# RELATÓRIO DO LEAMAT

# ÂNGULOS EM QUADRILÁTEROS INSCRITÍVEIS: UMA PROPOSTA DE APRENDIZADO DESTE CONTEÚDO

ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA

BIANCA FERREIRA DE AZEVEDO ALVES
LEONARDO CABRAL SERPA
TAILANI BARCELOS DOS SANTOS

CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
2021.1

BIANCA FERREIRA DE AZEVEDO ALVES

LEONARDO CABRAL SERPA

TAILANI BARCELOS DOS SANTOS

# RELATÓRIO DO LEAMAT

# ÂNGULOS EM QUADRILÁTEROS INSCRITÍVEIS: UMA PROPOSTA DE APRENDIZADO DESTE CONTEÚDO

ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA

Trabalho apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, campus Campos Centro, como requisito parcial para a conclusão da disciplina Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Profº.: Me. Cleuber Eduardo do Nascimento Silva

CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

2021.1

## SUMÁRIO

1) Relatório do LEAMAT I ....................................................................................4
1.1) Atividades Desenvolvidas ....................................................................4
1.2) Elaboração Da Sequência Didática ..........................................................5
1.2.1) Tema ....................................................................................5
1.2.2) Justificativa ..........................................................................5
1.2.3) Objetivo Geral .......................................................................7
1.2.4) Público Alvo ..........................................................................7
2. Relatório do LEAMAT II……………………………………………………………..………8
2.1) Atividades desenvolvidas………………………………………………….……8
2.2) Elaboração da sequência didática………………………………….………9
2.2.1) Planejamento da sequência didática…………………………….....…9
2.2.2) Aplicação da sequência didática na turma do LEAMAT II……………..13
3. Relatório do LEAMAT III………………………………………………………...…18
3.1) Atividades desenvolvidas……………………………………………….…..18
3.2) Elaboração da sequência didática…………………………………….…..19
3.2.1) Versão final da sequência didática…………………………..…….....…19
Considerações finais..……………………………………………………...………44
Referências………...……………………………………………………………45
Apêndices………..……………………………………………………..…….…46
Apêndice A- Materiais Didáticos aplicados na turma do LEAMAT II……………...47
Apêndice B- Materiais Didáticos aplicados na turma do LEAMAT II……………...73

# 1) RELATÓRIO DO LEAMAT I

## 1.1) Atividades Desenvolvidas

No primeiro encontro, dia 17/09/2019, foram apresentados os orientadores e suas linhas de pesquisa. A saber, Geometria, Álgebra e Educação Inclusiva, bem como algumas especificidades de cada área. Também foi apresentado um panorama geral sobre o funcionamento do curso, nos seus aspectos metodológicos e didáticos. Além disso, foram definidos os grupos para realizar a pesquisa.

No dia 01/10/2019, foi realizado o primeiro encontro relacionado à linha de pesquisa na área de geometria, onde o professor Cleuber fez uma apresentação geral da disciplina e de sua carreira até aqui e em seguida pediu para que cada aluno fizesse uma breve apresentação, enfatizando suas experiências com o estudo de Geometria durante o ensino básico.

No encontro do dia 22/10 foi iniciada a discussão do texto Ensino de Geometria: Rumos da pesquisa (1911-2011) com o professor Cleuber e proposto a criação de um resumo para ser entregue na próxima aula.

No dia 05/11, estivemos participando do III Encontro de Educação Matemática do Instituto Federal Fluminense, onde assistimos diversas palestras relacionadas às experiências referentes ao curso de Licenciatura em Matemática.

No dia 12/11, toda a turma esteve na aula com o professor Cleuber, devido a uma aplicação do LEAMAT com a professora Ana Mary com outra turma. Nessa aula discutimos as linhas de pesquisa de cada grupo na área de geometria com o professor Cleuber, ele nos apresentou materiais complementares para auxiliar na pesquisa de cada grupo. Então foi aberta uma discussão em cima disso.

No dia 26/11, nos reunimos com o professor Cleuber para que ele pudesse fazer algumas observações relacionadas à nossa apresentação.

No dia 10/12, houve a apresentação do grupo B1 na linha de pesquisa de geometria, estando presente os professores Cleuber e Ana Mary na qual fez as observações necessárias para o grupo.

No dia 20/12, ocorreu uma aula extra para realizarmos a apresentação relacionada a linha de pesquisa de geometria. Os grupos B2, A1 e A3 finalizaram as apresentações dos temas.

## 1.2) Elaboração Da Sequência Didática

### 1.2.1) Tema

Ensino do conteúdo de ângulos em quadriláteros inscritíveis e a resolução de suas aplicações na OBMEP por meio de software matemático

### 1.2.2) Justificativa

Quadrilátero inscritível é um tema que, por conta de seu grau de complexidade e falta de tempo durante o ano letivo, costuma ser abandonado. Fala-se sobre ângulos em quadriláteros e ângulos na circunferência separadamente, porém não acoplados. Como é presente em questões da OBMEP, decidiu-se abordar este conteúdo.

De acordo com essa perspectiva, Grillo (2014 apud LAGO, 2018) destaca que existe uma inclinação na Educação Básica de omitir determinados conteúdos de geometria ou deixá-los para o fim do período letivo.

Outrossim, Pavanello (1993) complementa afirmando que o abandono do ensino de geometria é um fato gerador de preocupação entre os educadores e, por mais que seja uma tendência geral, tem maior frequência em escolas públicas. Portanto, em vários países inúmeras pesquisas estão sendo realizadas para determinar “o que” e “como” ensinar geometria.

À vista disso, Kallef (2015) sugere que o professor deva procurar em suas aulas incentivar o discente a observar a geometria escolar como pertencente a uma área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação, a linguagem e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas.

De acordo com Lago (2018), o conteúdo de quadrilátero inscritível favorece de maneira significativa a produção em geometria, preenchendo algumas das lacunas existentes no cenário nacional necessitado de produções geométricas.

Em contrapartida, Lago (2018) admite que o conteúdo de quadrilátero inscritível é tratado de modo inexpressivo, principalmente na educação básica. Além disso, outra realidade pertinente é a exclusão de alguns teoremas nos livros didáticos de matemática e de geometria. Quando presentes são apresentados superficialmente, sem abertura para suas explorações.

Ademais, Alves (2019) constata:

> [...] a existência de poucos trabalhos sobre quadriláteros inscritos na circunferência. Além disso, existe uma certa resistência do professor em abordar esse assunto em sala de aula pelo fato de, o mesmo não está presente de forma explícita no currículo mínimo do estado do Rio de Janeiro e no PCN nesta área, apesar de quadriláteros e círculos serem sempre citados quando se trata de geometria. (ALVES, 2019, p. 33).

Uma das habilidades de geometria destacada pela Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) é: “Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive de softwares de geometria dinâmica.” (BRASIL, 2017, p. 317). Kaleff e Almeida (2016) enfatizam que:

> O uso dos computadores nas escolas, em especial por meio dos softwares de geometria dinâmica, de forma educativa e articulada, torna-se uma ferramenta potente para a Educação. Percebe-se que os alunos se sentem mais motivados por utilizar um recurso diferenciado e podem aprimorar seus conhecimentos matemáticos uma vez que a exploração das construções desenhadas nesses ambientes virtuais podem constituir estratégias poderosas para a aprendizagem da geometria. (KALEFF; ALMEIDA, 2016, p. 4).

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) é um projeto nacional dirigido às escolas públicas e privadas brasileiras (OBMEP, 2019). Sendo seu público-alvo composto por alunos do 6.º ano do Ensino Fundamental até o 3.º ano do Ensino Médio. Ademais, em 2018, mais de 18 milhões de alunos de praticamente todos os municípios do Brasil participaram da olimpíada. Desse modo, reconhecendo a importância da mesma, Maranhão (2011), destaca que:

> Atualmente a OBMEP é uma política pública mundialmente reconhecida, uma das maiores iniciativas governamentais voltadas ao processo de ensino-aprendizagem em matemática, visando melhorar a motivação, o interesse e o desempenho dos alunos nas escolas públicas brasileiras. (MARANHÃO, 2011, p. 13).

### 1.2.3) Objetivo geral

Proporcionar a construção de conceitos dos ângulos em quadriláteros inscritíveis e a exploração desse conteúdo em questões da OBMEP, por meio de software de geometria.

### 1.2.4) Público alvo

Turmas do 1.º ano do ensino médio.

## 2. RELATÓRIO DO LEAMAT II

### 2.1) Atividades desenvolvidas

No dia 23 de agosto de 2021, os grupos e o orientador relembraram o tema da linha de pesquisa de geometria. Ele também explicou como funcionaria a nova forma do LEAMAT II, ressaltando que não teria a aplicação da sequência didática em uma turma regular presencialmente e sim, escrever um e-book sobre a pesquisa, devido ao contexto de Pandemia do Covid-19.

No dia 30 de agosto de 2021, o orientador verificou algumas possíveis modificações nos temas dos grupos, pois teriam que se adaptar ao modo de aula remoto.

No dia 13 de setembro, o orientador analisou nosso esboço de sequência didática e deu algumas sugestões sobre ela.

No dia 20 de setembro de 2021, o orientador verificou nossos avanços, e sugeriu algumas questões do banco de questões da OBMEP.

No dia 27 de setembro de 2021, o orientador analisou as questões do banco de questões da OBMEP e a forma dessas questões serem desenvolvidas no software matemático.

No dia 4 de outubro de 2021, o professor apresentou para a turma uma sequência didática desenvolvida por um grupo já concluído do LEAMAT e contou um pouco sua experiência sobre a preparação e elaboração de um conteúdo para seus alunos.

No dia 11 de outubro de 2021, o professor olhou nossa sequência didática em forma de apresentação, onde o mesmo pontuou coisas a serem acrescentadas e modificadas.

No dia 25 de outubro de 2021, o orientador definiu as datas para a apresentação da sequência didática, e o nosso grupo ficou definido para apresentar dia 10 de dezembro de 2021, a última apresentação do LEAMAT II no período. Ele também olhou os ajustes feitos em nossa sequência didática.

No dia 19 de novembro de 2021 começou a apresentação dos outros grupos. Assim, a partir desse dia, nos dedicamos aos ajustes da sequência didática, bem como a preparação e divisão dos conteúdos para nossa aula. Além disso, participamos das apresentações dos outros grupos.

No dia 10 de dezembro de 2021, aplicamos a nossa sequência didática, estruturada durante o LEAMAT II.

## 2.2) Elaboração da sequência didática

### 2.2.1) Planejamento da sequência didática

Durante a elaboração da sequência didática, verificamos a necessidade de fazer uma avaliação diagnóstica para verificarmos os conhecimentos prévios dos alunos, pois os mesmos seriam necessários para que nossa aplicação fosse realizada.

A sequência didática será aplicada na própria turma do LEAMAT II, de forma remota e utilizando a sala de reunião do Google Meet. Por conta da Pandemia causada pelo vírus Covid-19, não poderá ser aplicada presencialmente em uma turma regular do primeiro ano do Ensino Médio.

Primeiramente, utilizaremos uma apostila elaborada pelo grupo. Ela conterá a introdução da aula, a explicação do quadrilátero inscritível, a investigação de sua propriedade por meio da Atividade 1 e da sua condição necessária por meio da Atividade 2.

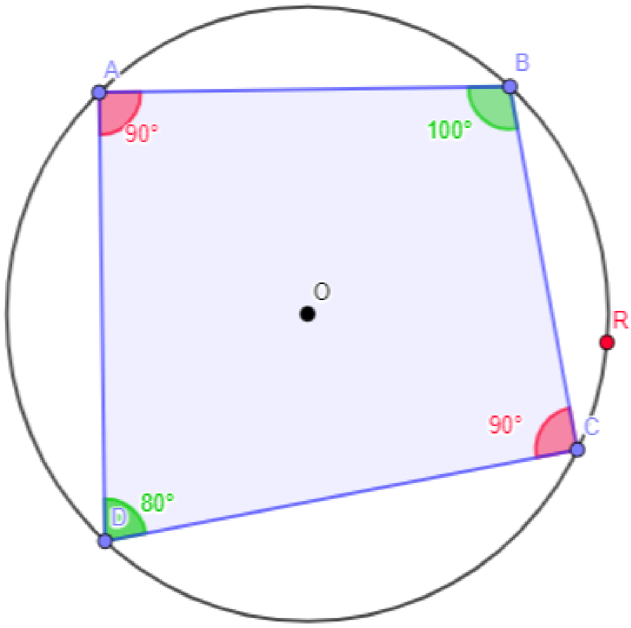
Iniciaremos mostrando aos alunos que, possivelmente, já estudaram ângulos internos em quadriláteros e ângulos na circunferência e, posteriormente, colocando a seguinte indagação: “Como seria a combinação de ângulos em quadriláteros e na circunferência?”.

A partir daí, seguiremos com a nossa aula falando do Quadrilátero Inscritível, trazendo exemplos de Quadriláteros Inscritíveis no cotidiano.

Seguidamente, mostraremos alguns matemáticos que fizeram uso do Quadrilátero Inscrito na Circunferência para desenvolverem suas fórmulas e teoremas. Entre eles, destacaremos Brahmagupta e Ptolomeu.

Após essa introdução, partiremos para a Atividade 1, em que os alunos explorarão o *applet* “Quadrilátero Inscrito na Circunferência” (Figura 1) criado pelo grupo, que pode ser acessado pelo link https://www.geogebra.org/m/z9rwf2d5.

Figura 1: Applet Quadrilátero Inscrito na Circunferência




Fonte: Elaboração própria.

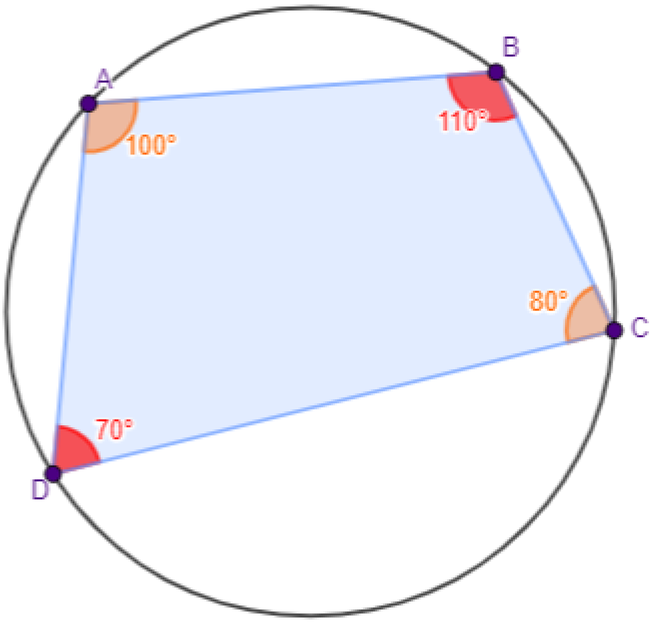
Ele permite que o aluno explore o quadrilátero inscritível na circunferência, podendo alterar a medida dos ângulos internos. Assim, durante a atividade, nossa expectativa será de que eles cheguem à conclusão de que os ângulos opostos de um Quadrilátero Inscritível são suplementares.

Antes de eles começarem a atividade, iremos explicar o funcionamento do *applet* e daremos cerca de dez a quinze minutos para que eles a façam. Além disso, disponibilizaremos um formulário, a fim de que os alunos adicionem os arquivos com suas respostas e capturas de tela de cada modificação do valor dos ângulos nele.

No momento em que os alunos terminarem a atividade, vamos corrigi-la junto com eles, equiparando o que eles colocaram e argumentando sobre suas respostas.

Sucessivamente, seguiremos para a Atividade 2, em que os alunos acessarão o link https://www.geogebra.org/m/bzcyyzp8. Nele, explorarão outro *applet*, dessa vez, "Quadrilátero Inscrito na Circunferência – condição" na Figura 2.

Figura 2: Applet Quadrilátero Inscrito na Circunferência - condição




Fonte: Elaboração própria.

O próprio permite ao aluno visualizar e explorar a condição que torna o quadrilátero possível de ser inscrito na circunferência. Assim, nessa atividade, o nosso intuito será de que eles concluam que a condição necessária para que um quadrilátero seja inscritível é de que seus ângulos opostos têm que ser suplementares.

Antes de eles realizarem a segunda atividade, também iremos explicar o funcionamento desse *applet* e, novamente, deixaremos um tempo para eles fazerem. Além disso, explicaremos o formulário criado para que eles anexem suas respostas e os prints da mudança dos ângulos. Quando terminarem, iremos corrigi-la junto a eles.

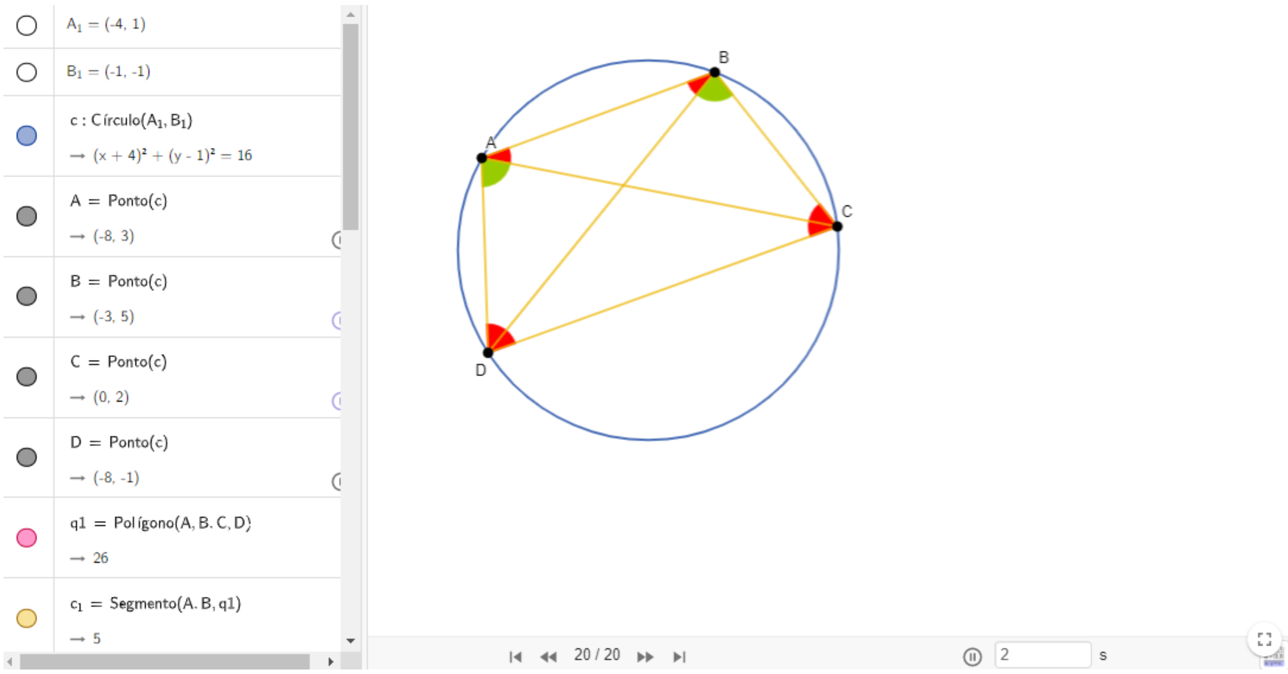
Posteriormente, exploraremos o que eles concluíram e aprenderam em duas questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP. Nossa intenção será de explicar uma e fazê-la junto com eles e a outra iremos deixar um tempo para que eles a façam sozinhos e depois, corrigiremos. No entanto, dependeremos do tempo que sobrar, pois a segunda leva um tempo para pensar. Caso o tempo esteja acabando, já que nossa aula precisa durar 1h40min, iremos fazer as duas junto com os alunos.

Dessa forma, utilizaremos o geogebra tanto para fazer junto quanto para o caso da correção.

Assim, fizemos um *applet* para cada questão.

O *applet* “OBMEP 2020” utilizado para o primeiro exercício encontra-se a seguir na Figura 3 e será resolvido na hora, utilizando a mesa digitalizadora para anotações. O *applet* pode ser acessado no link: https://www.geogebra.org/m/fnbzmguk.

Figura 3: *Applet* utilizado para a questão da OBMEP de 2020

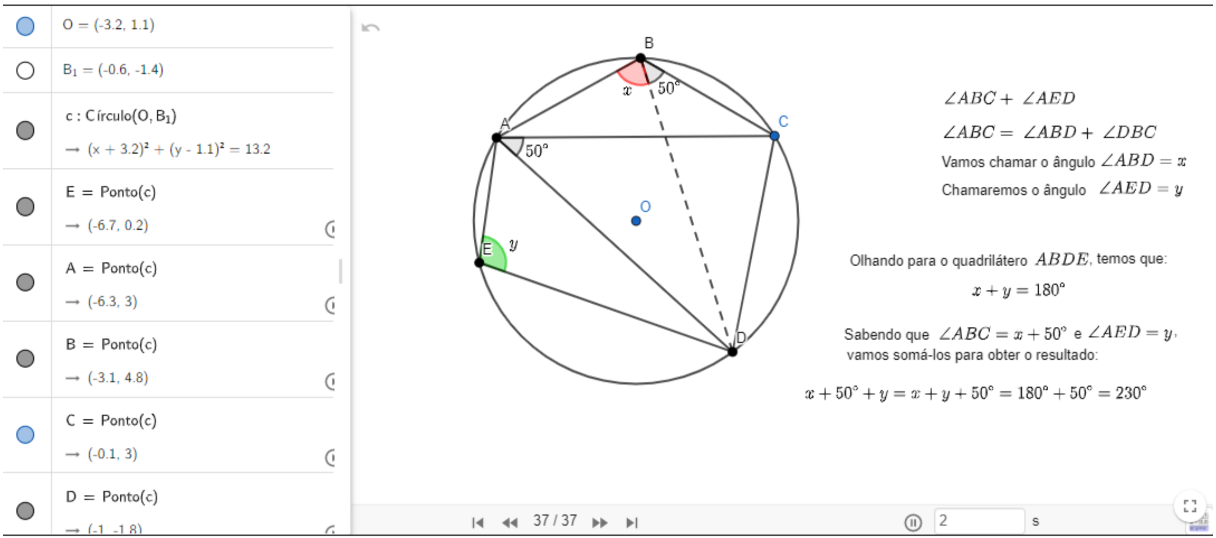



Fonte: Elaboração própria.

Nele, colocamos o recurso de exibir “Botão de reproduzir a construção”. Desse modo, à medida que explicaremos a questão, apertaremos o botão, a fim de ir mostrando e construindo os pensamentos aos poucos.

Já o *applet* “OBMEP 2016” (Figura 4) foi criado para resolver a segunda questão utilizada na nossa sequência, também da OBMEP. Ele pode ser acessado em https://www.geogebra.org/m/g649kcjc.

Figura 4: *Applet* utilizado para a questão da OBMEP de 2016.




Fonte: Elaboração própria.

Nele, também utilizamos a ferramenta de reproduzir a construção. Além disso, colocamos a resolução ao lado para ganhar tempo na hora da aula.

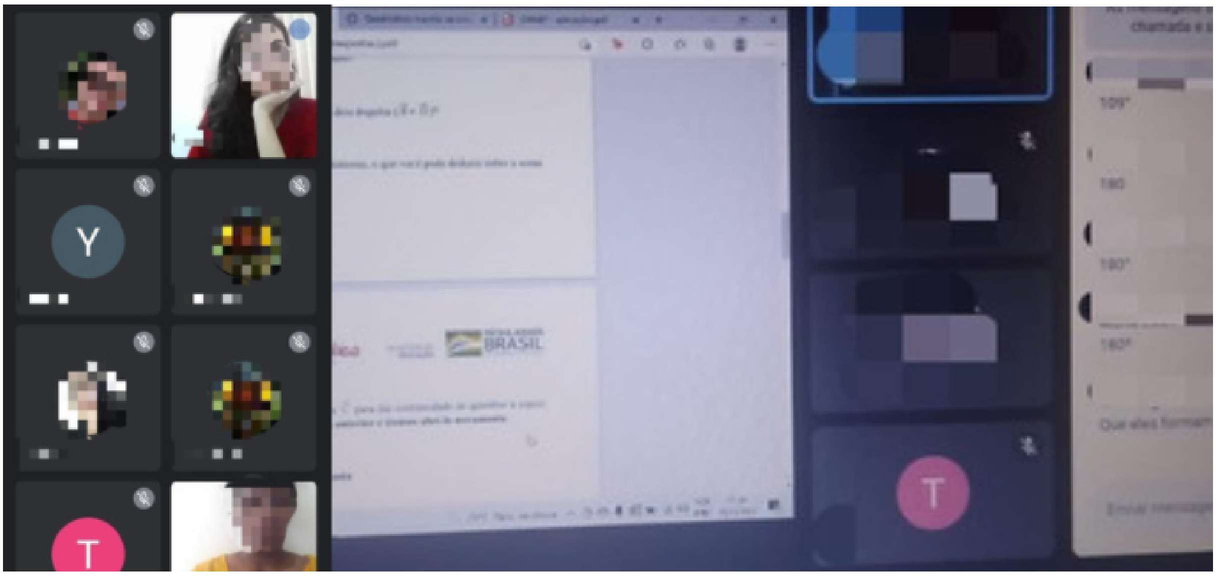
Por fim, enviaremos um formulário que irá conter a Atividade de Verificação, para que eles possam colocar em prática o que foi aprendido.

### 2.2.2) Aplicação da sequência didática na turma do LEAMAT II

Alguns dias antes da aplicação, corrigimos a avaliação diagnóstica e não verificamos a necessidade de relembrar conteúdos anteriores. Dessa forma, fizemos uma pequena apostila apenas com os conceitos e propriedades dos ângulos central e inscrito na circunferência, servindo como material de apoio para nossa aplicação.

Aplicamos nossa sequência na turma do LEAMAT II, em uma sala de reunião do Google Meet (Figura 5).

Figura 5: Aplicação da sequência didática



Fonte: Protocolo de pesquisa.

Iniciamos nossa aula com a apostila, ressaltando aos alunos que provavelmente eles já teriam estudado sobre ângulos na circunferência, bem como ângulos internos de um quadrilátero e com o questionamento de como seria a combinação desses dois elementos.

Posteriormente, mostramos que essa “combinação” seria justamente o Quadrilátero Inscrito na Circunferência. Em seguida, trazendo um pouco de história, mostramos matemáticos que desenvolveram fórmula e teorema a partir do Quadrilátero Inscritível.

Após essa introdução, começamos com a Atividade 1, explicando para eles como ela funcionaria e que o objetivo era que deduzissem a propriedade dos ângulos de um Quadrilátero Inscritível. Assim, explicamos como funcionaria o *applet* e, posteriormente, disponibilizamos o link do formulário para que eles adicionassem seus registros e capturas de tela de acordo com a mudança de valores dos ângulos. Além disso, avisamos que eles teriam cerca de dez minutos para que terminassem a Atividade 1 e enviassem os seus registros.

Notamos que os alunos demoraram bastante, o dobro do tempo que demos para enviar o formulário. A maioria relatou que já tinha terminado a Atividade 1 em si, mas que faltava ainda enviar o formulário. Dessa forma, passado os 20 minutos, pedimos para eles guardarem suas respostas e não as mudarem durante a correção. Avisamos que poderiam enviar o formulário posteriormente.

Logo, começamos a corrigir com eles e a participação foi muito boa. Os alunos conseguiram atingir o objetivo que esperávamos, deduzindo e reconhecendo, ao final da Atividade 1, que a soma dos ângulos opostos daria $180°$, ou seja, os ângulos opostos de um Quadrilátero Inscrito na Circunferência são suplementares. Ao todo, tivemos 15 respostas, mas analisamos apenas 13, contabilizando apenas quem realizou as atividades 1 e 2 também. As respostas podem ser observadas nas Figuras 6 e 7 a seguir.

Figura 6: Primeira parte da conclusão dos alunos sobre a Atividade 1

9.

13 respostas

são suplementares

A soma dos ângulos opostos de um quadrilátero inscrito na circunferência é 180º.

Sempre terá um resultado igual a 180°

a soma, será 180°

podemos concluir que a soma dos ângulos opostos de um quadrilátero inscrito na circunferência sempre será 180°.

A soma dos ângulos opostos de um quadrilátero inscrito à uma circunferência é igual a 180º, ou seja, são ângulos suplementares.

Resulta em 180°

A soma dos ângulos opostos de um quadrilátero inscrito em uma circunferência é sempre 180°

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Figura 7: Segunda parte da conclusão dos alunos sobre a Atividade 1

Sempre dará 180 graus.

Podemos concluir que a soma dos valores dos ângulos opostos de um quadrilátero inscrito na circunferência sempre será 180 °

A soma dos valores dos ângulos opostos de um quadrilátero inscrito será 180°.

Os ângulos opostos são suplementares.

A soma dos ângulos opostos de um quadrilátero inscrito na circunferência é igual a 180°.

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Após, fomos para a Atividade 2 e essa tinha o intuito de que eles concluíssem qual a condição necessária para um quadrilátero estar inscrito em uma circunferência. Portanto, explicamos como ela funcionaria e também explicamos como utilizar o *applet* que nela utilizamos. Então, fornecemos 5 minutos para que eles realizassem essa também e que, pela experiência na Atividade 1, caso eles não conseguissem enviar o formulário a tempo, poderiam enviar depois, porém sem modificar as respostas. Ainda na Atividade 2, na primeira questão, um dos alunos questionou o “Verifique e escreva”. Desse modo, consideramos redundante os dois verbos na questão.

No entanto, a maioria dos alunos terminou no tempo dado e fomos para a correção. A participação continuou ótima e todos responderam de acordo com o objetivo durante a correção. Algumas deduções podem ser observadas na figura 8 a seguir.

Figura 8: Conclusões dos alunos sobre a condição do Quadrilátero Inscritível

13 respostas

180°

A soma dos ângulos opostos têm que ser 180°

A soma deve ser igual a 180°.

A soma dos ângulos opostos tem que ser 180 graus para o quadrilátero ser inscrito.

A soma dos ângulos precisa resultar em 180º.

180º

Há dois casos em que o quadrilátero não está inscrito na circunferência: quando um dos vértices está "fora" da circunferência o que implica na soma dos ângulos opostos menor que 180º; e quando um dos vértices está "dentro" da circunferência, que implica na soma dos ângulos opostos maior que 180º. E há o caso em que o quadrilátero está inscrito na circunferência, e a soma dos ângulos opostos é igual a 180º, ou seja, são suplementares.

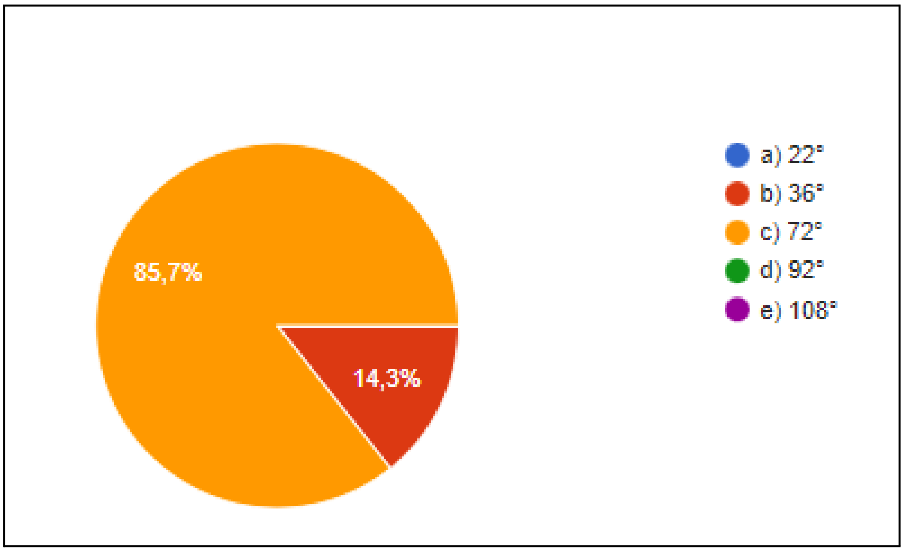
A soma deverá resultar em 180°

Fonte: Protocolo de pesquisa.

Depois da Atividade 2, continuamos a sequência com a exploração do conteúdo nas duas questões da OBMEP. Como faltava pouco tempo, decidimos explicar as duas questões, resolvendo junto com eles. Os alunos conseguiram entender e não apresentaram dificuldades quanto à explicação.

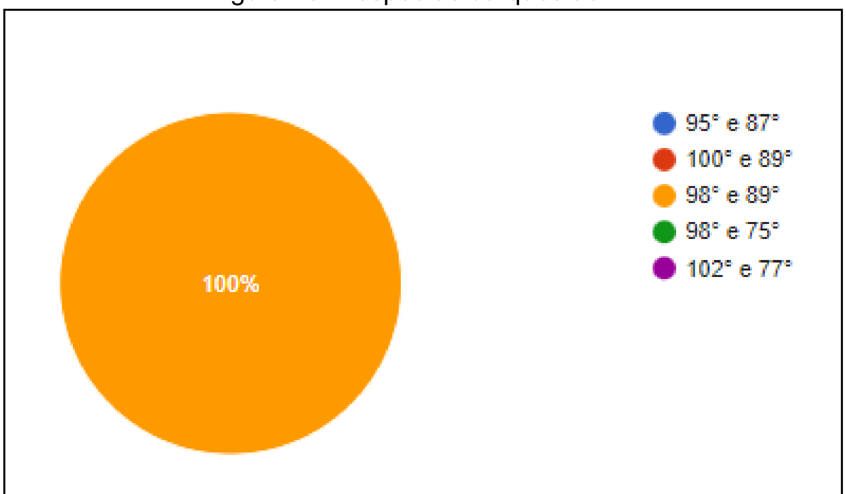
Como última atividade, disponibilizamos um formulário que continha a Atividade de Verificação. A maior parte dos alunos conseguiu responder corretamente às duas questões e não teve dificuldades. Nas questões 1 e 2 a alternativa correta era a letra C. As respostas podem ser vistas a seguir (Figuras 9 e 10).

Figura 9: Respostas da questão 1




Fonte: Protocolo de pesquisa.

Figura 10: Respostas da questão 2




Fonte: Protocolo de pesquisa.

Posteriormente, fizemos a correção das atividades junto com eles, comparando suas respostas.

Ao final, foi aberto espaço para que os alunos e o orientador pudessem opinar sobre a aula, fazendo suas considerações e sugestões:

- Destacaram que a quantidade de atividades foi grande para o tempo proposto, logo, sugeriram diminuir a quantidade de exercícios;
- O uso do software matemático geogebra para a resolução da OBMEP foi de grande importância, pois permitiu uma boa visualização e compreensão das questões;
- Um dos alunos salientou que, ao invés de determinarmos o valor do ângulo a ser modificado, poderíamos deixar a questão livre para os alunos mudarem para o valor que quisessem. Assim, poderiam verificar que a propriedade valeria para qualquer ângulo que escolhessem.

A Avaliação Diagnóstica, o Material de Apoio, a Apostila, as questões da OBMEP e a Atividade de Verificação encontram-se no Apêndice A.

## 3. RELATÓRIO DO LEAMAT III

### 3.1 Atividades desenvolvidas

No dia 23 de fevereiro de 2022, o professor orientador apresentou e-books anteriores para nos mostrar como seria a estrutura do mesmo e conversou um pouco sobre alguns. Além disso, os enviou para nosso e-mail para que pudéssemos lê-los.

No dia 11 de março de 2022, o orientador explicou a maneira com a qual deseja trabalhar conosco. Além disso, pediu para que fizéssemos uma breve apresentação do LEAMAT no e-book e preparássemos a Introdução do mesmo.

No dia 25 de março de 2022, o orientador leu a parte inicial do e-book e comentou sobre pequenas alterações a serem feitas.

No dia 01 de abril de 2022, o orientador leu as modificações realizadas no e-Book e pediu para que fizéssemos a etapa seguinte, que foi a proposta didática.

No dia 14 de abril de 2022, o professor fez a leitura do e-book conosco, nos mostrando algumas alterações que ainda precisavam ser feitas.

No dia 20 de abril de 2022, o orientador pontuou alguns detalhes e pediu para que lhe enviássemos o e-book completo e finalizado para que pudesse ser lido.

### 3.2 Elaboração da sequência didática

#### 3.2.1 Versão final da sequência didática

Esta sequência didática tem o objetivo de conduzir o educando a construir o conceito de ângulos em quadriláteros inscritos na circunferência, trazendo questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Antes da aula, é interessante que o educador realize uma Avaliação Diagnóstica com os alunos. O propósito dessa avaliação é verificar se eles possuem os conhecimentos prévios necessários de arcos, ângulos internos de quadrilátero, ângulos na circunferência e arco capaz, pois esses serão conteúdos indispensáveis para a aplicação da sequência.

A aula terá duração de, aproximadamente, 2 horas e será dividida em 8 etapas:

- Etapa 1 - Avaliação diagnóstica: esta etapa, que será realizada antes da aplicação da sequência didática, possui a finalidade observar os conhecimentos prévios dos alunos.
- Etapa 2 - Introdução do conteúdo: Nesta etapa, inicia-se a apresentação da ideia de quadriláteros e circunferências acoplados.
- Etapa 3 - Definição e exemplos de Quadriláteros Inscritíveis no cotidiano: Nesse momento, traz-se o conceito de quadrilátero inscritível e onde ele pode ser visto.
- Etapa 4 - Contextualização histórica: Neste momento, são trazidos alguns matemáticos que fizeram uso do quadrilátero inscritível para desenvolver suas fórmulas e teoremas.
- Etapa 5 - Atividade 1 (Apêndice B - Materiais didáticos adaptados): Neste instante, os alunos devem explorar o applet “Quadrilátero inscrito na circunferência”, a fim de construir o conceito da propriedade da soma dos ângulos opostos internos de um quadrilátero inscritível.
- Etapa 6 - Atividade 2 (Apêndice B - Materiais didáticos adaptados): Neste momento, os alunos precisam explorar o applet “Quadrilátero inscrito na

circunferência - condição", com a finalidade de entender qual a condição para um quadrilátero ser inscrito na circunferência.

- Etapa 7 - Aplicação na OBMEP (Apêndice A - Materiais didáticos): Nesta parte, o educador deve trabalhar com duas questões da OBMEP, as quais abordam o conteúdo de quadrilátero inscritível, tendo como objetivo explorar a propriedade aprendida pelos alunos.
- Etapa 8 - Atividade de verificação (Apêndice B - Materiais didáticos adaptados): Nesta seção, os alunos devem resolver os exercícios relacionados ao conteúdo e o professor deve verificar os conhecimentos aprendidos.

A seguir, estão apresentadas detalhadamente cada uma das etapas.

- Etapa 1: Avaliação Diagnóstica

A primeira etapa dá-se por meio da Avaliação Diagnóstica (Apêndice A - Materiais didáticos aplicados na turma do LEAMAT II), um instrumento avaliativo, composto por onze questões, que tem como principal objetivo verificar os conhecimentos prévios dos alunos que serão pré-requisitos para a aplicação da sequência didática. As questões da Avaliação Diagnóstica (Apêndice A - Materiais didáticos aplicados na turma do LEAMAT II) estão dividida em 4 seções, em que cada uma dessas seções tem um tema a ser explorado, que são Quadriláteros convexos, Ângulos na circunferência, Adição de arcos e Arco capaz, respectivamente. Assim, pretende-se observar se o aluno consegue:

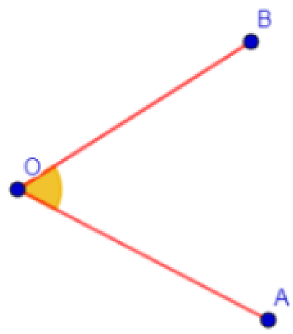
- Operar com adições de arcos;
- Calcular a soma dos ângulos internos de um quadrilátero;
- Identificar e calcular ângulos na circunferência, especificamente centrais e inscritos;
- Reconhecer e calcular arco capaz.

Antes de se iniciar as questões da Avaliação Diagnóstica (Apêndice A - Materiais Didáticos aplicados na turma do LEAMAT II), há uma breve apresentação dos dois tipos de simbologia usados para representação de ângulos, para que os alunos não apresentem dúvidas posteriormente.

Figura 10: Diferentes representações para ângulos

Você sabia?

Além do acento circunflexo para indicar ângulo, tem-se outro símbolo. Observe o ângulo abaixo:




O ângulo acima pode ser representado como ângulo $A\widehat{O}B$ ou $\angle ABC$. Não se assuste caso veja as duas formas, pois têm o mesmo significado!

Fonte: Elaboração própria.

Agora, serão apresentadas detalhadamente cada seção da Avaliação Diagnóstica.

- Seção 1: Quadriláteros Convexos

A primeira seção é constituída por duas questões, com Quadriláteros Convexos como tema.

A primeira questão tem como objetivo verificar se o aluno sabe o valor da soma dos ângulos internos de um quadrilátero.

Figura 11: Questão 1 da Seção 1

1. Qual o valor da soma dos ângulos internos de um quadrilátero?

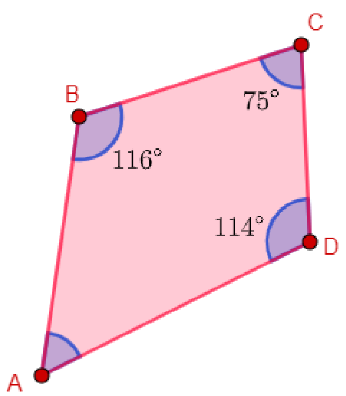
- 270°
- 360°
- 180°
- 720°
- 1560°

Fonte: Elaboração própria.

A segunda questão tem o intuito de observar se o aluno consegue calcular o valor de um ângulo interno desconhecido, a partir do conhecimento da soma dos ângulos internos de um quadrilátero.

Figura 12: Questão 2 da Seção 1

2. Marque a opção que representa o valor do ângulo BÂD no quadrilátero a seguir: *



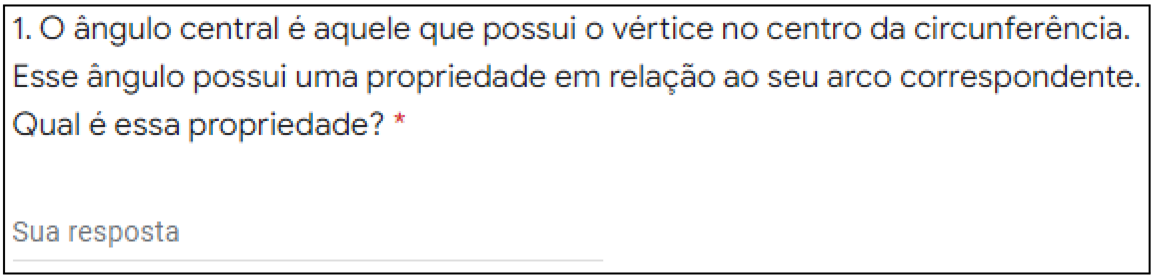

Fonte: Elaboração própria.

- Seção 2: Ângulos na circunferência

A segunda seção é formada por seis questões com Ângulos na circunferência como tema.

A primeira questão tem como finalidade verificar se o aluno domina a propriedade geral correspondente ao ângulo central.

Figura 13: Questão 1 da Seção 2



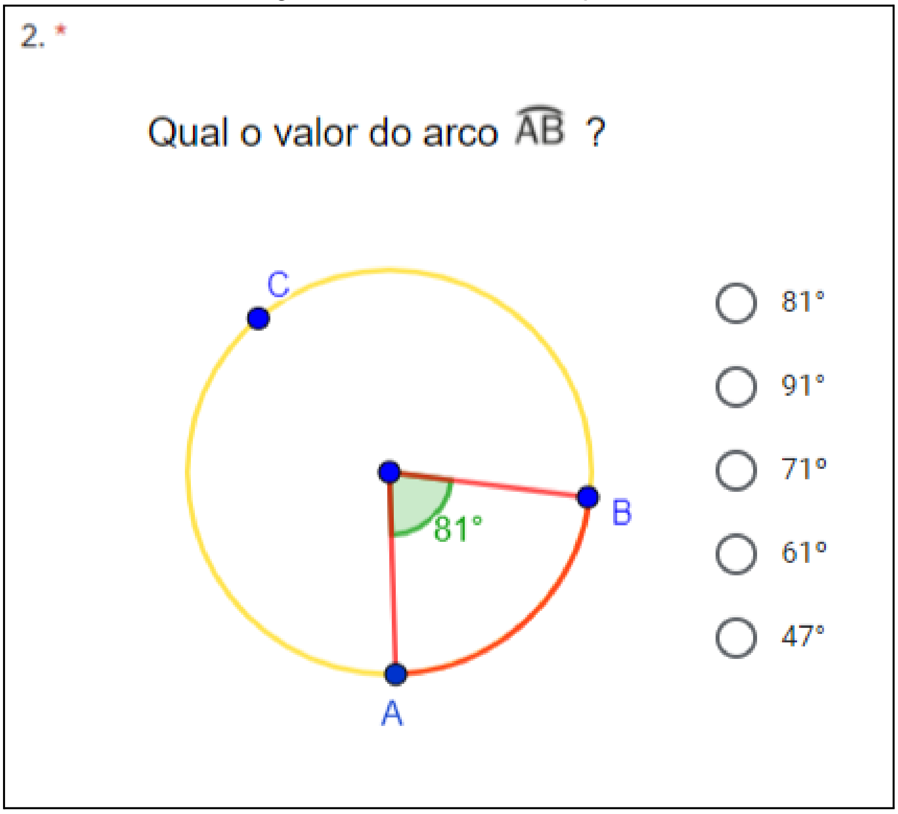
1. O ângulo central é aquele que possui o vértice no centro da circunferência. Esse ângulo possui uma propriedade em relação ao seu arco correspondente. Qual é essa propriedade? *

Sua resposta

Fonte: Elaboração própria.

Na segunda questão, o aluno deve calcular o valor do arco correspondente ao ângulo central, de acordo com seus conhecimentos em relação a essa propriedade.

Figura 14: Questão 2 da Seção 2




Fonte: Elaboração própria.

A terceira questão busca verificar se o aluno conhece a propriedade geral correspondente ao ângulo inscrito.

Figura 15: Questão 3 da Seção 2

3. Ângulo inscrito a uma circunferência é um ângulo que tem o vértice na circunferência e os lados são secantes a ela. Esse ângulo possui uma propriedade em relação ao ângulo central ou ao arco correspondente. Qual é essa propriedade?

Sua resposta

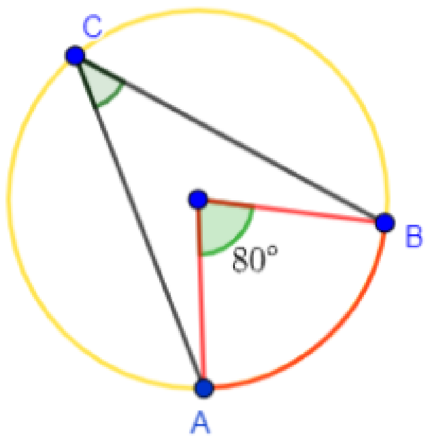
Fonte: Elaboração própria.

Na quarta questão, os alunos devem identificar o ângulo inscrito e calculá-lo, tendo em vista seus saberes em relação à propriedade de ângulos inscritos na circunferência.

Figura 16: Questão 4 da Seção 2

4. *

Qual o valor do ângulo $A\widehat{C}B$?

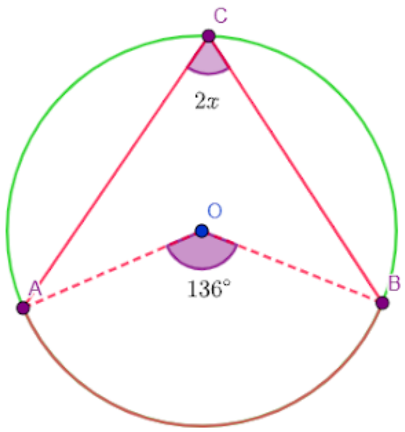



Fonte: Elaboração própria.

Na quinta questão, o aluno deve também identificar o ângulo inscrito correspondente ao ângulo central e calcular o valor desconhecido $x$.

Figura 17: Questão 5 da Seção 2

5. Na figura a seguir, calcule o valor de x. *



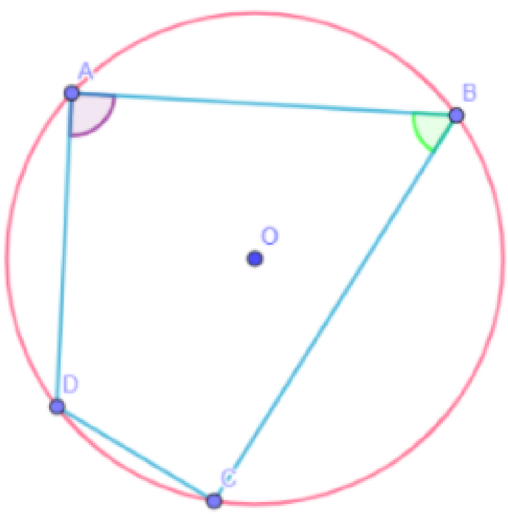

Fonte: Elaboração própria.

Na sexta questão pretende-se que os alunos calculem os valores dos ângulos inscritos correspondente aos valores dos arcos citados na questão.

Figura 18: Questão 6 da Seção 2

6. *

Sabendo que o arco $\overset{\frown}{ADC} = 122°$ e o arco $\overset{\frown}{DCB} = 178°$, determine o valor dos ângulos $D\hat{A}B$ e $A\hat{B}C$?

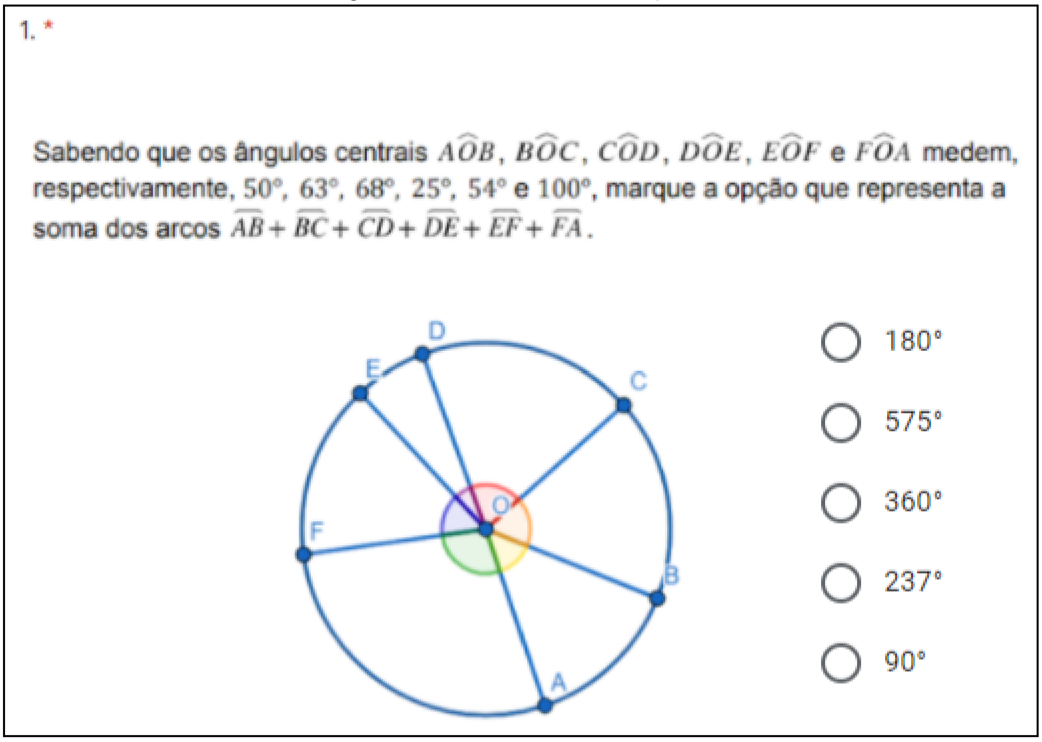



Fonte: Elaboração própria.

- Seção 3: Adição de arcos

A terceira seção é formada por uma única questão e tem como tema principal a adição de arcos. Nessa questão, o propósito é que o aluno deve reconhecer que a soma de todos os arcos de uma circunferência resultará em $360°$.

Figura 19: Questão 1 da Seção 3


1. *

Sabendo que os ângulos centrais $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$, $D\hat{O}E$, $E\hat{O}F$ e $F\hat{O}A$ medem, respectivamente, $50°$, $63°$, $68°$, $25°$, $54°$ e $100°$, marque a opção que representa a soma dos arcos $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DE} + \overset{\frown}{EF} + \overset{\frown}{FA}$.

- 180°
- 575°
- 360°
- 237°
- 90°



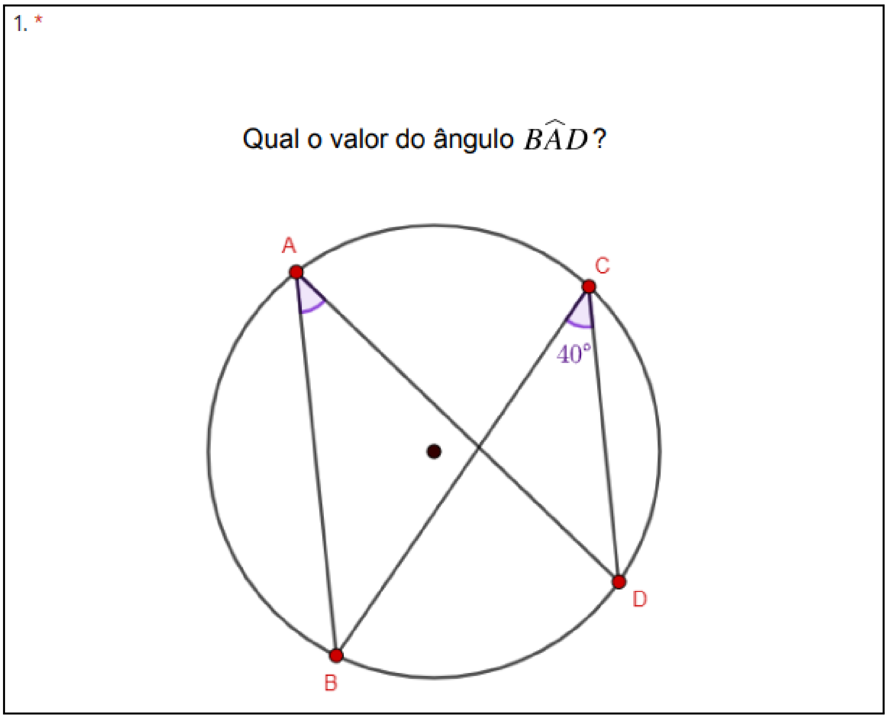
Fonte: Elaboração própria.

- Seção 4: Arco capaz

A quarta seção é constituída por duas questões cuja temática refere-se ao Arco Capaz.

Na primeira questão, o aluno deve identificar o arco capaz e seu valor, expresso na questão, para assim calcular o resultado do outro ângulo inscrito.

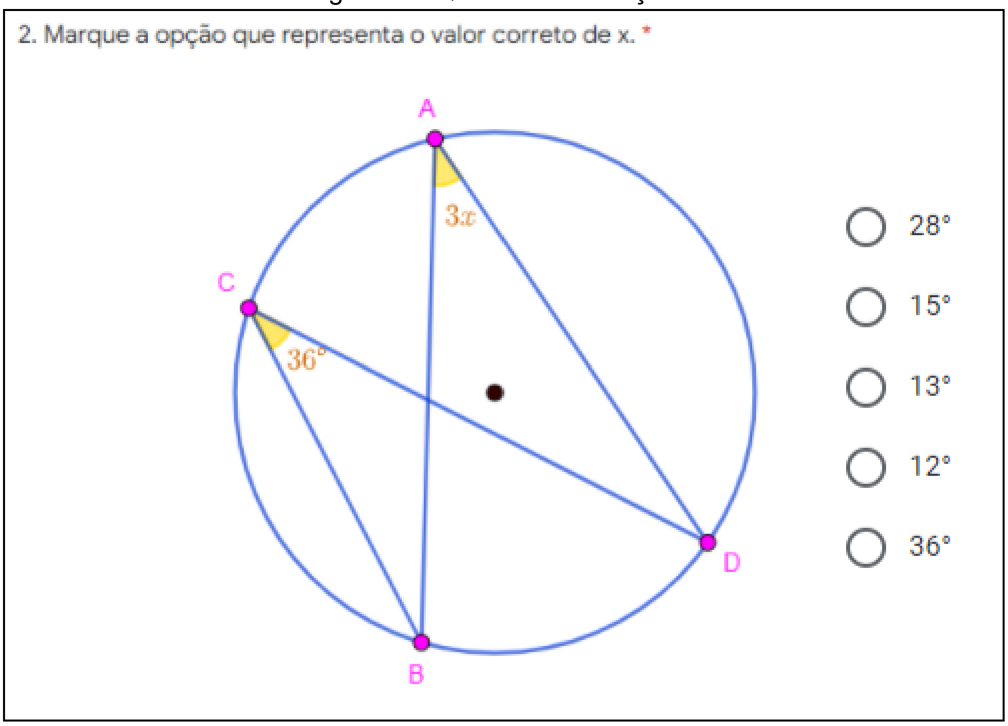
Figura 20: Questão 1 da Seção 4




Fonte: Elaboração própria.

Na segunda questão, os alunos também devem identificar o arco capaz, a fim de encontrar o valor desconhecido de $x$.

Figura 21: Questão 2 da Seção 4




Fonte: Elaboração própria.

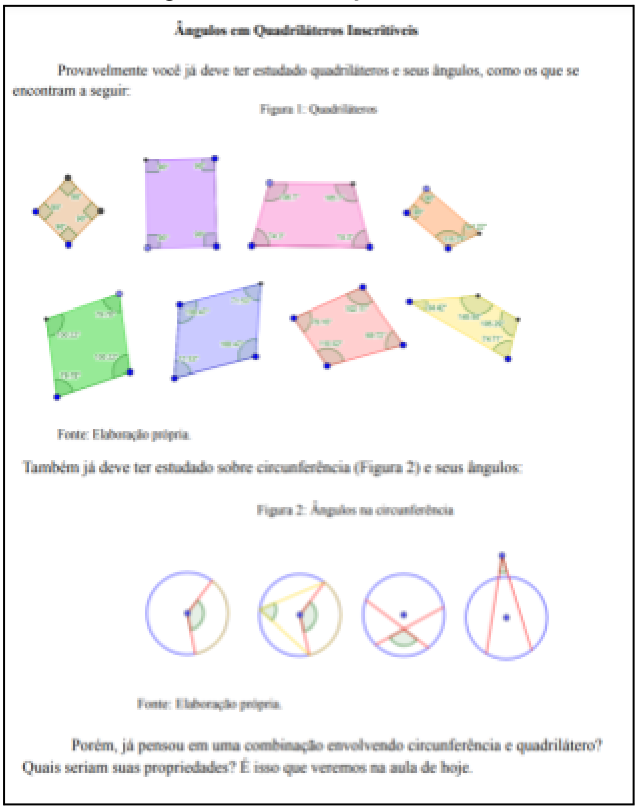
Assim, após todos os alunos terem respondido a Avaliação Diagnóstica, o professor deve examiná-las, a fim de constatar, caso tenham, as dificuldades dos alunos antes da aula.

Nesse caso, as principais dificuldades foram nas propriedades de Ângulo Central e Ângulo Inscrito na circunferência. Dessa forma, foi elaborado um Material de Apoio (Apêndice A - Materiais didáticos aplicados na turma do LEAMAT II), enviado por e-mail aos estudantes, de modo que pudessem relembrar as propriedades citadas anteriormente.

- Etapa 2: Introdução do conteúdo

O professor fornece a apostila (Apêndice B - Materiais Didáticos Adaptados do LEAMAT II) por e-mail e introduz o conteúdo abordando Ângulos em Quadriláteros e Ângulos na Circunferência e, posteriormente, estimula os alunos a pensar em como seria a combinação de quadriláteros e circunferência, com a finalidade de despertar o interesse dos alunos para o tema.

Figura 22: Introdução do tema


**Ângulos em Quadriláteros Inscritíveis**

Provavelmente você já deve ter estudado quadriláteros e seus ângulos, como os que se encontram a seguir:

Figura 1: Quadriláteros

Fonte: Elaboração própria.

Também já deve ter estudado sobre circunferência (Figura 2) e seus ângulos:

Figura 2: Ângulos na circunferência

Fonte: Elaboração própria.

Porém, já pensou em uma combinação envolvendo circunferência e quadrilátero? Quais seriam suas propriedades? É isso que veremos na aula de hoje.

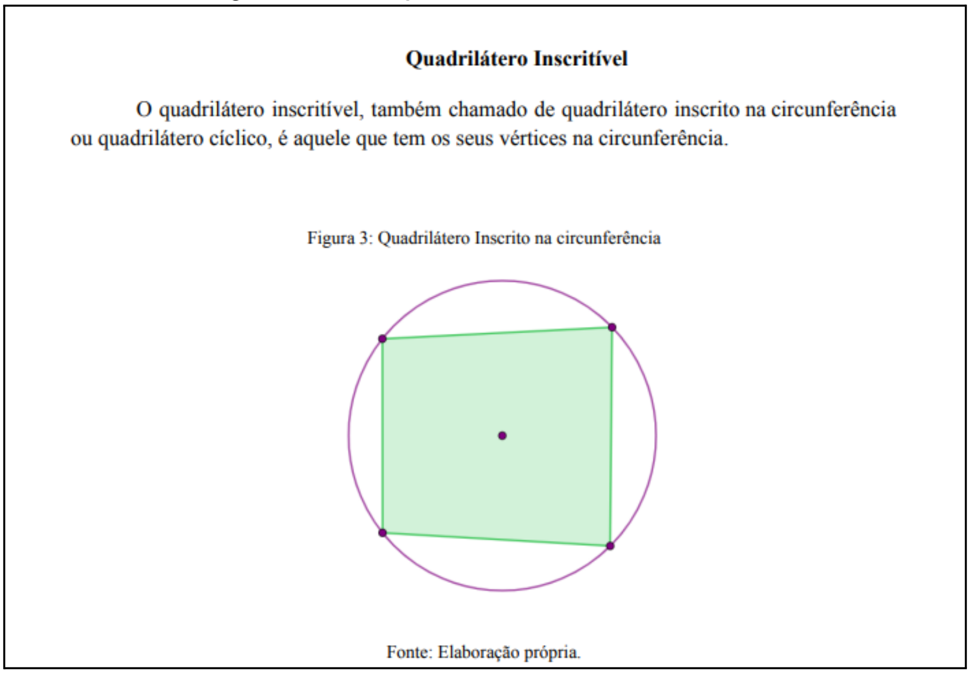
Fonte: Elaboração própria.

É interessante que o professor peça para que os alunos respondam, oralmente, aos questionamentos da apostila, de modo a promover a participação deles durante a aula.

- Etapa 3: Definição e exemplos do Quadrilátero Inscritível no cotidiano

Nesta etapa, o professor, depois de levantar os questionamentos na aula, traz a definição de Quadrilátero Inscritível, de modo a responder às perguntas anteriores, para que o aluno reconheça o que seria justamente a junção de quadrilátero convexo e circunferência, como se observa na figura 23.

Figura 23: Definição de Quadrilátero Inscritível


**Quadrilátero Inscritível**

O quadrilátero inscritível, também chamado de quadrilátero inscrito na circunferência ou quadrilátero cíclico, é aquele que tem os seus vértices na circunferência.

Figura 3: Quadrilátero Inscrito na circunferência

Fonte: Elaboração própria.

Fonte: Elaboração própria.

Em seguida, o professor deve apresentar alguns exemplos de Quadrilátero Inscritível no cotidiano dos alunos, para relacionar o conteúdo com a vida prática.

Figura 24: Exemplos de Quadriláteros Inscritíveis no cotidiano

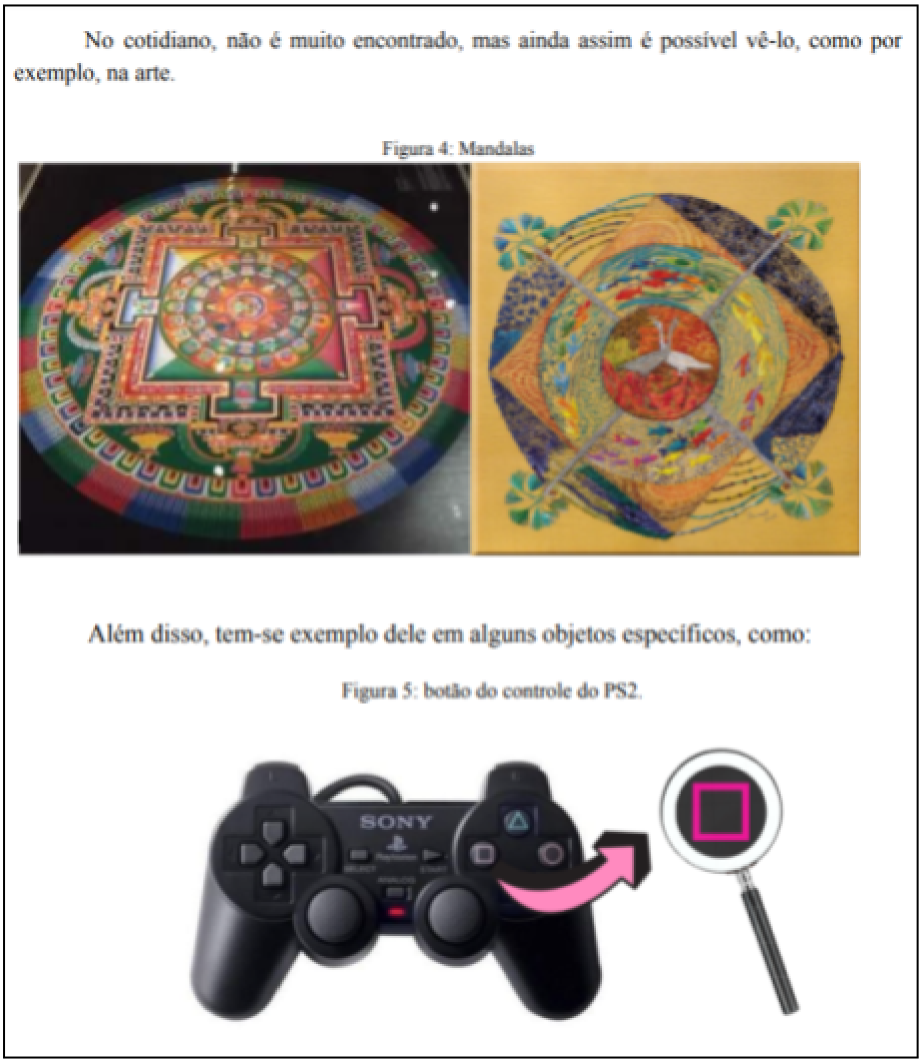

No cotidiano, não é muito encontrado, mas ainda assim é possível vê-lo, como por exemplo, na arte.

Figura 4: Mandalas

Além disso, tem-se exemplo dele em alguns objetos específicos, como:

Figura 5: botão do controle do PS2.

Fonte: Elaboração própria.

- Etapa 4: Contextualização histórica

O professor, ao dar continuidade à aula, deve realizar uma breve contextualização histórica, trazendo dois matemáticos que utilizaram os Quadriláteros Inscritíveis: Brahmagupta e Ptolomeu, que desenvolveram a Fórmula de Brahmagupta e o Teorema de Ptolomeu, respectivamente.

Figura 25: Contextualização histórica

Alguns matemáticos utilizaram quadriláteros inscritos para desenvolverem fórmulas e teoremas. Entre eles, tem-se Brahmagupta, matemático e astrônomo hindu, que realizou a fórmula de Brahmagupta. Além dele, Ptolomeu, matemático, geógrafo e astrônomo que criou o Teorema de Ptolomeu.

Figura 6: Brahmagupta e Ptolomeu

Fonte: Elaboração própria.

Fonte: Elaboração própria.

O objetivo dessa contextualização é mostrar a importância que os Quadriláteros Inscritíveis tiveram na matemática, contribuindo para criação de fórmulas e teoremas de matemáticos relevantes.

- Etapa 5: Atividade 1 (Apêndice B- Materiais didáticos adaptados)

Nesta etapa, o professor dá prosseguimento em sua aula, com a atividade 1 (Apêndice B - Materiais didáticos adaptados): “Explorando o *applet* Quadrilátero Inscrito na Circunferência”, que tem por objetivo, a partir do manuseio do *applet*, conjecturar a propriedade dos ângulos internos de um Quadrilátero Inscritível . O *applet*, de elaboração própria, pode ser acessado no link: https://www.geogebra.org/m/z9rwf2d5. Recomenda-se que o professor, antes de os alunos darem início a atividade, explique como deve-se manuseá-lo e, além disso, estão registradas na apostila as instruções para seu uso.

Figura 26: Instruções para o uso do applet "Quadrilátero Inscrito na Circunferência"

**Atividade 1**

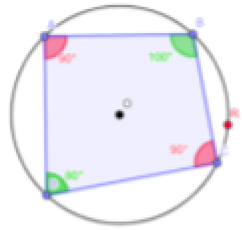
**Explorando o *applet* Quadrilátero Inscrito na Circunferência**

**Conhecendo o *applet***

- Acesse o link https://www.geogebra.org/m/z9rwf2d5

O applet contribui para uma melhor visualização do quadrilátero inscrito na circunferência. Desse modo, tem-se o quadrilátero $ABCD$ inscrito na circunferência de centro $O$ e raio $R$.

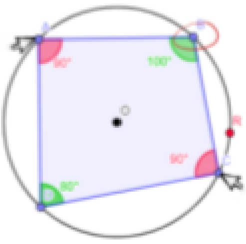
Figura 7: Quadrilátero $ABCD$ inscrito na circunferência de centro O e raio R



Fonte: Elaboração própria.

Para modificar o valor dos ângulos, basta **movimentar os vértices adjacentes** ao ângulo em questão.

Figura 8: Movimentação dos vértices



Fonte: Elaboração própria.

Fonte: Elaboração própria.

Posteriormente, os alunos devem realizar a atividade respondendo a cada questão com a visualização no applet. Da primeira até a quarta questão, os alunos deverão analisar os ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{D}$.

Na primeira questão, os alunos não devem movimentar os ângulos. Seu objetivo é que, ao abrir o *applet* com os valores já estabelecidos, os alunos identifiquem se esses ângulos são opostos ou adjacentes e registrem os seus valores.

Figura 27: Questão 1 da Atividade1

Primeiramente, **analisaremos os ângulos** $\widehat{B}$ **e** $\widehat{D}$, para responder às questões a seguir.

1. **Observe** o ângulo $\widehat{B}$ e o ângulo $\widehat{D}$ e **responda**:

a) Esses ângulos são opostos ou adjacentes?

b) Qual o valor do ângulo $\widehat{B}$?

c) Qual o valor do ângulo $\widehat{D}$?

d) Qual o resultado da **soma dos valores** desses dois ângulos ($\widehat{B}+\widehat{D}$)?

Fonte: Elaboração própria.

Na segunda questão espera-se que o aluno observe o que ocorre com o ângulo $\widehat{D}$ após a modificação do valor do ângulo $\widehat{B}$ e, posteriormente, calcule a soma desses dois ângulos.

Figura 28: Questão 2 da Atividade 1

2. **Coloque** o valor do ângulo $\widehat{B}=85°$.

a) Qual o valor do ângulo $\widehat{D}$, após essa modificação?

b) Qual o resultado da **soma dos valores** desses dois ângulos ($\widehat{B}+\widehat{D}$)?

Fonte: Elaboração própria.

Na terceira questão, pretende-se que o aluno consiga, similarmente à questão anterior, observar o que ocorre com o ângulo $\widehat{D}$ após a alteração do ângulo $\widehat{B}$ e, posteriormente, calcular a soma desses dois ângulos.

Figura 29: Questão 3 da Atividade 1

3. Agora, **coloque** o valor do ângulo $\widehat{B}=71°$ .

a) Qual o valor do ângulo $\widehat{D}$, após essa modificação?

b) Qual o resultado da **soma dos valores** desses dois ângulos $(\widehat{B}+\widehat{D})$?

Fonte: Elaboração própria.

Na quarta questão, o aluno deve concluir, a partir das observações feitas nas questões anteriores, que os ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{D}$ são suplementares.

Figura 30: Questão 4 da Atividade 1

4. Considerando o que foi feito nas questões anteriores, o que você pode deduzir sobre a soma dos ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{D}$?

Fonte: Elaboração própria.

Da quinta até a oitava questão, os ângulos a serem analisados são o ângulo $\widehat{A}$ e o ângulo $\widehat{C}$.

Na quinta questão, semelhante à primeira, os discentes não devem movimentar os ângulos, apenas classificá-los em opostos ou adjacentes e identificar os seus valores pré-estabelecidos no *applet*.

Figura 31: Questão 5 da Atividade 1

Agora, **analisaremos os ângulos** $\widehat{A}$ **e** $\widehat{C}$ para dar continuidade às questões a seguir. Porém, antes de continuar, **fecharemos o link anterior e iremos abri-lo novamente**.

5. **Observe** o ângulo $\widehat{A}$ e o ângulo $\widehat{C}$ e **responda**:

a) Esses ângulos são opostos ou adjacentes?

b) Qual o valor do ângulo $\widehat{A}$?

c) Qual o valor do ângulo $\widehat{C}$?

d) Qual o resultado da **soma dos valores** desses dois ângulos ($\widehat{A}+\widehat{C}$)?

Fonte: Elaboração própria.

Na sexta questão, o aluno deve identificar o valor do ângulo $\widehat{C}$ após a mudança do ângulo $\widehat{A}$ e calcular a soma dos mesmos.

Figura 32: Questão 6 da Atividade 1

6. Coloque o valor do ângulo $\widehat{A} = 62^\circ$ .

a) Qual o valor do ângulo $\widehat{C}$, após essa modificação?

b) Qual o resultado da **soma dos valores** desses dois ângulos ($\widehat{A}+\widehat{C}$)?

Fonte: Elaboração própria

Na sétima questão, similar à sexta, os alunos devem identificar o valor do ângulo $\widehat{C}$ após a alteração do valor de $\widehat{A}$ e calcular a soma dos mesmos.

Figura 33: Questão 7 da Atividade 1

7. Coloque o valor do ângulo $\widehat{A} = 100^\circ$ .

a) Qual o valor do ângulo $\widehat{C}$, após essa modificação?

b) Qual o resultado da **soma dos valores** desses dois ângulos ($\widehat{A}+\widehat{C}$)?

Fonte: Elaboração própria

Na oitava questão, o aluno deve concluir que os respectivos ângulos são suplementares.

Figura 34: Questão 8 da Atividade 1

8. De acordo com o que foi observado nas questões **5, 6 e** 7, responda: o que você pode constatar em relação a soma dos ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$?

Fonte: Elaboração própria

Na nona questão, espera-se que os alunos movimentem livremente os pares de ângulos opostos, a fim de observar que esses pares são suplementares em qualquer valor que colocarem.

Figura 35: Questão 9 da Atividade 1

9. Agora, mova os pares de ângulos opostos para o valor que desejar. O que você observa quanto a soma dos ângulos opostos de um Quadrilátero Inscritível?

Fonte: Elaboração própria

Na décima e última questão, os alunos devem concluir, de maneira geral, que os ângulos opostos de um Quadrilátero Inscritível são suplementares.

Figura 36: Questão 10 da Atividade 1

10. **No geral**, o que se pode concluir em relação a **soma dos ângulos opostos de um quadrilátero inscrito na circunferência**?

Fonte: Elaboração própria

- Etapa 6: Atividade 2 (Apêndice B - Materiais didáticos adaptados)

Nesse momento, o professor deve prosseguir para a Atividade 2 “Explorando o applet Quadrilátero inscrito na circunferência - condição”. O applet tem por objetivo explorar e visualizar a condição que torna o quadrilátero inscrito na circunferência e foi elaborado pelos próprios autores, podendo ser acessado no link: https://www.geogebra.org/m/bzcyyzp8.

Como dito anteriormente, na quinta etapa, é importante que o professor também faça uma demonstração sobre o uso desse *applet*. Ademais, as instruções do uso do mesmo estão registradas na apostila (Apêndice B - Materiais didáticos adaptados).

Figura 37: Instruções de uso do applet ‘Quadrilátero inscrito na circunferência - condição”

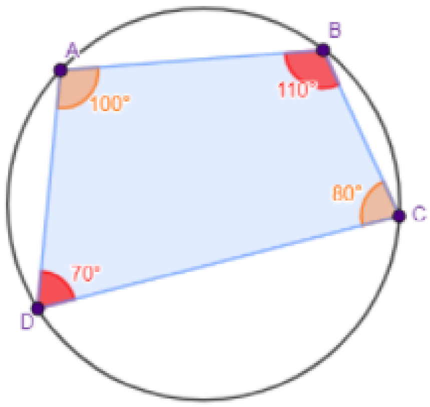
**Atividade 2**

**Explorando o *applet* Quadrilátero Inscrito na Circunferência - condição**

- Acesse o link https://www.geogebra.org/m/bzcyyzp8

Esse *applet* permitirá explorar e visualizar a condição que torna o quadrilátero possível de ser inscrito na circunferência. Assim, tem-se o quadrilátero $ABCD$ inscrito na circunferência (Figura 9).

Figura 9: Quadrilátero $ABCD$ inscrito na circunferência.




Fonte: Elaboração Própria

Para modificar o valor dos ângulos, basta movimentar os vértices.

Fonte: Elaboração própria.

Na primeira questão, os alunos devem observar que a soma dos ângulos opostos resulta em $180°$.

Figura 38: Questão 1 da Atividade 2

1. **Observe** os pares de ângulos opostos.

a) **Escreva** a soma dos ângulos opostos.

Fonte: Elaboração própria.

Na segunda questão, o objetivo é que os discentes identifiquem as transformações que ocorrem com o quadrilátero após modificações pedidas na questão.

Figura 39: Questão 2 da Atividade 2

2. **Mova** os vértices do quadrilátero de acordo com os itens a seguir.

a) O que ocorre com o quadrilátero quando a **soma dos ângulos opostos é menor que** 180°?

b) O que ocorre com o quadrilátero quando a **soma dos ângulos opostos é igual a** 180°?

c) O que ocorre com o quadrilátero quando a **soma dos ângulos opostos é maior que** 180°?

Fonte: Elaboração própria.

Na terceira questão, o aluno deve concluir que a condição para que o quadrilátero esteja inscrito na circunferência é que os ângulos opostos sejam suplementares.

Figura 40: Questão 3 da Atividade 2

3. Qual resultado deve dar a soma dos ângulos opostos para que o **quadrilátero esteja inscrito na circunferência**?

Fonte: Elaboração própria.

É indicado que o professor corrija as questões juntamente aos alunos, para que possa sanar suas dúvidas.

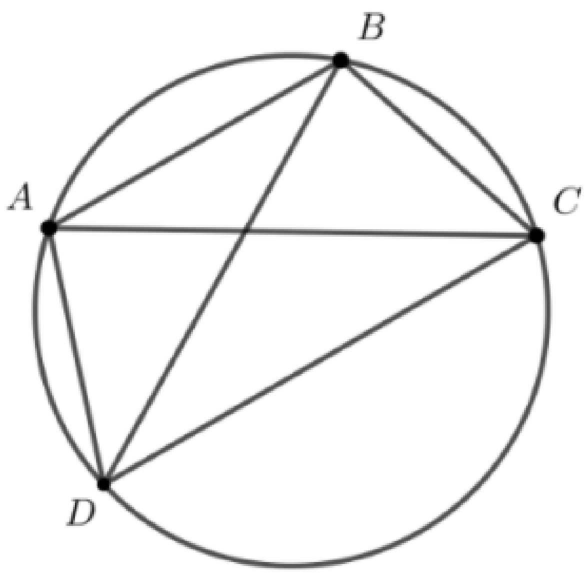
- Etapa 7: Aplicação na OBMEP (Apêndice A - Materiais didáticos)

Nesta etapa, o professor deve explorar os conhecimentos e conclusões tiradas ao longo da aula por meio de duas questões das Olimpíadas de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP. É recomendado que o professor resolva uma junta aos alunos e que proporcione alguns minutos para que tentem resolver a outra. Indica-se, novamente, o uso do geogebra para a resolução dessas questões. Assim, foi feito um *Applet* para cada questão. Além disso, é importante o uso da mesa digitalizadora para realizar as anotações necessárias.

A primeira questão dada como exemplo, que será resolvida junto com os alunos, tem como objetivo capacitar os alunos para a resolução de problemas da OBMEP que envolvam esse mesmo conteúdo, a partir das conclusões tiradas até então. Para isso, o *Applet* "OBMEP 2020" é utilizado para a resolução do primeiro exercício e encontra-se a seguir na figura 41. O *Applet* pode ser acessado pelo link: https://www.geogebra.org/m/fnbzmguk.

Figura 41: Questão da OBMEP de 2020 sobre Quadrilátero Inscrito

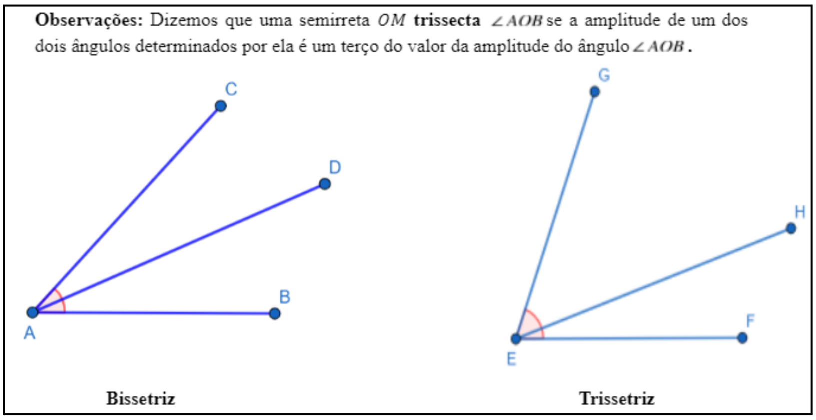
(OBMEP - 2020) Os vértices do quadrilátero $ABCD$ estão em uma circunferência. Cada uma de suas diagonais **bissecta** um ângulo e **trissecta** o ângulo oposto. Determine as medidas dos ângulos do quadrilátero.




Fonte: Elaboração própria

Tendo em vista que essa questão trata de alguns elementos da geometria que alguns podem manifestar dificuldades, recomenda-se fazer as seguintes observações, presentes na figura 42. Aqui o professor deve explicar o que é uma bissetriz e o que é uma trissetriz, para continuar a questão.

Figura 42: Bissetriz e trissetriz



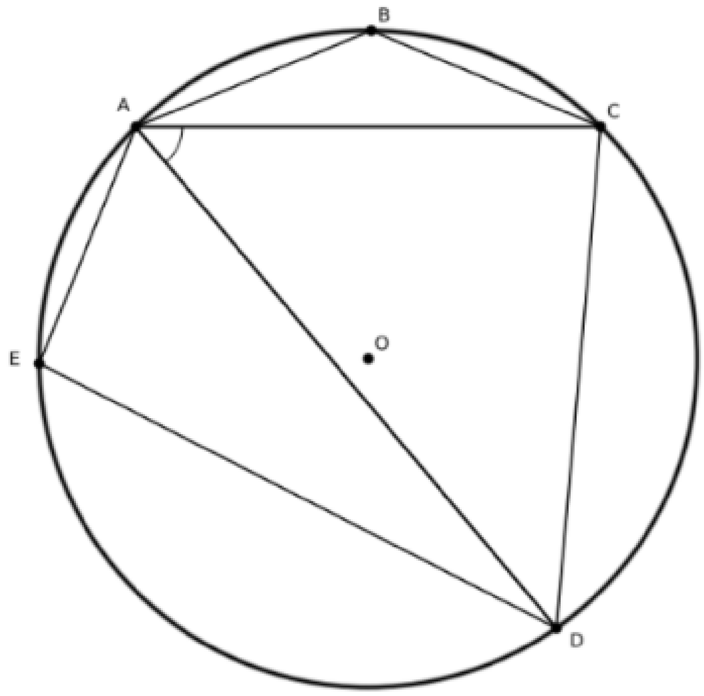

Fonte: Elaboração própria

Após a resolução da primeira questão da OBMEP, sugere-se que o professor disponibilize determinado tempo, cerca de vinte minutos, para que os alunos tentem fazer a segunda questão sozinhos. O *applet* destinado a essa questão pode ser acessado em: https://www.geogebra.org/m/g649kcjc.

A segunda questão da OBMEP tem como objetivo fazer com que o aluno interprete as informações dadas e aplique os conhecimentos obtidos na resolução dessa questão.

Figura 43: Questão da OBMEP de 2016 sobre Quadrilátero Inscrito

(OBMEP - 2016) Todos os vértices do pentágono $ABCDE$ estão sobre o mesmo círculo. Se $\angle CAD = 50°$ , determine $\angle ABC + \angle AED$.




Fonte: Elaboração própria

- Etapa 8: Atividade de Verificação (Apêndice A - Materiais didáticos aplicados na turma do LEAMAT II)

Após a correção das questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), o professor, a fim de observar se o conteúdo foi aprendido pelos alunos, os mesmos devem realizar a Atividade de Verificação (Apêndice A - Materiais didáticos aplicados na turma do LEAMAT II). Essa atividade é composta por duas questões envolvendo o conteúdo de Quadriláteros Inscritíveis.

Na primeira questão, o aluno deve interpretá-la e aplicar a propriedade da soma dos ângulos opostos em um Quadrilátero Inscrito na Circunferência e, assim, encontrar o valor da medida do ângulo pedido.

Figura 44: Questão 1 da Atividade de Verificação

1. *

(UNIFENAS) O quadrilátero $ABCD$ está inscrito em uma circunferência e o ângulo $A\widehat{B}C$ mede 108°. A medida do ângulo $C\widehat{D}A$ é igual a:

- a) 22°
- b) 36°
- c) 72°
- d) 92°
- e) 108°

Fonte: Elaboração própria.

A segunda questão tem como objetivo fazer com que o aluno identifique o Quadrilátero Inscritível e aplique sua respectiva propriedade, estudada anteriormente, para calcular o valor dos outros dois ângulos. Para auxiliar os alunos na visualização, foi criado um applet que pode ser acessado pelo link: https://www.geogebra.org/m/vspkmk66.

O professor deve ressaltar aos alunos que eles podem modificar o formato do Quadrilátero Inscritível presente no applet citado, desde que o valor dos ângulos permaneça o mesmo e o Quadrilátero mantenha-se convexo.

Figura 45: Questão 2 da Atividade de Verificação

2.

Phineas e Ferb é uma série criada por Jeff Marsh e Dan Povenmire em 2007. Nela, os irmãos Phineas e Ferb, durante suas férias de verão, criam as maiores invenções no quintal de sua casa.

Figura 1: Phineas e Ferb na montanha-russa que construíram.

Para a próxima aventura, os dois irmãos precisarão, inicialmente, construir um lago com o formato de um quadrilátero (parte onde ficará a água) inscrito em uma circunferência (que será a borda do lago). Porém, eles só sabem a medida da amplitude de dois ângulos, que medem 91° e 82°. Para colocar a mão na massa, precisam saber a amplitude dos outros dois ângulos também. Desse modo, marque os valores que representam as medidas dos outros dois ângulos.

- ◯ 95° e 87°
- ◯ 100° e 89°
- ◯ 98° e 89°
- ◯ 98° e 75°
- ◯ 102° e 77°

Fonte: Elaboração própria.

O professor deve disponibilizar aproximadamente de dez a quinze minutos para que os alunos finalizem as questões e envie o formulário e, posteriormente, deve corrigi-las junto aos alunos, dando-se, assim, o encerramento da aula.

**Considerações finais**

Na Educação Básica, geralmente são vistos conteúdos de ângulos internos em Quadriláteros e em Circunferências, porém não é muito ensinado os dois ao mesmo tempo, o que seria justamente o Quadrilátero Inscritível. A partir dessa perspectiva, teve-se a ideia de realizar uma aula sobre esse tema na linha de pesquisa de Geometria no LEAMAT, com o objetivo de construir conceitos de ângulos internos em Quadriláteros Inscritíveis, explorando esse conteúdo em questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), utilizando um software de geometria para isso.

Posteriormente à aplicação da sequência didática, com as observações e verificações feitas a partir dos rendimentos dos alunos, pode-se constatar que a finalidade do projeto foi atingida. O uso do dos *applets* do Geogebra, software de geometria utilizado na aplicação, tanto para analisar a propriedade e a condição dos quadriláteros inscritos na circunferência quanto nas questões da OBMEP, facilitou bastante a visualização dos alunos e, nas atividades, deram autonomia para que eles atingissem suas conclusões a partir do seu manuseio. Foi uma experiência nova e enriquecedora para o grupo, que pôde aprender mais com essa temática que é tão escanteada nas escolas e, além disso, vivenciar uma parte do que é a realidade da nossa futura atuação docente.

Devido à situação de Pandemia, a aula não pode ser realizada de forma presencial com alunos de uma turma regular do 1.° Ano do Ensino Médio, mas, apesar disso, o trabalho conseguiu cumprir com o objetivo proposto desde 2019. Espera-se que esse material sirva de apoio e possa ser bastante aproveitado por professores que irão lecionar esse conteúdo.

**REFERÊNCIAS**

ALVES, B. F. A. Figura 1: *Applet* Quadrilátero Inscrito na Circunferência. Disponível em: **<https://www.geogebra.org/m/z9rwf2d5**>. Acesso em 18 de Maio de 2022.

ALVES, B. F. A. Figura 2: *Applet* Quadrilátero Inscrito na Circunferência - condição. Disponível em <**https://www.geogebra.org/m/bzcyyzp8**>. Acesso em 18 de Maio de 2022.

ALVES, B. F. A. Figura 4: *Applet* utilizado para a questão da OBMEP de 2016. Disponível em: <**https://www.geogebra.org/m/g649kcjc**>. Acesso em 18 de Maio de 2022.

ALVES, B. F. A. Figura 3: *Applet* utilizado para a questão da OBMEP de 2020. Disponível em: <**https://www.geogebra.org/m/fnbzmguk**.> Acesso em 18 de Maio de 2022.

ALVES, R. A. C. **Quadriláteros inscritíveis na circunferência: Uma proposta de ensino para o 9.º ano do ensino fundamental.** UENF – Campos dos Goytacazes, Rio de Janeiro, 29 de março de 2019.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular** (BNCC). Brasília: MEC. 2017. Acesso em: 02/12/2019. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf.>

KALEFF, A.M.M.R. **Formas, padrões, visualização e ilusão de ótica no ensino da geometria.** Vidya, v. 35, n.2, p.1-18, jul.dez., Santa Maria, 2015. ISSN 2176- 4603

KALEFF, A.M.M.R.; ALMEIDA, C.R.M. **Poliedros de Platão sob uma perspectiva de educação matemática usando recursos didáticos concretos e virtuais.** SBEM – Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades São Paulo- SP, 13 a 16 de julho de 2016, Comunicação científica, ENEM encontro nacional de educação matemática.

LAGO, R.C. **Quadriláteros inscritíveis e os teoremas de Simson-Walace e de Steiner-Lehmus.** Curitiba 2018, Universidade Tecnológica Federal do Paraná UTFPR, Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional PROFMAT.

MARANHÃO, T, P, A. **Avaliação de impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática nas escolas públicas (OBMEP – 2005 / 2009).** In: Avaliação do impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática nas escolas públicas – OBMEP 2010. Brasília: Centro de Gestão e Estudos Estratégicos, 2011.

OBMEP. **Apresentação**. 2019. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/apresentacao.htm> Acesso em: 01/12/2019.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências.** Revista Zetetiké. Ano I – nº 1. 1993, (p. 7 a 17)

SENA, R. M.; DORNELES, B. V. Ensino de Geometria: Rumos da Pesquisa (1991-2011) Teaching Geometry: Research Directions (1991-2011). **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 8, n. 1, p. 138-155, 2013.

# APÊNDICES

# Apêndice A- Materiais Didáticos aplicados na turma do LEAMAT II

Para acessar a Avaliação Diagnóstica, entre no link: https://forms.gle/QSXdy2j3Mu3F8nWY9.

# Avaliação Diagnóstica B2

Esse instrumento avaliativo foi criado pelo grupo B2 do LEAMAT II, da linha de pesquisa de geometria, cujo tema é Ângulos em Quadriláteros Inscritíveis. Possui como objetivo verificar se os alunos:

Operar com adição de arcos;

Calcular a soma dos ângulos internos de um quadrilátero;

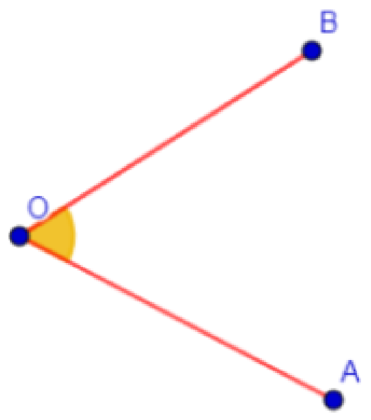
Identificar e calcular ângulos na circunferência, especificamente centrais e inscritos;

Reconhecer e calcular arco capaz.

## Símbolo para representar ângulo

### Você sabia?

Além do acento circunflexo para indicar ângulo, tem-se outro símbolo. Observe o ângulo abaixo:

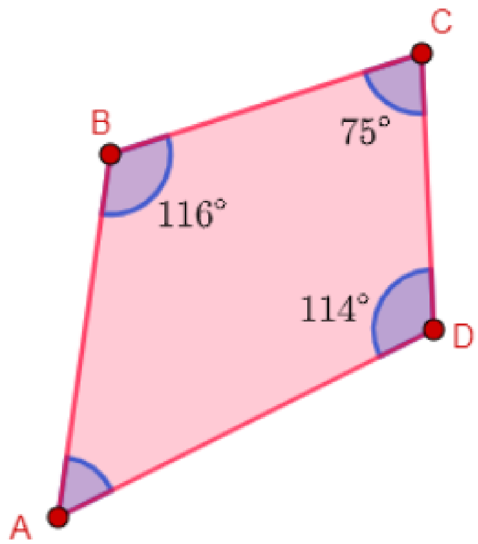



O ângulo acima pode ser representado como ângulo $A\widehat{O}B$ ou $\angle ABC$. Não se assuste caso veja as duas formas, pois têm o mesmo significado!

1. Qual o valor da soma dos ângulos internos de um quadrilátero? *

- ◯ 270°
- ◯ 360°
- ◯ 180°
- ◯ 720°
- ◯ 1560°

2. Marque a opção que representa o valor do ângulo BÂD no quadrilátero a seguir: *



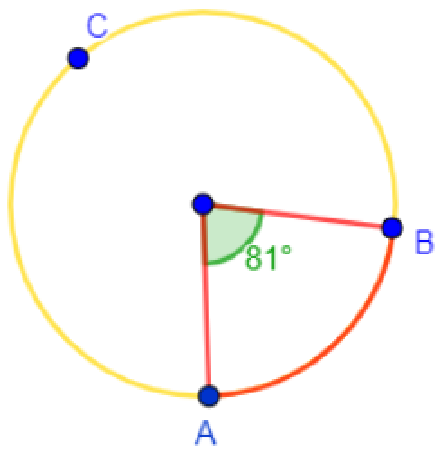

- ◯ 95°
- ◯ 55°
- ◯ 65°
- ◯ 45°
- ◯ 85°

1. O ângulo central é aquele que possui o vértice no centro da circunferência. Esse ângulo possui uma propriedade em relação ao seu arco correspondente. Qual é essa propriedade? *

Sua resposta

2. *

Qual o valor do arco $\overset{\frown}{AB}$ ?



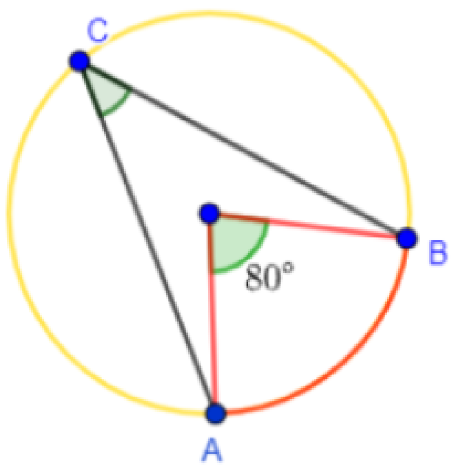

- 81°
- 91°
- 71º
- 61º
- 47°

3. Ângulo inscrito a uma circunferência é um ângulo que tem o vértice na circunferência e os lados são secantes a ela. Esse ângulo possui uma propriedade em relação ao ângulo central ou ao arco correspondente. Qual é essa propriedade?

Sua resposta

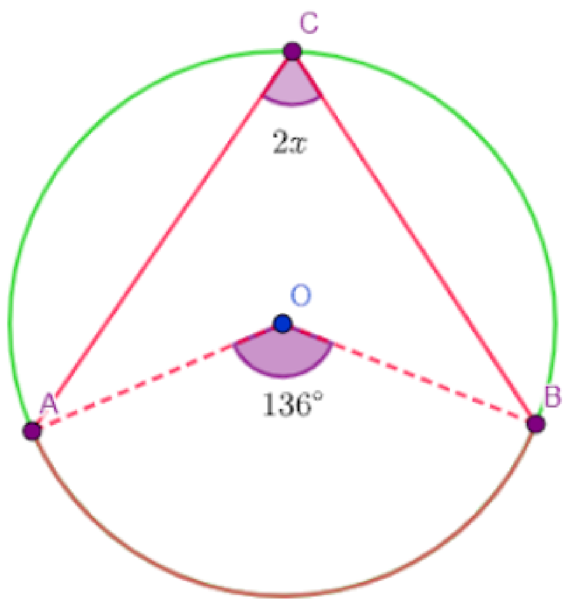
4. *

Qual o valor do ângulo $A\widehat{C}B$?




Adicionar arquivo

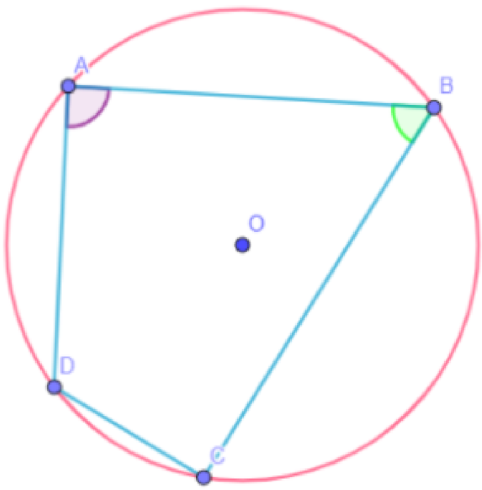
5. Na figura a seguir, calcule o valor de x. *




Adicionar arquivo

6. *

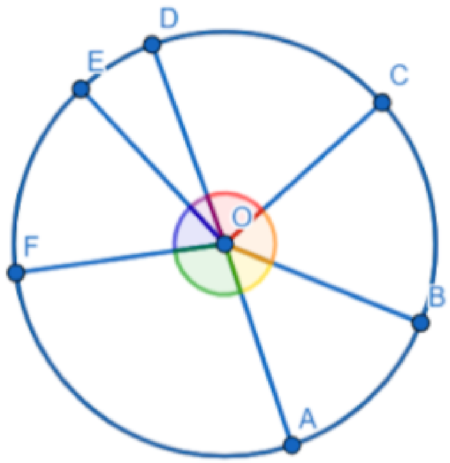
Sabendo que o arco $\overset{\frown}{ADC} = 122°$ e o arco $\overset{\frown}{DCB} = 178°$, determine o valor dos ângulos $D\hat{A}B$ e $A\hat{B}C$?




Texto de resposta curta

1. *

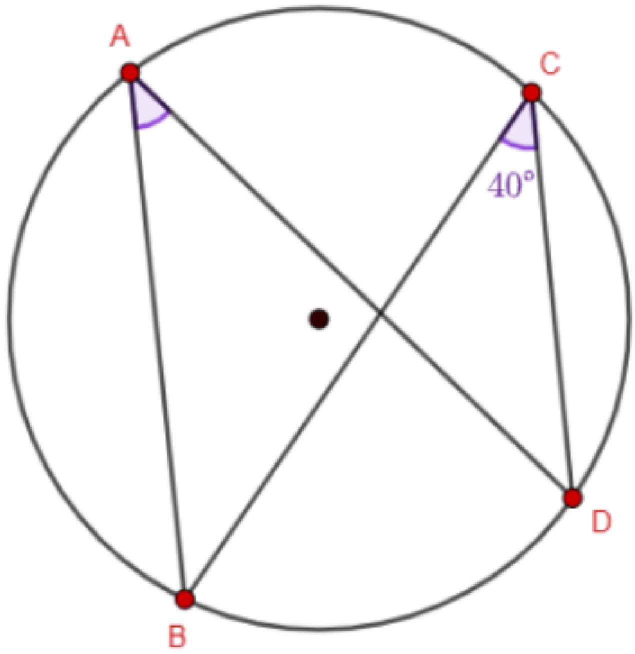
Sabendo que os ângulos centrais $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$, $D\hat{O}E$, $E\hat{O}F$ e $F\hat{O}A$ medem, respectivamente, $50°$, $63°$, $68°$, $25°$, $54°$ e $100°$, marque a opção que representa a soma dos arcos $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DE} + \overset{\frown}{EF} + \overset{\frown}{FA}$.




- ◯ 180°
- ◯ 575°
- ◯ 360°
- ◯ 237°
- ◯ 90°

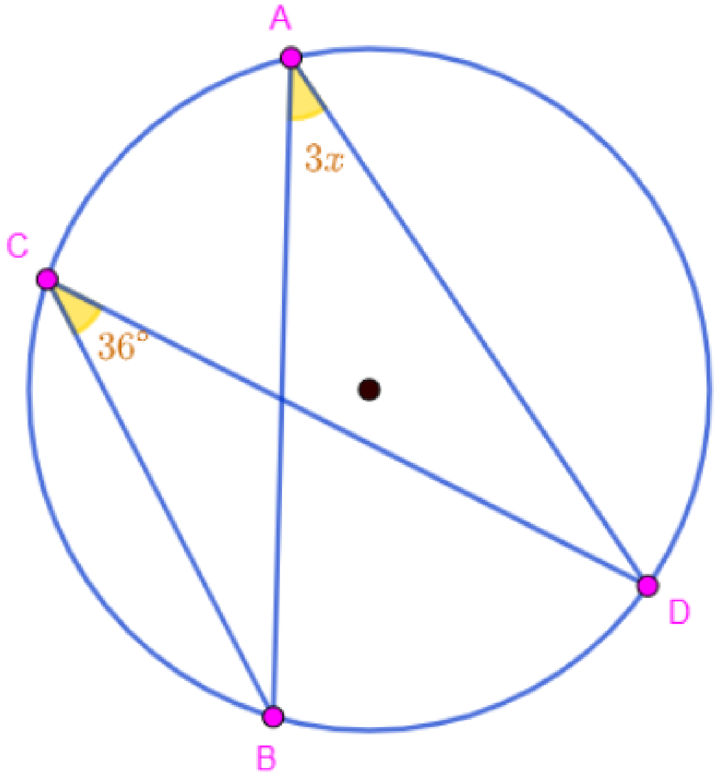
1. *

Qual o valor do ângulo $B\widehat{A}D$?




Sua resposta

2. Marque a opção que representa o valor correto de x. *



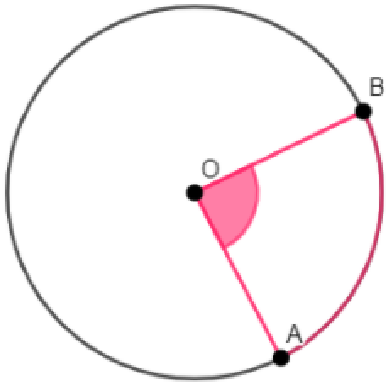

- 28°
- 15°
- 13°
- 12°
- 36°

**Relembrando…**

- **Ângulo Central na Circunferência**

Ângulo central relativo a uma circunferência é o ângulo que tem o vértice no centro da circunferência. Se numa circunferência, um ângulo central determina o arco $\widehat{AB}$ , dizemos que $\widehat{AB}$ é o arco correspondente ao ângulo central $A\hat{O}B$.

Figura 7: Ângulo central




Fonte: Elaboração própria.

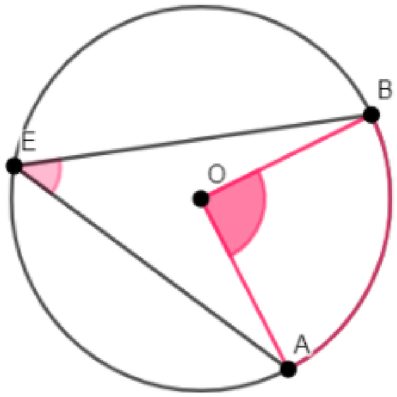
Assim, tem-se:

$$A\widehat{O}B = \widehat{AB}$$

- **Ângulo Inscrito na Circunferência**

Ângulo inscrito relativo a uma circunferência é um ângulo que tem o vértice na circunferência e os lados são secantes a ela. Na figura abaixo, o ângulo $A\hat{E}B$ é um ângulo inscrito que determina o arco $\widehat{AB}$.

Figura 8: Ângulo inscrito




Fonte: Elaboração própria.

Assim, tem-se:

$$A\widehat{E}B = \frac{A\widehat{O}B}{2}$$

INSTITUTO FEDERAL Fluminense Campus Campos Centro
matemática LICENCIATURA
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
PÁTRIA AMADA BRASIL GOVERNO FEDERAL

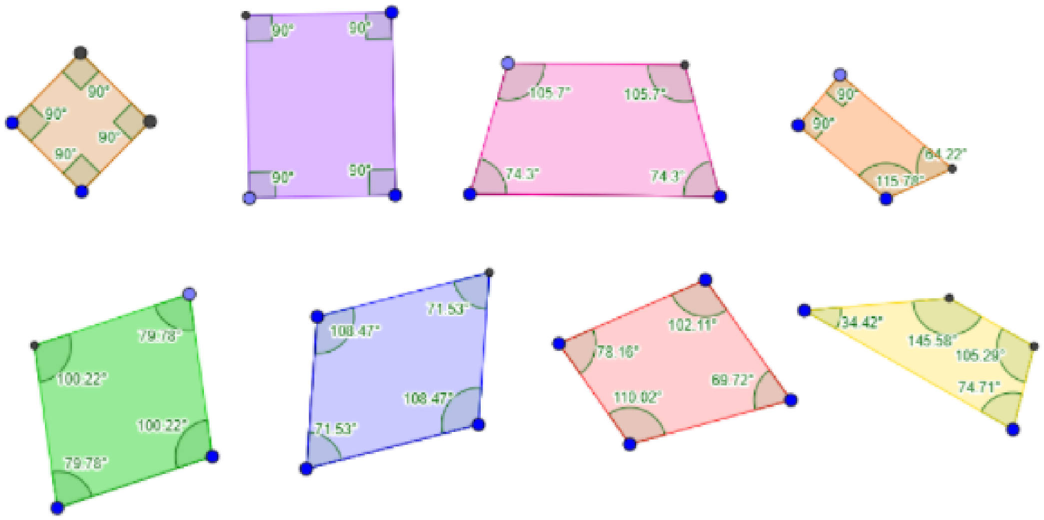
**Diretoria de Ensino Superior - Licenciatura em Matemática**
Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática II
Linha de Pesquisa: Ensino e Aprendizagem de Geometria
Licenciandos: Bianca F de A. Alves, Leonardo C. Serpa, Tailani B. dos Santos
Orientador: Prof.: Me. Cleuber Eduardo do Nascimento Silva

Nome: ________________________________________ Data: ____ / ____ / ____

## Ângulos em Quadriláteros Inscritíveis

Provavelmente você já deve ter estudado quadriláteros e seus ângulos, como os que se encontram a seguir:

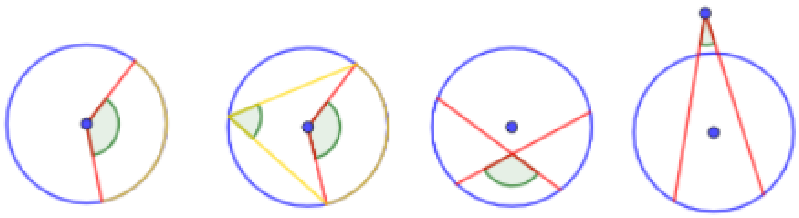
Figura 1: Quadriláteros




Fonte: Elaboração própria.

Também já deve ter estudado sobre circunferência (Figura 2) e seus ângulos:

Figura 2: Ângulos na circunferência



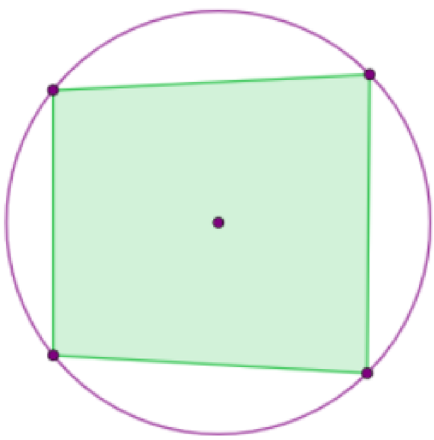
Fonte: Elaboração própria.

Porém, já pensou em uma combinação envolvendo circunferência e quadrilátero? Quais seriam suas propriedades? É isso que veremos na aula de hoje.

**Quadrilátero Inscritível**

O quadrilátero inscritível, também chamado de quadrilátero inscrito na circunferência ou quadrilátero cíclico, é aquele que tem os seus vértices na circunferência.

Figura 3: Quadrilátero Inscrito na circunferência



Fonte: Elaboração própria.

No cotidiano, não é muito encontrado, mas ainda assim é possível vê-lo, como por exemplo, na arte.

Quadro 4: Mandalas

Além disso, tem-se exemplo dele em alguns objetos específicos, como:

Figura 5: botão do controle do PS2.


Alguns matemáticos utilizaram quadriláteros inscritos para desenvolverem fórmulas e teoremas. Entre eles, tem-se Brahmagupta, matemático e astrônomo hindu, que realizou a fórmula de Brahmagupta. Além dele, Ptolomeu, matemático, geógrafo e astrônomo que criou o Teorema de Ptolomeu.

Quadro 6: Brahmagupta e Ptolomeu

**Atividade 1**

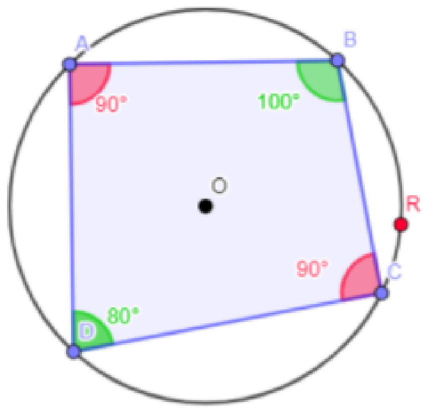
**Explorando o *applet* Quadrilátero Inscrito na Circunferência**

**Conhecendo o *applet***

- Acesse o link https://www.geogebra.org/m/z9rwf2d5

O applet contribui para uma melhor visualização do quadrilátero inscrito na circunferência. Desse modo, tem-se o quadrilátero $ABCD$ inscrito na circunferência de centro $O$ e raio $R$.

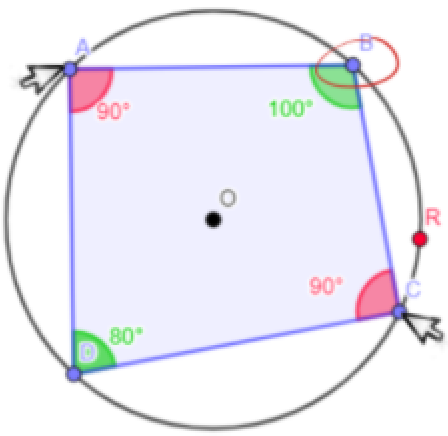
Figura 9: Quadrilátero $ABCD$ inscrito na circunferência de centro O e raio R




Fonte: Elaboração própria.

Para modificar o valor dos ângulos, basta **movimentar os vértices adjacentes** ao ângulo em questão.

Figura 10: Movimentação dos vértices




Fonte: Elaboração própria.

Primeiramente, **analisaremos os ângulos** $\widehat{B}$ **e** $\widehat{D}$, para responder às questões a seguir.

1. **Observe** o ângulo $\widehat{B}$ e o ângulo $\widehat{D}$ e **responda**:

a) Esses ângulos são opostos ou adjacentes?

b) Qual o valor do ângulo $\widehat{B}$?

c) Qual o valor do ângulo $\widehat{D}$?

d) Qual o resultado da **soma dos valores** desses dois ângulos ($\widehat{B}+\widehat{D}$)?

2. **Coloque** o valor do ângulo $\widehat{B}=85°$.

a) Qual o valor do ângulo $\widehat{D}$, após essa modificação?

b) Qual o resultado da **soma dos valores** desses dois ângulos ($\widehat{B}+\widehat{D}$)?

3. Agora, **coloque** o valor do ângulo $\widehat{B}=71°$.

a) Qual o valor do ângulo $\widehat{D}$, após essa modificação?

b) Qual o resultado da **soma dos valores** desses dois ângulos ($\widehat{B}+\widehat{D}$)?

4. Considerando o que foi feito nas questões anteriores, o que você pode deduzir sobre a soma dos ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{D}$?

Agora, **analisaremos os ângulos** $\widehat{A}$ **e** $\widehat{C}$ para dar continuidade às questões a seguir. Porém, antes de continuar, **fecharemos o link anterior e iremos abri-lo novamente**.

5. **Observe** o ângulo $\widehat{A}$ e o ângulo $\widehat{C}$ e **responda**:

a) Esses ângulos são opostos ou adjacentes?

b) Qual o valor do ângulo $\widehat{A}$?

c) Qual o valor do ângulo $\widehat{C}$?

d) Qual o resultado da **soma dos valores** desses dois ângulos ($\widehat{A}+\widehat{C}$)?

6. Coloque o valor do ângulo $\widehat{A} = 62°$ .

a) Qual o valor do ângulo $\widehat{C}$, após essa modificação?

b) Qual o resultado da **soma dos valores** desses dois ângulos ($\widehat{A}+\widehat{C}$)?

7. Coloque o valor do ângulo $\widehat{A} = 100°$ .

a) Qual o valor do ângulo $\widehat{C}$, após essa modificação?

b) Qual o resultado da **soma dos valores** desses dois ângulos ($\widehat{A}+\widehat{C}$)?

8. De acordo com o que foi observado nas questões **5, 6 e 7**, responda: o que você pode constatar em relação a soma dos ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$?

9. **No geral**, o que se pode concluir em relação a **soma dos ângulos opostos de um quadrilátero inscrito na circunferência**?

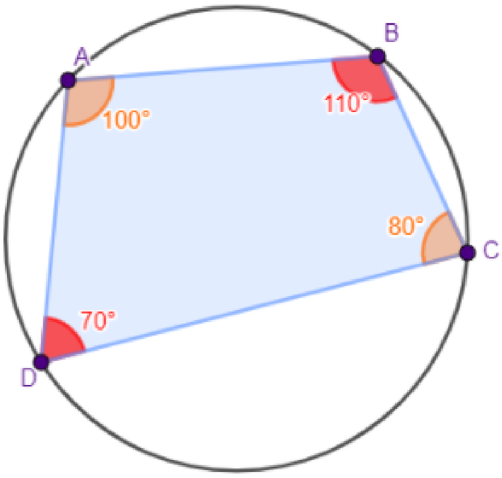
**Atividade 2**

**Explorando o *applet* Quadrilátero Inscrito na Circunferência - condição**

- Acesse o link https://www.geogebra.org/m/bzcyyzp8

Esse *applet* permitirá explorar e visualizar a condição que torna o quadrilátero possível de ser inscrito na circunferência. Assim, tem-se o quadrilátero $ABCD$ inscrito na circunferência (Figura 11).

Figura 11: Quadrilátero $ABCD$ inscrito na circunferência.




Fonte: Elaboração Própria

Para modificar o valor dos ângulos, basta movimentar os vértices.

1. **Observe** os pares de ângulos opostos.

a) **Verifique e escreva** a soma dos ângulos opostos.

2. **Mova** os vértices do quadrilátero de acordo com os itens a seguir.

a) O que ocorre com o quadrilátero quando a **soma dos ângulos opostos é menor que** $180°$?

b) O que ocorre com o quadrilátero quando a **soma dos ângulos opostos é igual a** $180°$?

c) O que ocorre com o quadrilátero quando a **soma dos ângulos opostos é maior que** $180°$?

3. Qual resultado deve dar a soma dos ângulos opostos para que o **quadrilátero esteja inscrito na circunferência**?

## REFERÊNCIAS


CASA PRINT. **Figura 5: botão do controle do PS2.** Disponível em: <https://www.lojacasaprint.com.br/controle-com-fio-dual-shock-para-playstation-2-ps2-sony> . Acesso em 04 de out. 2021.

CRUZ, Tiago Custódio da; CAROLINE, Bárbara. **Cópia de Quadriláteros.** Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/cpttbzg4t>. Acesso em 15 de nov. 2021.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos da Matemática Elementar**, volume 9. 9ª ed. São Paulo: Atual Editora, 2013**.**

GLOBO CIÊNCIA; SAPAVIVA.. **Quadro 6: Brahmagupta e Ptolomeu** . Disponível em: <http://redeglobo.globo.com/globociencia/noticia/2011/10/de-ptolomeu-aos-dias-de-hoje-entenda-como-sao-feitos-os-mapas.html>, <https://www.sapaviva.com/brahmagupta-2/>. Acesso em: 06 de out. 2021

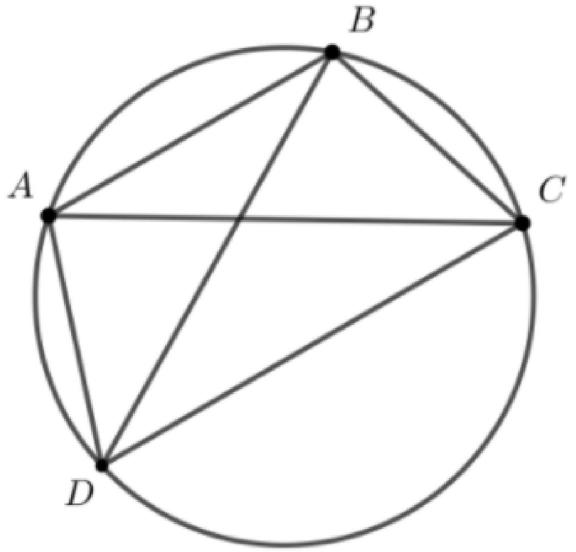
NAVASOTA ARTISTS IN RESIDENCE. **Quadro 4: Mandalas**. Disponível em: <https://www.google.com/amp/s/navasotaair.wordpress.com/2015/06/25/art-camp-summa/amp/>, .Acesso em 04 de out. 2021.

OLIVEIRA, Gabriela Vicentini de et al. **Brahmagupta e quadriláteros cíclicos no ensino médio**. 2015.

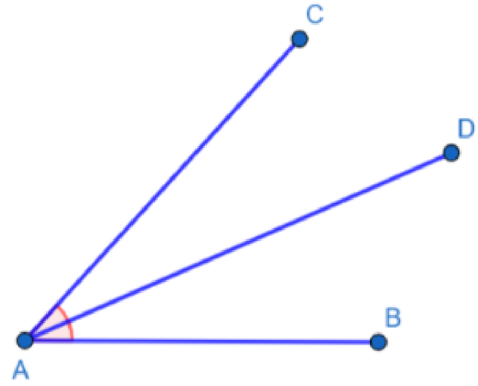
PEREIRA, Giancarlo Secci; CORRÊA, João Nazareno Pantoja; GOMES, Cristiane Ruiz. **TEOREMA DE PTOLOMEU:** HISTÓRIA, DEMONSTRAÇÃO E VALIDAÇÃO VIA GEOGEBRA. Boletim Cearense de Educação e História da Matemática, v. 7, n. 20, p. 335-346, 2020.

**Exemplo 1**
**Questão da OBMEP de 2020 sobre Quadrilátero Inscrito**
https://www.geogebra.org/m/fnbzmguk

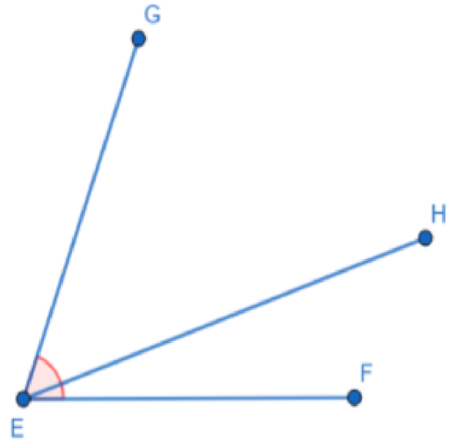
Os vértices do quadrilátero $ABCD$ estão em uma circunferência. Cada uma de suas diagonais **bissecta** um ângulo e **trissecta** o ângulo oposto. Determine as medidas dos ângulos do quadrilátero.




**Observações:** Dizemos que uma semirreta $OM$ **trissecta** $\angle AOB$ se a amplitude de um dos dois ângulos determinados por ela é um terço do valor da amplitude do ângulo $\angle AOB$ **.**



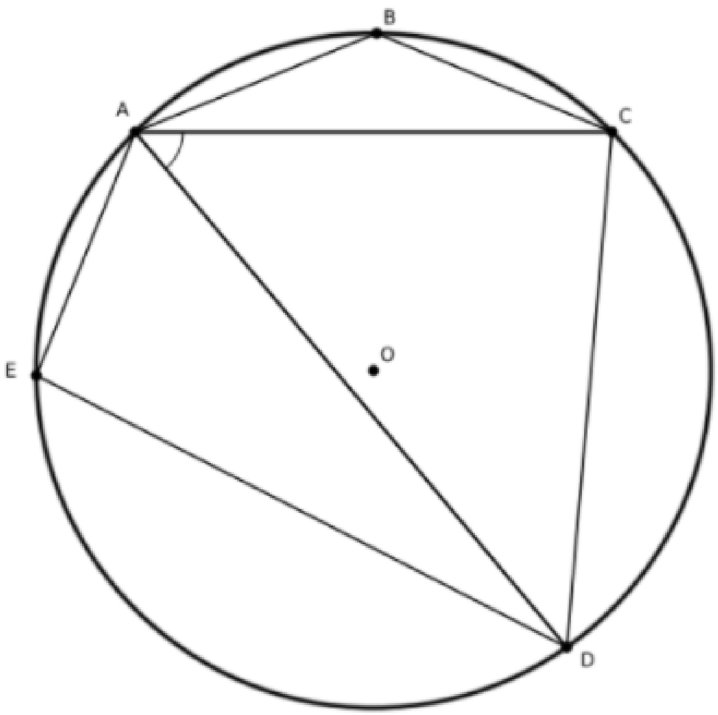

**Bissetriz**




**Trissetriz**

**Exemplo 2**
**Questão da OBMEP de 2016 sobre Quadrilátero Inscrito**
https://www.geogebra.org/m/g649kcjc

Todos os vértices do pentágono $ABCDE$ estão sobre o mesmo círculo. Se $\angle CAD = 50°$ , determine $\angle ABC + \angle AED$ .



## REFERÊNCIAS

IMPA. OBMEP. **Banco de Questões 2016.** Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

IMPA. OBMEP. **Banco de Questões 2020.** Rio de Janeiro: IMPA, 2020.

Para acessar a Atividade de Verificação: https://forms.gle/knV1BXnZEdGcTRNt5.

# Atividade de verificação

Agora é hora de colocar em prática o que foi aprendido! Boa atividade!

1. *

(UNIFENAS) O quadrilátero $ABCD$ está inscrito em uma circunferência e o ângulo $A\hat{B}C$ mede 108°. A medida do ângulo $C\hat{D}A$ é igual a:

- a) 22°
- b) 36°
- c) 72°
- d) 92°
- e) 108°

Para melhor visualização da questão 2, acesse o link: https://www.geogebra.org/m/vspkmk66.

2.

Phineas e Ferb é uma série criada por Jeff Marsh e Dan Povenmire em 2007. Nela, os irmãos Phineas e Ferb, durante suas férias de verão, criam as maiores invenções no quintal de sua casa.

Figura 1: Phineas e Ferb na montanha-russa que construíram.

Para a próxima aventura, os dois irmãos precisarão, inicialmente, construir um lago com o formato de um quadrilátero (parte onde ficará a água) inscrito em uma circunferência (que será a borda do lago). Porém, eles só sabem a medida da amplitude de dois ângulos, que medem 91° e 82°. Para colocar a mão na massa, precisam saber a amplitude dos outros dois ângulos também. Desse modo, marque os valores que representam as medidas dos outros dois ângulos.

- ○ 95° e 87°
- ○ 100° e 89°
- ○ 98° e 89°
- ○ 98° e 75°
- ○ 102° e 77°

# Apêndice B- Materiais Didáticos Adaptados do LEAMAT II

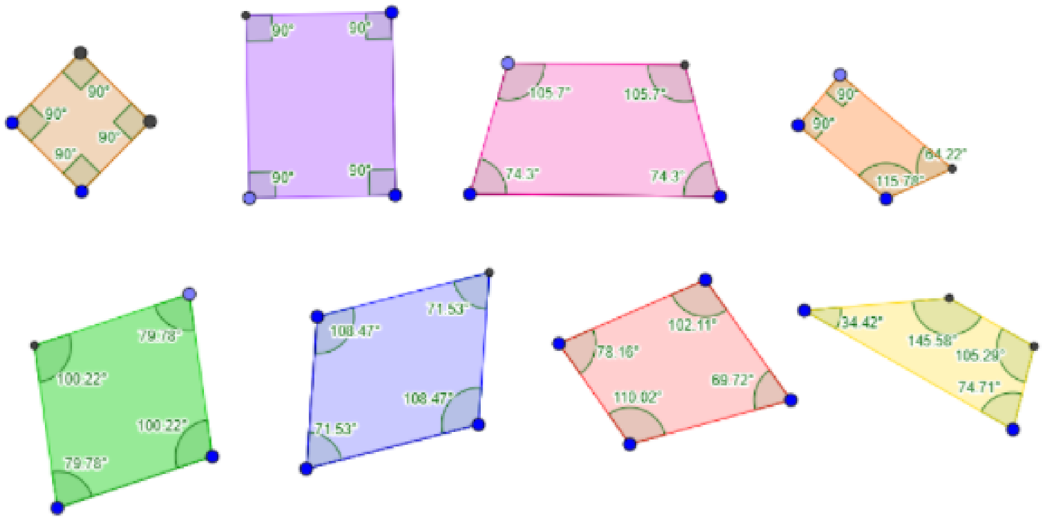
**Diretoria de Ensino Superior - Licenciatura em Matemática**
Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática II
Linha de Pesquisa: Ensino e Aprendizagem de Geometria
Licenciandos: Bianca F de A. Alves, Leonardo C. Serpa, Tailani B. dos Santos
Orientador: Prof.: Me. Cleuber Eduardo do Nascimento Silva

Nome: ________________________________________ Data: ____ / ____ / ____

## Ângulos em Quadriláteros Inscritíveis

Provavelmente você já deve ter estudado quadriláteros e seus ângulos, como os que se encontram a seguir:

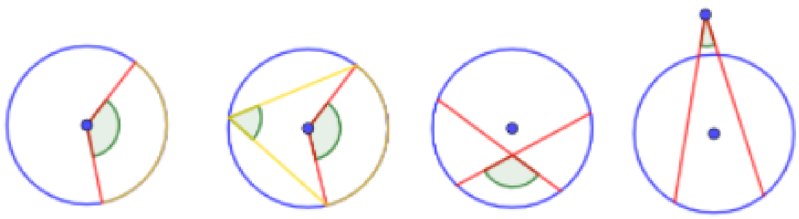
Figura 1: Quadriláteros




Fonte: Elaboração própria.

Também já deve ter estudado sobre circunferência (Figura 2) e seus ângulos:

Figura 2: Ângulos na circunferência



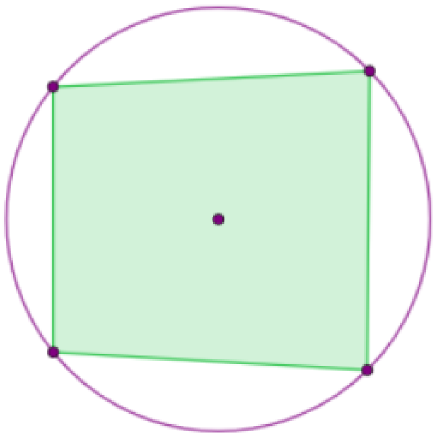
Fonte: Elaboração própria.

Porém, já pensou em uma combinação envolvendo circunferência e quadrilátero? Quais seriam suas propriedades? É isso que veremos na aula de hoje.

## Quadrilátero Inscritível

O quadrilátero inscritível, também chamado de quadrilátero inscrito na circunferência ou quadrilátero cíclico, é aquele que tem os seus vértices na circunferência.

Figura 3: Quadrilátero Inscrito na circunferência



Fonte: Elaboração própria.

No cotidiano, não é muito encontrado, mas ainda assim é possível vê-lo, como por exemplo, na arte.

Figura 4: Mandalas

Além disso, tem-se exemplo dele em alguns objetos específicos, como:

Figura 5: botão do controle do PS2.


Alguns matemáticos utilizaram quadriláteros inscritos para desenvolverem fórmulas e teoremas. Entre eles, tem-se Brahmagupta, matemático e astrônomo hindu, que realizou a fórmula de Brahmagupta. Além dele, Ptolomeu, matemático, geógrafo e astrônomo que criou o Teorema de Ptolomeu.

Figura 6: Brahmagupta e Ptolomeu

**Atividade 1**

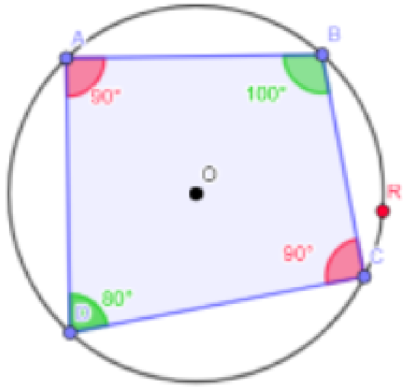
**Explorando o *applet* Quadrilátero Inscrito na Circunferência**

**Conhecendo o *applet***

- Acesse o link https://www.geogebra.org/m/z9rwf2d5

O applet contribui para uma melhor visualização do quadrilátero inscrito na circunferência. Desse modo, tem-se o quadrilátero $ABCD$ inscrito na circunferência de centro $O$ e raio $R$.

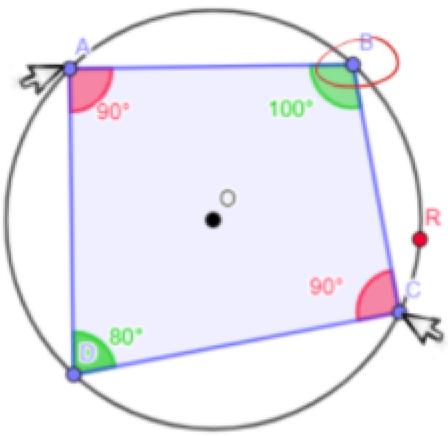
Figura 7: Quadrilátero $ABCD$ inscrito na circunferência de centro O e raio R




Fonte: Elaboração própria.

Para modificar o valor dos ângulos, basta **movimentar os vértices adjacentes** ao ângulo em questão.

Figura 8: Movimentação dos vértices




Fonte: Elaboração própria.

Primeiramente, **analisaremos os ângulos** $\widehat{B}$ **e** $\widehat{D}$, para responder às questões a seguir.

1. **Observe** o ângulo $\widehat{B}$ e o ângulo $\widehat{D}$ e **responda**:

a) Esses ângulos são opostos ou adjacentes?

b) Qual o valor do ângulo $\widehat{B}$?

c) Qual o valor do ângulo $\widehat{D}$?

d) Qual o resultado da **soma dos valores** desses dois ângulos ($\widehat{B}+\widehat{D}$)?

2. **Coloque** o valor do ângulo $\widehat{B}=85°$ .

a) Qual o valor do ângulo $\widehat{D}$, após essa modificação?

b) Qual o resultado da **soma dos valores** desses dois ângulos ($\widehat{B}+\widehat{D}$)?

3. Agora, **coloque** o valor do ângulo $\widehat{B}=71°$ .

a) Qual o valor do ângulo $\widehat{D}$, após essa modificação?

b) Qual o resultado da **soma dos valores** desses dois ângulos ($\widehat{B}+\widehat{D}$)?

4. Considerando o que foi feito nas questões anteriores, o que você pode deduzir sobre a soma dos ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{D}$?

Agora, **analisaremos os ângulos** $\widehat{A}$ **e** $\widehat{C}$ para dar continuidade às questões a seguir. Porém, antes de continuar, **fecharemos o link anterior e iremos abri-lo novamente**.

5. **Observe** o ângulo $\widehat{A}$ e o ângulo $\widehat{C}$ e **responda**:

a) Esses ângulos são opostos ou adjacentes?

b) Qual o valor do ângulo $\widehat{A}$?

c) Qual o valor do ângulo $\widehat{C}$?

d) Qual o resultado da **soma dos valores** desses dois ângulos ($\widehat{A}+\widehat{C}$)?

6. Coloque o valor do ângulo $\widehat{A}=62°$ .

a) Qual o valor do ângulo $\widehat{C}$, após essa modificação?

b) Qual o resultado da **soma dos valores** desses dois ângulos ($\widehat{A}+\widehat{C}$)?

7. Coloque o valor do ângulo $\widehat{A}=100°$ .

a) Qual o valor do ângulo $\widehat{C}$, após essa modificação?

b) Qual o resultado da **soma dos valores** desses dois ângulos ($\widehat{A}+\widehat{C}$)?

8. De acordo com o que foi observado nas questões **5, 6 e 7**, responda: o que você pode constatar em relação a soma dos ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$?

9. Agora, mova os pares de ângulos opostos para o valor que desejar. O que você observa quanto a soma dos ângulos opostos de um Quadrilátero Inscritível?

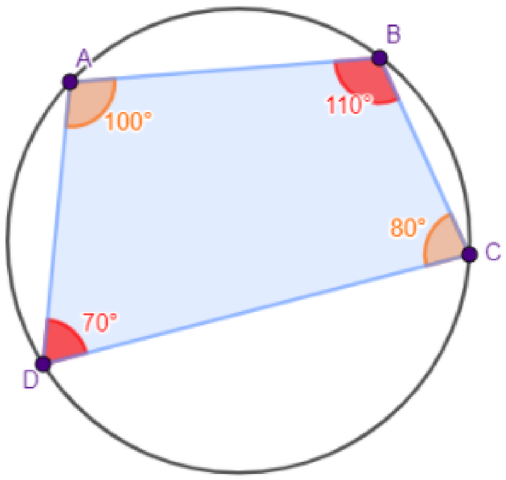
10. **No geral**, o que se pode concluir em relação a **soma dos ângulos opostos de um quadrilátero inscrito na circunferência**?

## Atividade 2
## Explorando o *applet* Quadrilátero Inscrito na Circunferência - condição

- Acesse o link https://www.geogebra.org/m/bzcyyzp8

Esse *applet* permitirá explorar e visualizar a condição que torna o quadrilátero possível de ser inscrito na circunferência. Assim, tem-se o quadrilátero $ABCD$ inscrito na circunferência (Figura 9).

Figura 9: Quadrilátero $ABCD$ inscrito na circunferência.




Fonte: Elaboração Própria

Para modificar o valor dos ângulos, basta movimentar os vértices.

1. **Observe** os pares de ângulos opostos.

a) **Escreva** a soma dos ângulos opostos.

2. **Mova** os vértices do quadrilátero de acordo com os itens a seguir.

b) O que ocorre com o quadrilátero quando a **soma dos ângulos opostos é igual a** $180°$?

c) O que ocorre com o quadrilátero quando a **soma dos ângulos opostos é maior que** $180°$?

3. Qual resultado deve dar a soma dos ângulos opostos para que o **quadrilátero esteja inscrito na circunferência**?