac{m}{n}$  é igual a:

- a) 4      b) 3      c) 2      d)  $\frac{7}{2}$       e) 5

## **Apêndice B: Material didático experimentado na turma regular**



Secretaria de  
Educação Profissional  
e Tecnologia

Ministério da  
Educação  
**DINLIC**  
DEPARTAMENTO NACIONAL DE LICENCIATURA

**matemática**  
LICENCIATURA

**Diretoria de Ensino Superior – Licenciatura em Matemática**

Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática Linha de Pesquisa: Geometria

Licenciandos: Alice Pereira S. de Menezes, Alice Rocha B. C. Manhães, João Vitor Pessanha Simão, Márcia Valéria N. Silva e Rodrigo Garnier T. de Oliveira

Orientadora: Profª. Me. Ana Mary Fonseca Barreto de Almeida

Nome: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_/\_\_\_/2018

## Deduzindo as Relações Métricas no Triângulo Retângulo

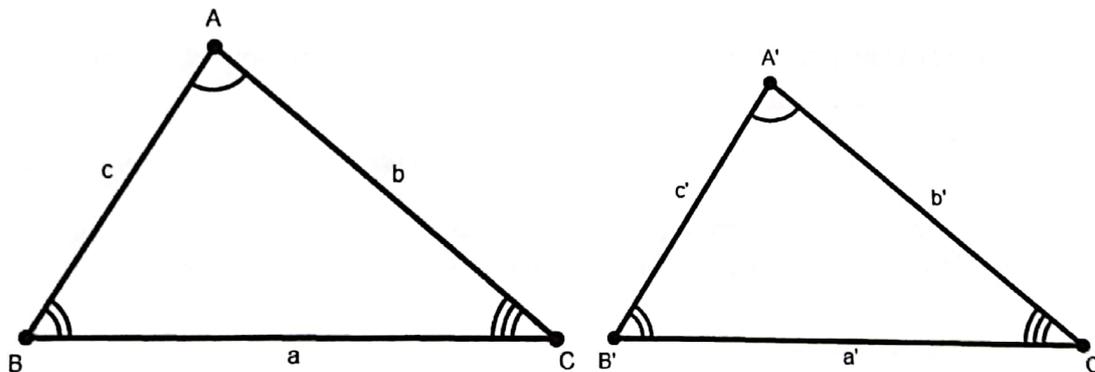
### ◆ Semelhança de Triângulos

→ O que é?

Uma relação entre dois triângulos. Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais.

→ Símbolo: ~

→ Exemplo:



$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \left( \begin{array}{l} \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \hat{B} \equiv \hat{B}' \text{ e } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \\ \hat{C} \equiv \hat{C}' \end{array} \right)$$



Secretaria de  
Educação Profissional  
e Tecnológica

Ministério de  
Educação

**DIP LIC** **matemática**  
LICENCIATURA

→ Razão de semelhança:

É o valor da razão entre os lados homólogos. Geralmente é representada pela letra  $K$ .

→ O que significa uma razão de semelhança de valor igual a 1?

---

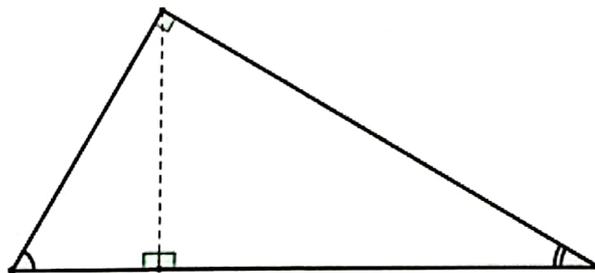


---

#### ◆ Relações Métricas no Triângulo Retângulo

→ Utilizando triângulos retângulos construídos em E.V.A., siga os passos abaixo:

1. Usando canetas coloridas, marque os ângulos dos dois triângulos que recebeu, utilizando a mesma cor para ângulos correspondentes;
2. Dê nome aos elementos dos triângulos;



3. Um dos triângulos possui uma linha tracejada. O que essa linha representa?

---

4. Corte o triângulo na linha tracejada;
5. Você agora possui três triângulos: o original e mais dois, obtidos a partir do recorte. Repare que temos um ângulo não identificado em cada um dos novos triângulos. É possível identificá-los? Como?

---



---



---

6. Identifique-os, utilizando canetas coloridas e fazendo corresponder com as cores utilizadas no item 1;
7. Observe os três triângulos obtidos. O que podemos concluir sobre eles?

---



---

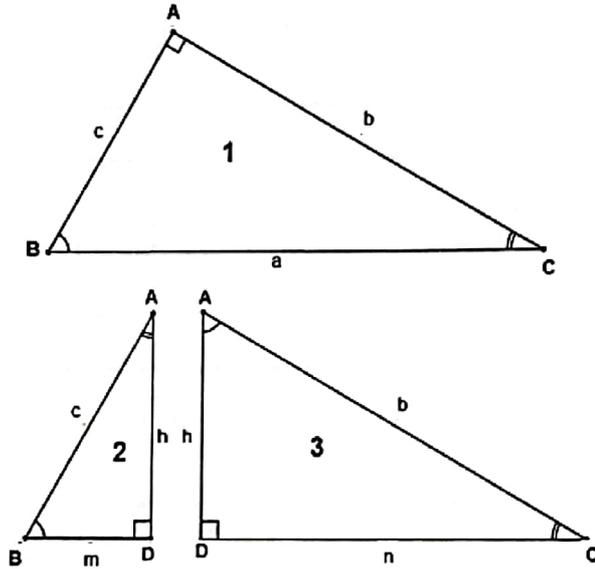


Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

Ministério da Educação

**DIRLIC matemática**  
LICENCIATURA

⇒ Temos, então, três triângulos semelhantes:



→ Sabendo agora que os triângulos são semelhantes, podemos deduzir algumas relações métricas, ou seja, relações entre as medidas de seus lados:

$$\Delta ABC \sim \Delta DBA \left\{ \begin{array}{l} \text{---} = \text{---} \\ \text{---} = \text{---} \\ \text{---} = \text{---} \end{array} \right.$$

$$\Delta ABC \sim \Delta DAC \left\{ \begin{array}{l} \text{---} = \text{---} \\ \text{---} = \text{---} \\ \text{---} = \text{---} \end{array} \right.$$

$$\Delta DAB \sim \Delta DCA \left\{ \begin{array}{l} \text{---} = \text{---} \\ \text{---} = \text{---} \\ \text{---} = \text{---} \end{array} \right.$$



Secretaria de  
Educação Profissional  
e Tecnológica

Ministério da  
Educação

**DIPLIC**  
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA

**matemática**  
LICENCIATURA

→ Excluindo as relações repetidas, temos:

- 1) O quadrado de um cateto é igual ao produto de sua projeção sobre a hipotenusa pela hipotenusa:

- 2) O quadrado da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto entre as projeções dos catetos sobre ela:

- 3) O produto entre os catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa a ela:

- 4) O produto de um cateto pela altura relativa à hipotenusa é igual ao produto de sua projeção sobre a hipotenusa pelo outro cateto:

- 5) O quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.

Anotações:

Referência:

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria plana: v.9. 7. Ed.** São Paulo: Atual, 1993.



Secretaria de  
Educação Profissional  
e Tecnológica



**matemática**  
LICENCIATURA

Diretoria de Ensino Superior

Licenciatura em Matemática

Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática

Linha de Pesquisa: Geometria

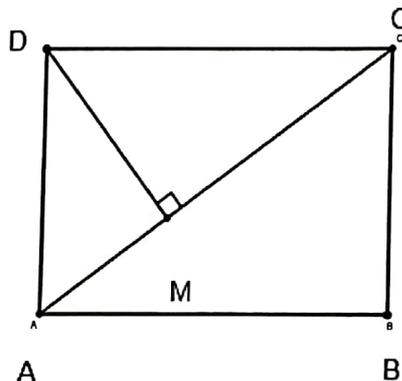
Licenciandos: Alice Pereira Stellet de Menezes, Alice Rocha Barreto Corrêa Manhães, João Vitor Pessanha Simão, Márcia Valéria Novarino Silva e Rodrigo Garnier Tomás de Oliveira

Orientadora: Prof<sup>ra</sup>. Me. Ana Mary Fonseca Barreto de Almeida

Nome: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_ / \_\_\_ / 2018

### ATIVIDADES

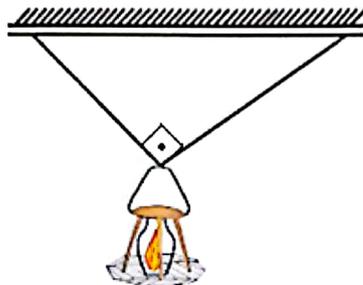
1. (FAAP-SP) No retângulo ABCD de lados  $AB = 4$  cm e  $BC = 3$  cm, o segmento DM é perpendicular à diagonal AC. Calcule o comprimento do segmento AM.



- a) 2 cm
- b)  $\frac{9}{5}$  cm
- c)  $\frac{12}{5}$  cm
- d)  $\frac{5}{2}$  cm
- e)  $\frac{5}{9}$  cm

Secretaria de  
Educação Profissional  
e TecnológicaMinistério de  
Educação**DINLIC** **matemática**  
LICENCIATURA

2. (UFRGS-RS - adaptada) O lampião representado na figura está suspenso por duas cordas perpendiculares entre si, presas ao teto. Sabendo-se que essas cordas medem 6 cm e 8 cm, a distância do lampião ao teto é:



3. (FATEC-SP) Se os catetos de um triângulo T medem, respectivamente, 12 cm e 5 cm, então a altura relativa à hipotenusa é:

a)  $\frac{12}{5} \text{ cm}$

b)  $\frac{5}{13} \text{ cm}$

c)  $\frac{12}{13} \text{ cm}$

d)  $\frac{25}{13} \text{ cm}$

e)  $\frac{60}{13} \text{ cm}$