

RELATÓRIO DO LEAMAT

AS PROPRIEDADES DA ELIPSE: UM OLHAR GEOMÉTRICO

ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA

JHENNYFER PESSANHA DE SOUZA
LUCIANO CORRÊA SOARES
RAFAEL CORRÊA DA SILVA
THAINÁ BARRETO POLATO

JHENNYFER PESSANHA DE SOUZA
LUCIANO CORRÊA SOARES
RAFAEL CORRÊA DA SILVA
THAINÁ BARRETO POLATO

RELATÓRIO DO LEAMAT I

AS PROPRIEDADES DA ELIPSE: UM OLHAR GEOMÉTRICO

ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA

Trabalho apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, *campus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão da disciplina Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Prof^a. Me. Ana Mary Fonseca Barreto de Almeida

CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
2019.2

SUMÁRIO

1) Relatório do LEAMAT I	4
1.1) Atividades desenvolvidas	4
1.2) Elaboração da sequência didática.....	6
1.2.1) Tema	6
1.2.2) Justificativa	6
1.2.3) Objetivo Geral	7
1.2.4) Objetivos específicos	7
1.2.4) Público-alvo	8
2) Relatório do LEAMAT II	8
2.1) Atividades desenvolvidas	8
2.2) Elaboração da sequência didática	8
2.2.1) Planejamento da sequência didática	8
2.2.2) Aplicação da sequência didática na turma do LEAMAT II ..	11
3) Relatório do LEAMAT III	13
3.1) Atividades desenvolvidas	13
3.2) Elaboração da sequência didática	14
3.2.1) Versão final da sequência didática	14
3.2.2) Experimentação da sequência didática na turma regular ..	15
Considerações Finais	24
Referências	26
Apêndices	28
Apêndice A - Material didático aplicado na turma do LEAMAT II	29
Apêndice B - Material didático experimentado na turma regular	34

1) RELATÓRIO DO LEAMAT I

1.1) Atividades desenvolvidas

No primeiro encontro, 26 de setembro de 2018, houve uma apresentação da disciplina LEAMAT, como seria o desenvolvimento da mesma durante o período, as atividades a serem desenvolvidas e os critérios estabelecidos para a aprovação. Por fim, foram feitas as divisões dos grupos.

No dia 10 de outubro de 2018, iniciamos a leitura e debatemos o texto “Ensino de Geometria: Rumo da pesquisa (1991-2011)” dos autores (SENA, R. M.; DORNELES, B. V) no qual aborda o surgimento da Geometria, a partir do ano 1648, com a necessidade de um preparo militar para soldados sem conhecimentos matemáticos, que apresentavam dificuldades em tarefas como: acertar alvos, ler mapas e organizar materiais de artilharia. Além disso, as pesquisas em Educação Matemática no Brasil são reconhecidas em três momentos: a gestação da Educação Matemática (EM) como campo profissional, que vai até o final dos anos 1960, o surgimento da EM na década de 1970 até os primeiros anos da década de 1980, como campo profissional e, também, da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), um período marcado pela tendência tecnicista, bem como o surgimento de uma comunidade de educadores matemáticos preocupados com a aplicação da EM. Por fim, a partir da leitura e discussão do texto, concluímos que a Geometria percorreu um longo caminho até os dias de hoje, fundamentando conceitos e aplicações para a matemática, porém, ainda ocupa um pequeno espaço na sala de sala, sendo deixada de lado ou explicada de forma rápida.

No dia 07 de novembro de 2018 aconteceram as apresentações dos grupos A1 e A2 sobre a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), um documento que determina os conhecimentos essenciais que todos os estudantes da educação básica devem aprender e que deverá nortear os currículos das escolas públicas e privadas de todo o Brasil. A BNCC pretende promover a elevação da qualidade do ensino no país, já que nunca antes teve um documento que determinasse de forma comum e obrigatória os conteúdos mínimos a serem estudados por todos. O documento teve como marcos legais a Constituição Federal, a Lei de Diretrizes e Base da Educação Nacional (LDB), o Plano Nacional de Educação 2014/2024, a Lei da Reforma do Ensino Médio e as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) do Ensino Médio. Além disso, percebemos

mudanças no ensino da Geometria, visando o desenvolvimento do raciocínio lógico e aperfeiçoamento do espírito de investigação dos estudantes, fazendo com que os mesmos possam resolver problemas e justificá-los. Também foram sugeridas mudanças na aplicação dos conteúdos, utilizando mais *softwares* de Geometria dinâmica e novos ensinamentos surgiram como: educação financeira e programação. Para complementação da BNCC, existem os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), que são diretrizes elaboradas com a finalidade de orientar a prática docente, tendo como princípio uma educação igualitária e de qualidade. Além disso, os parâmetros propõem a discussão entre professores e diretores para que o princípio de igualitariedade não fira os aspectos particulares de cada região. Sua estrutura é composta por competências e habilidades, contendo os temas transversais, pois se preocupa com a formação do indivíduo como um todo. Na parte de Matemática, são abordados conteúdos a serem desenvolvidos em sala, como podem ser trabalhados pelo professor e os critérios de avaliação. A Geometria se apresenta dividida em quatro partes: plana, métrica, espacial e analítica, que constitui papel importante no desenvolvimento lógico e argumentativo do aluno.

No dia 14 de novembro de 2018 fizemos o debate do texto “O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico”, que aborda o modelo do próprio Van Hiele e que consiste na divisão das habilidades geométricas a serem desenvolvidas pelo aluno em cinco níveis, sendo eles: visualização (que consiste na parte visual das figuras geométricas), análise (onde o aluno começa a reconhecer as propriedades), dedução informal, dedução formal e rigor (sendo esse nível 5 quase nunca atingido pelo aluno). O texto também aborda as características e propriedades a serem desenvolvidas em cada nível, como o professor pode trabalhar desenvolvendo o que se pede em cada nível de forma interativa e traz como devem ser as avaliações dos estudantes de acordo com seu nível. Após o debate, os grupos fizeram uma “análise de produção de estudantes” no qual investigamos atividades feitas por estudantes do sexto ano de acordo com os níveis de Van Hiele e, após o término, debatemos e concluímos que nem todos os estudantes atingiram o nível 3 e, que muitos tinham aprendido as características, porém, cometiam erros no nível 1 (visualização), pois estavam muito presos à forma padrão, destacando com esse fato a necessidade do professor dar mais significado aos conceitos, para que desse modo o aluno possa aprender de uma forma plena e não padronizada.

Nos dias 12 de dezembro de 2018 e 30 de janeiro de 2019 aconteceram as apresentações dos grupos A1, A2 e B em que os temas escolhidos foram “As propriedades da elipse: Um olhar geométrico”, “Círculos e suas partes: Conceitos, áreas e divisão proporcional no jogo da roleta” e “A Geometria do favo de mel”, respectivamente.

Após as apresentações as aulas foram destinadas à elaboração de relatórios.

1.2) Elaboração da sequência didática

1.2.1) Tema

Estudo das propriedades da elipse por uma visão geométrica.

1.2.2) Justificativa

A escolha do tema se dá pela preocupação com o ensino e aprendizagem de Geometria Analítica no Ensino Médio e quando é lecionada, o aluno percebe que há muitas fórmulas a serem memorizadas e raramente o professor as deduz (NERY, 2008).

A Geometria Analítica, como está na maioria dos livros didáticos, apresenta suas fórmulas e, em seguida, os exercícios com meras aplicações diretas para sua memorização fica parecendo uma parte da Matemática que se encerra em si mesma. Para mim, é aí que está a maior falha no ensino da Geometria Analítica (NERY, 2008, p. 19 e 20).

Como afirmam Quaranta Neto e Guimarães (2013), dentro do planejamento escolar típico das escolas brasileiras, as cônicas figuram apenas no último ano do Ensino Médio. Não é um exagero perceber que o estudo das cônicas é visto, atualmente, de uma maneira superficial, sem a atenção apropriada aos detalhes e contextualizações.

Na terceira e última série do ensino médio, finalmente as cônicas aparecem no programa escolar. Mas vale frisar que, por uma série de motivos, esse tópico sequer chega a ser ensinado por boa parte dos professores. Quando acontece, se restringe normalmente a um curto período (uma a duas semanas) e o enfoque se concentra nas equações analíticas cujas demonstrações costumam se basear na caracterização bifocal (QUARANTA NETO; GUIMARÃES, 2013, p.16).

Contudo, apesar de todas as dificuldades existentes no processo de ensino e aprendizagem de Geometria, existem algumas ferramentas facilitadoras desse processo, que possibilitam não somente um auxílio para o professor, como facilitam a visualização por parte dos estudantes, não sendo necessária uma abstração tão grande. Além de motivar e facilitar a visualização, o uso do material concreto manipulável, desperta o raciocínio lógico e a criatividade dos estudantes. Sobre o material concreto Souza e Versa (2009) afirmam que:

Através do uso do material didático manipulável (material concreto) no estudo da Geometria, além de tornar as aulas de matemática mais interessantes e agradáveis, busca-se também a melhor apreensão do conteúdo por parte dos alunos, a fim de melhorar a relação de ensino e aprendizagem (SOUZA; VERSA, 2009, p. 2).

O que é confirmado por Silva, et al (2013):

O material concreto é uma forma de apresentar ao aluno uma maneira mais fácil e palpável de aprender matemática e como ela pode ser usada no nosso cotidiano. [...] é cabível o uso desses materiais para enriquecer as aulas de matemática, estimular a criatividade dos estudantes e tornarem-se menos exaustivas (SILVA, et al, 2013, p.4).

1.2.3) Objetivo Geral

Interpretar geometricamente as relações existentes entre os elementos que caracterizam a elipse.

1.2.4) Objetivos Específicos

Para atingir o objetivo geral, alguns objetivos específicos foram delineados:

- (i) Utilizar vídeo com reportagem sobre transtornos sofridos pelos vizinhos de um prédio construído em Londres;
- (ii) Utilizar um cone de revolução dupla para identificar as figuras geométricas planas formadas a partir de interseção de um plano com o mesmo, denominadas cônicas;
- (iii) Utilizar o método do jardineiro para construção da elipse;
- (iv) Utilizar geometria plana para estabelecer relações entre os elementos da elipse;

- (v) Utilizar o *applet* do *Geogebra* para visualização das transformações obtidas através da excentricidade da elipse
- (vi) Utilizar a superfície cilíndrica elíptica para identificação da propriedade refletora.

1.2.5) Público-alvo

Alunos do 3º ano do Ensino Médio.

2) RELATÓRIO DO LEAMAT II

2.1) Atividades desenvolvidas

No dia 30 de maio de 2019 foi apresentado o cronograma de como aconteceriam às atividades do LEAMAT II e de que forma o trabalho deveria ser conduzido a partir daquele momento. Nesse mesmo dia, iniciamos a preparação da sequência didática.

Entre os dias 02 de maio de 2019 e 18 de junho de 2019 as aulas foram destinadas à elaboração da sequência didática junto à orientadora. A partir do dia 18 de junho de 2019 as aulas foram destinadas à aplicação da sequência didática na turma do LEAMAT II, com intuito de testá-las e aprimorá-las conforme os estudantes e professores fossem dando sugestões.

No dia 30/07/2019 aconteceu a última aplicação e a partir disso as aulas foram destinadas à elaboração e correção dos relatórios.

2.2) Elaboração da sequência didática

2.2.1) Planejamento da sequência didática

A escolha do tema “Propriedades da elipse: um olhar geométrico” se deve ao fato de seu ensino, na maioria das vezes, não receber a devida importância na Educação Básica.

Para a aplicação da sequência didática escolhemos uma turma de terceiro ano do Curso Técnico em Edificações integrado ao Ensino Médio de uma instituição pública federal do município de Campos dos Goytacazes, visto que o trabalho dispõe de uma vertente interdisciplinar, relacionando matemática e representações gráficas.

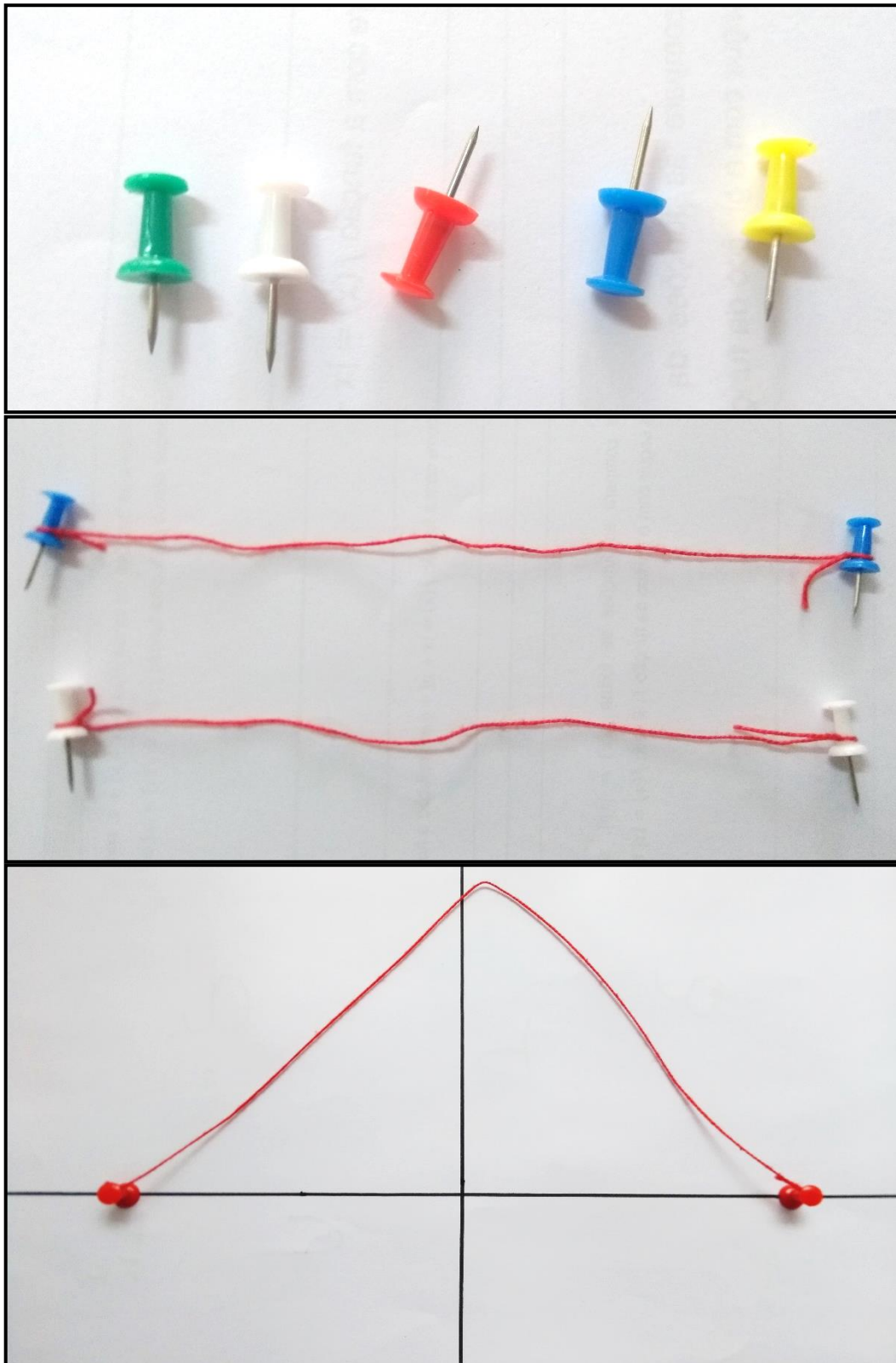
Iniciaremos a sequência com a apresentação de um vídeo sobre um prédio

situado em Londres e o problema que ele vem causando para a população daquele local, devido ao seu formato e aos materiais utilizados na sua construção. Esse vídeo será apresentado com o objetivo de levantar a seguinte questão: “Em sua opinião quais aspectos não foram levados em consideração pelo arquiteto para que tal fato acontecesse”?

Após o debate sobre o prédio, entregaremos a primeira apostila, onde será realizada uma atividade investigativa sobre a geometria analítica em si e serão abordadas duas perguntas "o que você entende sobre lugar geométrico?" e "o que você entende por cônicas?". Após uma breve discussão e o relato dos estudantes na apostila sobre as perguntas, passaremos para a próxima etapa.

Na próxima etapa, faremos a distribuição do material para a construção da elipse (que será feita juntamente com os professores em formação) e identificaremos os elementos presentes nela. Para a construção da elipse, usaremos o “método do jardineiro” e vamos utilizar materiais concretos tais como: barbante, régua, compasso, taxas e isopor (Quadro 1). Essa atividade tem como objetivo a percepção dos elementos e a compreensão das propriedades de forma dinâmica e interativa.

Quadro 1 – Materiais para construção

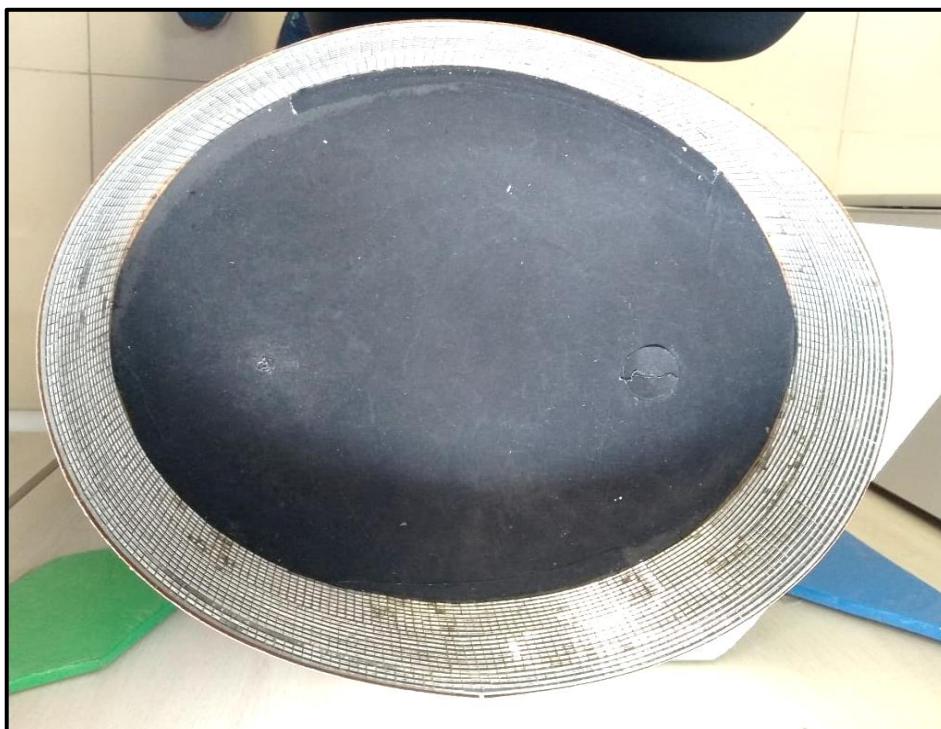


Fonte: Elaboração Própria.

Após a construção e identificação dos elementos da elipse, falaremos um pouco

sobre a propriedade refletora, utilizando uma superfície elíptica com seu interior espelhado e de uma lanterna (Figura 1). Assim, vamos observar a trajetória que a luz percorre. Essa atividade tem como objetivo que eles percebam que qualquer coisa que parta de um foco da elipse reflete imediatamente no outro foco.

Figura 1 – Cilindro Elíptico



Fonte: Protocolo de pesquisa.

A partir disso, seguiremos para a parte final do trabalho, retomando a questão inicial sobre o prédio que foi apresentado no vídeo.

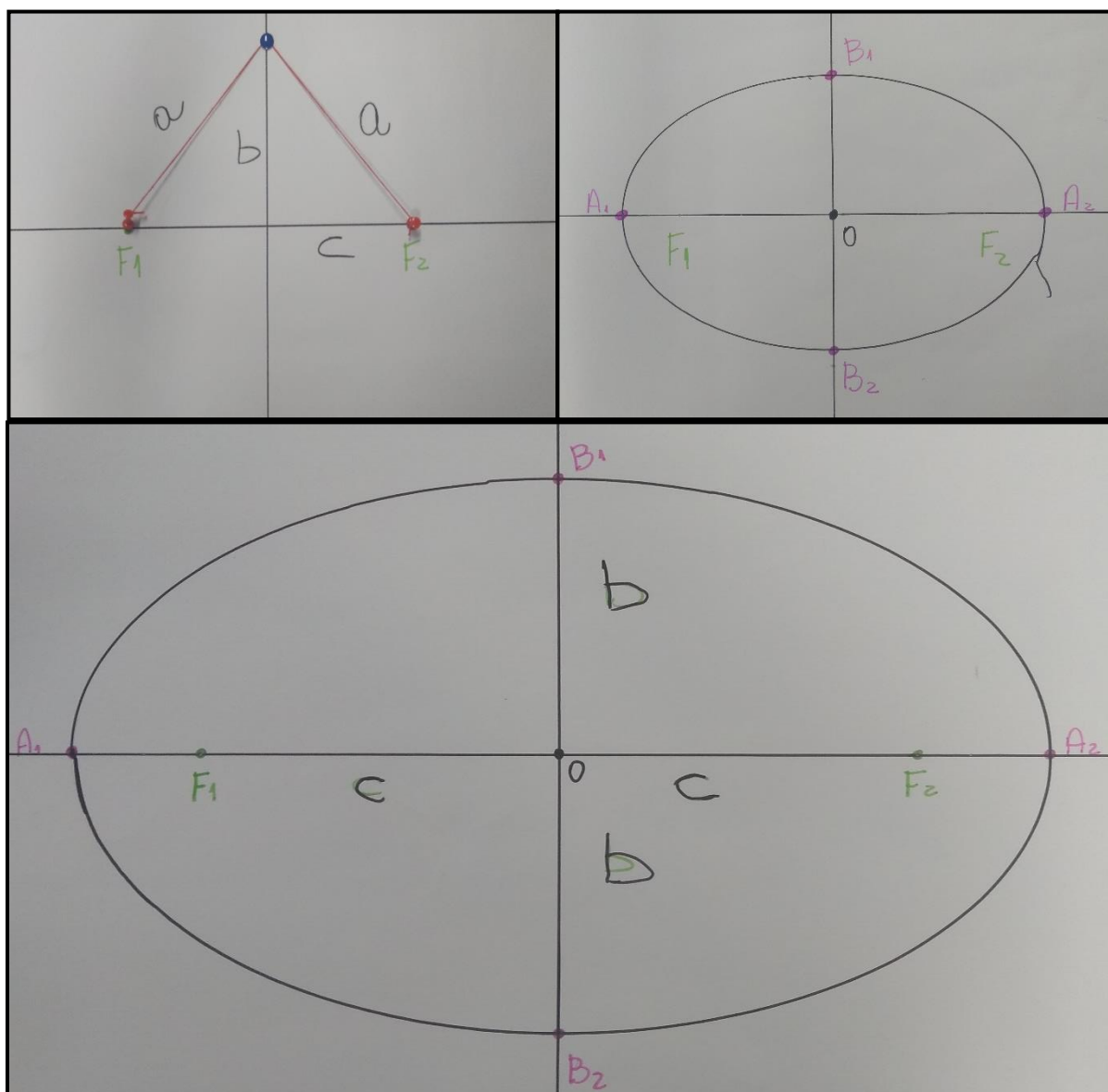
2.2.2) Experimentação da sequência didática na turma do LEAMAT II

Elaboramos a sequência didática “As propriedades da elipse: um olhar geométrico” para dos estudantes do terceiro ano do Ensino Médio. Começamos apresentando um vídeo que serviria de base para a introdução da sequência e logo após demos início a um breve debate sobre o que poderia ter causado o problema com o prédio. Num primeiro momento, percebemos que ninguém fazia ideia do principal motivo, algumas respostas foram dadas, mas somente falando sobre o fato dele ser espelhado.

Posteriormente, entregamos uma atividade investigativa que consistia em duas questões: a primeira era para definir o que seria lugar geométrico; e a segunda o que

seriam as cônicas. Quanto à primeira pergunta, esperávamos que a maior parte da turma já tivesse ideia do que seria, ao contrário da segunda. Após alguns minutos de discussão sobre essas questões, demos início à construção da elipse, conforme o Quadro 2.

Quadro 2 – Sequência de construção



Fonte: Elaboração própria.

Em seguida utilizamos um material para apresentar a propriedade reflexiva da elipse. Neste momento, dois estudantes foram convidados para manipular o material, identificando o que estava acontecendo com a trajetória da luz (Quadro 3).

Quadro 3 – Propriedade Reflexiva



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Para finalizar a sequência, retomamos a situação-problema inicial em que os estudantes, após a construção dos conceitos, foram capazes de responder de forma esperada à pergunta inicial.

Ao finalizarmos a apresentação da sequência, foram sugeridas algumas alterações, que foram realizadas durante o LEAMAT III. Essas alterações estão descritas a seguir:

- As questões 1 e 2 devem ser formalizadas na última etapa da sequência, após conceitos desenvolvidos. Além disso, deveremos mostrar os cortes das cônicas no *Geogebra*;
- Mostrar os cortes das cônicas no *Geogebra*;
- A questão 3 deve ser reformulada e completada com os estudantes durante a construção, dando um maior enfoque para a excentricidade.

3) RELATÓRIO DO LEAMAT III

3.1) Atividades desenvolvidas

No dia 17 de setembro de 2019 foi apresentado o cronograma das atividades do LEAMAT III e a forma como terminaríamos o trabalho a partir daquele momento. O semestre letivo se estruturaria em quatro etapas: (i) reelaboração da sequência didática, realizando algumas mudanças que foram sugeridas na aplicação na turma do LEAMAT

II, (ii) aplicação da sequência didática na turma regular, (iii) elaboração e correção dos relatórios e; (iv) avaliação final.

Entre os dias 24 de setembro de 2019 e 09 de outubro de 2019, as aulas foram destinadas à reelaboração da sequência didática junto à orientadora. A partir do dia 15 de outubro de 2019, começaram as aplicações das sequências na turma regular.

No dia 06 de dezembro de 2019 realizamos a aplicação da sequência didática elaborada, na turma regular. As aulas seguintes foram destinadas à elaboração das apresentações e dos relatórios do LEAMAT, bem como as apresentações e correção dos relatórios.

3.2)Elaboração da sequência didática

3.2.1) Versão final da sequência didática

Na aplicação da sequência didática na turma do LEAMAT II foram sugeridas algumas alterações. Seguem algumas delas:

A apostila das atividades aplicadas no LEAMAT II (Apêndice A) foi bastante modificada, conforme apresentado no Quadro 4.

Quadro 4 – Apostilas modificada

<p>1. O que você entende por lugar geométrico?</p> <p>_____</p> <p>_____</p> <p>2. O que você entende por cônicas?</p> <p>_____</p> <p>_____</p> <p>3. Após a construção da elipse, complete:</p> <p>F_1 e F_2 - _____ A_1A_2 - _____</p> <p>A_1, A_2, B_1 e B_2 - _____ B_1B_2 - _____</p> <p>C - _____ F_1F_2 - _____</p> <p>$\frac{c}{a}$ _____</p> <p>4. De acordo com a Figura 1 note que traçamos um triângulo retângulo. Assim a partir do Teorema de Pitágoras temos:</p>	<p>1. Identifique, a partir dos elementos geométricos da elipse, o que representam os pontos:</p> <p>a) F_1 e F_2 - _____</p> <p>b) A_1, A_2, B_1 e B_2 - _____</p> <p>c) O - _____</p> <p>2. Determine, em função de a, b e c, as medidas dos segmentos a seguir:</p> <p>a) A_1A_2 - _____</p> <p>b) B_1B_2 - _____</p> <p>c) F_1F_2 - _____</p> <p>3. A partir da representação geométrica da elipse, identifique quais elementos são representados pelo segmento:</p> <p>a) $\overline{A_1A_2}$ - _____</p> <p>b) $\overline{B_1B_2}$ - _____</p> <p>c) $\overline{F_1F_2}$ - _____</p> <p>4. A razão $\frac{c}{a}$ é responsável pela "forma" da elipse. Indique o nome dado a esse número real expressado pela razão apresentada.</p> <p>a) $\frac{c}{a}$ - _____</p>
---	---

Fonte: Elaboração própria.

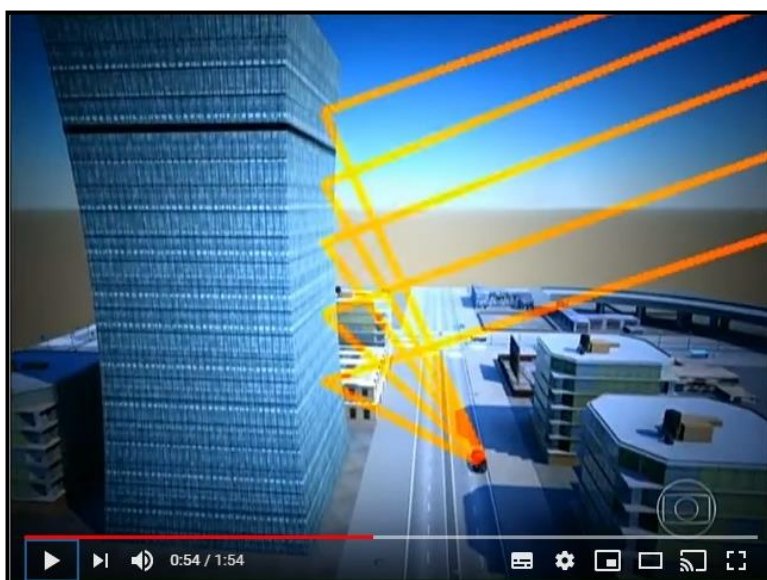
A versão final da sequência didática aplicada na turma regular consta no apêndice B.

3.2.2) Experimentação da sequência didática na turma regular

A aplicação da sequência didática na turma regular foi realizada no dia 06 de dezembro de 2019 das 07h às 08h40min, numa instituição federal de ensino, em Campos dos Goytacazes – RJ, na turmada 1ª série do curso técnico em Edificações integrado ao Ensino Médio. A escolha de aplicar a sequência didática na turma de Edificações se deu pelo fato de que a situação-problema na qual se baseou a aula tratava-se de um prédio cujo problema causado por sua estrutura evidenciava propriedades matemáticas que não foram levadas em consideração na hora de sua construção. Estavam presentes 10 estudantes, pois a aula ocorreu em um horário vago da turma.

No começo da aula, apresentamos um vídeo¹ do *YouTube*² sobre uma reportagem que mostra que um prédio em Londres que causava muitos problemas para os moradores e pessoas que passavam naquela região. O vídeo mostra um prédio construído na forma de um espelho côncavo e, como consequência desse formato, os raios solares, ao atingi-lo, eram refletidos nas calçadas, com a temperatura da rua chegando aos 92°C (Figura 2).

Figura 2 – Prédio em Londres



Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=tGD93f39isA>

Após mostrarmos o vídeo, levantamos a seguinte pergunta: o que o arquiteto não levou em consideração para que tal problema acontecesse? Após ouvirmos as

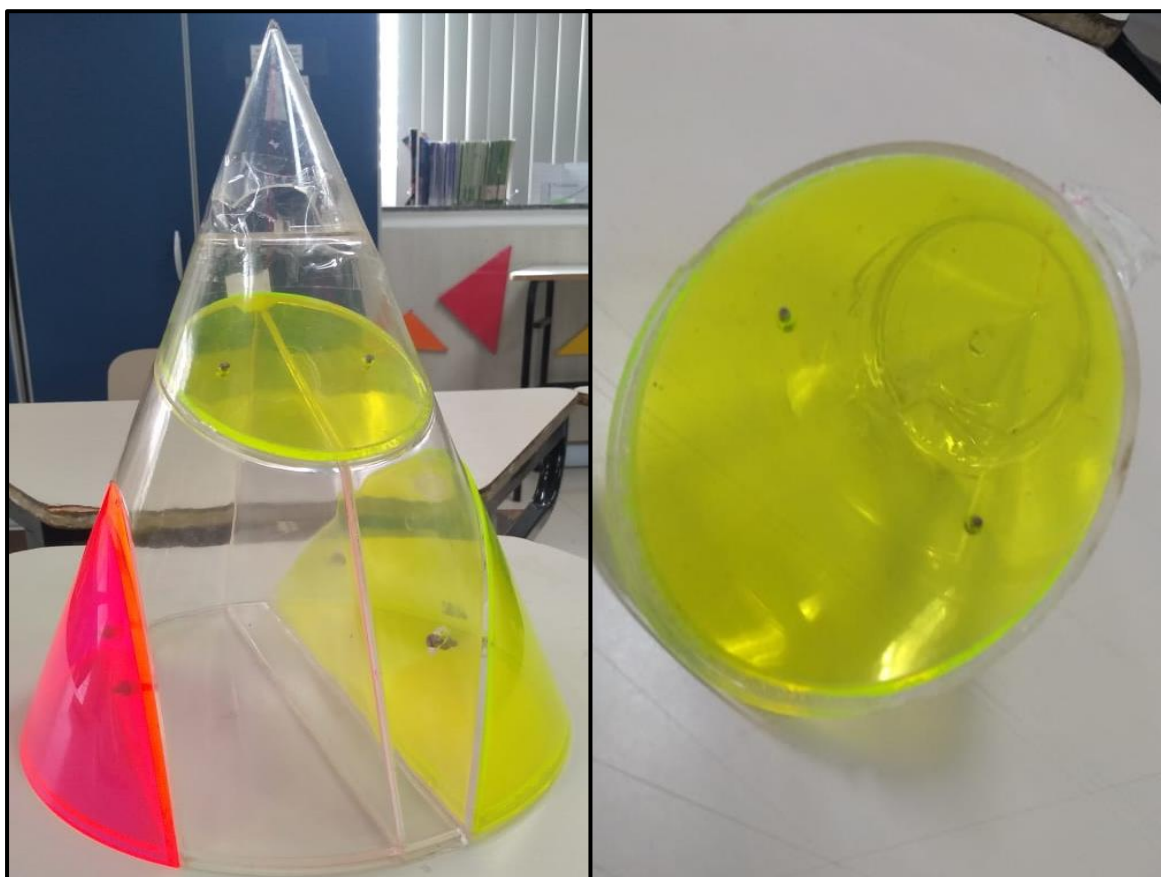
¹ O vídeo pode ser encontrado no endereço: <https://www.youtube.com/watch?v=tGD93f39isA>

² YouTube é um site de compartilhamento de vídeos enviados por usuários através da internet.
Fonte: significados.com.br/youtube/

respostas dos estudantes, percebemos que 6 de 10 estudantes relacionaram o ocorrido apenas com o fato de o prédio ser espelhado.

Após esse momento, apresentamos as cônicas, obtidas com a interseção de um plano com um cone duplo, sendo elas: parábola, circunferência, hipérbole e elipse (Quadro 5). Foi nesse momento que os alunos descobriram que o nosso objeto de estudo seria a elipse.

Quadro 5: Cônicas obtidas com a interseção de um plano



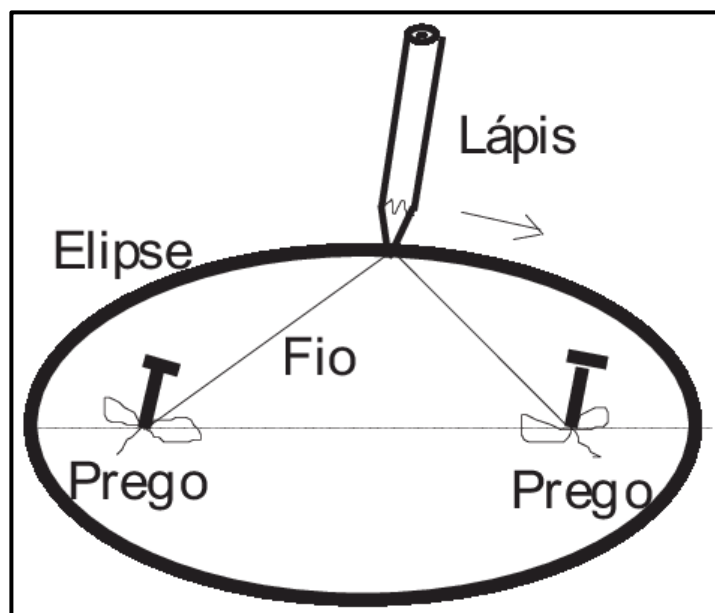
Fonte: Protocolo de pesquisa.

Logo após, separamos a turma em duplas e distribuimos os materiais concretos, para que os estudantes pudessem construir a elipse. Escolhemos como estratégia usar o método do jardineiro para a construção e usamos os materiais: isopor, barbante, alfinetes, régua, compasso e lápis (Figura 3). Tal abordagem buscou apresentar o conteúdo de uma forma dinâmica, priorizando a representação geométrica com vistas à construção dos conceitos.

O método do jardineiro é um método utilizado na delimitação de canteiros elípticos: o **jardineiro** começa por fixar um fio a dois pregos (no chão) e, com uma haste, mantendo sempre o fio esticado, desenha um arco de elipse, ao correr a haste

ao longo do fio.

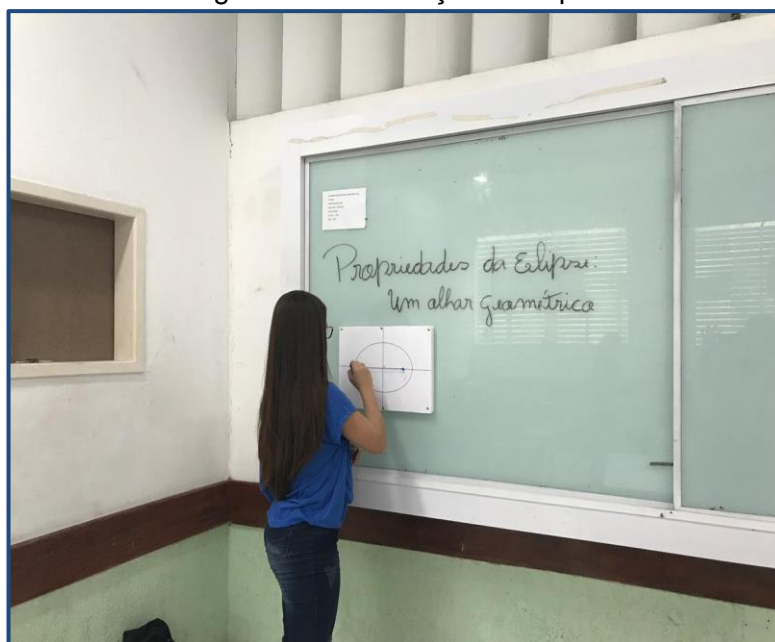
Figura 3 – Método do jardineiro



Fonte: encurtador.com.br/ijwy2

Iniciamos a construção pedindo para que o aluno fizesse uma reta horizontal na folha e escolhesse dois pontos sobre ela. A partir desses pontos, pedimos que construíssem uma reta mediatriz utilizando o compasso. Nesse momento, explicamos o conceito de reta mediatriz, uma vez que os estudantes não lembravam, e a construímos. Todas as construções foram realizadas juntamente com os estudantes, utilizando material ampliado no quadro (Figura 4).

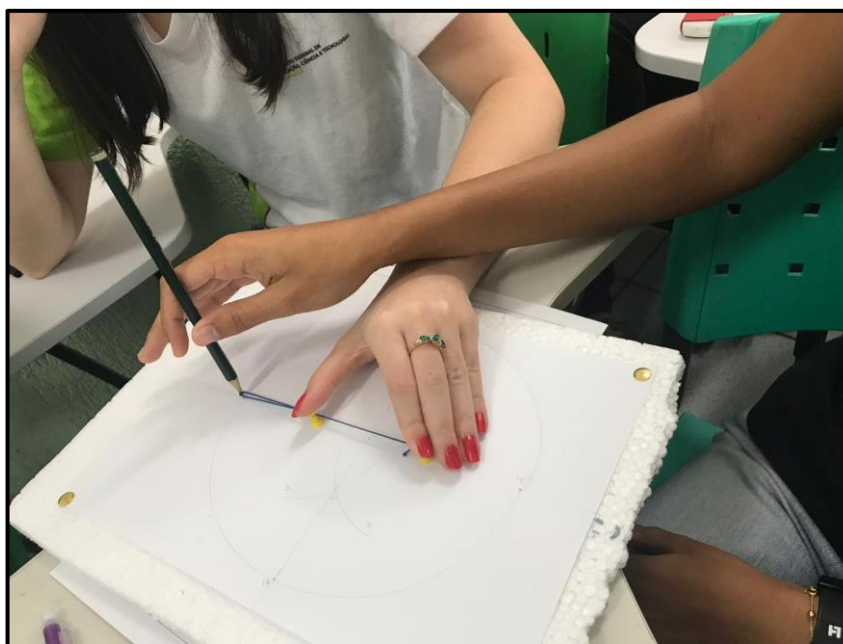
Figura 4 - Construção da elipse



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Após a construção da mediatriz, pedimos que eles traçassem a elipse. Para tal, os estudantes deveriam fixar cada uma das duas tachinhas unidas por um barbante colorido nos pontos marcados por eles, os quais denominamos F_1 e F_2 . Solicitamos que um membro da dupla segurasse as tachinhas para que as mesmas não soltassem e o traçasse a elipse, deslizando o lápis sobre o papel e preso ao barbante esticado, conforme a Figura 5.

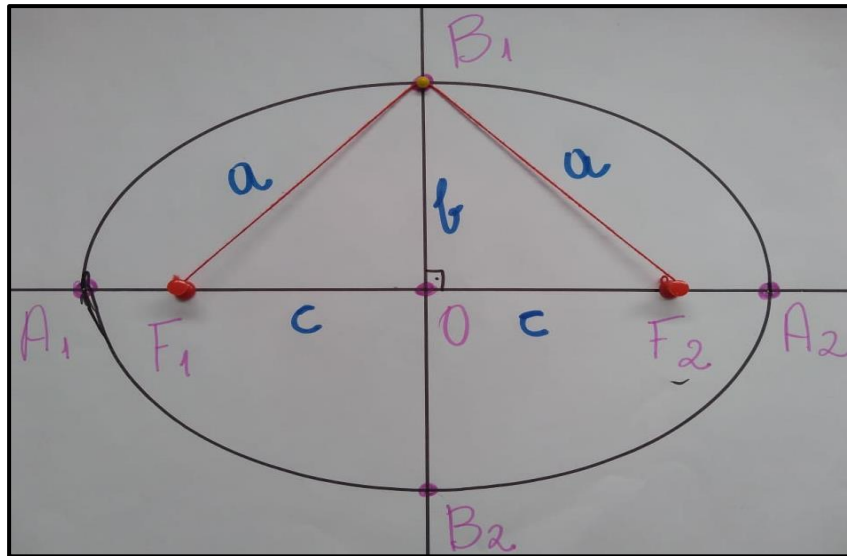
Figura 5 – Traçado da elipse



Fonte: Protocolo de pesquisa.

A segunda etapa da construção consistia em identificar os elementos da elipse - focos, eixos (maior e menor), centro e vértice – e estabelecer relações entre as distancias e os comprimentos dos segmentos, associando-os em função das variáveis a , b e c . Inicialmente, utilizamos os triângulos retângulos e o triângulo isósceles formados no interior da elipse (Figura 6). Os estudantes apresentaram facilidade em identificar os triângulos, porém tiveram dificuldades em classificá-los, sendo essa questão contornada durante a aplicação.

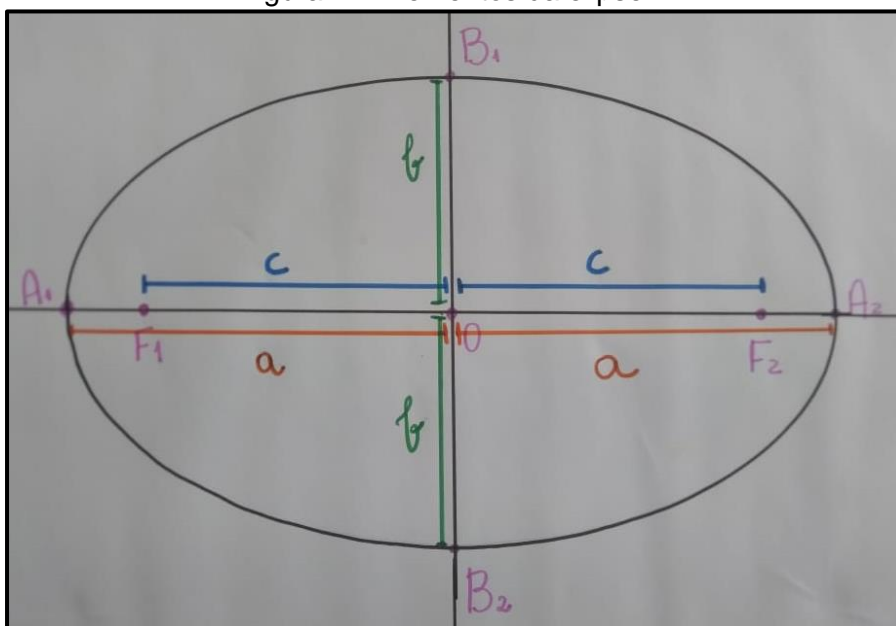
Figura 6 – Triângulos existentes na elipse



Fonte: Elaboração própria.

Utilizando os triângulos retângulos, nomeamos os catetos, representados pelo semieixo menor e pelo semieixo maior, por b e c , respectivamente e a hipotenusa por a . Com isso, os estudantes rapidamente perceberam que as duas hipotenusas de comprimento “ a ” eram os lados congruentes de um triângulo isósceles. Por meio dessa observação, com o auxílio do barbante, estabelecemos que a distância do vértice A_1 até o vértice A_2 é “ $2a$ ”. Com o conceito da reta mediatriz, identificamos que a distância do vértice B_1 até o vértice B_2 é “ $2b$ ”. De forma análoga, a distância de F_1 até F_2 é “ $2c$ ” (Figura 7).

Figura 7 – Elementos da elipse



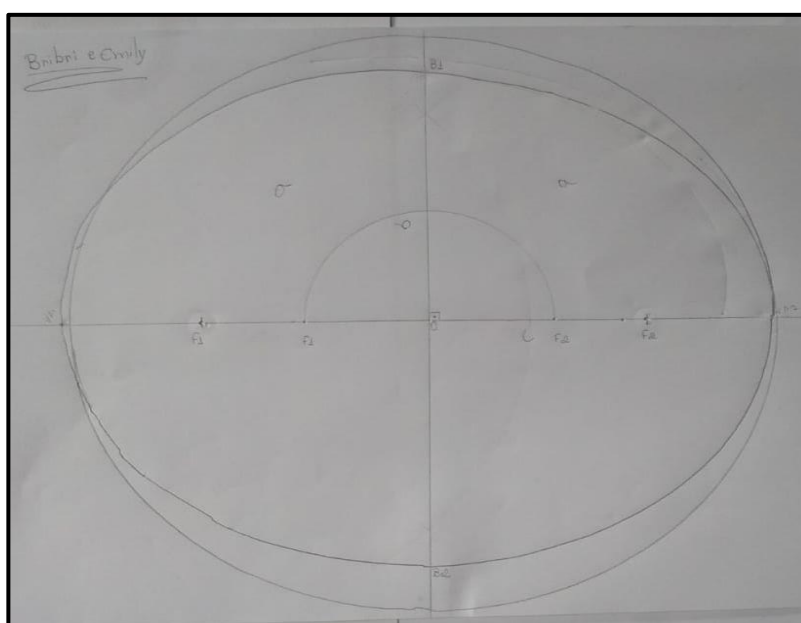
Fonte: Elaboração própria.

A terceira etapa foi constituída em classificar os segmentos em eixo maior, eixo menor e distância focal. Essa etapa foi mais rápida do que as anteriores, pois não necessitava de construção, apenas de observações e definições.

Após toda a construção, foi abordada a excentricidade da elipse. Pedimos, inicialmente, que eles pesquisassem na internet o significado da palavra “excentricidade”³, utilizando os próprios no celulares. Ao obter a definição, utilizando um dicionário *online*, uma aluna da turma fez uma analogia, afirmando que pessoas excêntricas são pessoas fora do eixo.

Utilizando a construção, solicitamos aos estudantes que movessem os focos de lugar, afastando-os e aproximando-os do centro. Ressaltamos que essa distância deve ser a mesma para ambos os focos. Os estudantes começaram a se questionar como manter essa distância. Foi observado pelos licenciandos que quatro duplas utilizaram a régua para transferir as medidas e apenas um grupo utilizou o compasso, como pode ser observado na Figura 8.

Figura 8 – Aluna que usou compasso



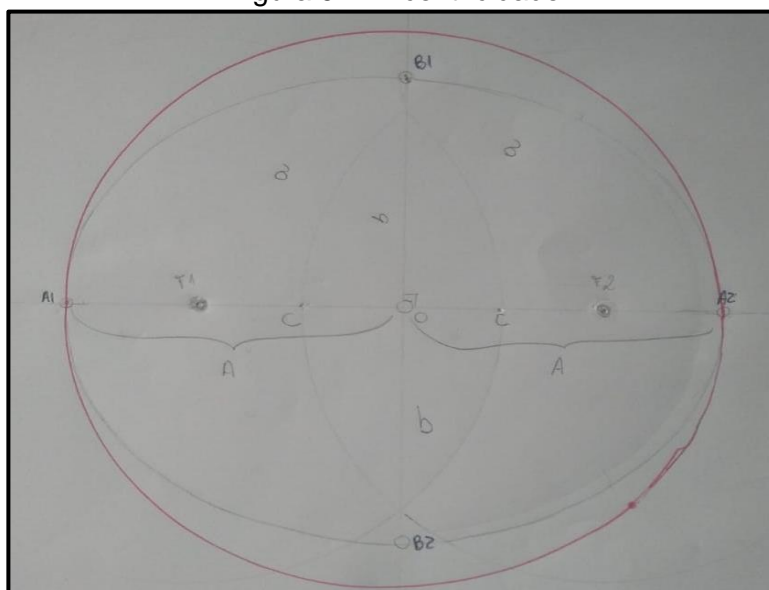
Fonte: Protocolo de pesquisa.

No momento em que os estudantes movimentaram os focos, no intuito de perceber as transformações que ocorriam no formato da elipse, foi notório um entusiasmo por parte deles. Alguns até optaram em usar seu próprio material para ter a

³ Excentricidade é desvio ou afastamento do centro.

possibilidade de traçar as elipses de cores diferentes, permitindo uma melhor visualização conforme a Figura 9. Com isso perguntamos o que eles conseguiam observar por meio das construções. A maioria deles respondeu rapidamente que os focos mais próximos do centro geravam uma elipse mais “redonda”, enquanto que os mais distantes geravam uma elipse mais “achatada”.

Figura 9 – Excentricidade



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Tomando como base as observações feitas por eles, utilizamos um *applet*⁴ do *GeoGebra*⁵. O uso do *GeoGebra* teve por objetivo apresentar para os estudantes infinitas possibilidades que confirmavam as primeiras conjecturas apresentadas por eles, ou seja, quanto mais próximo do centro estão os focos mais a elipse tende a uma circunferência e quanto mais distante do centro, mais a elipse tende a um segmento de reta (Figura 10).

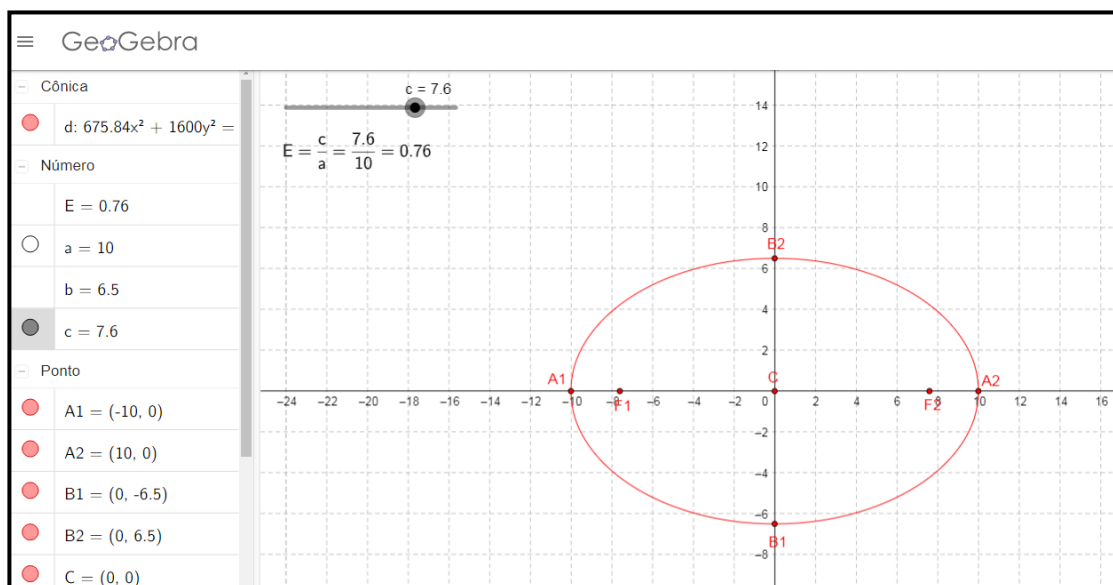
⁴ Applet: é um pequeno software que executa uma atividade específica, dentro (do contexto) de outro programa maior (como por exemplo um web browser), geralmente como um Plugin.

Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Applet>

⁵ GeoGebra é um software de matemática dinâmica que junta geometria, álgebra e cálculo.

Fonte: <https://wiki.geogebra.org/PT/Manual>

Figura 10 – Applet do GeoGebra



Fonte: <https://www.geogebra.org/m/zs2WGMu2>.

Além disso, nesta etapa também foi abordada a desigualdade da excentricidade, determinada por meio da relação $\frac{c}{a}$. Fazendo coincidir os focos, tem-se que $c = 0$, e a relação $\frac{c}{a} = 0$ e fazendo os focos coincidir com os vértices A_1 e A_2 tem-se que $c = a$ e a relação $\frac{c}{a} = 1$. Com isso, os estudantes chegaram à conclusão de que a excentricidade da elipse se dá pela desigualdade: $0 < \frac{c}{a} < 1$.

Para finalizar, chamamos dois estudantes voluntários para a experimentação da superfície cilíndrica elíptica e com isso perceber a propriedade refletora da elipse. Nesse momento um dos estudantes, posicionou um laser em um dos focos e projetou a luz na superfície espelhada do cilindro elíptico que refletia imediatamente no outro foco, onde pedimos para que o segundo aluno colocasse o dedo para que ficasse iluminado. O restante da turma, que observava atentamente, ficou impressionado.

A experimentação permitiu aos estudantes identificarem que a trajetória da luz, que partia de um foco e refletia no outro, consistia no segmento obtido por eles no manuseio do barbante utilizado pelos mesmos na construção da elipse (Figura 11). Com isso, nós voltamos ao assunto inicial da aula, que foi o vídeo do prédio em Londres. Imediatamente os estudantes conseguiram identificar que o problema da construção era que, além dele ser espelhado, o formato contribuía para que o sol refletisse exatamente em um ponto da calçada. Com isso, foram capazes de associar o

comportamento da trajetória da luz verificada na experimentação na superfície cilíndrica elíptica com a trajetória dos raios solares que incidiam no prédio.

Ao final da aula, mostramos aos estudantes as soluções empregadas na construção do prédio com vistas à resolução do problema e entregamos uma apostila com toda a teoria que foi discutida durante a aula (Apêndice 2).

Figura 11 – Propriedade refletora



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Ao fim da aplicação, solicitamos aos estudantes para que registrassem comentários sobre a aula com sugestões e/ou críticas. Destacamos dois comentários, pois os mesmo mostram o quanto os estudantes ficaram satisfeitos com a aula e com o método utilizado, como apresentado a seguir (Quadro 6).

Quadro 6 – Comentários dos estudantes

<p>Agradecemos a sua participação neste trabalho. Deixe seus comentários, críticas ou sugestões a respeito da sequência aplicada.</p> <p>Aula muito bem aplicada e dinâmica. Com boas explicações nos levando a deduzir.</p>
<p>Agradecemos a sua participação neste trabalho. Deixe seus comentários, críticas ou sugestões a respeito da sequência aplicada.</p> <p>Dinâmica bem elaborada e explicada. Nenhuma crítica, apenas ficaram mais tranquilos.</p>

Fonte: Protocolo de pesquisa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Iniciamos essa seção retomando o objetivo geral dessa sequência didática: *Interpretar geometricamente as relações existentes entre os elementos que caracterizam a elipse*. Para atingir o objetivo geral, foram delimitados os seguintes objetivos específicos: (i) utilizar vídeo com reportagem sobre transtornos sofridos pelos vizinhos de um prédio construído em Londres, (ii) utilizar um cone de revolução dupla para identificar as figuras geométricas planas formadas a partir de interseção de um plano com o mesmo, denominadas cônicas, (iii) utilizar o método do jardineiro para construção da elipse, (iv) utilizar geometria plana para estabelecer relações entre os elementos da elipse, (v) utilizar o *applet* do *Geogebra* para visualização das transformações obtidas através da excentricidade da elipse e (vi) utilizar a superfície cilíndrica elíptica para identificação da propriedade refletora.

A introdução da aula utilizando o vídeo foi importante para despertar a curiosidade dos estudantes a respeito da temática do trabalho, principalmente por se tratar de um tema voltado para construção civil, objeto de estudo nos cursos técnicos

de Edificações. A construção dos conceitos da elipse utilizando material concreto manipulável foi importante não só para a compreensão do conteúdo, por parte dos estudantes, como para despertar o seu interesse, já que as construções geométricas não costumam ser utilizadas nas aulas de Matemática no Ensino Médio. A decisão de realizar o trabalho em dupla foi acertada, pois as tachinhas ficavam soltando durante a construção quando feita individualmente, o que não ocorreu em dupla, uma vez que um dos estudantes segurava a tachinha enquanto o outro traçava a elipse.

Podemos afirmar que o objetivo da sequência foi alcançado e apesar de ter sido uma aula ministrada para apenas 10 estudantes, obtivemos uma participação ativa de todos, contribuindo de forma significativa para o desenvolvimento e amadurecimento, enquanto docentes, de todos os integrantes do grupo.

Todos os estudantes relataram ter gostado bastante da aula e ficou nítida a facilidade encontrada por eles na compreensão do conteúdo. Outros grupos que desejarem abordar o tema no futuro podem aprofundar na propriedade da excentricidade da elipse, visto que, mesmo visto de forma breve, os estudantes apresentaram grande entusiasmo em cada observação. Sugerimos ainda a apresentação e dedução da equação geral ou reduzida da elipse, pontos que não foram enfatizados neste trabalho.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular** - Ensino Médio. 3ª versão. 2017. Disponível em: basenacionalcomum.mec.gov.br/bncc-ensino-medio. Acesso em 06 nov. 2018

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Ciências da Natureza e Matemática e suas tecnologias. Brasília:MEC, 2000. Disponível em: portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf acesso em 06 nov.2018

QUARANTA NETO, F.; GUIMARÃES, L. C. **Tradução comentada da obra “novos elementos das seções cônicas” (Philippe deLaHire – 1679) e sua relevância para o ensino da matemática**: preposição XVII de hipérbole. Natal, 2013. 287 f. Disponível em: http://portal.ifrn.edu.br/pesquisa/editora/livros-para_download/traducao-comentada-da-obra-novos-elementos-das-secoesconicas/at_download/arquivo. Acesso em: 08 dez. 2018.

NERY, C. **A Geometria Analítica no Ensino Médio**. Revista do Professor de Matemática. São Paulo, n.67, p.19-20. quadrim. 2008.

SENA, R. M.; DORNELES, B. V. **Ensino de Geometria**: Rumos da Pesquisa (1991-2011) TeachingGeometry: ResearchDirections (1991-2011). Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v. 8, n. 1, p. 138-155, jul. 2013. ISSN 1981-1322. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/26905>>. Acesso em: 29 set. 2018. doi:<https://doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8n1p138>

SILVA, A. M., et al. **O uso do material concreto no ensino da Matemática**. 2013. Disponível em: <https://goo.gl/p4fVWR>> Acesso em: 03 fev. 2018.

SOUZA, J. R.; VERSA, I. **O uso de material manipulável (material concreto) no estudo da Geometria Métrica Espacial**. 2009. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1953-8.pdf>. Acesso em: 08 dez. de 2018

Campos dos Goytacazes (RJ), 20 de fevereiro de 2020.

Jhennyfer Pessanha de Souza
Jhennyfer Pessanha de Souza

Luciano Corrêa Soares
Luciano Corrêa Soares

Rafael Corrêa da Silva
Rafael Corrêa da Silva

Thainá Barreto Polato
Thainá Barreto Polato

Apêndices

Apêndice A – Material didático aplicado na turma do LEAMAT II

Diretoria de Ensino Superior

Licenciatura em Matemática

Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática

Linha de Pesquisa: Ensino e Aprendizagem em Geometria

Licenciandos: Jhennyfer Pessanha, Luciano Corrêa, Rafael Corrêa e Thainá Barreto

Orientadora: Prof^a. Me. Ana Mary Fonseca Barreto de Almeida

Nome: _____ Data: ____ / ____ / 2019

Propriedades da Elipse: Um olhar geométrico **Atividade 1**

1. O que você entende por lugar geométrico?

2. O que você entende por cônicas?

3. Após a construção da elipse, complete:

F_1 e F_2 - _____

A_1A_2 - _____

A_1 , A_2 , B_1 e B_2 - _____

B_1B_2 - _____

C - _____

F_1F_2 - _____

$\frac{c}{a}$ _____

4. De acordo com a Figura 1 note que traçamos um triângulo retângulo. Assim a partir do Teorema de Pitágoras temos:

Diretoria de Ensino Superior

Licenciatura em Matemática

Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática

Linha de Pesquisa: Ensino e Aprendizagem em Geometria

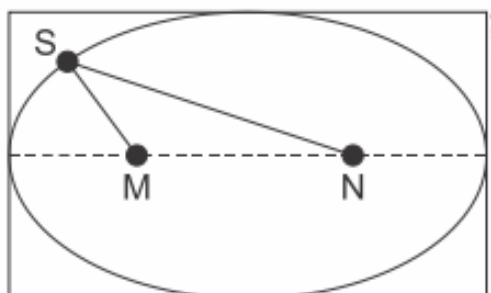
Licenciandos: Jhennyfer Pessanha, Luciano Corrêa, Rafael Corrêa e Thainá Barreto.

Orientadora: Prof^a. Me. Ana Mary Fonseca Barreto de Almeida

Nome: _____ Data: ____ / ____ / 2019

Propriedades da Elipse: Um olhar geométrico**Atividade 2**

1. (G1 - ifpe 2016) Bira adquiriu uma cabra que pasta em um campo retangular. Para delimitar o gramado, ele pretende traçar uma elipse inscrita num terreno retangular de 10 m por 8 m. Para isso, ele deve utilizar um fio esticado preso por duas estacas M e N, conforme mostra a figura.



Qual deve ser a distância entre as estacas M e N?

- a) 5
- b) 4
- c) 8
- d) 6
- e) 9

Diretoria de Ensino Superior

Licenciatura em Matemática

Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática

Linha de Pesquisa: Ensino e Aprendizagem em Geometria

Licenciandos: Jhennyfer Pessanha, Luciano Corrêa, Rafael Corrêa e Thainá Barreto

Orientadora: Prof^a. Me. Ana Mary Fonseca Barreto de Almeida

Nome: _____ Data: ____ / ____ / 2019

Propriedades da Elipse: Um olhar geométrico

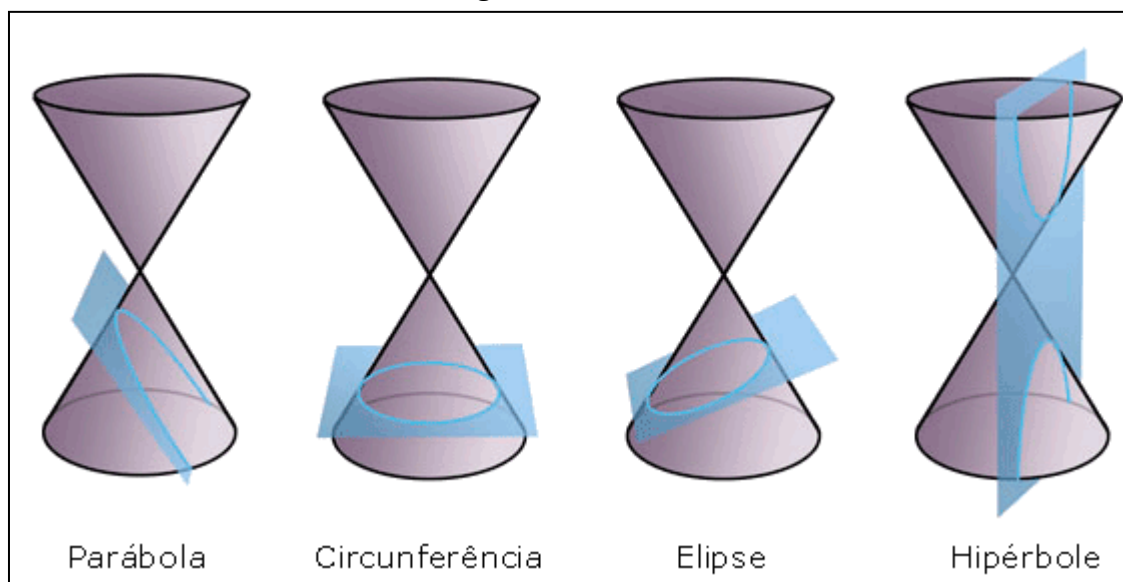
1. Lugar Geométrico

Denominamos lugar geométrico um conjunto de pontos tais que todos eles e só eles possuem uma dada propriedade.

2. O que são cônicas?

São figuras geométricas planas definidas a partir da intersecção de um cone duplo de revolução com um plano.

Figura 1 - Cônicas



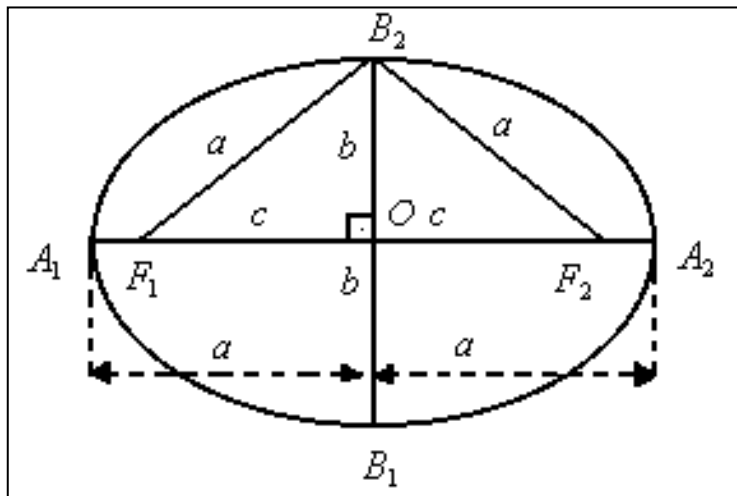
Fonte: encurtador.com.br/dsKUV.

3. Elipse

Elipse é o conjunto de todos os pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano é constante.

4. Elementos e Nomenclatura

Figura 2 - Elipse



Fonte: encurtador.com.br/fjkKY.

Focos: F_1 e F_2

Vértice: A_1 , A_2 , B_1 , B_2

Centro: O , que é ponto médio de $\overline{F_1F_2}$

Eixo maior: $2a$

Eixo menor: $2b$

Distância focal: $2c$

4.1 Relação Fundamental

Na figura acima, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo OB_2F_2 , retângulo em O , concluímos a seguinte relação:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Apêndice B – Material didático aplicado na turma regular

Diretoria de Ensino Superior

Licenciatura em Matemática

Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática

Linha de Pesquisa: Ensino e Aprendizagem em Geometria

Licenciandos: JhennyferPessanha, Luciano Corrêa, Rafael Corrêa e ThaináBarreto

Orientadora: Prof^ª. Me. Ana Mary Fonseca Barreto de Almeida

Nome: _____ Data: ____ / ____ / 2019

Propriedades da Elipse: Um olhar geométrico
Atividade 1

1. Identifique, a partir dos elementos geométricos da elipse, o que representam os pontos:

a) F_1 e F_2 - _____

b) A_1 , A_2 , B_1 e B_2 - _____

c) O - _____

2. Determine em função de a , b e c , as medidas dos segmentos a seguir:

a) A_1A_2 - _____

b) B_1B_2 - _____

c) F_1F_2 - _____

3. A partir da representação geométrica da elipse, identifique quais elementos são representados pelo segmento:

a) $\overline{A_1A_2}$ - _____

b) $\overline{B_1B_2}$ - _____

c) $\overline{F_1F_2}$ - _____

4. A razão $\frac{c}{a}$ é responsável pela “forma” da elipse. Indique o nome dado a esse número real expressado pela razão apresentada.

a) $\frac{c}{a}$ - _____

Diretoria de Ensino Superior

Licenciatura em Matemática

Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática

Linha de Pesquisa: Ensino e Aprendizagem em Geometria

Licenciandos: Jhennyfer Pessanha, Luciano Corrêa, Rafael Corrêa e Thainá Barreto

Orientadora: Prof^ª. Me. Ana Mary Fonseca Barreto de Almeida

Nome: _____ Data: ____ / ____ / 2019

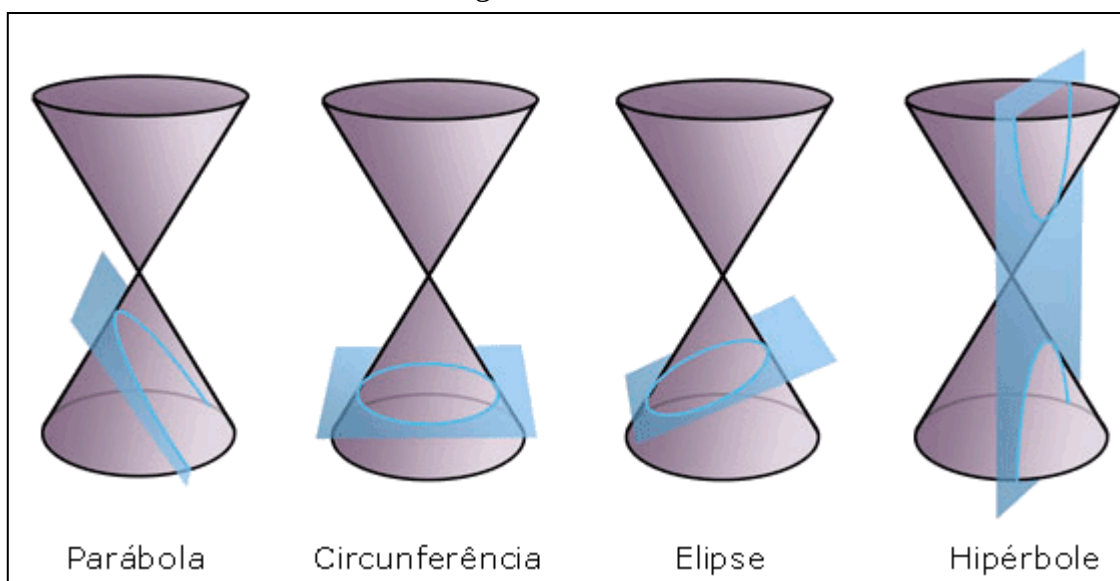
Propriedades da Elipse: Um olhar geométrico**1. Lugar Geométrico**

Denominamos lugar geométrico um conjunto de pontos tais que todos eles e só eles possuem uma dada propriedade.

2. O que são cônicas?

São figuras geométricas planas definidas a partir da intersecção de um cone duplo de revolução com um plano.

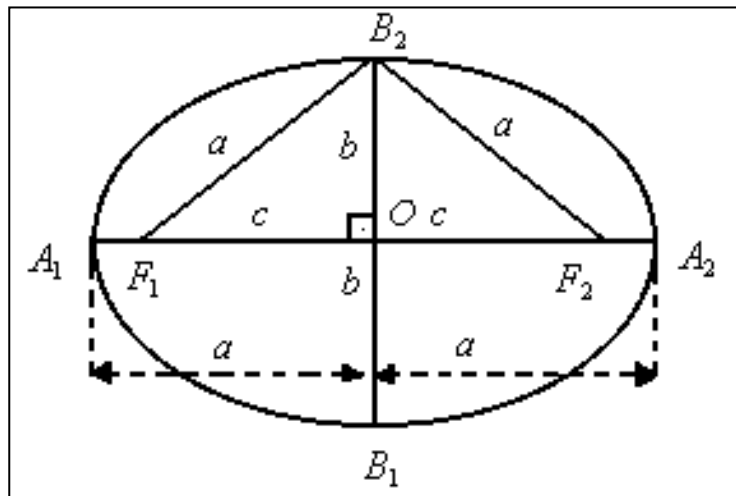
Figura 1 - Cônicas

Fonte: encurtador.com.br/dsKUV.**3. Elipse**

Elipse é o conjunto de todos os pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano é constante.

4. Elementos e Nomenclatura

Figura 2 - Elipse



Fonte: encurtador.com.br/fjkKY.

Focos: F_1 e F_2

Vértice: A_1 , A_2 , B_1 , B_2

Centro: O , que é ponto médio de $\overline{F_1F_2}$

Excentricidade: $\frac{c}{a}$

Eixo maior: $2a$

Eixo menor: $2b$

Distância focal: $2c$

4.1 Relação Fundamental

Na figura acima, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo OB_2F_2 , retângulo em O , concluímos a seguinte relação:

$$a^2 = b^2 + c^2$$