RELATÓRIO DO LEAMAT

INTERDISCIPLINARIDADE ENTRE A MATEMÁTICA E A BIOLOGIA NO ENSINO DE SEQUÊNCIAS

ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA

CALILI CARDOZO DOS SANTOS PARAVIDINI
HALLEF JULIA MACABU

Recebido em 21/08/18

CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
2018.1

CALILI CARDOZO DOS SANTOS PARAVIDINI
HALLEF JULIA MACABU

RELATÓRIO DO LEAMAT

INTERDISCIPLINARIDADE ENTRE A MATEMÁTICA E A BIOLOGIA NO ENSINO DE SEQUÊNCIAS

ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA

Trabalho apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, *campus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão da disciplina Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Poliana Figueiredo C. Rodrigues
Coorientadora: Vanice da Silva Freitas Vieira

CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
2018.1

SUMÁRIO

1) Relatório do LEAMAT I

1.1) Atividades desenvolvidas

No primeiro encontro com as orientadoras, no dia 09/05/2017, foi explicado como é a disciplina do Laboratório de Ensino e Aprendizagem da Matemática (LEAMAT), como se dariam as aulas, qual objetivo a ser alcançado e qual é a proposta da disciplina.

Em 16/05/17, foram apresentadas as características da linha de pesquisa de Geometria. No mesmo dia, a professora fez perguntas relacionadas ao ensino de Geometria: "O que é a Geometria?; Como você vivenciou a Geometria na escola?; Que Geometria você aprendeu?, Qual papel da geometria para você?; Que geometria você gostaria de ensinar para seu aluno?". Ela pediu que cada aluno respondesse individualmente e que expusessem suas respostas para a turma.

No dia 30 de maio, a turma apresentou os trabalhos que foram solicitados na aula anterior sobre a Geometria nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), dividida em dois grupos: Ensinos Fundamental e Médio. Foi explicado que os PCN são estruturados em três áreas do conhecimento, dentre elas Ciências da natureza e Matemática. A partir daí, a Matemática é tratada em três temas estruturantes, sendo a Geometria um desses. Por sua vez, a Geometria também é dividida em quatro unidades temáticas: Geometria plana, espacial, métrica e analítica.

No encontro seguinte, em 13 de junho, foram entregues as resenhas do artigo "Ensino de Geometria: Rumos da Pesquisa (1991-2011)", de Rebeca Moreira Sena e Beatriz Vargas Dorneles (2013). Esse texto verifica em quais linhas de pesquisa no Brasil a Geometria está inserida e em que perspectivas atuam. Ele revela ainda que os resultados das pesquisas apontam o descaso com o tema Geometria, bem como a falta de preparo do professor em relação a essa área do conhecimento.

A apresentação da sequência didática de Geometria de um grupo que já concluiu o LEAMAT III foi na aula do dia 20/06/17. O tema foi "Volume de prismas". Na apresentação, foi utilizado software de Geometria dinâmica e material concreto para os alunos fixarem o conceito de Volume de prismas.

Na aula do dia 11 de julho, a professora tratou da orientação dos trabalhos de cada grupo, fazendo ajustes na escolha dos assuntos, indicando textos para o embasamento teórico, bem como informando qual público-alvo seria mais adequado para cada tema.

A partir de 25 de julho, os encontros aconteceram com o objetivo de desenvolver e aprimorar os trabalhos, seja no campo das ideias ou na organização da escrita dos textos exigidos pela disciplina.

Todas essas aulas contribuíram para o desenvolvimento do trabalho do ensino e aprendizagem da Geometria.

1.2) Elaboração da sequência didática

1.2.1) Tema

Interdisciplinaridade entre a Matemática e a Biologia no ensino de Sequências.

1.2.2) Justificativa

Pode-se encontrar a Matemática em vários "campos de conhecimento, porém muitos têm dificuldade em entendê-la e principalmente em apreciá-la" (KERKHOFF; BRACHT; SCHNEIDER, 2016, p. 1). O fato é que se apresenta "uma imagem de que a Matemática é, por excelência, o lugar das abstrações, enfatizando-se seus pontos formais e distanciando-a da realidade, tanto para quem aprende como para quem ensina" (SILVA, 2005, p. 6).

Conforme é destacado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 2002), o ensino da Matemática pode contribuir para que os alunos desenvolvam diversas habilidades. Segundo Silva (2005), não basta ao professor conhecer todo o conteúdo, tem-se a necessidade de que ele torne a disciplina interessante e desafiadora.

Ensinar matemática mostrando as aplicações no cotidiano e em outras áreas do conhecimento faz com que os alunos comecem a criar conexões entre as matérias, assim podem entender melhor a disciplina e até gostem mais, possibilitando uma maior reprodução e produção de conhecimento (SAMPAIO; SILVA, 2012, p. 10).

Com o intuito de tornar a Matemática mais interessante e reduzir a dificuldade dos discentes em aprender a disciplina, a interdisciplinaridade se apresenta como a melhor opção.

A interdisciplinaridade é uma exigência natural e interna das ciências, o que visa uma transgressão aos paradigmas rígidos da escola atual (FAZENDA, 2006). Em conformidade com Sampaio, Silva (2012, p. 10), "é um dos grandes desafios, pois o que vemos é apenas um monte de disciplinas sendo ensinadas separadamente, como se não tivessem nada em comum", pois não há comunicação entre elas.

A Metodologia interdisciplinar em seu exercício requer como pressuposto uma atitude especial ante o conhecimento, que se evidencia no reconhecimento das competências, incompetências, possibilidades e limites da própria disciplina e de seus agentes, no conhecimento e na valorização suficientes das demais disciplinas e dos que a sustentam (FAZENDA, 2006, p. 69).

Dessa forma, Gadotti (1999, p. 2) aponta a interdisciplinaridade como estratégia a ser utilizada para "garantir a construção de um conhecimento globalizante, rompendo com as fronteiras das disciplinas." Para Santomé (1998), as teorias e modelos de algumas disciplinas podem ajudar a entender e interpretar o que não foi oferecido pelos contextos originais e próprios de outras disciplinas.

A interdisciplinaridade só é possível em um ambiente de colaboração entre os professores, o que exige conhecimento, confiança e entrosamento da equipe, e, ainda, tempo disponível para que isso aconteça (BRASIL, 2006). Na área da Matemática, o estudo da Geometria é aquele que possibilita o maior número de atividades de natureza interdisciplinar.

Essa ciência favorece a percepção espacial e a visualização, sendo conhecimento relevante para as diferentes áreas, permitindo que o aluno desenvolva sua percepção, sua linguagem e raciocínio geométrico de forma a construir conceitos (ROGENSKI; PEDROSO, 2014, p. 2).

Os elementos matemáticos são abundantes na natureza. Desde a antiguidade até os dias atuais, estudiosos, sábios e matemáticos têm destacado a presença da Matemática na natureza. Eles têm se mostrado "admirados com a aparente capacidade de a Matemática moldar e guiar o universo" (LÍVIO, 2012). O presente trabalho tem como proposta a visualização, a interpretação e a representação geométrica dos elementos presentes na natureza, proporcionando aos alunos do 1ª Série do Ensino Médio o conhecimento da correlação desses elementos com o conteúdo de sequências abordado em sala de aula. Com relação às sequencias, é importante uma abordagem funcional e deve-se ater à lei de formação dessas mostrando as propriedades que delas decorrem (BRASIL, 2002).

> Associar às seqüências seus gráficos e relacionar os conceitos de seqüência crescente ou decrescente aos correspondentes gráficos permite ao aluno compreender melhor as idéias envolvidas, ao mesmo tempo que dá a ele a possibilidade de acompanhar o comportamento de uma seqüência sem precisar decorar informações (BRASIL, 2002, p. 121).

"Sequência é todo conjunto ou grupo no qual os seus elementos estão escritos em uma determinada ordem" (PAIVA, 2013, p. 248). Existe um tipo especial de sequência onde os dois primeiros termos da sequência são iguais a 1 e os demais termos são a soma dos dois termos anteriores (SENA, 2013), é o que se conhece por Sequência de Fibonacci. A ocorrência da Sequência de Fibonacci na natureza é tão frequente que é difícil acreditar que é acidental. É possível percebê-los em diversos seres vivos, desde microrganismos, plantas, animais, no ser humano, até mesmo na configuração das galáxias, enfim, na criação (LÍVIO, 2012; CARVALHO, 2013).

Para melhor visualização dessa sequência, o uso de materiais manipulativos auxilia na geração de uma imagem mental, permitindo recordar do objeto na sua ausência (ROGENSKI; PEDROSO, 2014). Conforme Lindquist; Shulte (1994, p. 77), "materiais de manipulação fornecem oportunidades para raciocinar com objetos e, portanto, para ensinar a resolver problemas".

Não se pode esquecer que a ideia da interdisciplinaridade pode ser concretizada com o uso da contextualização, que favorece a significação do conteúdo apresentado ao aluno (BRASIL, 2006; SAMPAIO; SILVA, 2012). Essa integralização de disciplinas é fundamental para o desenvolvimento cognitivo dos discentes e essa união entre a Matemática e as Ciências Biológicas tem ajudado a desenvolver suas próprias áreas (SAMPAIO; SILVA, 2012). Com tudo isso, pretende-se "proporcionar aos alunos novos horizontes para se descobrir as belezas da matemática, por meio do entendimento, de forma efetiva, da importância da geometria em suas vidas" (ROGENSKI, PEDROSO, 2014, p. 15).

1.2.3) Objetivo Geral

Discutir os conceitos de sequências, explicitando a presença da sequência de Fibonacci na natureza, por meio da interdisciplinaridade da Matemática com a Biologia.

1.2.4) Público Alvo

A sequência didática será aplicada para alunos da 1ª Série do Ensino Médio.

2) RELATÓRIO DO LEAMAT II

2.1) Atividades desenvolvidas

A proposta do LEAMAT II é a elaboração da sequência didática que foi da proposta de trabalho defendida no LEAMAT I, sendo assim no primeiro momento de aula foi apresentada a agenda do semestre. A partir desse momento, o grupo pode utilizar as aulas para debater e elaborar a sequência didática.

Nas aulas, eram apresentadas à orientadora as ideais de idealização do trabalho e, nesse momento, eram dadas sugestões de adaptação de alguns pontos das apostilas ou das atividades que estavam sendo elaboradas.

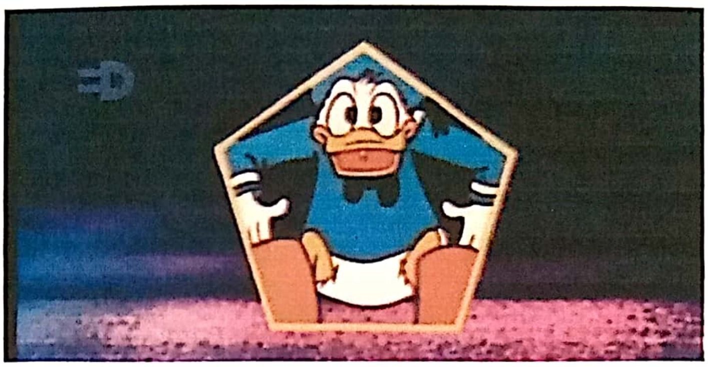
Em cada aula, eram apresentados os avanços na execução da elaboração das apostilas, das apresentações, dos vídeos e das atividades e na confecção dos quebra-cabeças da espiral logarítmica. Foram feitos apontamentos pela orientadora, principalmente, quanto aos detalhes necessários para que todo material desenvolvido fosse de fácil compreensão para os alunos, além de fomentar o interesse desses alunos pelo conteúdo abordado na aula.

2.2) Elaboração da sequência didática

2.2.1) Planejamento da sequência didática

A aula será iniciada com a apresentação do grupo para a turma e uma breve descrição do tema da aula. Após esse momento, será mostrado o recorte do filme "Pato Donald no País da Matemágica" (Figura 1), que pode ser encontrado no link <https://www.youtube.com/watch?v=wbftu093Yqk>, com o objetivo de introduzir a ideia da existência da Matemática na natureza. Em seguida, se iniciará um debate sobre o filme, com o intuito de captar o conhecimento que os alunos possuem sobre a presença da Matemática na natureza. Ao final do debate, serão entregues as apostilas (Apêndice A) referentes ao conteúdo a ser trabalhado: Sequências.

Figura 1 – Recorte do filme “Pato Donald no País da Matemágica”

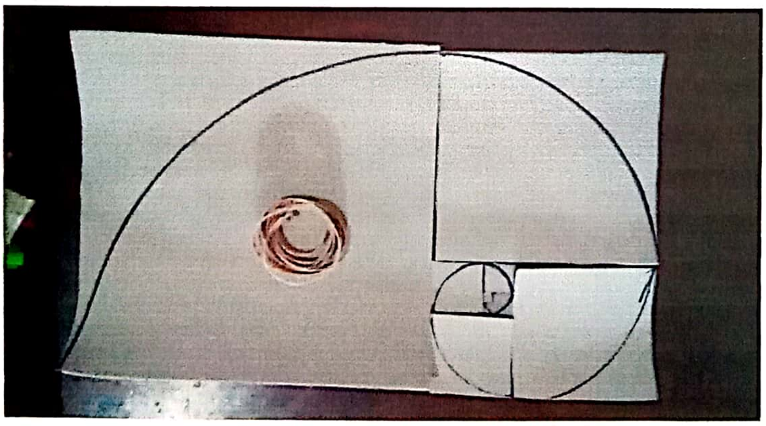


Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=wbftu093Yqk

Dando continuidade, com o auxílio da apostila entregue, serão apresentadas a definição e as propriedades de sequências aos alunos, pois eles não tiveram contato com o conteúdo. No final da apostila, haverá exercícios sobre sequências para firmar o conteúdo e concluir a aula teórica.

Depois, serão formados grupos de 5 a 6 alunos para montarem o quebra-cabeças da espiral. Para cada grupo, serão entregues quadrados em EVA com o desenho da espiral para que encaixarem como um quebra-cabeças, uma fita métrica para medirem os lados dos quadrados (Figura 2) e uma folha de atividades propostas (Apêndice A). Avisando que a espiral é formada por uma sequência, os grupos devem descobrir sua lei de formação completando as atividades da 1ª parte da folha. Após a descoberta, contar que essa sequência é conhecida como Sequência de Fibonacci, uma sequência que está presente na natureza.

Figura 2 – Materiais para primeira atividade



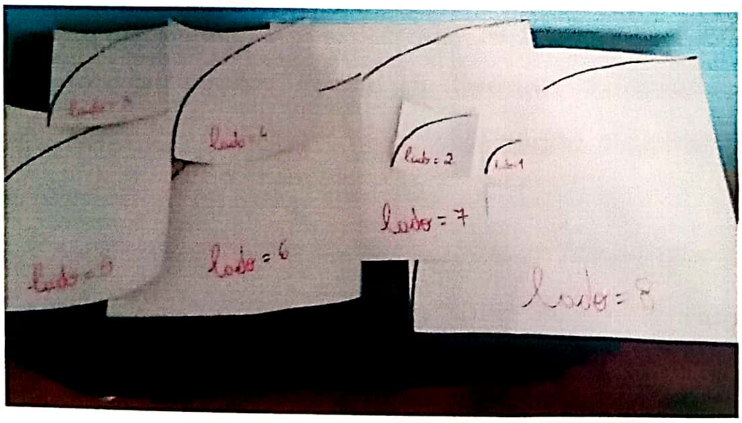
Fonte: Elaboração própria.

Após a apresentação da Sequência de Fibonacci, serão explicadas suas características e contada a história de Fibonacci, o matemático que iniciou a descoberta desse padrão na natureza. Prosseguindo a aula, serão mostradas diversas imagens editadas com o objetivo de provar aos alunos que essa sequência está presente na natureza. Em seguida, será mostrada a imagem do Homem Vitruviano, que poderá ser visualizada na 2ª parte da folha de atividades (Apêndice A), para indicar que, em nossos corpos, existe o padrão da Sequência de Fibonacci.

Com a parte 2 da folha de atividades propostas (Apêndice A) e utilizando as fitas métricas entregues aos grupos na primeira parte, será pedido para medirem seus corpos de acordo com a imagem do Homem Vitriviano. Para isso, eles medirão como pedido nas atividades para anotarem o que for descoberto. Em seguida, fazer a parte 3 da folha de atividades, ainda utilizando a fita métrica. Essas atividades serão realizadas em duplas ou trios e visam possibilitar ao aluno identificar a presença da sequência no corpo humano de forma investigativa.

Junta-se a turma novamente para mostrar aos alunos os elementos da natureza que têm a Sequência de Fibonacci, afim de propiciar o contato concreto e direto dos alunos com esses elementos. Para, assim, os alunos conhecerem alguns elementos que possuem a Sequência em sua formação. Depois, serão afastadas as carteiras e feita uma grande roda com toda a turma para montarem o quebra-cabeças de uma grande espiral em Papel Triplex, mas agora com os números da Sequência de Fibonacci em sua formação (Figura 3), para verificar se a turma compreendeu o conceito de Sequências.

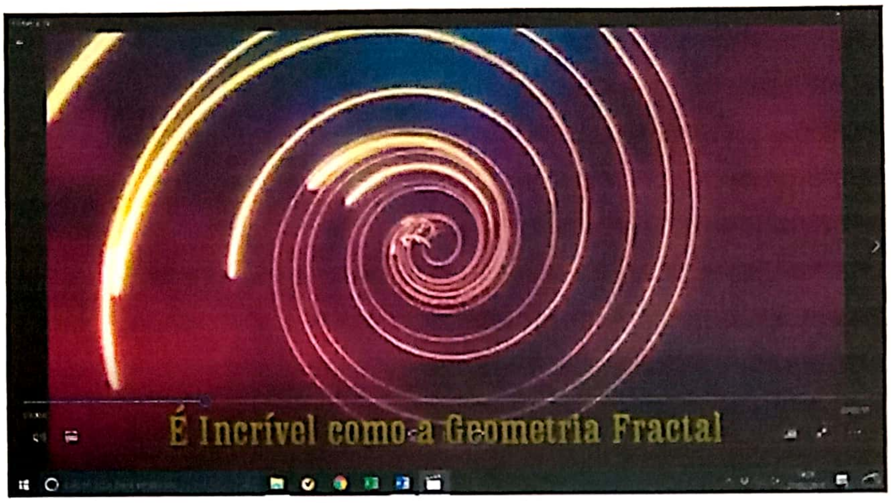
Figura 3 – Atividade final



Fonte: Elaboração própria.

Por fim, mostrar aos alunos o vídeo retirado do The Jah Channel no Youtube "Assinatura de Deus (Sequência de Fibonacci)" (Figura 4), encontrado no link <https://www.youtube.com/watch?v=QpdlHOGjSaQ>, publicado em 01 de maio de 2012, para encerrar a aula de modo que os alunos fiquem com interesse de investigar sobre a Sequência de Fibonacci na natureza. Após o encerramento, pedir para os alunos exporem e notificarem suas opiniões sobre a aula dada.

Figura 4 – Recorte do vídeo "Assinatura de Deus (Sequência de Fibonacci)"



Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=QpdlHOGjSaQ

2.2.2) Aplicação da sequência didática na turma do LEAMAT II

A sequência didática foi aplicada para a turma do LEAMAT II no dia 19 de dezembro de 2017. Por se tratar de uma sequência didática com enfoque na interdisciplinaridade entre Matemática e Biologia, foram propostas atividades inter-relacionando ambas disciplinas. Os alunos da Licenciatura em Matemática não apresentaram dificuldade em acompanhar o conteúdo da apostila, nem de realizar as atividades propostas, pois já tiveram contato com a temática Sequências. Assim, o tempo decorrido para explicação e correção das atividades foi menor que o esperado.

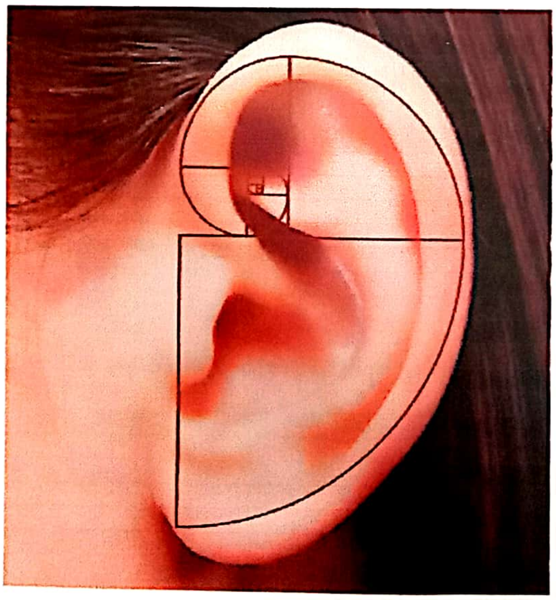
Iniciou-se a aula com a exibição do recorte do filme "Pato Donald na País da Matemágica" e posterior debate sobre o filme. A turma, que já tinha visto o filme, disse que é um filme interessante e que a partir dele, pode-se mostrar que a Matemática está em tudo.

Após o debate, as apostilas de Sequências (Apêndice A) foram entregues à turma. Foram explicados os conteúdos da apostila e pedido para a turma resolver os exercícios propostos ao final dela. Um tempo foi dado para essa resolução. Como os alunos do LEAMAT II já tiveram contato com o conteúdo, houve dificuldade apenas na resolução do exercício número 6. Os exercícios foram corrigidos após a turma resolvê-los.

Para aplicação das atividades foram formados dois grupos de 6 pessoas cada. Para cada grupo foi entregue um quebra-cabeças de EVA, uma fita métrica para medirem os lados das peças e uma folha de atividades propostas (Apêndice A) para cada aluno. Avisou-se que a espiral seria formada por uma sequência e foi pedido para completarem as atividades da 1ª parte da folha. Os grupos rapidamente descobriram sua lei de formação e sabiam que era a Sequência de Fibonacci.

Após terem montado a espiral, foram exibidos slides explicando as características da Sequência de Fibonacci e contando algumas curiosidades sobre a Sequência e a sua história. A turma achou interessante as propriedades da Sequência e pediu para o confirmar a propriedade 2 com outros valores. Prosseguindo a aula, foram mostradas diversas imagens editadas provando a relação da Sequência de Fibonacci com a natureza (Figura 5).

Figura 5 – Uma das imagens colocadas no slide: a espiral logarítmica, feita no *software* GeoGebra, sobre uma orelha



Fonte: Elaboração própria

Em seguida, foi mostrada a imagem do Homem Vitruviano, pelo DataShow, para auxiliar na construção da 2ª parte da folha de atividades (Apêndice A). Utilizando as fitas métricas entregues aos grupos na primeira parte, será pedido para medirem seus corpos de acordo com o proposto nas atividades. Não foram realizadas todas as atividades devido ao tempo para aplicação ter sido 2 horas/aula e foi o grupo que mediu os licenciandos para não ser mais rápido. As razões das medidas encontradas, como pedido nas atividades, foram próximas da Razão Áurea; o que era esperado pelo grupo.

Em seguida, foi concluída a 3ª parte da folha de atividades (Apêndice A), ainda utilizando a fita métrica. Essas atividades foram realizadas em duplas ou trios para melhor conclusão. Também não foram realizadas todas as atividades devido ao tempo para aplicação. Da mesma forma, as razões das medidas encontradas, como pedido nas atividades, foram próximas da Razão Áurea;

Juntou-se a turma novamente para mostrar aos alunos os elementos da natureza que têm a Sequência de Fibonacci. Assim os alunos puderam tocar alguns elementos que possuem a Sequência em sua formação. Nesse momento, os alunos ficaram admirados com a presença do padrão de Fibonacci no acervo. Depois, foram afastadas as carteiras e feita uma grande roda com toda a turma para montarem o quebra-cabeças de uma grande espiral em Papel Triplex, mas agora com os números da Sequência de Fibonacci em sua formação. Os licenciandos não tiveram dificuldade na montagem da espiral.

Por fim, foi transmitido aos alunos o vídeo retirado do The Jah Channel no Youtube "Assinatura de Deus (Sequência de Fibonacci)" para encerrar a aula. Após o encerramento, foi pedido para os alunos e as professoras exporem e notificarem suas opiniões sobre a aula dada. A sequência didática foi planejada para ser aplicada em 3 tempos de aula, por isso algumas atividades não foram realizadas. Após a conclusão da aula, foram feitas algumas sugestões acerca do trabalho, como a seguir:

Em alguns pontos da apostila de Sequências, foram sugeridas pequenas correções gramaticais. Na Introdução, na apostila de Sequências, sugeriu-se mostrar no quadro um exemplo de sequência com números Reais. Ainda na apostila, recomendou-se retirar as soluções do exemplo 1, do exemplo 2 e da explicação da Fórmula de Recorrência para serem explicadas no quadro. Nos exercício 6, foi proposto explorar bem os padrões da sequência antes de resolvê-la, para que os alunos percebam todas as características no exercício. Na folha de atividades propostas, foi proposto retirar algumas atividades da 2ª parte e da 3ª parte devido ao tempo de aula e colocá-las como atividades sugestão para serem feitas em casa.

3) Relatório do LEAMAT III

3.1) Atividades desenvolvidas

No primeiro momento foram apresentados os objetivos do LEAMAT III e apresentado o calendário das atividades a serem desenvolvidas no decorrer do semestre. Foi apresentado, pela orientadora, o relato da experiência do contato de alguns alunos, que já haviam concluído o LEAMAT, com a turma regular. Foram feitos apontamentos quanto à postura a ser adotada em sala e apresentados fragmentos do trabalho de Felipo Bellini "Como enfrentar a sala de aula pela primeira vez", que tem como base *Antonio Nóvoa "Os professores e sua formação".*

As aulas seguintes foram dedicadas a ajustes na sequência didática, seguindo as sugestões feitas pelas orientadoras e licenciandos após aplicação realizada no LEAMAT II. E, também, dedicadas à confecção da quantidade de material necessária para aplicação da sequência na turma regular. Após a aplicação em turma regular, as aulas foram destinadas à escrita e correção do relatório e à apresentação final.

3.2) Elaboração da sequência didática

3.2.1) Versão final da sequência didática

Foram feitas algumas correções gramaticais em alguns pontos das apostilas, além de alterações em definições e enunciados de questões que tinham divergências com as definições apresentadas na apostila. Para as atividades que trabalhavam com imagens, na segunda apostila, foram preparados slides com essas imagens para auxiliar a visualização e facilitar a execução dessas atividades.

Seguindo sugestão, as resoluções dos exemplos 1 e 2 da apostila "Sequências" foram retiradas para serem elucidadas no quadro, afim de que os alunos compreendessem melhor o conceito estudado. Para diminuir o tempo necessário para aplicação da sequência didática, algumas atividades da 2ª apostila (Apostila de Atividades) foram retiradas para integrarem uma nova lista de Atividades de Fixação, ou seja, para serem realizadas em casa pelos alunos.

3.2.2) Experimentação da sequência didática na turma regular

A aplicação em turma regular foi realizada no dia 18 de maio de 2018 no Instituto Federal Fluminense *campus* Campos Centro, em Campos dos Goytacazes, na turma do segundo ano do ensino médio, no dia da aplicação havia trinta e um (31) alunos presentes e foram disponibilizados dois tempos de cinquenta minutos para aplicação.

A aula iniciou-se com a apresentação do grupo de professores em formação e informado que seriam tiradas fotos da aplicação, mas havendo o cuidado para não se fotografar os rostos dos alunos. Em seguida, foi exibido o recorte do filme "Pato Donald no País da Matemágica" e iniciado um debate com os alunos sobre o que acharam filme, após a sua exibição (Figura 6).

Figura 6 – Exibição do recorte do filme "Pato Donald no País da Matemágica"

Fonte: Protocolo de Pesquisa

Os alunos acharam o filme interessante e, muitos, não sabiam que a natureza tinha relação com a Matemática. Alguns alunos já tinham visto o filme, mas não sabiam como seriam relacionados o vídeo e o conteúdo da aula.

As apostilas de Sequências (Apêndice B) foram entregues à turma após o debate. Todo o conteúdo da apostila foi explicado. Os exemplos 1 e 2 foram resolvidos no quadro junto com os alunos para que eles compreendessem melhor o conceito (Figura 7).

Figura 7 – Explicação do Exemplo 1 da apostila de Sequências

Fonte: Protocolo de Pesquisa

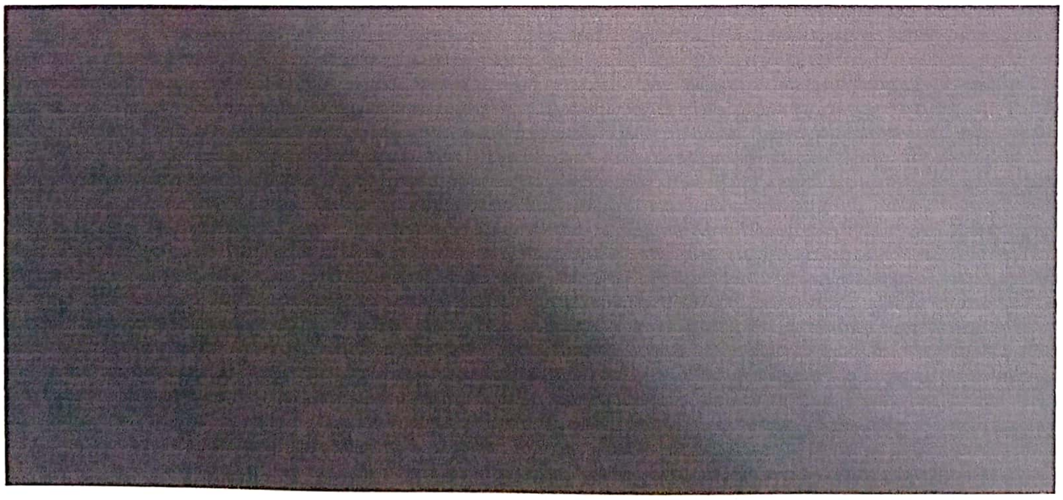
Foi dado um tempo para que a turma resolvesse os exercícios propostos ao final da apostila. Devido à aula ter sido preparada para 3 tempos de 50 minutos e só ter sido disponibilizado 2 tempos, foi pedido para que resolvessem, apenas, as questões 1, 5 e 6. Houve pouca dificuldade para resolução dos exercícios 1 e 5 (Figura 8).

Figura 8 – Resolução dos exercícios sobre Sequências

Fonte: Protocolo de Pesquisa

A maioria dos alunos percebeu o padrão da sequência infinita do exercício 6. No entanto, alguns não conseguiram resolver a questão, por não saberem a Ordem de Prioridade das operações matemáticas numa expressão numérica (Figura 9).

Figura 9 – Resolução do exercício 6 de um aluno.

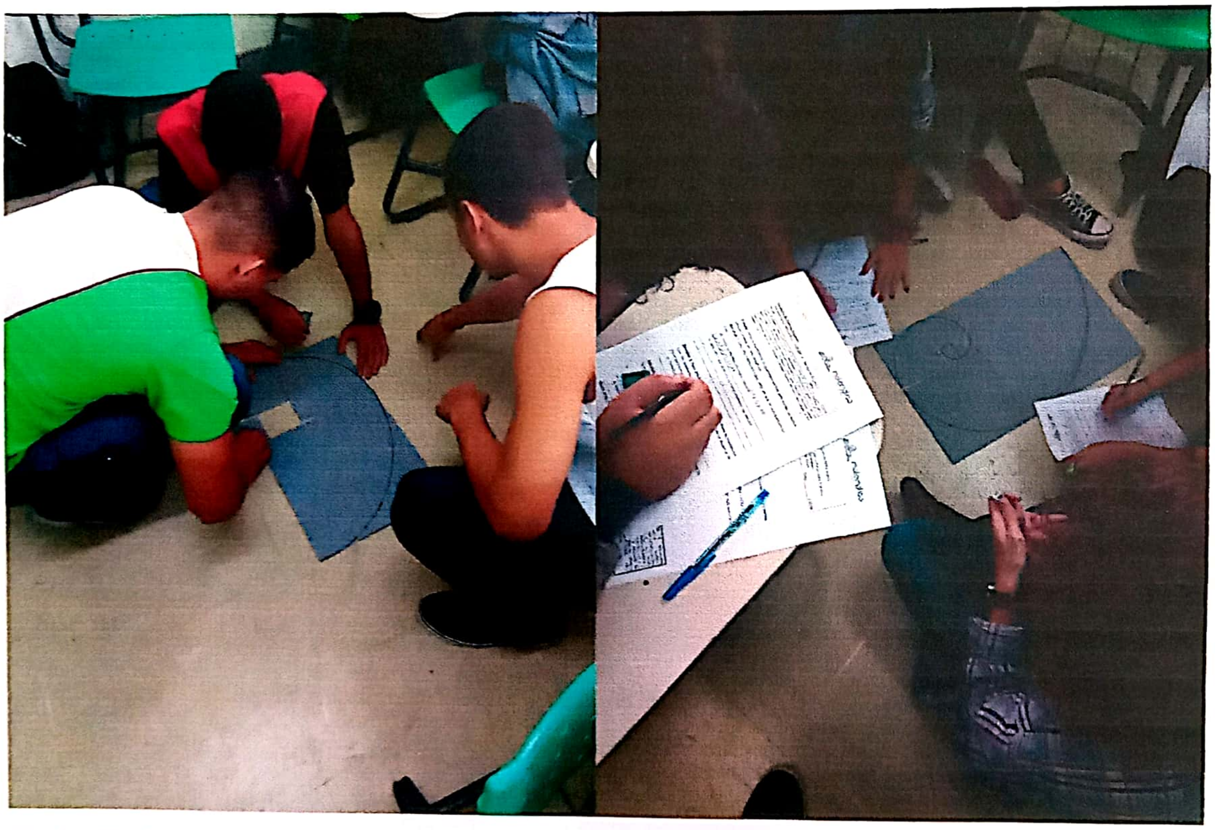


Fonte: Protocolo de Pesquisa

Os exercícios foram corrigidos após alguns alunos terem resolvidos. Foi pedido para os alunos se separarem em grupos de 5 ou 6 pessoas. Nesse momento, houve uma certa agitação e foi pedido silêncio. Após a formação dos grupos, foram entregues um quebra-cabeças em EVA e uma fita métrica para cada grupo. Junto aos materiais para a montagem do quebra-cabeças, foram entregues as Apostilas de Atividades aos alunos (Apêndice B). Percebeu-se a curiosidade quanto ao trabalho, pois antes da explicação da atividade, alguns alunos já tentaram montar a espiral.

Foi explicado que deveriam montar um quebra-cabeças e responder o que estava nas sendo pedido nas questões. Não houve dificuldade na montagem da espiral (Figura 10).

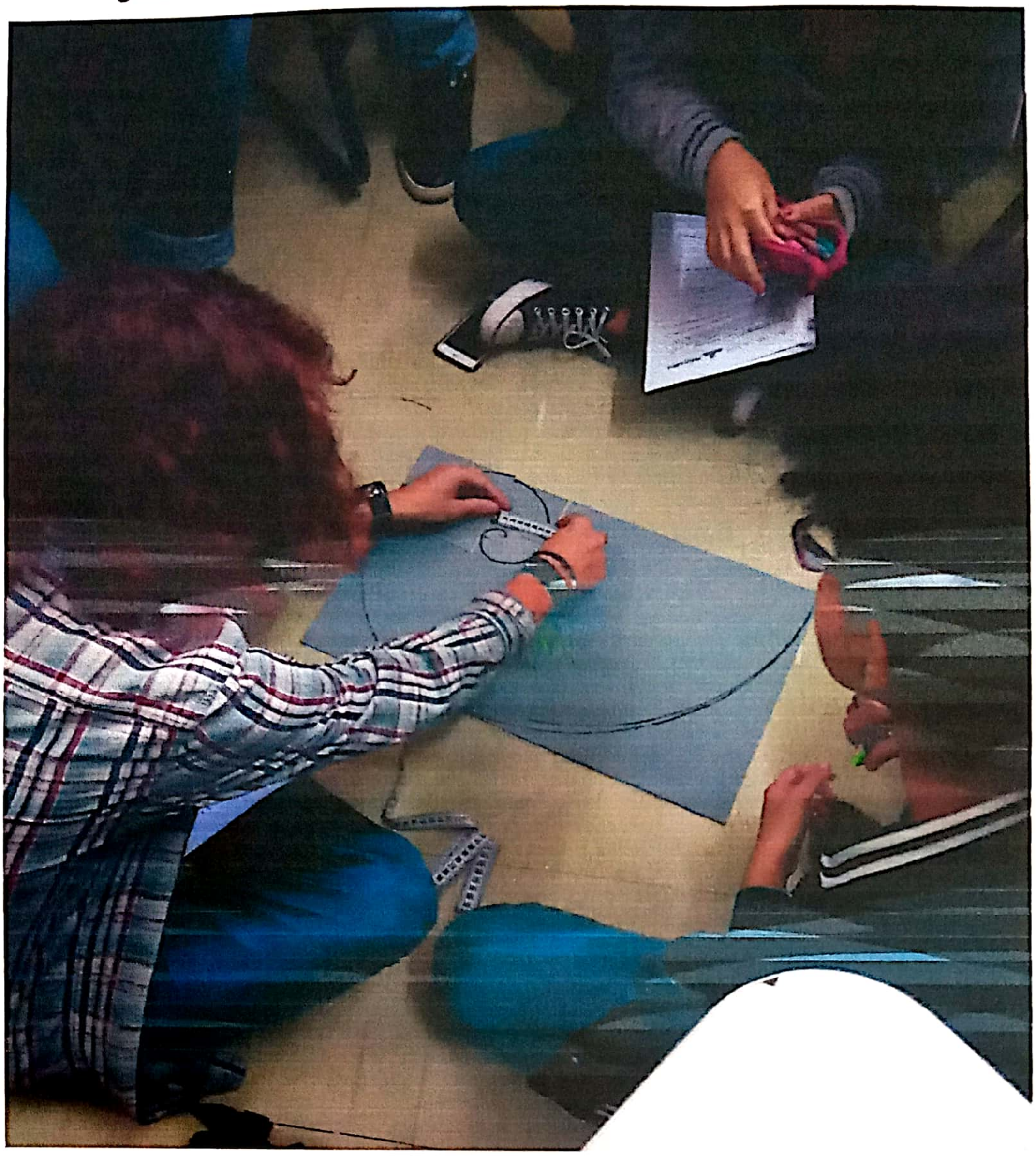
Figura 10 – Montagem do quebra-cabeças da espiral



Fonte: Protocolo de Pesquisa

A maioria dos grupos mediu os quadrados após terem montado o quebra-cabeças (Figura 11).

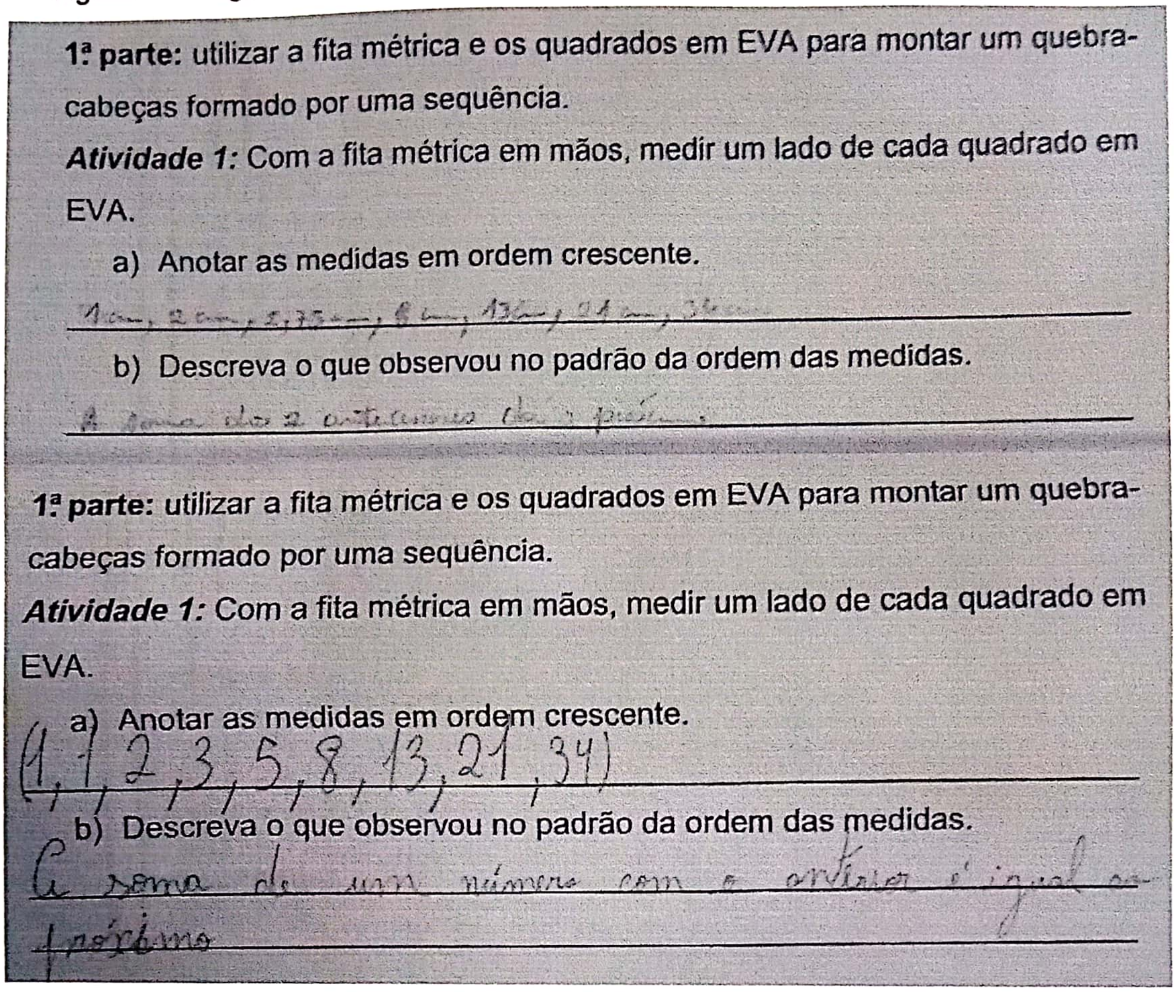
Figura 11 – Um grupo medindo os quadrados do quebra-cabeças



Fonte: Protocolo de Pesquisa

Rapidamente, os alunos perceberam o padrão da formação da Sequência da espiral (Figura 12), com isso foi dito que aquela era a Sequência de Fibonacci. Os alunos não tinham ouvido falar dessa sequência, o que auxiliou o grupo na próxima parte da Sequência Didática.

Figura 12 – Algumas respostas da Atividade 1 da 1ª parte da apostila de Atividades


1ª parte: utilizar a fita métrica e os quadrados em EVA para montar um quebra-cabeças formado por uma sequência.

Atividade 1: Com a fita métrica em mãos, medir um lado de cada quadrado em EVA.

a) Anotar as medidas em ordem crescente.

1cm, 2cm, 5,75cm, 8cm, 13cm, 21cm, 34cm

b) Descreva o que observou no padrão da ordem das medidas.

A soma dos 2 anteriores dá o próximo.

1ª parte: utilizar a fita métrica e os quadrados em EVA para montar um quebra-cabeças formado por uma sequência.

Atividade 1: Com a fita métrica em mãos, medir um lado de cada quadrado em EVA.

a) Anotar as medidas em ordem crescente.

(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34)

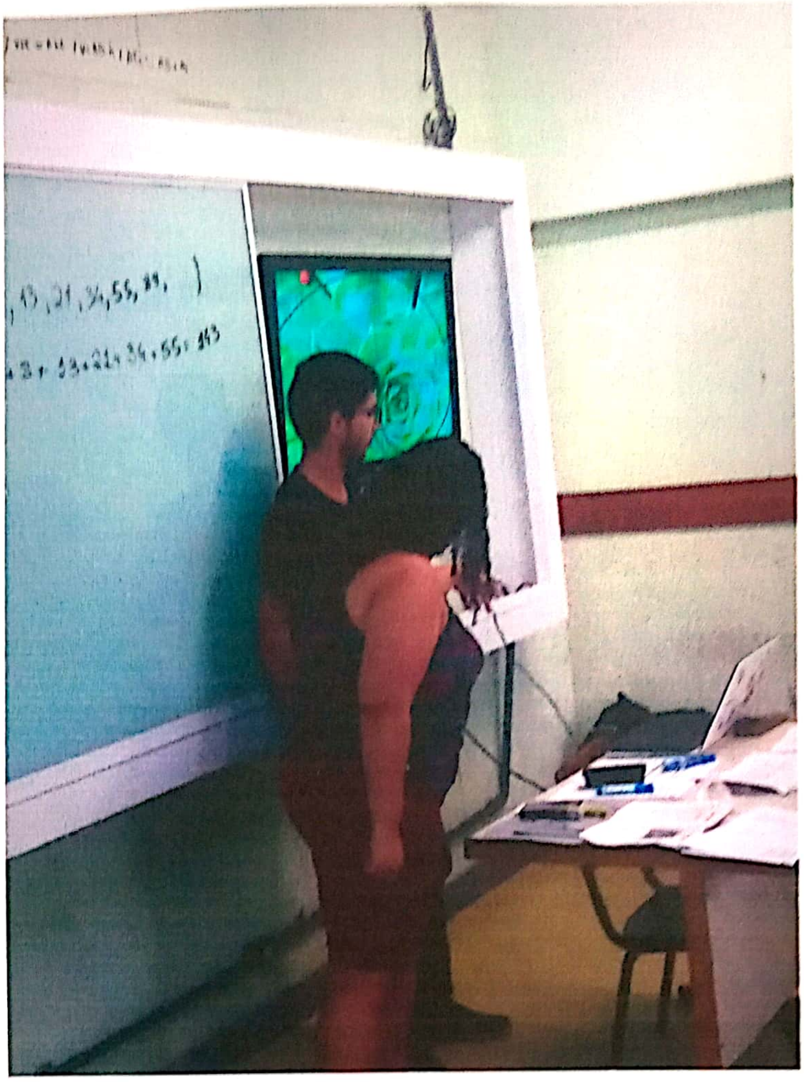
b) Descreva o que observou no padrão da ordem das medidas.

A soma de um número com o anterior é igual ao próximo

Fonte: Protocolo de Pesquisa

Depois desse momento, foi contada a História de Fibonacci e mostradas algumas propriedades da Sequência (Apêndice C), demonstradas no quadro. Os alunos ficaram impressionados com a propriedade que diz "A soma de quaisquer 10 números consecutivos da sequência de Fibonacci terá sempre como resultado um múltiplo de 11. Outra curiosidade é que o resultado desta soma será sempre o sétimo número utilizado na sequência, multiplicado por 11." e pediram outros 10 números da sequência para confirmar. Em seguida, falou-se que essa sequência é encontrada na natureza e foram mostrados slides com imagens de elementos da natureza (Apêndice C), relacionado-os com a sequência (Figura 13); por meio da espiral logarítimica sobre as imagens.

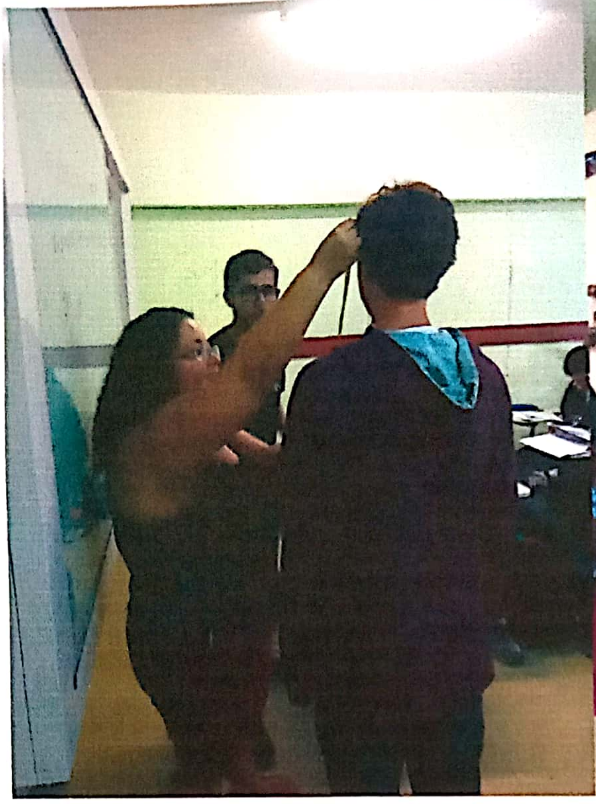
Figura 13 – Turma vendo as imagens e formas da natureza com o padrão da Sequência de Fibonacci

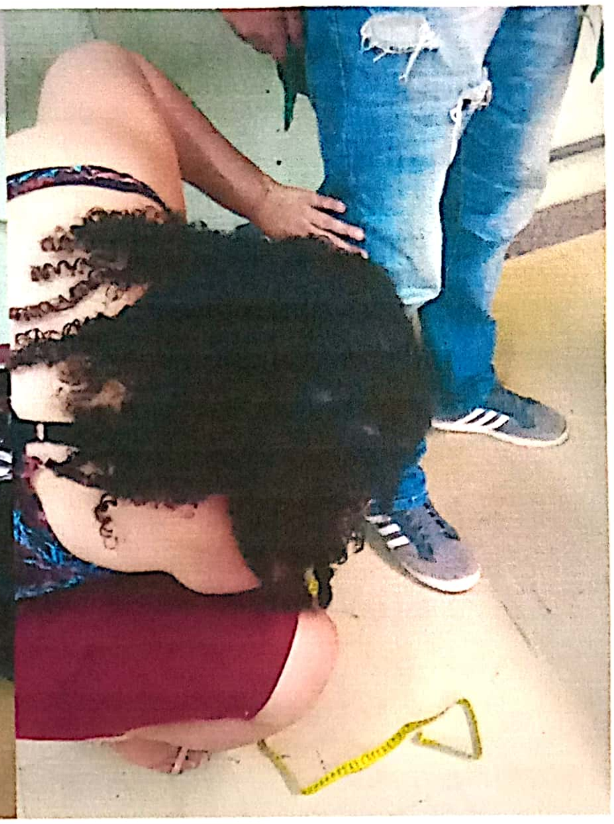


Fonte: Protocolo de Pesquisa

Seguindo com a aplicação, para a solução da segunda parte da apostila de atividades, tinham slides com as imagens da apostila que funcionaram como apoio. Devido ao tempo curto para aula, foram chamados 2 alunos para que os licenciandos fizessem as medições das atividades 1 e 3 (Figura 14). Não foram encontrados os padrões desejados pelos licenciandos. Acredita-se que foi devido às roupas dos alunos ou mesmo que eles ainda estivessem em fase de crescimento. A atividade 1 da terceira parte foi feita por um dos licenciandos.

Figura 14 – Atividades 1 e 3 da 2ª parte da apostila de atividades



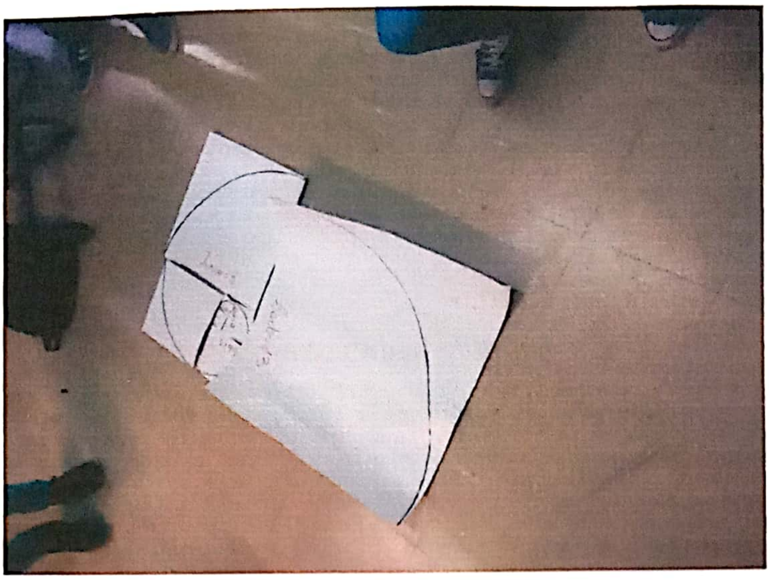


Fonte: Protocolo de Pesquisa

Foi pedido que a turma se juntasse novamente para continuar com a sequência didática. Foram entregues aos alunos o acervo da natureza que possui o padrão da Sequência de Fibonacci. Nesse acervo, tinham flores como o Girassol, que tem a espiral de Fibonacci formando o padrão de suas sementes, e outras, que possuem o número de pétalas pertencente à Sequência. Junto ao acervo, estava a libélula, para sua asa ser visualizada no Microscópio. No entanto, o microscópio não funcionou naquele momento.

Foi pedido aos alunos para fazer um novo quebra-cabeças de uma espiral. Eles deveriam escolher as peças com os lados de tamanhos que pertenciam a Sequência de Fibonacci. A atividade foi realizada sem dificuldade, mostrando que os alunos entenderam o conceito de sequências e a lei de formação da Sequência de Fibonacci (Figura 15). Os licenciandos tiveram que fazer um quadrado de lado 5 com o quadrado de lado 6, pois o quadrado de lado 5 tinha se perdido. Essa manipulação não atrapalhou a formação da grande espiral.

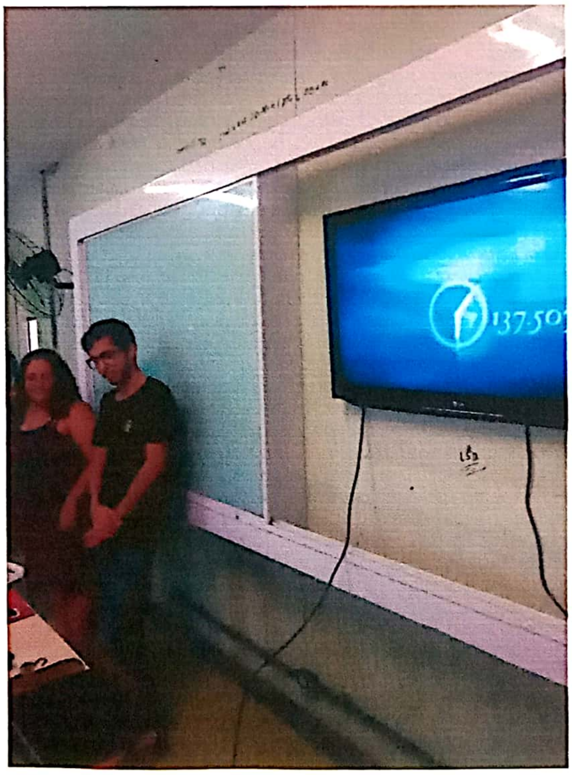
Figura 15 – Atividade Final



Fonte: Protocolo de Pesquisa

Para concluir a aula, foi exibido o filme "Assinatura de Deus (Sequência de Fibonacci)" (Figura 16). Os alunos ficaram admirados com o curta.

Figura 16 – Exibição do filme "Assinatura de Deus (Sequência de Fibonacci)"



Fonte: Protocolo de Pesquisa

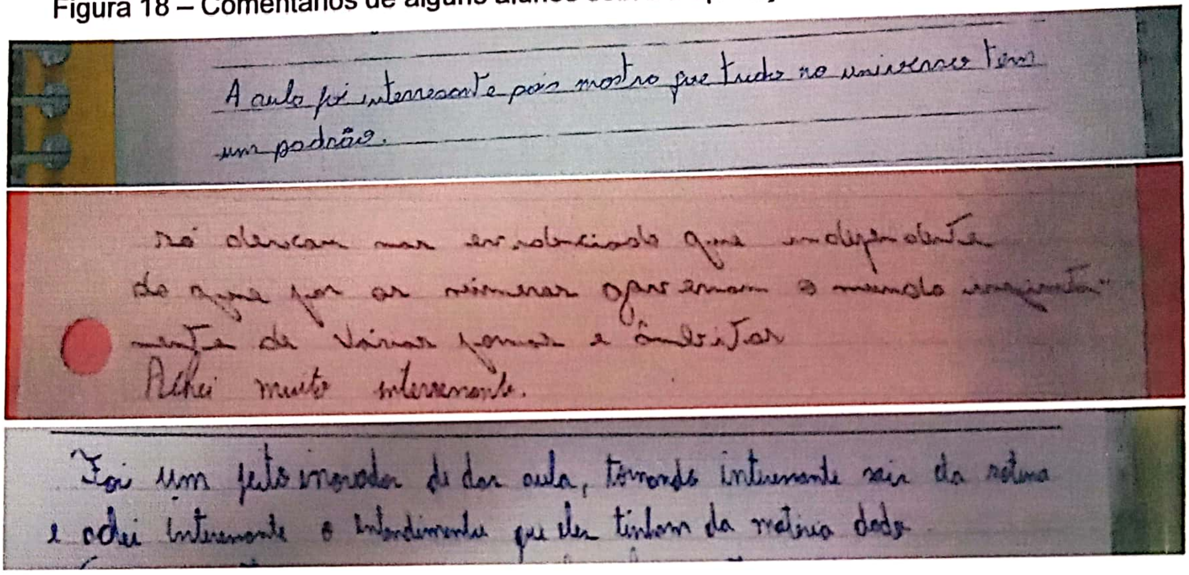
Perto do fim da aula, conseguiu-se ligar o microscópio e, após a exibição do filme, os alunos fizeram fila para visualizar a asa da libélula (Figura 17). Um aluno pediu para olhar a folha do Girassol no microscópio. Alguns alunos não puderam olhar no microscópio, pois o segundo tempo de aula já havia passado e o professor da próxima aula estava esperando na porta. Após a utilização do microscópio a aula foi encerrada.

Figura 17 – Visualização da asa da libélula no microscópio

Fonte: Protocolo de Pesquisa

As apostilas foram deixadas com os alunos para que fizessem a atividade de fixação em casa. Após 2 semanas, as apostilas foram recolhidas junto dos comentários dos alunos sobre a aplicação da sequência didática (Figura 18). Após a conclusão do relatório, as apostilas foram devolvidas aos alunos.

Figura 18 – Comentários de alguns alunos sobre a aplicação da sequência didática


A aula foi interessante pois mostro que tudo no universo tem um padrão.

Achei muito interessante.

Foi um jeito inovador de dar aula, tornando interessante sair da rotina e achei interessante o entendimento que eles tinham da matéria dada

Fonte: Protocolo de Pesquisa

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho atingiu o objetivo esperado. O grupo ficou realizado com o resultado. Os alunos acharam interessante a relação da Matemática com a natureza e a utilização do microscópio foi o diferencial. O uso de materiais concretos torna a aula desafiadora e o aprendizado significativo.

Essa aula pode ser utilizada tanto para apresentar o conteúdo de Sequências quanto para realizar as atividades a fim de revisar o conteúdo. A interdisciplinaridade é capaz de melhorar o aprendizado do aluno quando utilizada de forma substancial. É importante dar uma aula diferenciada para cativar os alunos.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. **Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio**: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: SEMTEC, 2002. 141 p.

______. Ministério da Educação. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio**: Orientações Curriculares para o Ensino Médio. Brasília: SEMTEC, 2006, v. 2. 135 p.

CARVALHO, Augusto Schwager. **Como trazer o Número Áureo para dentro da sala de aula.** 2013. 108 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2013.

FAZENDA, Ivani Catarina Arantes. **Interdisciplinaridade:** História, Teoria e Pesquisa. 13. ed. Campinas: Papirus, 2006. 143 p.

GADOTTI, Moacir. **Interdisciplinaridade:** Atitude e Método. Universidade de São Paulo. São Paulo: Instituto Paulo Freire, 1999. 7 p.

KERKHOFF, Samille Maria; BRACHT, Marciane Lucia; SCHNEIDER, Mariane. Um Novo Olhar para a Matemática: Superando Aversões. In: 7º SEMINÁRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DE PEDAGOGIA E 3º SEMINÁRIO INSTITUCIONAL INTERDISCIPLINAR PIBID, 2016, Itapiranga. 12 p. **Anais do 7º Seminário de Iniciação Científica do Curso de Pedagogia e 3º Seminário Institucional Interdisciplinar PIBID.** Itapiranga - SC: Fai - Faculdades de Itapiranga, 2016.

LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Alberto P. **Aprendendo e Ensinando Geometria.** São Paulo: Atual, 1994. 308 p.

LÍVIO, Mário. **Deus é Matemático?** 3. ed. Rio de Janeiro: Record, 2012. 350 p.

PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática Paiva.** 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013. 855 p.

ROGENSKI, Maria Lucia Cordeiro; PEDROSO, Sandra Mara Dias. **O ensino da Geometria na Educação Básica:** Realidade e Possibilidades. Instituto de Educação César Prieto Martinez. Ponta Grossa, 2014. 17 p.

SAMPAIO, Cassia Ferreira; SILVA, Amanda Gomes da. **Uma Introdução à Biomatemática:** A Importância da Transdisciplinaridade entre a Biologia e a Matemática, 2012, São Cristóvão, 12 p. In: VI COLÓQUIO INTERNACIONAL "EDUCAÇÃO E CONTEMPORANEIDADE", 2012, São Cristóvão.

SANTOMÉ, Jurjo Torres. **Globalização e Interdisciplinaridade:** O Currículo Integrado. Porto Alegre: Artmed, 1998. 275 p. Tradução de: Cláudia Schilling.

SENA, Carlos Átila Rodrigues de. **Sequência de Fibonacci:** Propriedades, Aplicações e Curiosidades 2013. 56 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual do Ceará, Ceará, 2013.

SENA, Rebeca Moreira; DORNELES, Beatriz Vargas. Ensino de Geometria: Rumos da Pesquisa (1991-2011). **Revemat,** Florianópolis, v. 8, n. 1, p.138-155, jan. 2013.

SILVA, José Augusto Florentino da. **Refletindo sobre as Dificuldades de Aprendizagem na Matemática:** Algumas Considerações. 2005. 11 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Católica de Brasília, Brasília, 2005.

Campos dos Goytacazes (RJ), 08 de agosto de 2018.

Célili Cardozo dos Santos Parasidini

Hallef Julia Macalei

APÊNDICES

Apêndice A: Material didático aplicado na turma do LEAMAT II

Diretoria de Ensino Superior
Licenciatura em Matemática
Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática
Linha de Pesquisa: Geometria
Licenciandos: Calili Cardozo dos Santos Paravidini e Hallef Julia Macabu
Orientadora: Profª. Me. Poliana Figueiredo C. Rodrigues
Coorientadora: Profª. Dr. Vanice da Silva Freitas Vieira
Nome: ______________________________ Data: ___ / ___ / 2017

SEQUÊNCIAS

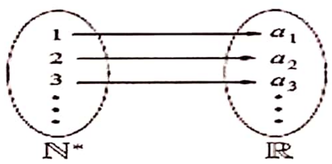
Introdução

Uma sequência numérica, é uma coleção de números reais ($\mathbb{R}$) escrita com uma certa ordem,

$$(a_i) = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\}$$

onde a_n é um número real qualquer com $i \in \mathbb{N}^*$. O índice i indica a posição do termo na sequência.

Assim, sequência é uma função em que cada $i \in \mathbb{N}^*$ está associado a um $a_i \in \mathbb{R}$.



$$f = \{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \ldots, (n, a_n), \ldots\}$$

Classificação das sequências

Sequências finitas

Chama-se sequência finita aquela em que $1 \le i \le n$ para todo $i \in \mathbb{N}^*$.

Exemplo:

$$(1, -2, 3, \pi, 5, \sqrt{2})$$

Nota: É necessário considerar também sequências finitas do tipo $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k)$. Neste caso, basta considerar o conjunto finito $I_k = (1,2,3, \cdots, k)$ e descrever as sequências de números reais finitos como funções.

$$f: I_k \to \mathbb{R}.$$

Sequências infinitas

Chama-se sequência infinita toda aplicação f *de* $\mathbb{N}^*$ *em* $\mathbb{R}$

Em toda sequencia infinita a cada $i \in \mathbb{N}^*$ está associado a um $a_i \in \mathbb{R}$.

Exemplo:

$$f = \{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \ldots, (i, a_i), \ldots\}$$

Expressamos a sequência infinita, através da inscrição de reticências à direita da sequência. Por exemplo:

(2, 4, 6, 8, 10, ...)

Nota: As reticências também podem ser usadas para se omitir termos de uma sequência finita ou infinita. Por exemplo:
$Ex._1$: (2, 4, 6, ... , 20, 22, ...)
$Ex._2$: (5, 10, 15, ... , 40, 45)

Tipos Especiais de Sequências

- (a_n) é estritamente crescente se $a_n < a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$;
- (a_n) é crescente se $a_n \leq a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$;
- (a_n) é estritamente decrescente se $a_n > a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$;
- (a_n) é decrescente se $a_n \geq a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$;
- (a_n) é constante se $a_n = a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$;

Exemplo 1

Escreva explicitamente os termos da sequência $a_n = (-1)^{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Solução:

Temos que

$a_1 = (-1)^{1+1} = (-1)^2 = 1$

$a_2 = (-1)^{2+1} = (-1)^3 = -1$

...

Logo, $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots) = (1, -1, 1, \ldots)$.

Exemplo 2

Escreva explicitamente os termos da sequência (a_n) tal que $a_1 = 2$ e $a_n = a_{n-1} + 2(n-1)$.

Solução:

Observe que:

$a_1 = 2$

$a_2 = a_{2-1} + 2 \times (2-1) = 2 + 2 = 4$

$a_3 = a_{3-1} + 2 \times (3-1) = 4 + 4 = 8$

$a_4 = a_{4-1} + 2 \times (4-1) = 8 + 6 = 14$

$a_5 = a_{5-1} + 2 \times (5-1) = 14 + 8 = 22$

....

Logo, $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ...) = (2, 4, 8, 14, 22, ...)$.

Exemplo 3

(1, 2, 3, 4, 6, 12) é a sequência crescente e finita dos divisores inteiros positivos de 12.

Exemplo 4

(3, 6, 9, 12, ..., $3i$, ...) é a sequência infinita dos múltiplos inteiros positivos de 3.

Exemplo 5

(2, 3, 5, 7, 11, ...) é a sequência infinita dos números primos positivos.

Lei de formação das sequências

Quando os termos de uma sequência sucedem-se obedecendo a certa regra ou razão, que chamamos Lei de formação da sequência. Esta pode ser apresentada de três formas.

Por fórmula de recorrência

Duas regras devem ser dadas: uma para identificar o primeiro termo (a_1) e outra para calcular cada termo (a_n) a partir do seu antecedente (a_{n-1});

Exemplo:

Escrever a sequência finita f cujos termos obedecem a seguinte fórmula de recorrência: $a_1 = 2$ e $a_n = a_{n-1} + 3$, $\forall\, n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

$n = 2 \Rightarrow a_2 = a_1 + 3 = 2 + 3 = 5$

$n = 3 \Rightarrow a_3 = a_2 + 3 = 5 + 3 = 8$

$n = 4 \Rightarrow a_4 = a_3 + 3 = 8 + 3 = 11$

$n = 5 \Rightarrow a_5 = a_4 + 3 = 11 + 3 = 14$

$n = 6 \Rightarrow a_6 = a_5 + 3 = 14 + 3 = 17$

Então, f = {2, 5, 8, 11, 14, 17}.

Pela posição de cada termo

É dada uma fórmula geral que expressa a_n em função de n;

Exemplo:

Escrever a sequência finita cujos termos obedecem à lei $a_n = 2^n$, $\forall\, n \in \{1, 2, 3, 4\}$. Temos:

$a_1 = 2^1 = 2$, $a_2 = 2^2 = 4$, $a_3 = 2^3 = 8$ e $a_4 = 2^4 = 16$

Então, $f = \{2, 4, 8, 16\}$.

Por propriedade dos termos

É dada uma propriedade que os termos da sequência devem apresentar;

Exemplo:

Escrever os 5 primeiros termos da sequência infinita g formada pelos números primos positivos colocados em ordem crescente.

Temos $g = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$.

Exercícios Propostos

1. Escrever os 4 primeiros termos da sequência infinita f dada pela seguinte fórmula de recorrência: $g_1 = 1$ e $g_n = 4g_{n-1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$.

2. Escrever a sequência finita g de 5 termos em que cada termo é igual ao número de divisores inteiros do respectivo índice.

3. Considere a sequência (a_n), onde $a_n = 2^n - 1$. Faça as contas e escreva os primeiros cinco termos da sequência infinita.

4. Seja a sequência $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ cujo termo geral é dado por $a_n = n + 2(n + 2)$. Determine os quatro primeiros termos.

5. Determine o 5º termo da sequência infinita definida por $a_1 = 20$ e $3a_{n-1} = a_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$;

6. A partir da sequência infinita

$a_1 = 1 \times 9 + 2 = 11$

$a_2 = 12 \times 9 + 3 = 111$

$a_3 = 123 \times 9 + 4 = 1111$

$a_4 = 1234 \times 9 + 5 = 11111$

...

determine o valor da expressão $\frac{1234567\ x\ 81+72}{11}$.

Diretoria de Ensino Superior
Licenciatura em Matemática – LEAMAT II – Razão de Fibonacci
Nome: ____ Data: ___ / ___ / 2017

Estas atividades foram elaboradas Calili C. dos S. Paravidini e Hallef J. Macabu para o desenvolvimento da sequência didática de Geometria para disciplina Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática (Licenciatura em Matemática do IFF campus Campos Centro), sob orientação da professora Poliana C. Rodrigues. Estas serão realizadas utilizando quebra-cabeças em EVA, fita métrica, calculadora, a imagem "Homem Vitruviano" de Leonardo da Vinci e outras imagens.

1ª parte: utilizar a fita métrica e os quadrados em EVA para montar um quebra-cabeças formado por uma sequência.

Atividade 1: Com a fita métrica em mãos, medir um lado de cada quadrado em EVA.

a) Anotar as medidas em ordem crescente.

____

b) Descreva o que observou no padrão da ordem das medidas.

____

____

Atividade 2: Após descobrir o padrão da sequência que forma as medidas dos lados dos quadrados, montar o quebra-cabeças encaixando os desenhos do menor para o maior.

a) Descreva qual desenho foi formado.

____

Atividade 3: Considerando os números da sequência encontrada, observe as razões entre um número e seu posterior.

a) Anote as razões encontradas.

____

____

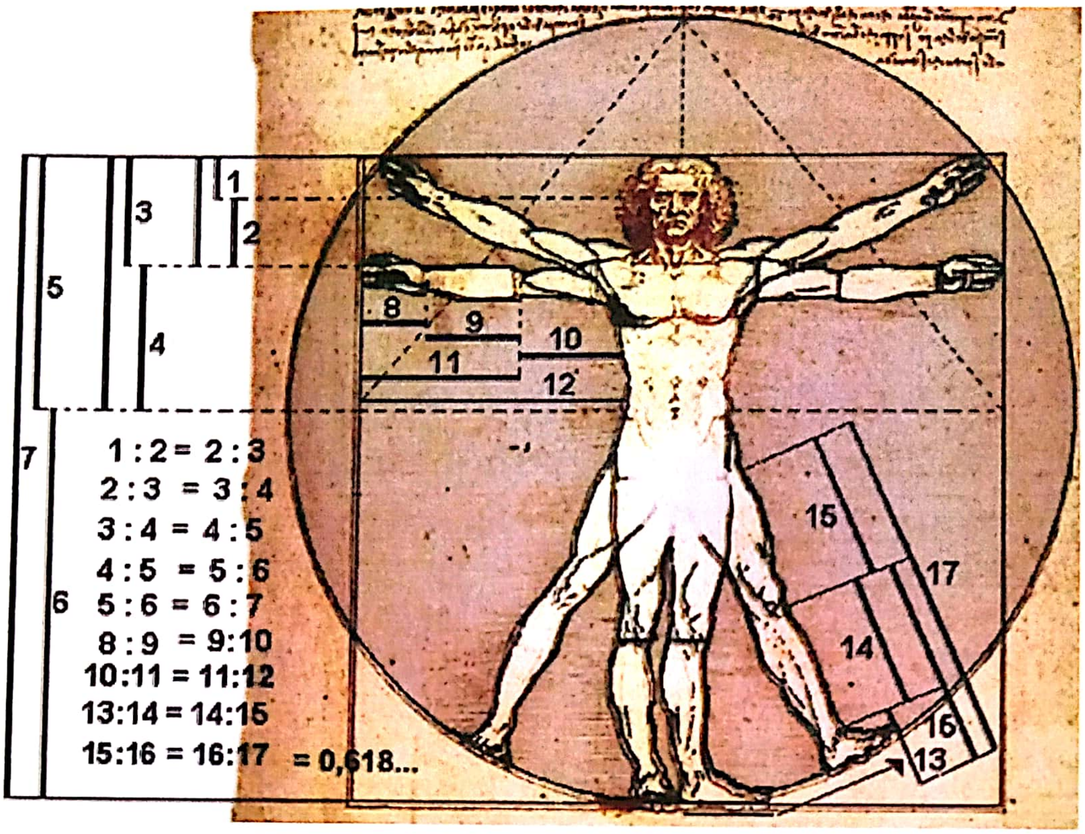
____

b) Descreva o que observou.

____

Observação: A razão encontrada é chamada Razão áurea ou Número de ouro.

2ª parte: Considerando a imagem do "Homem Vitruviano" de Leonardo da Vinci, medir os segmentos dados com o auxílio da fita métrica;



Atividade 1: Medir a altura do corpo (7) e a medida do umbigo até o chão (6).

a) Anotar as medidas encontradas.

____

____

b) Com a calculadora, observar a razão $\frac{(medida\ 6)}{(medida\ 7)}$. Anotar o valor encontrado.

____

Atividade 2: Medir da cintura até a cabeça (5) e o tamanho do tórax (4).

a) Anotar as medidas encontradas.

____

____

b) Com a calculadora, observar a razão $\frac{(medida\ 4)}{(medida\ 5)}$. Anotar o valor encontrado.

____

Atividade 3: Medir do quadril até o joelho (15) e a do joelho ao tornozelo (14).

a) Anotar as medidas encontradas.

---

b) Com a calculadora, observar a razão $\frac{(medida\ 14)}{(medida\ 15)}$. Anotar o valor encontrado.

Atividade 4: Medir do quadril ao chão (17) e a medida do joelho até o chão (16).

a) Anotar as medidas encontradas.

---

b) Com a calculadora, observar a razão $\frac{(medida\ 16)}{(medida\ 17)}$. Anotar o valor encontrado.

Atividade 5: Medir do ombro ao cotovelo (10) e a medida do cotovelo até o pulso (9).

a) Anotar as medidas encontradas.

---

b) Com a calculadora, observar a razão $\frac{(medida\ 9)}{(medida\ 10)}$. Anotar o valor encontrado.

Atividade 6: Considere os itens b) das atividades 1 a 5 da 2ª parte.

a) Descreva o que observou.

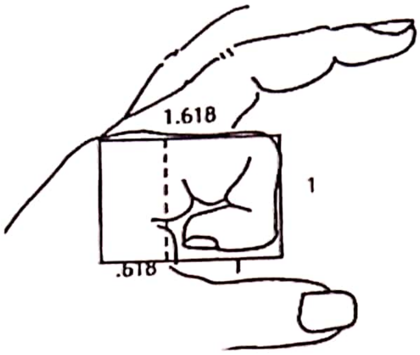
---

b) Compare os itens b) das atividades 1 a 5 da 2ª parte com o item a) da atividade 3 da 1ª parte. Descreva o que observou.

---

c) Qual a razão encontrada?

3ª parte: Considerando as figuras abaixo, realizar as medidas dadas com o auxílio da fita métrica;



Atividade 1: Dobrar o dedo indicador como na figura. Medir a distância do início da articulação até a dobra e do final da articulação até a dobra.

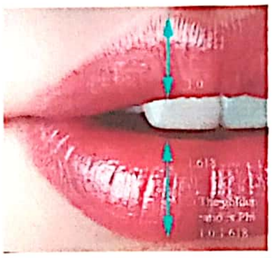
a) Anotar as medidas encontradas.

____

____

b) Com a calculadora, observar a razão $\frac{(2^{a}\,medida)}{(1^{a}\,medida)}$. Anotar o valor encontrado.

____



Atividade 2: Medir o lábio superior e o lábio inferior como na figura.

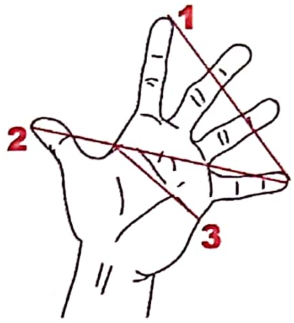
a) Anotar as medidas encontradas.

____

____

b) Com a calculadora, observar a razão $\frac{(1^{a}\,medida)}{(2^{a}\,medida)}$. Anotar o valor encontrado.

____



Atividade 3: Abrir a mão como na figura. Medir da ponta do indicador a ponta do dedo mínimo (1), da ponta do polegar à ponta do dedo mínimo (2) e a medida da palma da mão (3).

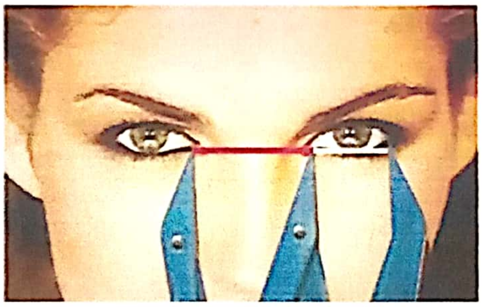
a) Anotar as medidas encontradas.

____

____

b) Com a calculadora, observar as razões $\frac{(medida\ 1)}{(medida\ 2)}$ e $\frac{(medida\ 3)}{(medida\ 2)}$. Anotar os valores encontrados.

____



Atividade 4: Medir a distância entre um olho e outro (em vermelho) e a medida do olho (em branco).

c) Anotar as medidas encontradas.

____

____

d) Com a calculadora, observar a razão $\frac{(branca)}{(vermelha)}$. Anotar o valor encontrado.

____

Atividade 5: Considere os itens b) das atividades 1 a 4 da 3ª parte.

c) Descreva o que observou.

____

____

d) Compare os itens b) das atividades 1 a 5 da 3ª parte com os itens b) das atividades 1 a 5 da 2ª parte e com o item a) da atividade 3 da 1ª parte. Descreva o que observou.

____

e) Qual a razão encontrada?

____

Apêndice B: Material didático experimentado na turma regular

Diretoria de Ensino Superior
Licenciatura em Matemática
Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática
Linha de Pesquisa: Geometria
Licenciandos: Calili Cardozo dos Santos Paravidini e Hallef Julia Macabu
Orientadora: Profª. Me. Poliana Figueiredo C. Rodrigues
Coorientadora: Profª. Dr. Vanice da Silva Freitas Vieira
Nome: ______________________________ Data: ___ / ___ / 2018

SEQUÊNCIAS

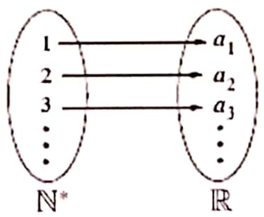
Introdução

Uma sequência numérica é uma coleção de números reais ($\mathbb{R}$) escrita com uma certa ordem,

$$a_i = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$$

em que (a_n) é um número real qualquer com $i \in \mathbb{N}^*$. O índice *i* indica a posição do termo na sequência.

Assim, sequência é uma função em que cada $i \in \mathbb{N}^*$ está associado a um $a_i \in \mathbb{R}$.



$$f = \{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \ldots, (n, a_n), \ldots\}$$

Classificação de sequências

Sequências finitas

Chama-se sequência finita aquela em que $1 \le i \le n$ para todo $i \in \mathbb{N}^*$.

Exemplo:

$$(1, -2, 3, \pi, 5, \sqrt{2})$$

Nota: É necessário considerar também sequências finitas do tipo $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$. Neste caso, basta considerar o conjunto finito $I_k = (1, 2, 3, \cdots, k)$ e descrever as sequências de números reais finitos como funções.

Sequências infinitas

Chama-se sequência infinita toda aplicação $f\ de\ \mathbb{N}^*\ em\ \mathbb{R}$

Em toda sequencia infinita a cada $i \in \mathbb{N}^*$ está associado a um $a_i \in \mathbb{R}$.

Exemplo:

$$f = \{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \ldots, (i, a_i), \ldots\}$$

Expressamos a sequência infinita, através da inscrição de reticências à direita da sequência. Por exemplo:

(2, 4, 6, 8, 10, ...)

> **Nota:** As reticências também podem ser usadas para se omitir termos de uma sequência finita ou infinita. Por exemplo:
> Ex_1: (2, 4, 6, ... , 20, 22, ...)
> Ex_2: (5, 10, 15, ... , 40, 45)

Tipos Especiais de Sequências

- (a_n) é estritamente crescente se $a_n < a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$;
- (a_n) é crescente se $a_n \leq a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$;
- (a_n) é estritamente decrescente se $a_n > a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$;
- (a_n) é decrescente se $a_n \geq a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$;
- (a_n) é constante se $a_n = a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$;

Exemplo 1

Escreva explicitamente os termos da sequência $a_n = (-1)^{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemplo 2

Escreva explicitamente os termos da sequência (a_n) tal que $a_1 = 2$ e $a_n = a_{n-1} + 2(n-1)$.

Exemplo 3

(1, 2, 3, 4, 6, 12) é a sequência crescente e finita dos divisores inteiros positivos de 12.

Exemplo 4

(3, 6, 9, 12, ..., 3*i*, ...) é a sequência infinita dos múltiplos inteiros positivos de 3.

Exemplo 5

(2, 3, 5, 7, 11, ...) é a sequência infinita dos números primos positivos.

Lei de formação das sequências

Quando os termos de uma sequência sucedem-se obedecendo a certa regra ou razão, que chamamos Lei de formação da sequência. Esta pode ser apresentada de três formas.

Por fórmula de recorrência

Duas regras devem ser dadas: uma para identificar o primeiro termo (a_1) e outra para calcular cada termo (a_n) a partir do seu antecedente (a_{n-1});

Exemplo:

Escrever a sequência finita f cujos termos obedecem a seguinte fórmula de recorrência: $a_1 = 2$ e $a_n = a_{n-1} + 3$, $\forall\, n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

$n = 2 \Rightarrow a_2 = a_1 + 3 = 2 + 3 = 5$

$n = 3 \Rightarrow a_3 = a_2 + 3 = 5 + 3 = 8$

$n = 4 \Rightarrow a_4 = a_3 + 3 = 8 + 3 = 11$

$n = 5 \Rightarrow a_5 = a_4 + 3 = 11 + 3 = 14$

$n = 6 \Rightarrow a_6 = a_5 + 3 = 14 + 3 = 17$

Então, $f = \{2, 5, 8, 11, 14, 17\}$.

Pela posição de cada termo

É dada uma fórmula geral que expressa (a_n) em função de n;

Exemplo:

Escrever a sequência finita cujos termos obedecem à lei $a_n = 2^n$, $\forall\, n \in \{1, 2, 3, 4\}$. Temos:

$a_1 = 2^1 = 2$, $a_2 = 2^2 = 4$, $a_3 = 2^3 = 8$ e $a_4 = 2^4 = 16$

Então, $f = \{2, 4, 8, 16\}$.

Por propriedade dos termos

É dada uma propriedade que os termos da sequência devem apresentar;

Exemplo:

Escrever os 5 primeiros termos da sequência infinita g formada pelos números primos positivos colocados em ordem crescente.

Temos $g = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$.

Exercícios Propostos

1. Escreva os 4 primeiros termos da sequência infinita g dada pela seguinte fórmula de recorrência: $g_1 = 1$ e $g_n = 4g_{n-1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$.

2. Escreva a sequência finita g de 5 termos em que cada termo é igual ao número de divisores inteiros do respectivo índice.

3. Considere a sequência (a_n), onde $a_n = 2^n - 1$. Escreva os primeiros cinco termos da sequência infinita.

4. Seja a sequência infinita $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ cujo termo geral é dado por $a_n = n + 2(n + 2)$. Determine os quatro primeiros termos.

5. Determine o 5º termo da sequência finita definida por $a_1 = 20$ e $a_n = 3a_{n-1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$;

6. A partir da sequência infinita

$a_1 = 1 \times 9 + 2 = 11$

$a_2 = 12 \times 9 + 3 = 111$

$a_3 = 123 \times 9 + 4 = 1111$

$a_4 = 1234 \times 9 + 5 = 11111$

...

determine o valor da expressão $\frac{1234567 \times 81 + 72}{11}$.

Diretoria de Ensino Superior
Licenciatura em Matemática – LEAMAT II – Razão de Fibonacci
Nome: ________________________________ Data: ___ / ___ / 2018

Estas atividades foram elaboradas Calili C. dos S. Paravidini e Hallef J. Macabu para o desenvolvimento da sequência didática de Geometria para disciplina Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática (Licenciatura em Matemática do IFF campus Campos Centro), sob orientação da professora Poliana C. Rodrigues. Estas serão realizadas utilizando quebra-cabeças em EVA, fita métrica, calculadora, a imagem "Homem Vitruviano" de Leonardo da Vinci e outras imagens.

1ª parte: utilizar a fita métrica e os quadrados em EVA para montar um quebra-cabeças formado por uma sequência.

Atividade 1: Com a fita métrica em mãos, medir um lado de cada quadrado em EVA.

c) Anotar as medidas em ordem crescente.

____

d) Descreva o que observou no padrão da ordem das medidas.

____

____

Atividade 2: Após descobrir o padrão da sequência que forma as medidas dos lados dos quadrados, montar o quebra-cabeças encaixando os desenhos do menor para o maior.

b) Descreva qual desenho foi formado.

____

Atividade 3: Considerando os números da sequência encontrada, observe as razões entre um número e seu posterior.

c) Anote as razões encontradas.

____

____

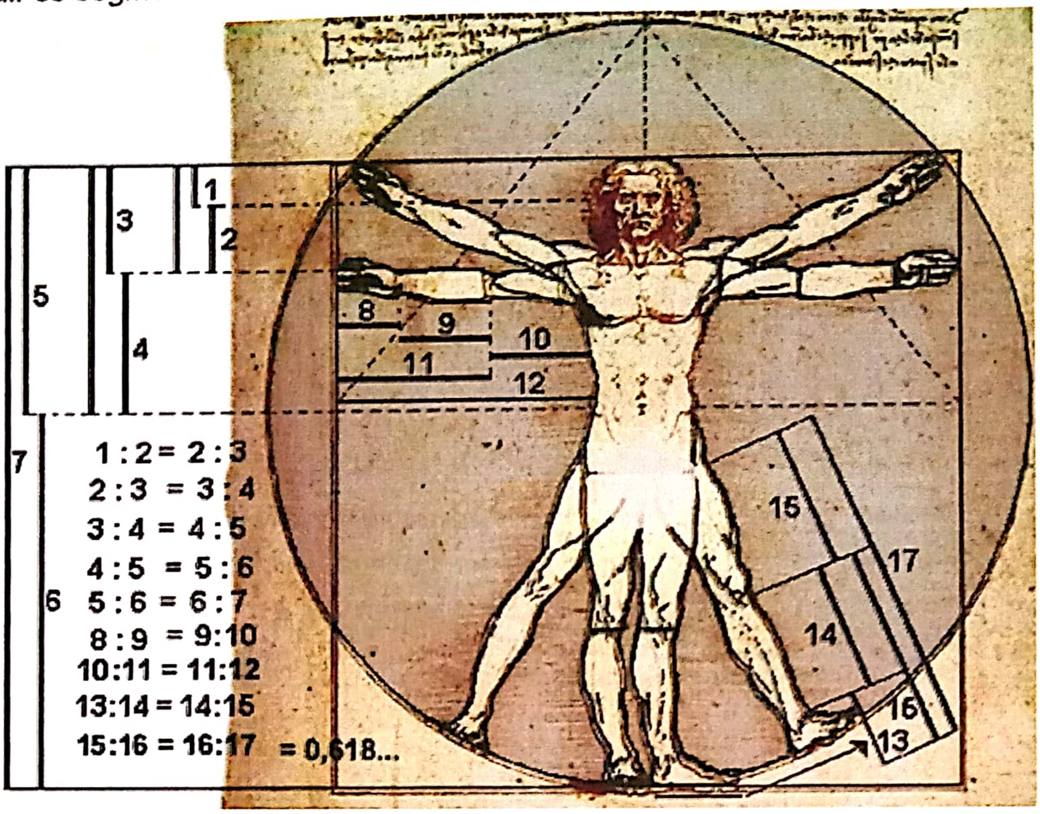
____

d) Descreva o que observou.

____

Observação: A razão encontrada é chamada Razão áurea ou Número de ouro.

2ª parte: Considerando a imagem do "Homem Vitruviano" de Leonardo da Vinci, medir os segmentos dados com o auxílio da fita métrica;



Atividade 1: Medir a altura do corpo (7) e a medida do umbigo até o chão (6).

c) Anotar as medidas encontradas.

____

____

d) Com a calculadora, observar a razão $\frac{(medida\ 6)}{(medida\ 7)}$. Anotar o valor encontrado.

____

Atividade 2: Medir do quadril até o joelho (15) e a medida do joelho ao tornozelo (14).

c) Anotar as medidas encontradas.

____

____

d) Com a calculadora, observar a razão $\frac{(medida\ 14)}{(medida\ 15)}$. Anotar o valor encontrado.

____

Atividade 3: Medir do ombro ao cotovelo (10) e a medida do cotovelo até o pulso (9).

e) Anotar as medidas encontradas.

____

____

f) Com a calculadora, observar a razão $\frac{(medida\ 9)}{(medida\ 10)}$. Anotar o valor encontrado.

____

Atividade 4: Considere os itens b) das atividades 1 a 3 da 2ª parte.

d) Descreva o que observou.

____

____

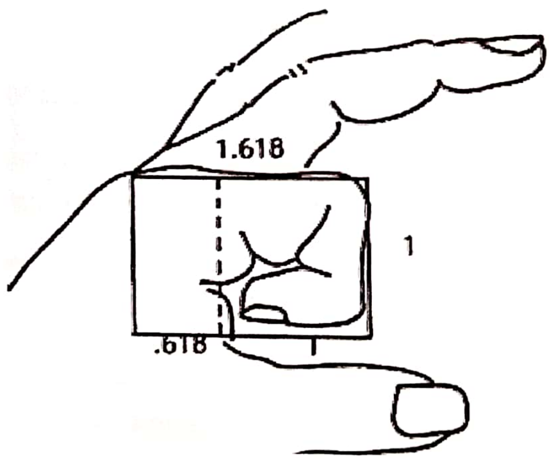
e) Compare os itens b) das atividades 1 a 3 da 2ª parte com o item a) da atividade 3 da 1ª parte. Descreva o que observou.

____

f) Qual a razão encontrada?

____

3ª parte: Considerando as figuras abaixo, realizar as medidas dadas com o auxílio da fita métrica;



Atividade 1: Dobrar o dedo indicador como na figura. Medir a distância do início da articulação até a dobra e do final da articulação até a dobra.

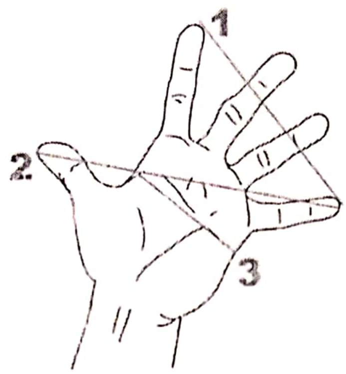
c) Anotar as medidas encontradas.

____

____

d) Com a calculadora, observar a razão $\frac{(2^a\ medida)}{(1^a\ medida)}$. Anotar o valor encontrado.

____



Atividade 2: Abrir a mão como na figura. Medir da ponta do indicador a ponta do dedo mínimo (1), da ponta do polegar à ponta do dedo mínimo (2) e a medida da palma da mão (3).

f) Anotar as medidas encontradas.

____

____

g) Com a calculadora, observar as razões $\frac{(medida\ 1)}{(medida\ 2)}$ e $\frac{(medida\ 3)}{(medida\ 2)}$. Anotar os valores encontrados.

____

Atividade 3: Considere os itens b) das atividades 1 e 2 da 3ª parte.

h) Descreva o que observou.

____

____

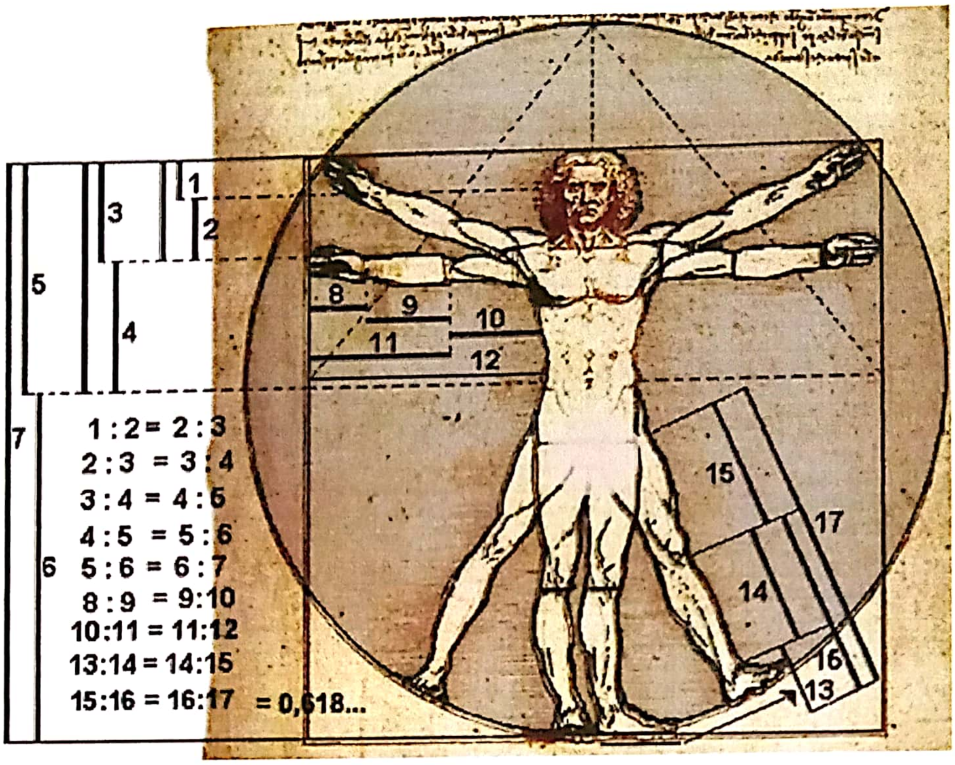
i) Compare os itens b) das atividades 1 e 2 da 3ª parte com os itens b) das atividades 1 a 3 da 2ª parte e com o item a) da atividade 3 da 1ª parte. Descreva o que observou.

____

j) Qual a razão encontrada?

____

Atividades de fixação



Atividade 1: Medir da cintura até a cabeça (5) e o tamanho do tórax (4).

c) Anotar as medidas encontradas.

____

____

d) Com a calculadora, observar a razão $\frac{(medida\ 4)}{(medida\ 5)}$. Anotar o valor encontrado.

____

Atividade 2: Medir do quadril ao chão (17) e a medida do joelho até o chão (16).

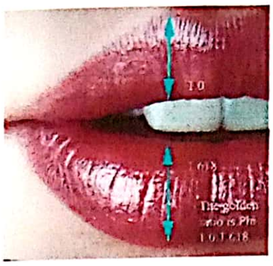
c) Anotar as medidas encontradas.

____

____

d) Com a calculadora, observar a razão $\frac{(medida\ 16)}{(medida\ 17)}$. Anotar o valor encontrado.

____



Atividade 3: Medir o lábio superior e o lábio inferior como na figura.

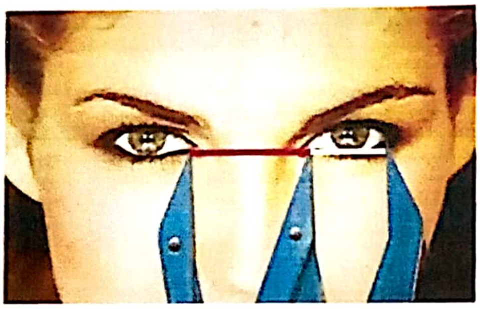
c) Anotar as medidas encontradas.

____

____

d) Com a calculadora, observar a razão $\frac{(1^{a}\ medida)}{(2^{a}\ medida)}$. Anotar o valor encontrado.

____



Atividade 4: Medir a distância entre um olho e outro (em vermelho) e a medida do olho (em branco).

a) Anotar as medidas encontradas.

____

____

b) Com a calculadora, observar a razão $\frac{(branca)}{(vermelha)}$. Anotar o valor encontrado.

____

Apêndice C: Slides do *Power Point* utilizados na Sequência Didática

A História de Fibonacci

Linha de Pesquisa: Ensino e Aprendizagem de Geometria
Autores: Calili Cardozo dos Santos Paravidini, Hallef Julia Macabu
Orientadora: Profª Poliana Figueiredo C. Rodrigues

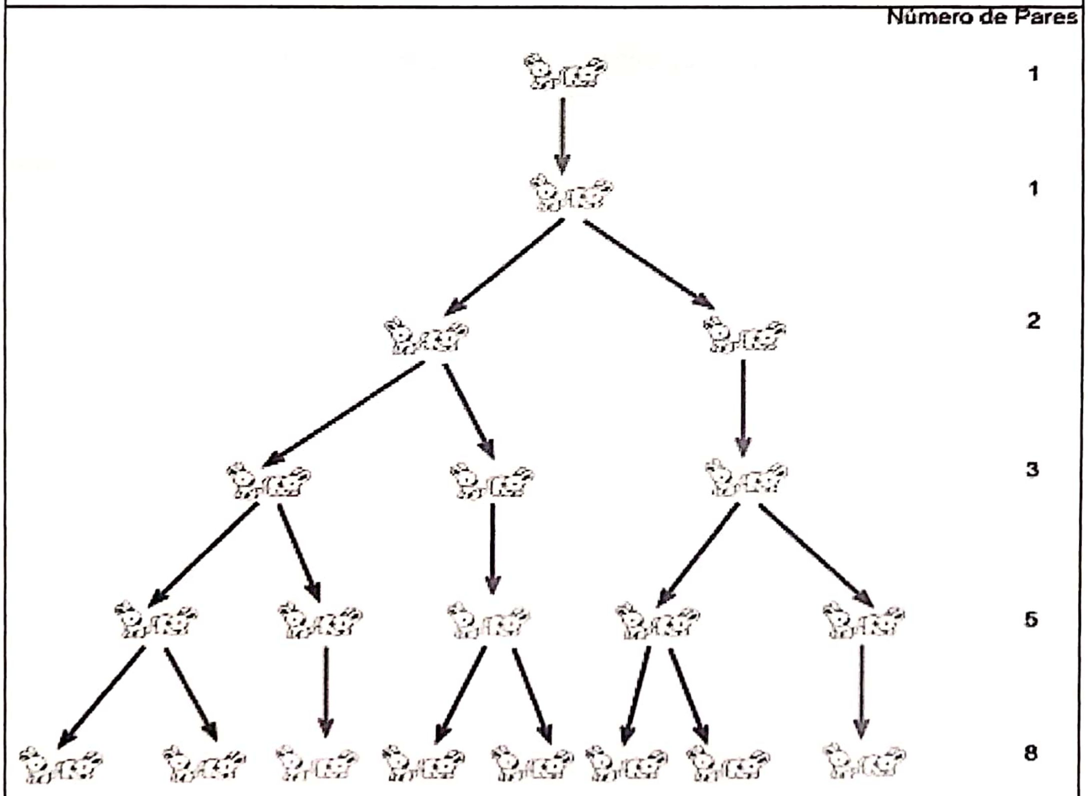
A Sequência de Fibonacci

A Sequência de Fibonacci foi descoberta pelo matemático italiano Leonardo de Pisa (1180-1250). Ele ficou conhecido como Leonardo Fibonacci por ser filho de Guglielmo dei Bonacci, "filho de Bonacci" (LÍVIO, 2015)

A Sequência de Fibonacci

No ano de 1202, Fibonacci propôs um problema em seu Livro de Ábaco ("*Liber Abaci*"). A partir dele surgiu a famosa sequência.

"Um homem pôs um par de coelhos num lugar cercado por todos os lados por um muro. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todos os meses cada par dá à luz um novo par, que é fértil a partir do segundo mês?" ("*Liber Abaci*" - cáp 12)



FONTE: https://sites.google.com/site/leonardofibonacci/o-problema-dos-coelhos

A Sequência de Fibonacci

Como cada novo casal de coelhos leva 2 meses para ter um novo casal e depois tem um novo casal a cada mês, podemos concluir que: a quantidade de pares de coelhos por mês é a soma do número de casais dos dois meses anteriores.

Fórmula da Sequência de Fibonacci

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \in \mathbb{N}, n > 2$$

A Sequência de Fibonacci

O matemático francês Edouard Lucas (1842-1891) que nomeou essa sequência como Sequência de Fibonacci no século XIX (LIVIO, 2015).

Propriedades da Sequência de Fibonacci

A sequência possui diversas propriedades. As propriedades a seguir foram retiradas do livro de Livio (2015), *"Razão Áurea: história de fi"*.

Propriedade 1

Se for somado um número ímpar de produtos de números sucessivos de Fibonacci em sequência, então a soma será igual ao quadrado do último número utilizado nos produtos.

Propriedade 2

A soma de quaisquer 10 números consecutivos da sequência de Fibonacci terá sempre como resultado um múltiplo de 11.

Outra curiosidade é que o resultado desta soma será sempre o sétimo número utilizado na sequência, multiplicado por 11.

REFERÊNCIAS

- LIVIO, Mario. **Razão áurea**: a história de fi. 7. ed. Rio de Janeiro. Editora Record, 2015.
- PINHO, Andreia. **Matemática 11ªB.** Escola Secundária João da Silva Correia, nº 7, 2013 <https://sites.google.com/site/leonardofibonacci7/o-problema-dos-coelhos> Acesso em: 23 de novembro de 2017.

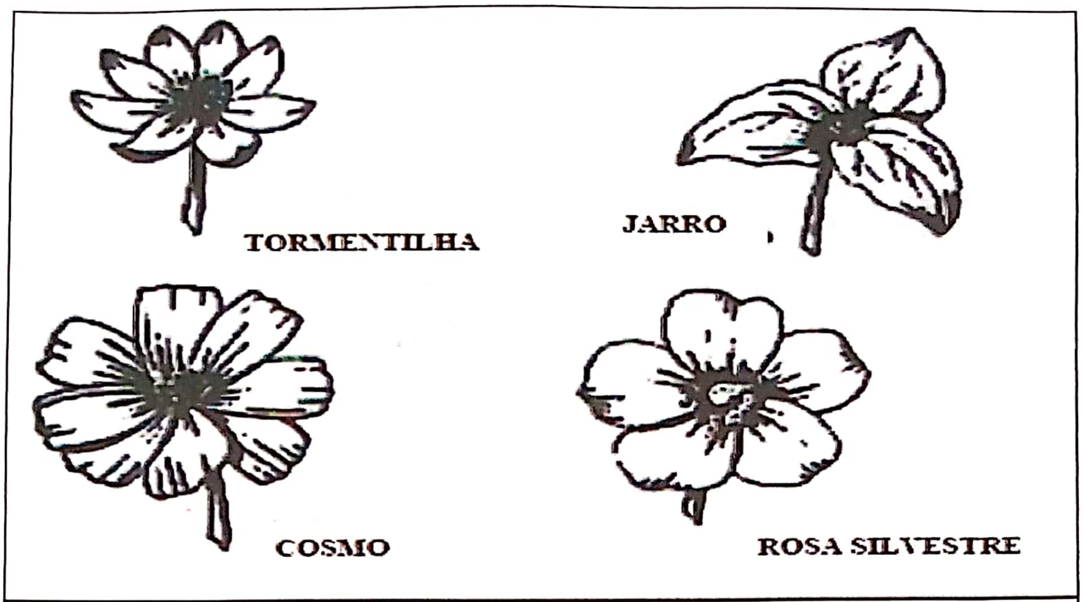
Sequência de Fibonacci na Natureza

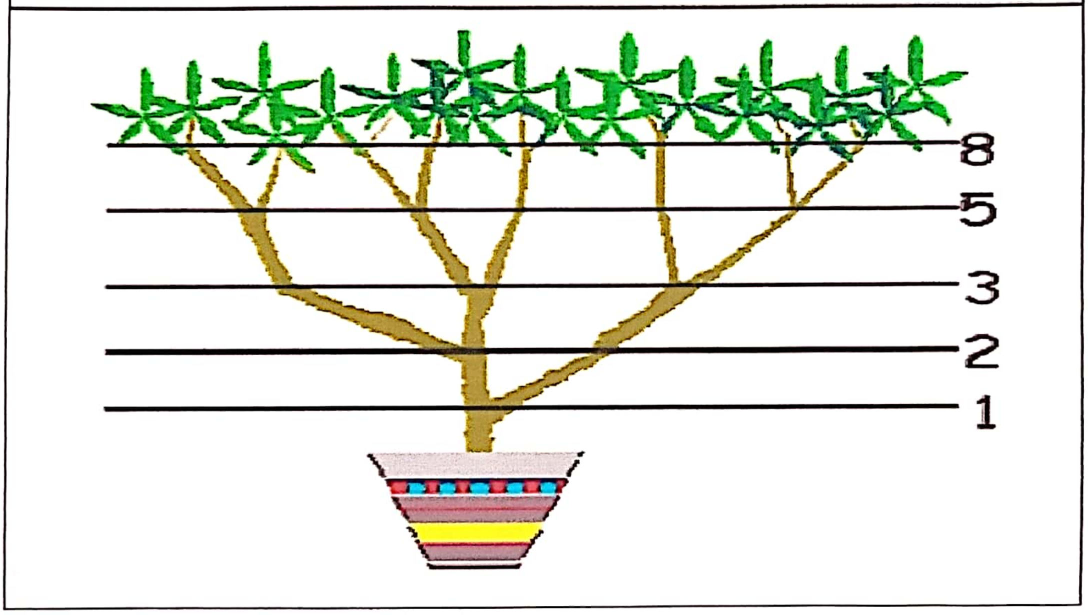
Linha de Pesquisa: Ensino e Aprendizagem de Geometria

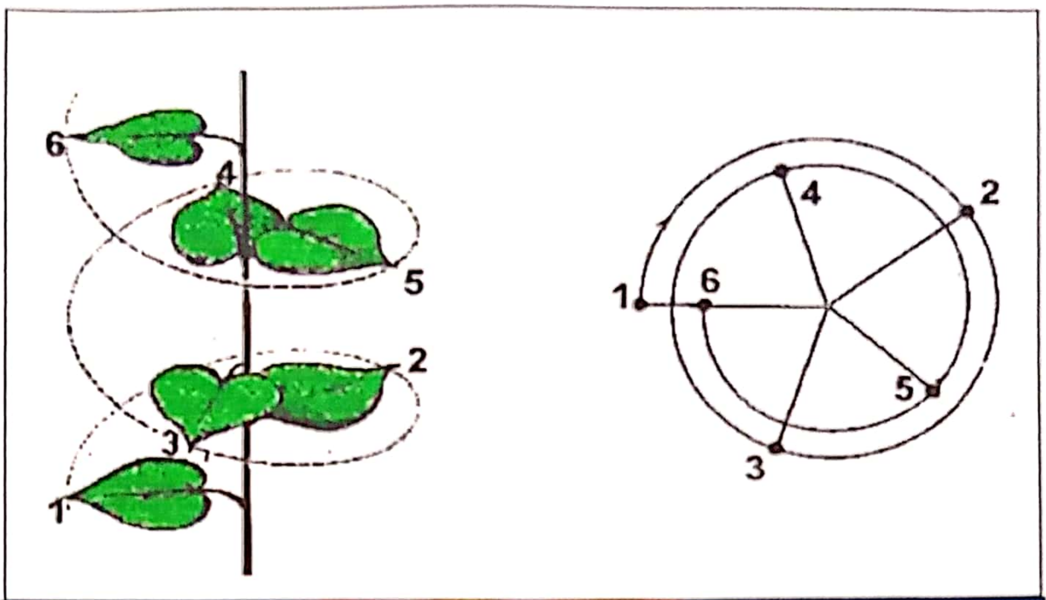
Autores: Calili Cardozo dos Santos Paravidini, Hallef Julia Macabu

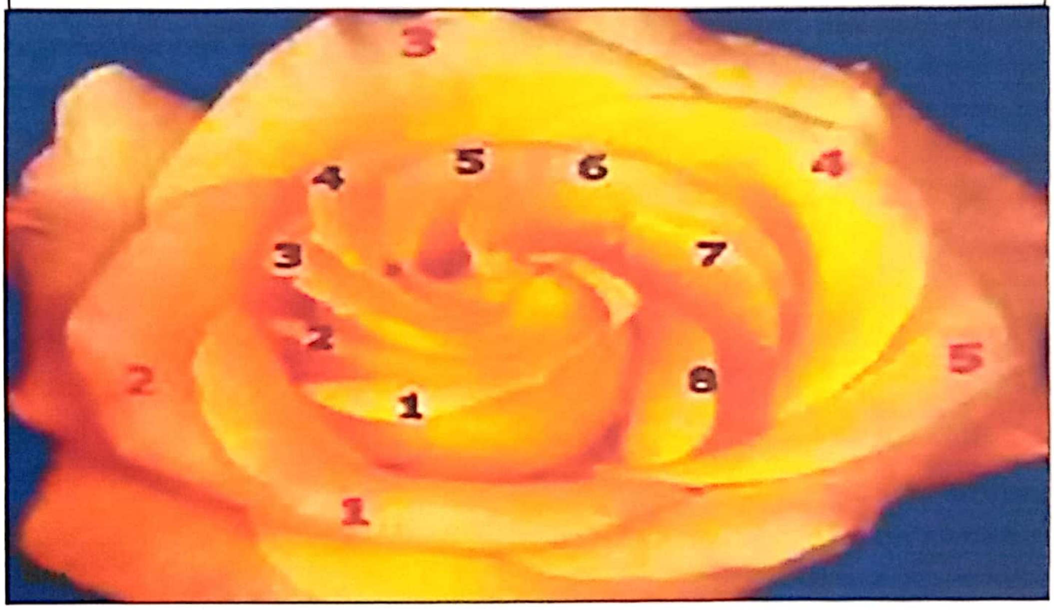
Orientadora: Profª Poliana Figueiredo C. Rodrigues


ECHEVERIA
MARGARIDA SILVESTRE AMARELA
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
1
2
3
4
5
6
7
8


TORMENTILHA
JARRO
COSMO
ROSA SILVESTRE


8
5
3
2
1


6
4
5
2
3
1
4
2
1
6
5
3


3
4
5
6
4
3
7
2
2
8
5
1
1