RELATÓRIO DO LEAMAT

LÚNULAS DE HIPÓCRATES: MÉTODO ALTERNATIVO PARA CALCULAR A ÁREA DE UM TRIÂNGULO RETÂNGULO

ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA

FLÁVIA DE SOUZA HERNANDES
MARIANA PEIXOTO SIQUEIRA
RAQUEL RODRIGUES DA SILVA ROBAINA

CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
2021.1

FLÁVIA DE SOUZA HERNANDES
MARIANA PEIXOTO SIQUEIRA
RAQUEL RODRIGUES DA SILVA ROBAINA

RELATÓRIO DO LEAMAT I

LÚNULAS DE HIPÓCRATES: MÉTODO ALTERNATIVO PARA CALCULAR A ÁREA DE UM TRIÂNGULO RETÂNGULO

ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA

Trabalho apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, *campus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão da disciplina Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Cleuber Nascimento

CAMPOS DOS GOYTACAZES – RJ
2021.1

SUMÁRIO

1) RELATÓRIO DO LEAMAT I

1.1) Atividades desenvolvidas

No primeiro encontro, 25 de abril de 2019, houve uma breve apresentação da disciplina LEAMAT, bem como de duas linhas de pesquisa: Educação Matemática Inclusiva e Ensino e Aprendizagem de Geometria.

No dia 09 de abril de 2019, discutimos o artigo “Ensino de Geometria: Rumo da pesquisa (1991-2011)” relacionando o caminho percorrido pela Geometria na sala de aula com as nossas próprias vivências durante a educação básica, denotando a insuficiência no ensino de Geometria desde as séries iniciais, ocasionando um ensino insatisfatório da mesma.

No dia 23 de maio de 2019, fizemos um breve discurso sobre o artigo “Ensino de Geometria: Rumo da pesquisa (1991-2011)” no qual aborda o mapeamento, em teses brasileiras, de pesquisas cuja temática faz referência à Geometria. O artigo aborda desde como a Geometria foi inicialmente trabalhada no país em 1648, pela dificuldade de soldados sem conhecimentos matemáticos em acertar alvos, realizar leitura de mapas e organizar o material de artilharia, até o presente instante em que passa a ser trabalhada de forma intuitiva, deixando de ser um conhecimento pronto, passando a ser concebida como saber prático e dinâmico, apesar de ainda ocupar um pequeno espaço na sala de aula, sendo apresentado de forma rápida.

No dia 06 de junho de 2019, a aula foi destinada à pesquisa de temas para linha de pesquisa de Ensino e Aprendizagem de Geometria.

No dia 27 de junho, a aula foi destinada a discussão do tema escolhido pelo grupo e a demonstração que a área das lúnulas limitadas por semicircunferências construídas sobre os lados de um triângulo retângulo qualquer são equivalentes a área do triângulo retângulo, bem como a discussão do tema do grupo B2.

No dia 11 de julho de 2019 foram feitas as apresentações da linha de pesquisa de ensino e aprendizagem de Geometria dos grupos A2 e B2, que foram “Transformações Geométricas: Isométricas” e “Lúnulas de Hipócrates: Método alternativo para calcular a área de um triângulo ”, respectivamente.

1.2) Elaboração da sequência didática

1.2.1) Tema

Calcular a área de um triângulo retângulo através das Lúnulas de Hipócrates.

1.2.2) Justificativa

A escolha do tema se dá pela deficiência na aprendizagem do cálculo de área do triângulo retângulo no Ensino Médio.

O ensino de Geometria em geral não possui muita relevância. Segundo PAVANELLO (1989) os professores tanto pela dificuldade, como pela falta de capacitação adequada apresentam o conteúdo de Geometria apenas no final do ano letivo. Tendo em vista que não é um conteúdo lecionado nas séries iniciais, é apresentada aos alunos de forma supérflua no ensino médio.

Mesmo que apresentada de maneira tradicional, com apresentação de figuras planas e deduções das fórmulas de calcular as áreas das mesmas, o professor precisa incentivar seus alunos a deduzirem e perceberem as ligações lógicas que existem por trás dos conceitos. O ensino deve ter significado para este aluno fazer relações do que está sendo aplicado em sala de aula com o mundo em que está inserido.

Quando viu-se a importância do ensino de Geometria na educação básica, foi percebido que existem outras conexões da Geometria com relação ao mundo a nossa volta. Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) dissertam sobre essa valia:

> Numa outra direção, as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca. (BRASIL, 2000.p. 44)

Verifica-se que a Geometria é de extrema importância para a compreensão do mundo, pois a partir dela, alunos têm a possibilidade de desenvolver capacidades de observação, análise, localização, visualização, comparação, generalização, abstração, e a partir de todas essas competências, desenvolver o pensamento lógico do aluno. As Orientações Curriculares para os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) (2002) explicitam sua importância:

> A Geometria, ostensivamente presente nas formas naturais e construídas, é essencial à descrição, à representação, à medida e ao dimensionamento de uma infinidade de objetos e espaços na vida diária e nos sistemas produtivos e de serviços.(BRASIL, 2002. p.123).

Contudo, para compreender o mundo que vivemos na atualidade, muitas vezes é necessário recorrer ao seu passado, à gênese de sua criação, da mesma forma, é importante buscar a história da Matemática, intimamente ligada à história da Geometria, pois por muito tempo, buscar a resolução de um problema era buscar uma resposta geométrica para tal. Por isso os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (1998) apontam a importância da História da Matemática:

> A História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento (BRASIL, 1998, p. 42).

Não obstante a BNCC propõe como habilidade para o Ensino Médio a utilização de diferentes métodos para calcular áreas de figuras planas:

> "(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície[...] (BRASIL,2018, p. 536)".

Portanto, a partir das habilidades previstas na Base Nacional, e da importância da história da matemática nas aulas, pretendemos guiar nossa sequência didática a partir do estudo das Lúnulas de Hipócrates, focando sua relação com o Teorema de Pitágoras.

1.2.3) Objetivo Geral

Elaborar uma sequência didática que permita aos alunos conhecer uma forma alternativa para calcular a área de um triângulo retângulo, priorizando a história da matemática, levando os alunos a entender a Matemática como uma construção.

1.2.4) Público-alvo

Alunos do 1º. ano do ensino médio.

2) RELATÓRIO DO LEAMAT II

2.1) Atividades desenvolvidas

No primeiro encontro do semestre, dia 18 de setembro de 2019, foi apresentado o calendário, planejamento e ementa da disciplina. A elaboração da aplicação exigirá a dedicação de cada grupo e a avaliação qualitativa será ao final do semestre, conforme o planejamento.

Os seguintes encontros foram voltados para a elaboração da sequência didática da linha de pesquisa de geometria.

A partir do dia 06 de novembro do mesmo ano, realizaram-se as aplicações das sequências didáticas da linha de pesquisa de Geometria na própria turma do LEAMAT II. Logo após as aplicações, iniciou-se a escrita dos relatórios para aguardar as suas respectivas correções.

2.2) Elaboração da sequência didática

2.2.1) Planejamento da sequência didática

No início da aplicação didática, acontecerá a exposição do tema, e serão entregues as apostilas com conteúdo a ser trabalhado. Em seguida, será apresentada a história da descoberta das Lúnulas, através de Hipócrates de Quios, e a sua relação com o triângulo retângulo.

As civilizações mais antigas do Egito obtinham a área de um espaço delimitado construindo a quadratura da forma geométrica que este espaço formava. Para contextualização, deverá ser mostrado como era realizada a quadratura de triângulos com material de cartolina. Hipócrates tinha por objetivo realizar a quadratura de um círculo que, até então, não havia sido construído.

Como o círculo é uma forma geométrica não poligonal, Hipócrates segue por diferentes caminhos para obter o que deseja e, em um desses caminhos, ele chega ao que chama de Lúnulas.

Primeiramente, Hipócrates estabelece relação entre Lúnulas e triângulos isósceles e, em outro momento, com triângulos retângulos. Nesse momento, deve-se explicar a conclusão de Hipócrates: a soma das áreas das lúnulas correspondentes aos catetos de um triângulo retângulo equivalem a área desse triângulo. Essa demonstração deverá ser realizada no quadro.

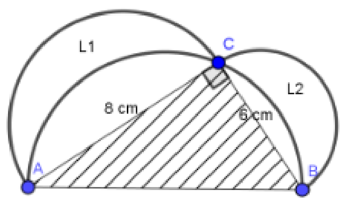
A partir da demonstração, será utilizado o material concreto ou o geogebra para que o aluno tenha a visualização do que foi provado algebricamente.

Por fim, haverão duas atividades para que o aluno possa resolver. As fórmulas da área do semicírculo e da área do triângulo estarão no rodapé da apostila para suporte. Nesse momento é interessante que o professor fique disperso pela sala a fim de sanar dúvidas.

A primeira atividade será de elaboração própria e tem o seguinte enunciado:

Figura 1 - Atividade 1

Atividade 1: Na figura abaixo, temos o triângulo retângulo ABC, inscrito em um semicírculo. Tendo outros dois semicírculos, cujos diâmetros são os catetos $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$ do triângulo, encontre a soma das medidas das lúnulas de Hipócrates.



Fonte: Elaboração própria

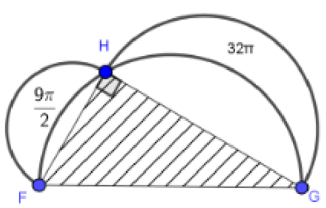
Enquanto a segunda, igualmente de elaboração própria, terá o seguinte enunciado:

Figura 2 - Atividade 2

Atividade 2: Considerando o triângulo FGH retângulo em H, determine a área desse triângulo a partir das seguintes medidas:

Área da lúnula correspondente ao diâmetro $\overline{FH} = \frac{9\pi}{2}$cm²

Área da lúnula correspondente ao diâmetro $\overline{GH}$ = 32π cm²

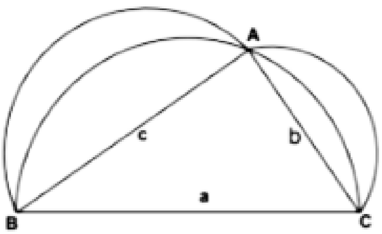


Fonte: elaboração própria

A terceira atividade foi aproveitada do vestibular da UFPR Litoral (2007) e tem o seguinte enunciado:

Figura 3 - Atividade 3

Atividade 3: (UFPR LITORAL - 2007) Hipócrates, geômetra grego da ilha de Jônia de Quios, nasceu cerca de 460 a.C. e se imortalizou ao produzir um célebre livro em que reuniu de modo lógico e organizado a Geometria da época. Ele também se notabilizou por ter sido o primeiro matemático da história a calcular rigorosamente áreas de certas figuras delimitadas por linhas curvas, chamadas de "lúnulas".



A área dessas lúnulas é a área do triângulo ABC mais as áreas dos dois semicírculos cujos diâmetros são os catetos b e c, menos a área do semicírculo de diâmetro igual à hipotenusa a. Assinale a alternativa que fornece a área das lúnulas.

a) (ab)/2 u.a.

b) (ac)/2 u.a.

c) (πa2)/2 u.a.

d) (bc)/2 u.a.

e) a/(bc) u.a.

Fonte: UFPR LITORAL, 2007.

As atividades têm como objetivo que o aluno comprove a relação entre o triângulo retângulo e as Lúnulas de seus catetos apresentado na sequência didática. Após decorrido o tempo pré-estipulado para resolução das atividades pelos alunos, as mesmas serão resolvidas no quadro a fim de discutir e solucionar as possíveis dúvidas.

2.2.2) Aplicação da sequência didática na turma do LEAMAT II

No dia 18 de dezembro de 2019, foi aplicada a sequência didática elaborada, na turma do LEAMAT II , com o objetivo de apresentar a sequência, a fim de colher sugestões dos colegas presentes, como também os apontamentos de possíveis problemas e discussões acerca do tema.

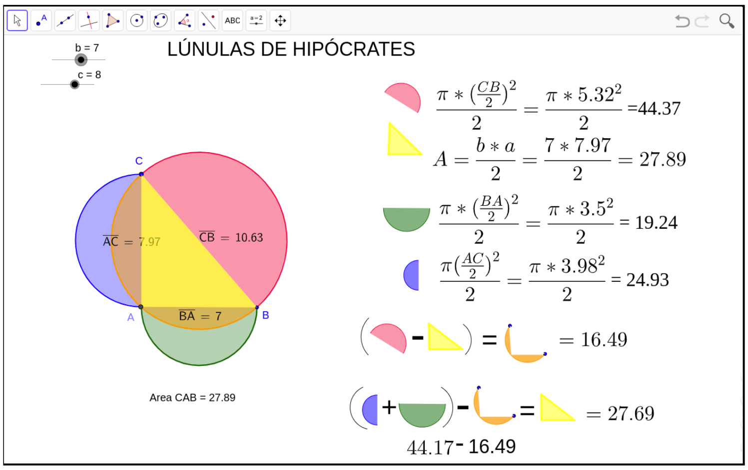
A sequência didática foi iniciada com a história de Hipócrates de Quios e o caminho que ele seguiu para descobrir as Lúnulas. Com a utilização do material feito com cartolina, foi mostrado como se dava a quadratura de formas geométricas nas civilizações mais antigas do Egito, utilizando como referência a quadratura de um triângulo.

Posteriormente, com o decorrer da história de Quios e com o auxílio de outro cartaz com a Lúnula de Hipócrates e legendas em letras do alfabeto, mostrou-se a área correspondente a das lúnulas dando prosseguimento com a demonstração para provar o que Hipócrates afirmou a área de um triângulo retângulo corresponde a soma das áreas das lúnulas que estão sobrepostas em seus respectivos catetos.

Optou-se por utilizar o Geogebra (Figura 4) que nos permitiu construir o triângulo retângulo, as Lúnulas e incluir os valores de suas áreas para analisar que: mesmo alterando o tamanho dos lados do triângulo, a soma das áreas das Lúnulas permanecem igual a da área do triângulo.

Encontramos o applet já pronto do autor GENER 2012, cuja construção é a demonstração gráfica das Lúnulas de Hipócrates. Realizamos uma adaptação, mas utilizamos o material por ele preparado como base.

Figura 4 - applet do Geogebra



Fonte : https://www.geogebra.org/m/rpgq5bge

Ao final, as atividades foram aplicadas estipulando tempo para cada uma delas e, esgotado o tempo individual de cada questão, foi realizada a resolução da mesma no quadro. Os alunos se mostraram interessados e a maioria deles concluiu as atividades antes da resolução no quadro.

A sequência não aconteceu como programada, foi possível notar que fez-se necessário maior domínio sobre os materiais escolhidos. Como o conteúdo não é tão simples, foram sugeridas algumas modificações na apostila, para que a aula se tornasse mais dinâmica, com linguagem mais próxima da realidade dos alunos, e por isso foi pensado na possibilidade de narrar essa descoberta de Hipócrates por meio de uma história em quadrinhos. Dessa maneira, é possível incluir o aluno, pedindo para que participe da leitura.

Será alterada a ordem das atividades, visto que o tempo é curto, e a aprendizagem se daria melhor se o aluno acompanhasse o material na seguinte ordem: Primeiramente ocorrerá a leitura sobre a definição da quadratura conforme se encontra na apostila inicial. Logo após, deverá ser realizada a demonstração com o auxílio da cartolina, em seguida será introduzida a história das Lúnulas com o auxílio de um quadrinho.

Após este momento, haverá uma atividade que contará com desenhos hachurados para que os alunos identifiquem quais são exemplos de lúnulas e quais não são. E então será utilizada a ideia que a atividade 3 (modificada) da apostila inicial propõe, para demonstrar algebricamente que as áreas das Lúnulas, projetadas sobre os catetos de triângulos retângulos, somadas equivale a própria área do triângulo. Haverá um espaço em branco na apostila para que o aluno possa anotar essa demonstração após a compreensão.

Feito isso, utilizaremos o software do Geogebra para explorar ainda mais a exatidão desse processo e mostrar a veracidade desse procedimento.

E encerraremos a nossa aplicação com as atividades 1 e 2.

3) RELATÓRIO DO LEAMAT III

3.1) Atividades desenvolvidas

De acordo com a ementa da disciplina de LEAMAT III, faz-se necessário a aplicação da sequência final em turmas do ensino regular. Por tal razão, era previsto a aplicação dessa sequência didática de forma presencial em alguma turma do 1º. ano do Ensino Médio. Porém, com a disseminação do Coronavírus em decorrência à pandemia da Covid-19, houve a necessidade de alteração desse projeto, o transformando em um livro digital.

Durante as primeiras aulas dessa disciplina, realizamos a releitura do relatório, analisamos as considerações da turma durante o teste exploratório aplicado no LEAMAT II, para efetuar as correções necessárias. Após esse momento de retomada da sequência didática, houve a elaboração da versão final da sequência e também a escrita do e-book.

Durante o LEAMAT III elaboramos materiais para aprimorar a sequência didática, como a História em quadrinhos, contando um pouco da origem das Lúnulas e do matemático grego responsável por esses estudos, Hipócrates de Quios. A construção da HQ foi realizada no *Canva*, uma plataforma de design gráfico que permite criar conteúdos visuais.

Além disso, foi utilizado o *Geogebra*, um aplicativo de matemática que combina elementos da Geometria e da Álgebra. O Geogebra foi utilizado para elaborar as figuras utilizadas na sequência didática e no relatório, bem como na escolha do applet utilizado, com a autoria de GENER (2012) e adaptado pelo grupo para atender ao objetivo do trabalho.

3.2) Elaboração da sequência didática

3.2.1) Versão final da sequência didática

A proposta didática tem como objetivo mostrar aos alunos as descobertas dos matemáticos gregos, levando-os a conhecer uma outra alternativa para calcular a área de um triângulo retângulo.

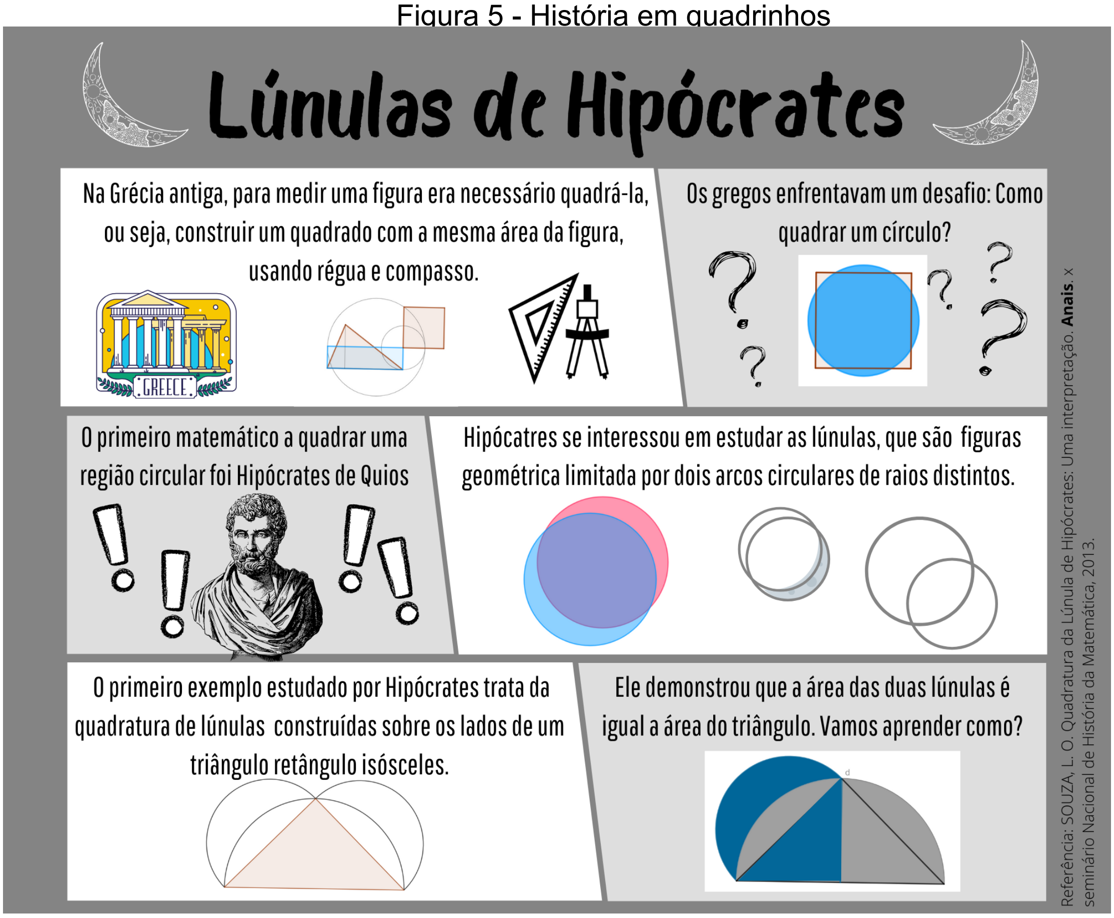
Essa proposta será dividida em etapas e tem a duração média de 3 horas/aula, tendo em vista que é imprescindível entender a história e por meio dela incitar os alunos a entender a Matemática como uma construção.

A primeira etapa conta a história de onde surgiram as lúnulas por meio de uma história em quadrinhos (HQs). Na segunda etapa, após a turma ter tomado conhecimento sobre o tema, pede-se que esta participe e elabore a demonstração da área das Lúnulas, com o auxílio do professor. A terceira etapa é a visualização por meio de um applet do geogebra e por último, a etapa das atividades.

- ☐ Etapa 1 - História das Lúnulas de Hipócrates.

Após a entrega do material impresso, deverá ser apresentada a descoberta das Lúnulas, utilizando uma história em quadrinhos (Figura 5) que conta resumidamente a trajetória de Hipócrates de Quios, que demonstrou que a área das lúnulas tem relação com o triângulo retângulo. A história pode ser impressa e entregue aos alunos individualmente, ou então apresentada por um monitor ou projetor.(Uma proposta possível de aplicação desta história poderá ser feita de diversas formas a saber: impressão de materiais didáticos, projeção das figuras, entre outras).

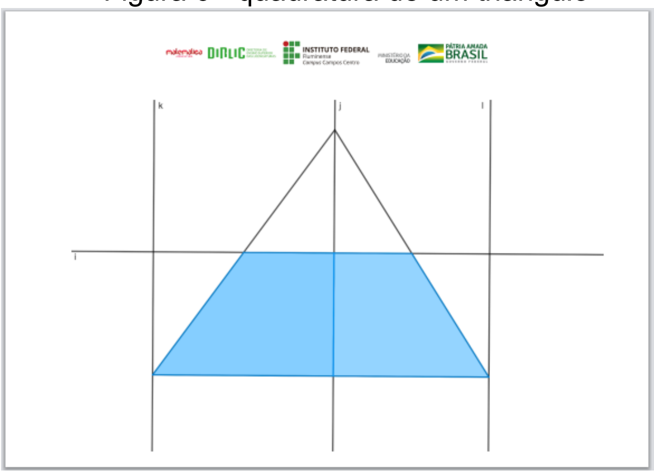
Figura 5 - História em quadrinhos



Fonte: elaboração própria.

As civilizações mais antigas do Egito obtinham a área de um espaço delimitado construindo a quadratura da forma geométrica. Para contextualização, deverá ser mostrada como era realizada a quadratura de triângulos com material impresso (Figura 6).

Figura 6 - quadratura de um triângulo



Fonte: elaboração própria.

Este material tem como objetivo propor uma visualização da construção de um retângulo com a mesma área do triângulo apresentado anteriormente. O material está disponibilizado no apêndice B e pode ser impresso e distribuído individualmente para os alunos, ou impresso em formato de cartaz para ser exposto à turma.

Recorte os triângulos da página 29 e sobreponha finalizando o triângulo maior da página 30, oriente os alunos a perceber que ao redirecionar os triângulos, é possível formar um retângulo com a mesma área que a figura anterior, tendo em vista que as mesmas partes serão utilizadas.

Em seguida, ainda ao abordar a história em quadrinhos, é importante explicitar que Hipócrates tinha como objetivo realizar a quadratura de um círculo que, até então, não havia sido construído por nenhum outro matemático da época.

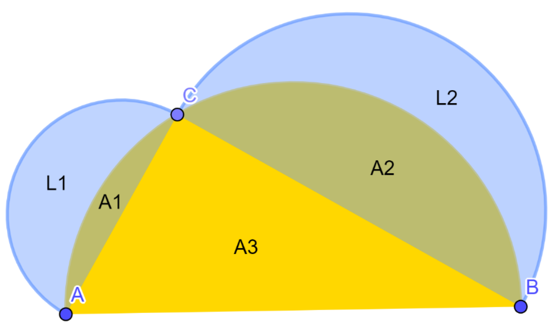
Como o círculo é uma forma geométrica não poligonal, Hipócrates segue por diferentes caminhos para obter o que deseja e, em um desses caminhos, ele chega ao que chama de Lúnulas.

Primeiramente, Hipócrates estabelece relação entre Lúnulas e triângulos isósceles e, em outro momento, com triângulos retângulos. Hipócrates conclui que a soma das áreas das lúnulas correspondentes aos catetos de um triângulo retângulo equivale a área desse triângulo.

Nesse momento, aconselha-se que o professor realize essa demonstração no quadro.

- ☐ Etapa 2 - Demonstração da área das lúnulas.

Figura 7 - Triângulo retângulo e suas lúnulas



Fonte: Elaboração própria.

Considere o triângulo ABC retângulo em C inscrito em uma semicircunferência de diâmetro $\overline{AB}$.

Considere também as lúnulas L1 e L2 formadas pelas semicurcunferências cujos diâmetros são os catetos do triãngulo retângulo $(\overline{AC})$ *e* $(\overline{BC})$, *bem como as interceções A1 e A2 apresentadas na figura.*

Hipótese: $(L1 + A1) + (L2 + A2) - [(A1 + A2 + A3) - A3] = L1 + L2$

1^o. $(L1 + A1)$ (*área do semicírculo de diâmetro* $\overline{AC}$).

Como a área de um círculo de raio R é dada por $S = \pi R^2$, *a área do semicírculo será a metade, ou seja*:

$$L1 + A1 = \pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2, \text{onde } \frac{AC}{2} \text{ é o raio do semicírculo de diâmetro } \overline{AC}$$

$$\text{portanto, } L1 + A1 = \pi\frac{(AC)^2}{4}.$$

2^o. $L2 + A2$ (*área do semicírculo de diâmetro* $\overline{CB}$).

$$\text{Analogamente, } L2 + A2 = \pi\left(\frac{CB}{2}\right)^2, \text{onde } \frac{CB}{2} \text{ é o raio do semicírculo de diâmetro } \overline{CB}$$

$$\text{portanto, } L2 + A2 = \pi\frac{(CB)^2}{4}.$$

3^o. $A1 + A2 + A3$ (*área do semicírculo de diâmetro* $\overline{AB}$)

$$\text{Analogamente, } A1 + A2 + A3 = \pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2, \text{ onde } \frac{AB}{2} \text{ é o raio do semicírculo } \overline{AB}$$

$$\text{portanto, } A1 + A2 + A3 = \pi\frac{(AB)^2}{4}$$

4^o. $A3$ (*área do triângulo retângulo*)

$$A3 = \frac{(BC).(AC)}{2}$$

Sabemos que a soma das áreas das lúnulas $(L1 + L2)$ *é igual a*:

$$L1 + L2 = (L1 + A1) + (L2 + A2) - [(A1 + A2 + A3) - A3]$$

Vem, por simples substuição dos valores obtidos acima:

$$L1 + L2 = (L1 + A1) + (L2 + A2) - [(A1 + A2 + A3) - A3]$$

$$L1 + L2 = \pi\frac{(AC)^2}{4} + \pi\frac{(CB)^2}{4} - \left[\left(\pi\frac{(AB)^2}{4}\right) - \frac{(BC).(AC)}{2}\right]$$

Desenvolvendo, vem:

$$L1 + L2 = \pi\frac{(AC)^2}{4} + \pi\frac{(CB)^2}{4} - \pi\frac{(AB)^2}{4} + \frac{(BC).(AC)}{2}$$

Colocando π *em evidência, fica*:

$$L1 + L2 = \pi\left(\frac{(AC)^2}{4} + \frac{(CB)^2}{4} - \frac{(AB)^2}{4}\right) + \frac{(BC).(AC)}{2}$$

Efetuando a soma indicada entre conchetes, fica:

$$L1 + L2 = \pi\left[\left(\frac{(AC)^2 + (CB)^2}{4}\right) - \frac{(AB)^2}{4}\right] + \frac{(BC).(AC)}{2}$$

$$\textit{Pelo teorema de Pitágoras, } (AC)^2 + (CB)^2 = (AB)^2 \textit{ no triângulo retângulo ABC apresentado.}$$

$$\textit{Logo, substituindo, temos:}$$

$$L1 + L2 = \pi\left[\frac{(AB)^2}{4}\right] - \left[\frac{(AB)^2}{4}\right] + \frac{(BC).(AC)}{2}$$

$$L1 + L2 = \pi.0 + \frac{(BC).(AC)}{2}$$

$$\textit{Por fim:}$$

$$L1 + L2 = \frac{(BC).(AC)}{2}, \textit{ onde } L1 + L2 \textit{ é, como sabemos, a soma das áreas das lúnulas.}$$

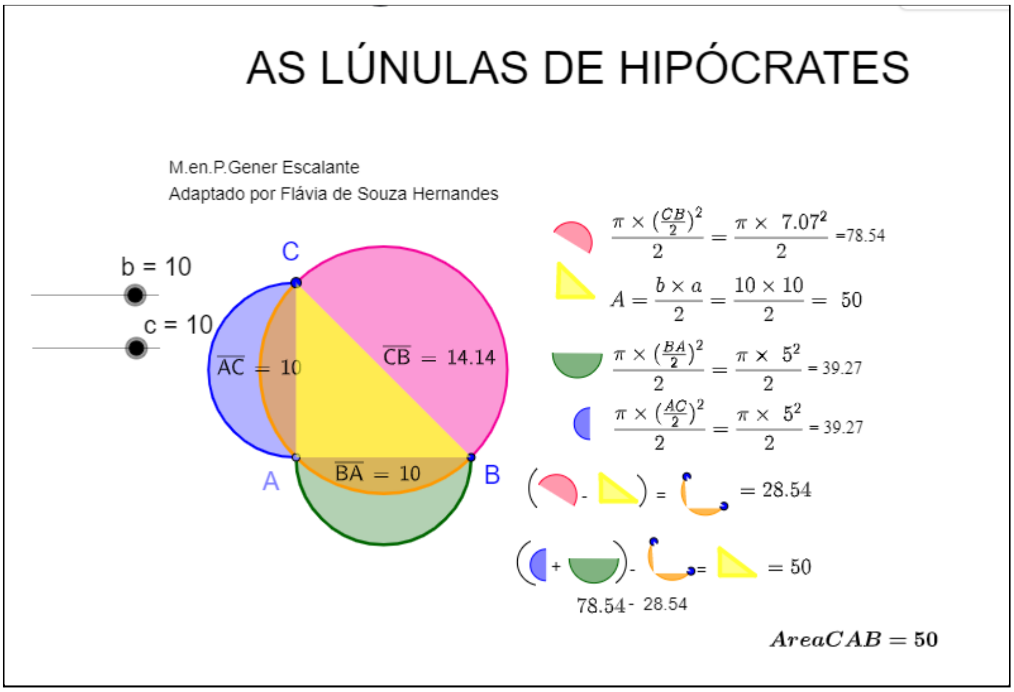
$$\textit{Ocorre que } \frac{(BC).(AC)}{2} \textit{ é a área do triângulo retângulo ABC.}$$

$$\textit{Portanto, está provado que a soma das áreas das lúnulas da figura dada é igual}$$
$$\textit{á área do triângulo retângulo ABC.}$$

☐ Etapa 3 - Visualização por meio do applet.

A partir da demonstração, indicamos o uso de um applet do Geogebra (Figura 8) para que o aluno possa visualizar o que foi provado algebricamente. O applet foi disponibilizado no Geogebra por GENER (2012), e adaptado para uso na proposta. Neste momento sugere-se que o professor permita a seus alunos manipular o material, refletindo geometricamente sobre o que foi mostrado por meio de cálculos.

Figura 8 - Applet do Geogebra



Fonte : https://www.geogebra.org/m/rzt6anye

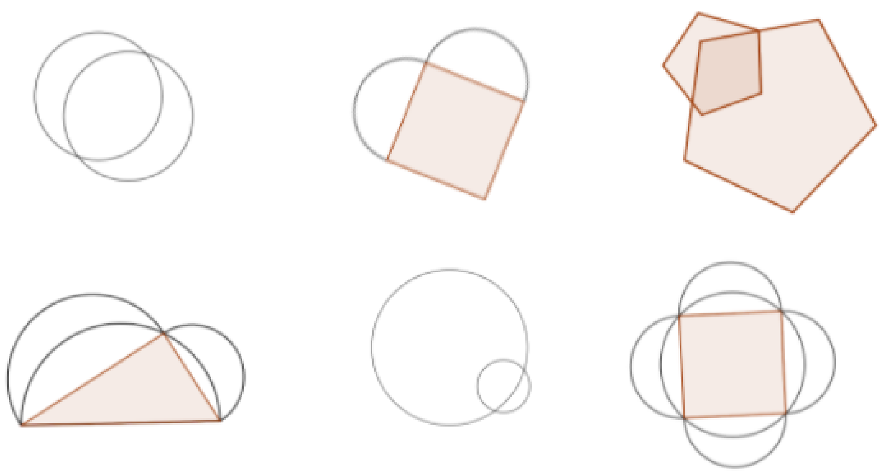
☐ Etapa 4 - Atividades

Após a discussão sobre o conteúdo serão propostas atividades para avaliar se os alunos compreenderam o conceito das lúnulas. As atividades serão realizadas determinando um tempo (aproximadamente 10 minutos) para cada questão, e após o tempo, será realizada a discussão das questões e a resolução no quadro, a fim de sanar possíveis dúvidas que possam surgir durante sua resolução.

A atividade 1 (Figura 9) tem por objetivo identificar se os alunos compreenderam o que é uma lúnula.

Figura 9 - Atividade 1

Atividade 1: Uma lúnula é uma figura geométrica limitada por duas circunferências (ou arcos circulares) com centros distintos e que têm exatamente dois pontos em comum. São as regiões não convexas limitadas pelos arcos de circunferência. De acordo com a definição dada, circule as figuras que apresentam lúnulas:

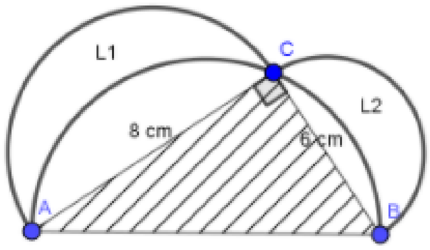


Fonte: Elaboração própria

A atividade 2 (Figura 10) tem por objetivo investigar se os alunos compreenderam a relação entre as lúnulas e a área do triângulo retângulo, dessa forma, deverão calcular a área do triângulo, utilizando meios já conhecidos e estudados por eles, bem como as fórmulas apresentadas na apostila, e assim, relacionar os resultados obtidos com a área das lúnulas.

Figura 10 - Atividade 2

Atividade 2: Na figura abaixo, temos o triângulo retângulo ABC, inscrito em um semicírculo. Tendo outros dois semicírculos, cujos diâmetros são os catetos $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$ do triângulo, encontre a soma das medidas das lúnulas de Hipócrates.



Fonte: elaboração própria

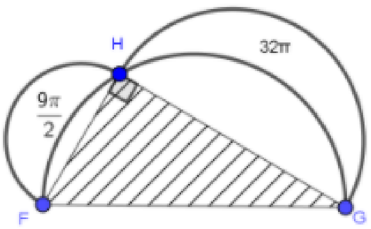
Na atividade 3 (Figura 11) são dadas as áreas das lúnulas, e, a partir delas, é solicitado que o aluno determine a área do triângulo. Essa atividade objetiva, assim como a anterior, compreender se o aluno estabeleceu relações entre as áreas do triângulo retângulo e as lúnulas apresentadas.

Figura 11 - Atividade 3

Atividade 3: Considerando o triângulo FGH retângulo em H, determine a área desse triângulo a partir das seguintes medidas:

Área da lúnula correspondente ao diâmetro $\overline{FH} = \frac{9\pi}{2}$cm²

Área da lúnula correspondente ao diâmetro $\overline{GH}$ = 32π cm²



Fórmulas:
Área do semicírculo:

$$\frac{\pi r^2}{2}$$

Área do triângulo:

$$\frac{base \ x \ altura}{2}$$

Fonte: Elaboração própria.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho é uma sequência didática que pretende levar o aluno a conhecer um método diferente de calcular a área de um triângulo retângulo, tendo que recorrer a história da matemática envolvida, e dessa forma explorar a investigação e fixar conceitos.

De acordo com a BNCC, quando a problematização se alinha com a importância da história da matemática dentro e fora de sala de aula, como é o caso dessa sequência didática que aborda o conceito de lúnulas e de onde surgiram, tal problematização serve para diminuir a lacuna existente entre os conhecimentos.

Por esta razão, ao desenvolver os conceitos existentes na demonstração de Lúnulas de Hipócrates é possível contribuir para que os alunos pensem em como interpretar questões, e como a história se faz presente até mesmo na matemática.

Em nosso teste exploratório pudemos verificar o quão importante é uma aula sobre um tema diferente do comum, e alinhado com o currículo torna-se atrativo conhecer outros métodos de resolução.

Por meio dessa sequência didática, os alunos serão capazes de utilizar outro método para obter a área de um triângulo retângulo e construir os conceitos a partir da manipulação do material, cumprindo nosso objetivo de utilizar essa abordagem perpassando pela história.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: Ensino Médio. 2018. Disponível em: basenacionalcomum.mec.gov.br/bncc-ensino-medio. Acesso em 07 jul. 2020.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ciências da Natureza e Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2000. Disponível em: portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. Acesso em 07 jul. 2020.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Terceiro e quarto ciclos. Matemática. Brasília: MEC, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 08 jul. 2020

BRASIL. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf . Acesso em: 07 dez. 2021.

SENA, R. M.; DORNELES, B. V. Ensino de Geometria: rumos da pesquisa (1991-2011). **Revemat:** revista eletrônica de educação matemática, Florianópolis - SC, v. 8, n. 1, p. 138-155, 26 jul. 2013. Semestral. Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Disponível em: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8n1p138. Acesso em: 20 set. 2021.

GALVÃO, M. E. E. L.; SOUZA, V. H. G. As luas de Hipócrates: a longa história de um problema na História da Matemática. **Revista do professor de Matemática**, Rio de Janeiro. n. 82. p. 12-17. 2013a. Disponível em: https://rpm.org.br/rpm/img/conteudo/files/RPM%2082%20-%20Histrias%20e%20histrias%20-%20As%20luas%20Hipcrates.pdf. Acesso em: 23 nov. 2021.

GALVÃO, M. E. E. L; SOUZA, V. H. G. Luas, Áreas e Quadraturas - Um Problema E Muitos Séculos Na História Da Matemática. **Revista Brasileira de História da Matemática**, Vol. 13 nº 27, p. 17 - 32. 2013b. Disponível em: http://rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/90/77. Acesso em: 13 out 2021.

GENER, E. **Las Lúnulas de Hipócrates**. Geogebra, 2012. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/uNH9ZK7z. Acesso em: 07 dez. 2021.

SOUZA, L. O. Quadratura da Lúnula de Hipócrates: Uma interpretação. **Anais**. X seminário Nacional de História da Matemática, 2013. Disponível em: https://www.cle.unicamp.br/eprints/index.php/anais-snhm/article/view/48. Acesso em: 23 nov. 2021.

PAVANELLO, R. M. **O abandono de ensino de geometria:** Uma Visão Histórica. 1989. 196f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP. Disponível em:

http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/252057. Acesso em: 08 de agosto de 2021

UFPR LITORAL. **Processo seletivo**. Universidade Federal do Paraná. Paraná, 2007. Disponível em: http://www.nc.ufpr.br/concursos_institucionais/litoral/ps/2007/provas1fase/superior/graduacao.pdf. Acesso em: 29 nov. 2021.

APÊNDICES

Apêndice A: Material didático aplicado na turma do LEAMAT II

Diretoria de Ensino Superior
Licenciatura em Matemática
Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática
Linha de Pesquisa: Geometria
Licenciandas: Flávia de Souza Hernandes, Mariana Peixoto Siqueira, Raquel Rodrigues da Silva Robaina.
Orientador: Prof.: Cleuber Eduardo do Nascimento Silva
Nome: ____ Data: ___/___/___

Lúnulas de Hipócrates: Método alternativo para calcular a área de um triângulo retângulo

Para as civilizações mais antigas, a medida e o cálculo de áreas estavam relacionados a figuras geométricas simples (como triângulos e quadriláteros). Para os gregos, calcular a área de uma figura consistia em construir, com régua e compasso, um quadrado de área equivalente, ou seja, com a mesma área da figura dada. Este processo é denominado **quadratura**.

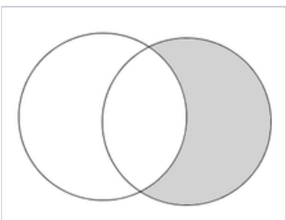
Hipócrates de Quios (cerca de 470 – 410 a.C) foi um dos pitagóricos, que se interessava por analisar as luas crescentes, em que na matemática denomina-se lúnulas. Apesar de haver poucos relatos de sua vida, sabe-se que foi um excelente geômetra e devido ao interesse na quadratura do círculo, foi o responsável pela primeira quadratura de uma região não poligonal.

Definição: Uma Lúnula também é conhecida como "lua" ou "meia-lua". Em Geometria uma lúnula é uma figura geométrica limitada por dois arcos circulares de raios distintos. Formalmente, uma lúnula é um complemento de um círculo em outro, situados de forma que ambos se intersectem, e nenhum seja subconjunto do outro.

Na Figura 1 a seguir sendo x o círculo da direita, e y, o círculo da esquerda, a área hachurada é uma lúnula:

Lúnula: $L = x - x \cap y$

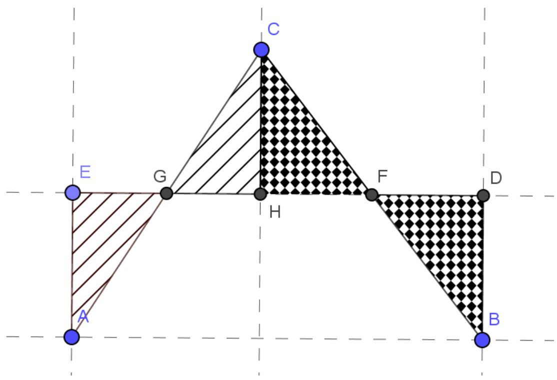
Figura 1 - Lúnula



Dada uma figura geométrica, fazer a sua quadratura equivale a construir um quadrado equivalente a ela, ou seja, com a mesma área da figura dada.

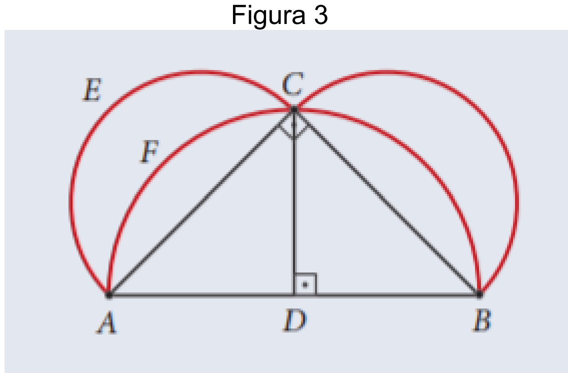
Na figura 2 temos o triângulo ABC

Figura 2 - Quadratura do triângulo



A quadratura do triângulo ABC (Figura 2) será determinada ao construir o retângulo ABDE com a área equivalente a do triângulo.

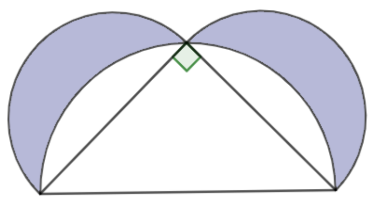
Figura 3



A primeira tentativa de quadratura de uma região não poligonal que conhecemos é devida a **Hipócrates de Chios.**

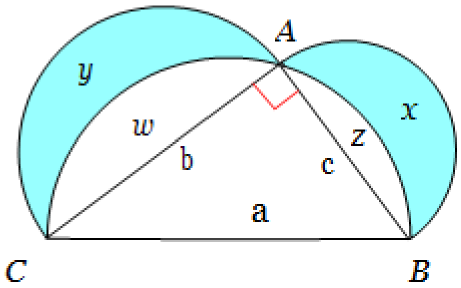
O primeiro exemplo estudado por Hipócrates trata da quadratura de luas construídas sobre os lados de um triângulo retângulo isósceles, como o triângulo ABC na figura 4.

Figura 4



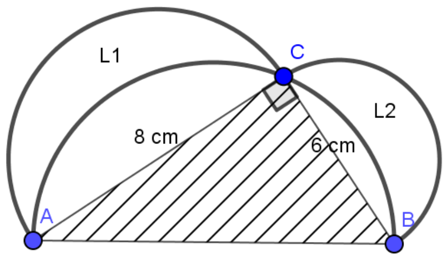
Fonte: elaboração própria

Na figura abaixo, temos um triângulo retângulo ABC, inscrito em um semicírculo, e dois outros semicírculos cujos diâmetros são os catetos de ABC. Encontre as medidas das áreas das duas lúnulas hachuradas.



Atividades

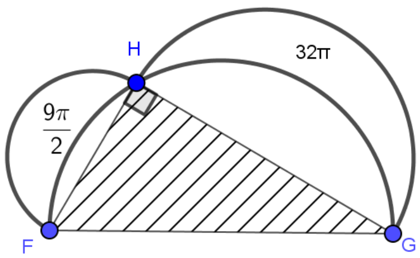
Atividade 1: Na figura abaixo, temos o triângulo retângulo ABC, inscrito em um semicírculo. Tendo outros dois semicírculos, cujos diâmetros são os catetos $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$ do triângulo, encontre a soma das medidas das lúnulas de Hipócrates.



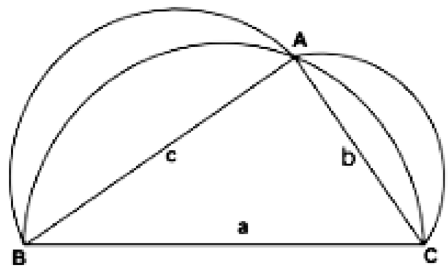
Atividade 2: Considerando o triângulo FGH retângulo em H, determine a área desse triângulo a partir das seguintes medidas:

Área da lúnula correspondente ao diâmetro $\overline{FH}$ = $\frac{9\pi}{2}$cm²

Área da lúnula correspondente ao diâmetro $\overline{GH}$ = 32π cm²



Atividade 3: (UFPR LITORAL - 2007) Hipócrates, geômetra grego da ilha de Jônia de Quios, nasceu cerca de 460 a.C. e se imortalizou ao produzir um célebre livro em que reuniu de modo lógico e organizado a Geometria da época. Ele também se notabilizou por ter sido o primeiro matemático da história a calcular rigorosamente áreas de certas figuras delimitadas por linhas curvas, chamadas de "lúnulas".



A área dessas lúnulas é a área do triângulo ABC mais as áreas dos dois semicírculos cujos diâmetros são os catetos b e c, menos a área do semicírculo de diâmetro igual à hipotenusa a. Assinale a alternativa que fornece a área das lúnulas.

a) (ab)/2 u.a.

b) (ac)/2 u.a.

c) (πa2)/2 u.a.

d) (bc)/2 u.a.

e) a/(bc) u.a.

Fórmulas:

Área do semicírculo: $\frac{\pi r^2}{2}$

Área do triângulo: $\frac{base\ x\ altura}{2}$

Apêndice B: Versão final do material didático elaborado

Diretoria de Ensino Superior
Licenciatura em Matemática
Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática
Linha de Pesquisa: Geometria
Licenciandas: Flávia de Souza Hernandes, Mariana Peixoto Siqueira, Raquel Rodrigues da Silva Robaina.
Orientador: Prof.: Cleuber Eduardo do Nascimento Silva
Nome: ____ Data: ___/___/___

Lúnulas de Hipócrates: Método alternativo para calcular a área de um triângulo retângulo

Para as civilizações mais antigas, a medida e o cálculo de áreas estavam relacionados a figuras geométricas simples (como triângulos e quadriláteros). Para os gregos, calcular a área de uma figura consistia em construir, com régua e compasso, um quadrado de área equivalente, ou seja, com a mesma área da figura dada. Este processo é denominado **quadratura**.

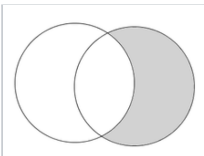
Hipócrates de Quios (cerca de 470 – 410 a.C) foi um dos pitagóricos, que se interessava por analisar as luas crescentes, em que na matemática denominam-se lúnulas. Apesar de haver poucos relatos de sua vida, sabe-se que foi um excelente geômetra e devido ao interesse na quadratura do círculo, foi o responsável pela primeira quadratura de uma região não poligonal.

Definição: Uma lúnula, também conhecida como “luna” é uma figura geométrica limitada por duas circunferências (ou arcos circulares) com centros distintos e que têm exatamente dois pontos em comum. São as duas regiões não convexas (ou também ditas côncavo-convexas) limitadas pelos arcos de circunferência (GALVÃO; SOUZA, 2013).

Na Figura 1 a seguir sendo x o círculo da direita, e y, o círculo da esquerda, a área hachurada é uma lúnula:

Lúnula: $L = x - x \cap y$

Figura 1 - Lúnula

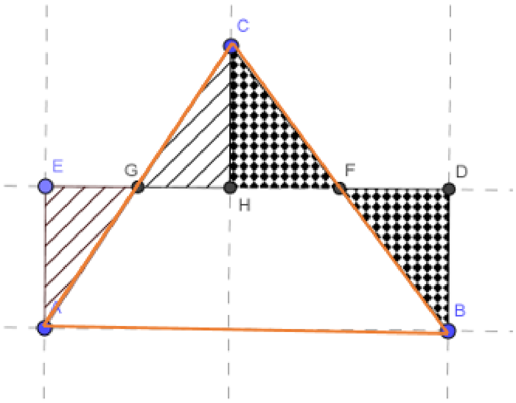


Fonte: elaboração própria

Dada uma figura geométrica, fazer a sua quadratura equivale a construir um quadrado equivalente a ela, ou seja, com a mesma área da figura dada.

Na figura 2 temos o triângulo ABC

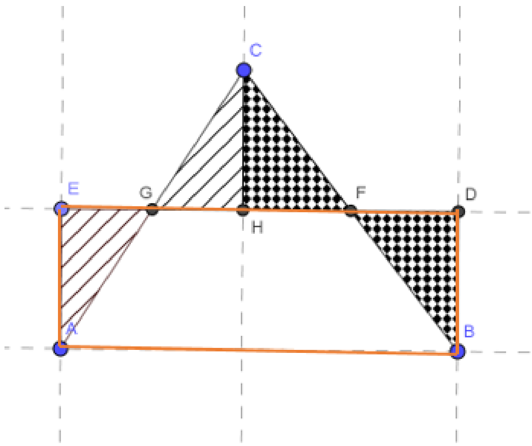
Figura 2 - Quadratura do triângulo



Fonte: Elaboração própria

A quadratura do triângulo ABC (Figura 2) será determinada ao construir o retângulo ABDE (Figura 3) com a área equivalente a do triângulo.

Figura 3 - Quadratura do triângulo

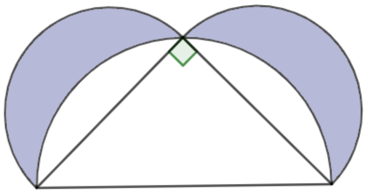


Fonte: Elaboração própria

A primeira tentativa de quadratura de uma região não poligonal que conhecemos é devida a **Hipócrates de Chios.**

O primeiro exemplo estudado por Hipócrates trata da quadratura de luas construídas sobre os lados de um triângulo retângulo isósceles, como o triângulo ABC na figura 4.

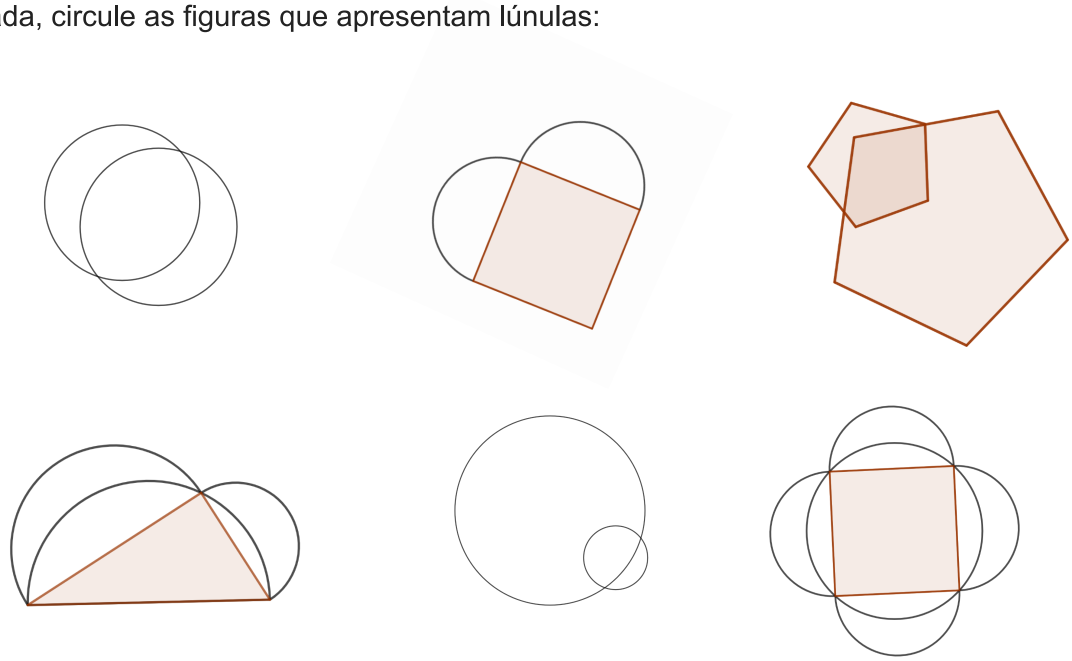
Figura 4 - Triângulo retângulo isósceles e suas lúnulas



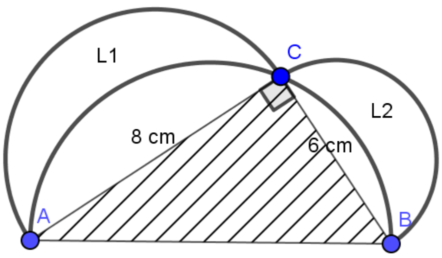
Fonte: elaboração própria.

Atividades

Atividade 1: Uma lúnula é uma figura geométrica limitada por duas circunferências (ou arcos circulares) com centros distintos e que têm exatamente dois pontos em comum. São as regiões não convexas limitadas pelos arcos de circunferência. De acordo com a definição dada, circule as figuras que apresentam lúnulas:



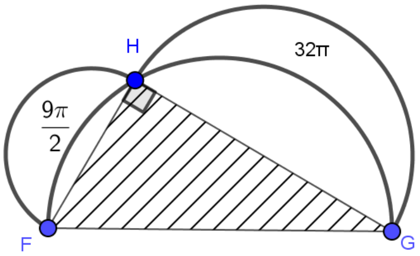
Atividade 2: Na figura abaixo, temos o triângulo retângulo ABC, inscrito em um semicírculo. Tendo outros dois semicírculos, cujos diâmetros são os catetos $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$ do triângulo, encontre a soma das medidas das lúnulas de Hipócrates.



Atividade 3: Considerando o triângulo FGH retângulo em H, determine a área desse triângulo a partir das seguintes medidas:

Área da lúnula correspondente ao diâmetro $\overline{FH}$ = $\frac{9\pi}{2}$cm²

Área da lúnula correspondente ao diâmetro $\overline{GH}$ = 32π cm²



Fórmulas:

Área do semicírculo:

$$\frac{\pi r^2}{2}$$

Área do triângulo:

$$\frac{base\ x\ altura}{2}$$

Referências:

GALVÃO, M. E. E. L.; SOUZA, V. H. G. As luas de Hipócrates: a longa história de um problema na História da Matemática. **Revista do professor de Matemática**, Rio de Janeiro. n. 82. p. 12-17. 2013. Disponível em: https://rpm.org.br/rpm/img/conteudo/files/RPM%2082%20-%20Histrias%20e%20histrias%20-%20As%20luas%20Hipcrates.pdf. acesso em: 23 nov. 2021.

SOUZA, L. O. Quadratura da Lúnula de Hipócrates: Uma interpretação. **Anais**. X seminário Nacional de História da Matemática, 2013. Disponível em: https://www.cle.unicamp.br/eprints/index.php/anais-snhm/article/view/48. Acesso em: 23 nov. 2021.

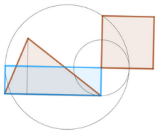
UFPR LITORAL. **Processo seletivo**. Universidade Federal do Paraná. Paraná, 2007. Disponível em: http://www.nc.ufpr.br/concursos_institucionais/litoral/ps/2007/provas1fase/superior/graduacao.pdf. Acesso em: 29 nov. 2021.

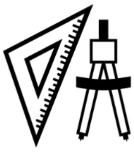
APÊNDICE C

Material de Apoio

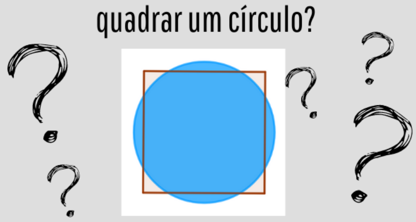
Lúnulas de Hipócrates

Na Grécia antiga, para medir uma figura era necessário quadrá-la, ou seja, construir um quadrado com a mesma área da figura, usando régua e compasso.

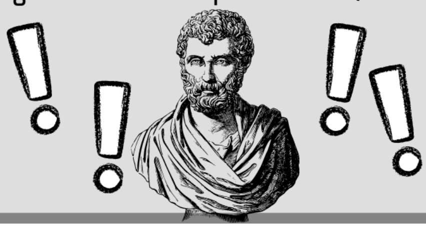




Os gregos enfrentavam um desafio: Como quadrar um círculo?

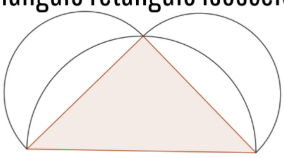


O primeiro matemático a quadrar uma região circular foi Hipócrates de Quios

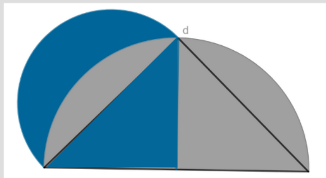


Hipócatres se interessou em estudar as lúnulas, que são figuras geométrica limitada por dois arcos circulares de raios distintos.

O primeiro exemplo estudado por Hipócrates trata da quadratura de lúnulas construídas sobre os lados de um triângulo retângulo isósceles.

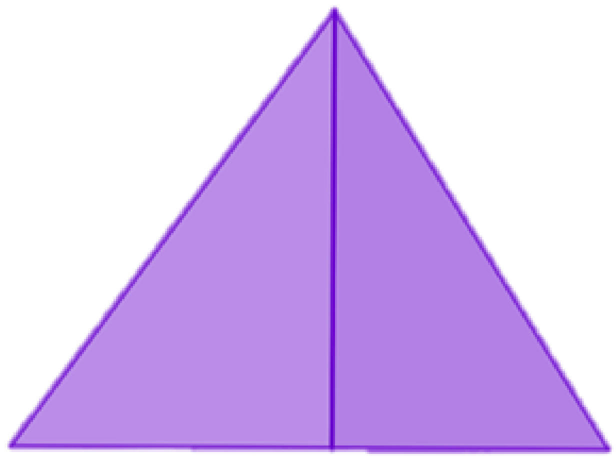


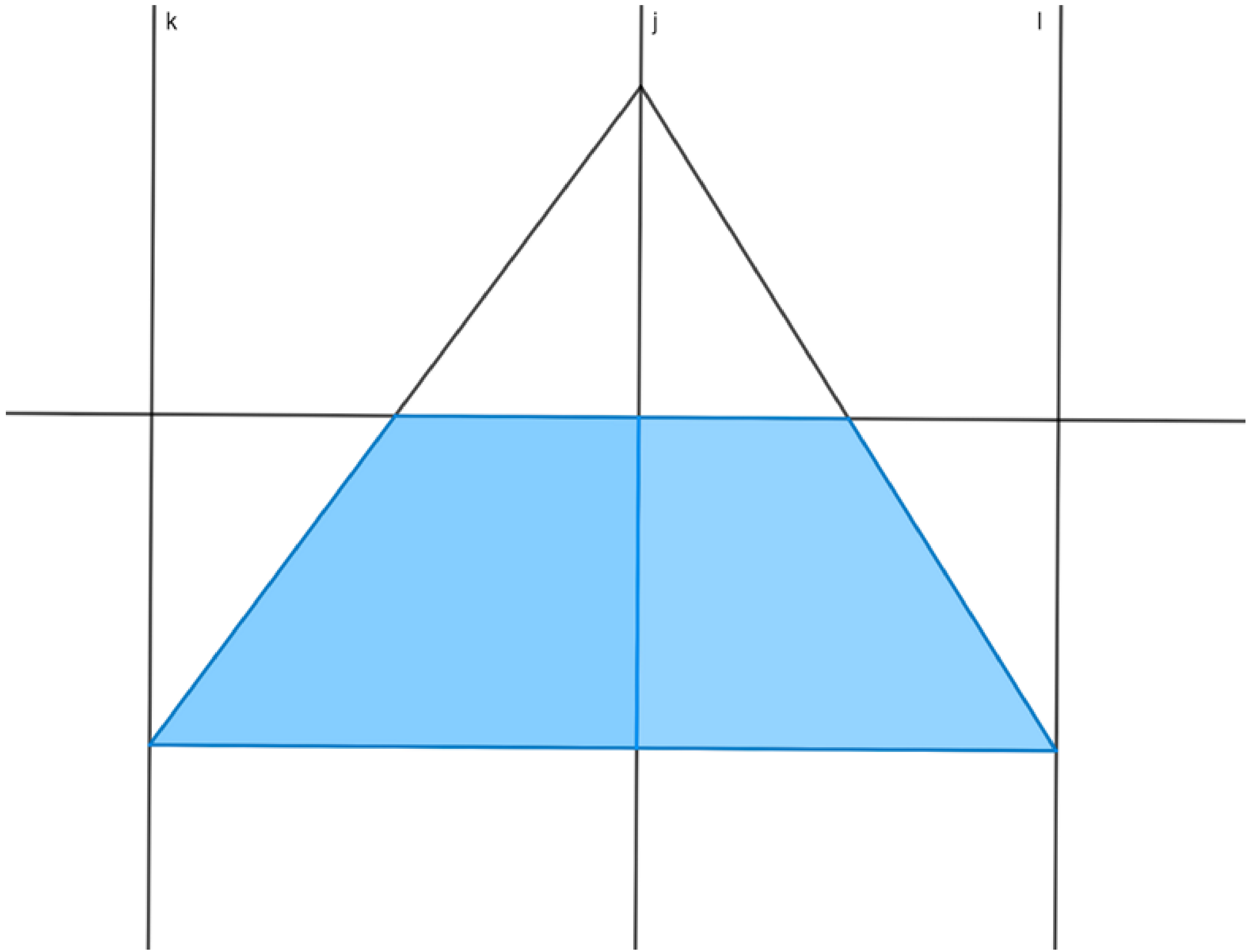
Ele demonstrou que a área das duas lúnulas é igual a área do triângulo. Vamos aprender como?



Referência: SOUZA, L. O. Quadratura da Lúnula de Hipócrates: Uma interpretação. **Anais.** x seminário Nacional de História da Matemática, 2013.

Recorte os triângulos desta página e sobreponha à figura na página 39, finalizando assim o triângulo maior. Retire os triângulos móveis e organize-os de forma a montar em retângulo.




k
j
l