INSTITUTO FEDERAL
Fluminense
Campus Campos Centro

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
PÁTRIA AMADA BRASIL
GOVERNO FEDERAL

RELATÓRIO DO LEAMAT

CIRCULANDO COM A GEOMETRIA: UMA PROPOSTA DE APRENDIZAGEM DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA

ISABELA LIMA DA SILVA
JULIA DUTRA PEREIRA
MARINA MARTINS DE OLIVEIRA DE JESUS
NATHALIA SANTOS DE ALMEIDA
PAULO RICARDO FREITAS MACIEL JÚNIOR
POLIANA FIGUEIREDO CARDOSO RODRIGUES

CAMPOS DOS GOYTACAZES – RJ

2022.1

ISABELA LIMA DA SILVA
JULIA DUTRA PEREIRA
MARINA MARTINS DE OLIVEIRA DE JESUS
NATHALIA SANTOS DE ALMEIDA
PAULO RICARDO FREITAS MACIEL JÚNIOR
POLIANA FIGUEIREDO CARDOSO RODRIGUES

RELATÓRIO DO LEAMAT

CIRCULANDO COM A GEOMETRIA: UMA PROPOSTA DE APRENDIZAGEM DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA

Trabalho apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, *Campus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão da disciplina Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Prof.ª. Mylane Barreto dos Santos

CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

2022.1

SUMÁRIO

1 RELATÓRIO DO LEAMAT I

1.1 Atividades desenvolvidas

No dia 23 de agosto de 2021, segunda-feira, foi apresentado no encontro síncrono a disciplina Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática (LEAMAT) e suas linhas de pesquisas pela qual iremos trabalhar: ensino e aprendizagem da álgebra e o ensino e aprendizagem de geometria. Nesse encontro ficou estabelecido o cronograma, métodos de avaliações e tarefas a serem desenvolvidas.

Através do google classroom, foi disponibilizado o primeiro texto para discussão "Ensino de Geometria: Rumos da Pesquisa (1991-2011)" (SENA; DORNELES, 2013). O texto relata sobre o ensino da geometria no Brasil e as dificuldades que este ramo carrega ao passar do tempo. No Brasil, a geometria foi introduzida com o objetivo de auxiliar os militares da época a trabalhar no forte. Ao decorrer dos anos, a geometria passou por diversas tendências e reformulações condizentes com a época escolar. Fiorentini e Lorenzato (2006) aprofundaram a pesquisa sobre o Ensino da Matemática (EM) no país, e a dividiu em três fases. Fases essas, que possibilitaram à análise de teses voltadas ao ensino e aprendizagem da geometria. Através da leitura e debate síncrono, foi notório que o despreparo dos professores para ensinar geometria é a maior decorrência do empobrecimento da matéria. Isto está ligado ao fato desse ramo não ser tratado como prioridade.

Na terceira aula da disciplina, realizada no dia 14 de setembro de 2021, foi feita através do encontro síncrono uma discussão sobre dois textos lidos e fichados anteriormente pela turma, sendo esses "O modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele e possíveis contribuições da geometria dinâmica" (ALVES; SAMPAIO, 2010) e "O modelo de Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico" (CROWLEY, 1994), ambos abordam o modelo do casal Van Hiele como extremamente eficiente na construção do pensamento geométrico do aluno onde o primeiro enfatiza uma aplicação desse modelo através do que ele chama de "geometria dinâmica" que nada mais é que o uso de softwares que garantem segundo essa pesquisa que as etapas de aprendizagem através do modelo de Van Hiele sejam cumpridas com precisão garantindo não só a evolução do pensamento geométrico mas também no raciocínio-lógico dedutivo como um todo. O segundo texto debatido concentra suas atenções em apresentar o modelo de Van Hiele através de uma introdução histórica, da explicação de suas etapas e objetivos, além de relatar algumas experiências. Por fim, ao discutir esses dois textos pôde-se concluir que entender qual o nível de conhecimento prévio do aluno sobre determinado assunto, é fundamental na geometria, sendo possível através de uma constante indagação do professor, aliado a percepção e a construção de experiências lúdicas, que se observe o grau de fundamentos que o aluno detém. Ao trabalhar com softwares o docente dará um referencial geométrico completo ao estudante.

Na semana seguinte 21 de setembro de 2021 o texto debatido foi "O ensino de Geometria no Brasil: Uma abordagem histórica" (ANGELO; BARBOSA e SANTOS, 2020), que expõe de forma muito clara e competente os motivos pelos quais o ensino da Geometria foi deixado de lado no Brasil. Seja por falta de capacitação do professor, negligência, iniciativas pedagógicas falhas, entre outros equívocos que geraram um problema "crônico", que perpetua desde o Brasil-Colônia até os dias atuais. A turma percebeu e concluiu que esses problemas afetaram a formação básica de todos. Essa deficiência é mais visível nas escolas públicas.

Ainda no encontro do dia 21 de setembro de 2021, dois grupos fizeram a apresentação de um trabalho proposto onde o grupo 1 abordou sobre o PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) voltado para os anos finais do Ensino Fundamental, cujo o objetivo é elaborar diretrizes para os educadores formalizando aspectos específicos de cada disciplina. O grupo apresentou cada ciclo de aprendizagem com seus respectivos objetivos, temas abordados, orientações didáticas, métodos avaliativos e conexões entre conteúdos, concluindo que este apresenta uma proposta completa no que diz respeito à prática docente nessa fase da aprendizagem. O grupo 2 abordou a proposta da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) com foco nos anos finais do Ensino Fundamental. Diferentemente do PCN, a BNCC é um documento normativo que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo de sua vida escolar. O trabalho descreveu os conteúdos propostos em geometria em cada série do Ensino Fundamental II e a relação deles com as habilidades contidas no documento. Nesse período escolar, a

Geometria passa pelo plano cartesiano, definições básicas, simetria, transformações geométricas, construções geométricas, semelhança de triângulos, relações métricas no mesmo, polígonos, demonstrações, dentre outros tópicos abordados até o 9º. ano.

Foi disponibilizado no dia 20 de setembro de 2021 um artigo "Por que não ensinar geometria?" do autor Lorenzato (1995), para que se fizesse um fichamento e entregasse até o dia 23 de setembro de 2021. O texto em questão fala sobre como o ensino da geometria está sendo negligenciado e quais as principais causas para tal fato. O autor levanta muitos questionamentos sobre como o professor pode e deve se portar frente a essas dificuldades, além de mostrar algumas metodologias para o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos. Esse texto fichado seria discutido na aula do dia 28 de setembro de 2021, mas por imprevistos, não foi possível.

O próximo encontro síncrono aconteceu no dia 28 de setembro de 2021. Os grupos 3 e 4, fizeram a apresentação do seminário sobre o PCN do Ensino Médio e sobre a BNCC do Ensino Médio, respectivamente. Após as apresentações, aconteceu uma breve discussão sobre os documentos apresentados.

Houve um encontro síncrono que aconteceu no dia 5 de outubro de 2021, nessa aula foram esclarecidas algumas questões sobre o relatório e a apresentação que deverão ser feitos. A partir desse encontro os grupos começaram a ser atendidos separadamente. Esse também foi o momento de decisão do tema do LEAMAT de cada grupo. Até o dia 9 de outubro de 2021, cada grupo teve que selecionar referenciais teóricos para pesquisa sobre o tema selecionado.

Os encontros posteriores foram reservados para definição do tema a ser trabalhado, juntamente com a motivação, seleção dos textos de referência e escolha do público alvo. Definiu-se o objetivo geral, foi elaborada a justificativa, assim como o relatório final.

No dia 29 de novembro de 2021 aconteceu a apresentação dos trabalhos propostos pelos grupos 1, 2, 3 e 4 com temas elegidos respectivamente por: " O Número π: origem e aplicações", "Resolução Geométrica a partir da Álgebra", "Casos de Congruência de Triângulos: atrair para demonstrar" e o nosso grupo titulado por " Circulando com a Geometria: uma proposta de aprendizagem das razões trigonométrica". Obtivemos boas considerações em relação ao nosso trabalho e apresentação. A professora Ana Paula fez uma sugestão para abordarmos os conceitos de graus e radianos, a qual será usada no LEAMAT II.

No dia 13 de dezembro de 2021 será a avaliação final desta primeira etapa do LEAMAT I.

1.2 Elaboração da sequência didática

1.2.1 Tema

Seno, cosseno na circunferência trigonométrica.

1.2.2 Justificativa

Vários temas foram pensados e discutidos nas reuniões e com base no relato de uma das integrantes do grupo, que apontou a dificuldade de suas filhas no conteúdo de trigonometria bem como a lacuna de alguns conceitos, foi definido o tema. Tal relato nos encorajou a escolher essa temática para nossa abordagem no Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática (LEAMAT), além de ser um tema que os alunos apresentam dificuldade, também é um tema desafiador para nós futuros docentes. Trabalharemos a introdução da trigonometria por meio da circunferência trigonométrica como tema central do trabalho, com o intuito de desmistificar esse tema, abordando de forma dinâmica, menos continuísta e mecanizada.

A Educação Matemática tem sido objeto de estudo para a busca de metodologias que melhorem o seu ensino-aprendizado, isso porque ainda há grande rejeição por parte dos alunos com a disciplina, que trazem lacunas de seu estudo anterior, como defende Damasceno e Rabelo (2019). Segundo Oliveira (1994 apud Damasceno; Rabelo, 2019), para um estudo significativo de matemática é necessário que os alunos sejam ensinados a buscar por soluções e não apenas memorizar e aplicar fórmulas. Nesse sentido, é de grande importância problematizar questões matemáticas para que o discente possa construir um raciocínio lógico.

Uma ramificação matemática importante é a Geometria. Ela está presente em diversas situações do cotidiano das pessoas, nos objetos, nas construções, na natureza, entre outros contextos. Lorenzato (1995) afirma que a Geometria está por toda parte, só é preciso enxergá-la. Desde a antiguidade a Geometria se faz presente na sociedade, surgiu a partir das necessidades do homem. De acordo com Cândido e Galvão (2004) a Geometria foi desenvolvida pela necessidade de medir terras, construir templos, monumentos e calcular distâncias. Ao longo do tempo seus registros estão presentes no legado de diversas civilizações.

No Parâmetro Curricular Nacional (PCN) (BRASIL, 1998, p. 51) ressalta-se a importância da geometria, visto que "Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática [...], porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive". Apesar disso, o ensino da Geometria ainda é considerado defasado, seja por despreparo do professor e a falta de formação continuada dos mesmos ou pelos livros didáticos, que abordam o conteúdo geométrico nas últimas páginas, nos capítulos finais. Além do fato histórico que também contribuiu para o abandono do ensino da Geometria no país, o Movimento da Matemática Moderna. Lorenzato (1995) destaca que o ensino da matemática moderna de algebrizar a Geometria não funcionou no Brasil, deixando lacunas que perduram até os dias atuais.

Segundo Pavanello (1993) o abandono da Geometria é verificado nas últimas décadas no Brasil, fato que preocupa demais os educadores matemáticos brasileiros. Nascimento (2013) descreve que são múltiplos os tópicos a serem abordados pelo professor no decorrer das aulas. Diante disto, alguns temas são discutidos de forma enxuta, sem a devida atenção que merecem. A trigonometria pertence ao grupo de conteúdos que requer um período extenso para ser ensinado. O fato de o professor não deter desse tempo para lecionar a temática em questão, faz com que os conteúdos trigonométricos não tenham o devido reconhecimento pelos alunos.

Urdaneta, Gonzalez e Castillo (2017) ressaltam que a ação dos docentes em trabalhar os sinais das razões trigonométricas de forma mecânica, usando a memorização tem consequências diante a aprendizagem dos estudantes. Eles são obrigados a decorar os sinais de cada quadrante do ciclo trigonométrico, sem entender o real sentido por detrás do que está sendo inserido nas suas mentes. Os autores indicam a interpretação geométrica usando a circunferência unitária, trazendo para o estudo a parte visual do que quer ser ensinado a partir de objetos que auxiliem na representação. Nascimento (2013), afirma que a falta de significado do que é apresentado ao aluno, implica na aprendizagem. Ou seja, fazer com que o aluno se interesse pelo assunto, aguçando sua curiosidade é um caminho a ser percorrido pelo docente.

Para desenvolver o entusiasmo do aprendiz, Bezerra (2014) sugere o uso de jogos para ilustrar as aulas. O autor afirma que estes recursos são vantajosos tanto para os professores quanto para os estudantes. O docente consegue a partir de um simples jogo, analisar o raciocínio e a compreensão dos alunos diante a matéria estudada. Desse modo, ele pode elaborar estratégias para auxiliar o educando, buscando uma melhora no ensino.

O uso de jogos constitui uma mudança significativa no processo de ensino aprendizagem, auxilia o desenvolvimento de habilidades de observação, análise, levantamento de hipóteses, argumentação e tomada de decisão. As atividades lúdicas levam o aluno a enfrentar situações conflitantes com seu cotidiano, estimulando o raciocínio. Para isso há necessidade de saber o que se pretende alcançar com estas técnicas nas aulas, quando bem elaboradas e executadas alcançam os objetivos pretendidos. Valente (1999) pontua que a sala de aula deve deixar de ser um ambiente de cadeiras enfileiradas e se tornar um local no qual alunos e professor possam construir o conhecimento de forma diversificada.

Ainda segundo Bezerra (2014, p.16), "Antes que os alunos comecem a utilizar os jogos, há necessidade que eles tenham conhecimento prévio do assunto." O qual pode ser introduzido através de softwares de geometria dinâmica, o que confirma Azevedo e Alves (2019, p. 104) ao afirmar que "Os softwares educacionais têm como proposta dar suporte ao processo de ensino-aprendizagem nas diversas áreas de ensino."

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) evidencia a importância do uso de tecnologias e de aplicações que integrem a matemática com a realidade do discente. A BNCC propõe que:

> [...] os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu

> modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados. (BRASIL, 2018, p. 529).

Ferramentas como programas computacionais de geometria dinâmica como o GeoGebra, favorecem a compreensão dos conceitos e relações geométricas. O software educacional não possui apenas o papel de facilitador do processo de aprendizagem, mas tem como objetivo desenvolver habilidades e construir processos de conceituação para que o indivíduo possa participar da sociedade do conhecimento (STEINMACHER *et al.*, 2011).

Neste sentido Pereira (2012) destaca que as características do Geogebra potencializam a construção de cenários de investigação e proporcionam ao aluno através das atividades um despertar pela geometria. Destaca também, que a interface do *software* e suas ferramentas encorajam o aluno a desenvolver seu lado crítico, procurar respostas, levantar e verificar conjecturas. Urdaneta, Gonzalez e Castillo (2017) ressaltam ainda que a manipulação do Geogebra pode levar o usuário a compreender e analisar os comportamentos geométricos de forma mais clara a conseguir perceber as razões trigonométricas através do software.

1.2.3 Objetivo Geral

Facilitar a compreensão do conceito de seno e cosseno. Assim como, detalhar a redução ao primeiro quadrante, por meio da circunferência trigonométrica.

1.2.4 Público Alvo

Alunos da 2.ª série do Ensino Médio.

2 RELATÓRIO DO LEAMAT II

2.1 Atividades desenvolvidas

A primeira aula do Laboratório de Ensino e Aprendizagem Matemática II (LEAMAT II) aconteceu no dia 07 de fevereiro de 2022, segunda-feira, por meio de uma videoconferência. Nesse encontro síncrono ficou estabelecido o cronograma, métodos de avaliações e tarefas a serem desenvolvidas pelos grupos ao longo do componente curricular.

No encontro do dia 21 de fevereiro de 2022, o grupo apresentou um rascunho da sequência didática à orientadora, além de alguns recursos e softwares escolhidos para complementar a sequência. Nessa aula, também houve debate sobre como melhorar a exposição e construção do conteúdo escolhido.

Na semana do dia 28 de fevereiro de 2022, a instituição de ensino entrou em recesso. Por isso, não aconteceu encontro síncrono.

As aulas de 7 de março de 2022 até as de 4 de abril de 2022 foram destinadas para a elaboração da sequência didática junto à orientadora.

No dia 25 de abril de 2022 foi realizada a aplicação da sequência didática na turma do LEAMAT II, tendo como finalidade expor o que os professores em formação elaboraram para a aula. Esta apresentação tem o intuito de coletar *feedbacks* dos alunos e das orientadoras sobre a sequência exposta.

Os encontros seguintes foram destinados à finalização do relatório do LEAMAT juntamente dos ajustes da aplicação.

A entrega dos relatórios foi no dia 27 de maio de 2022. Prosseguindo para a avaliação final que foi no dia 08 de junho de 2022.

2.2 Elaboração da sequência didática

2.2.1 Planejamento da sequência didática

A sequência didática a seguir é planejada para o ensino remoto, tendo como público-alvo alunos da 2.ª série do Ensino Médio, sendo que esta também pode ser usada no ensino presencial. Utilizando slides, feitos no Prezi, e como material exploratório o software Geogebra e o Simulador da Universidade do Colorado. Busca-se com ela introduzir o tema ciclo trigonométrico de maneira clara, objetiva e dinâmica. Os seis momentos desta sequência são intitulados e apresentados no Quadro 1 abaixo:

Quadro 1 - Descrição dos momentos da sequência didática

Momentos	Título	Objetivos
I	Vídeo de Introdução	Introduzir a trigonometria de forma que chame a atenção dos alunos para o tema, mostrando que a trigonometria pode ser usada no dia a dia.
II	Definição do Ciclo Trigonométrico	Apresentar devidamente o ente que ampara toda essa sequência didática.
III	O que é arco?	Conceituar arcos para ajudar na introdução do tema.
IV	Definição de Seno e Cosseno	Ressaltar as características de cada razão no ciclo, a fim de entender melhor o seno e cosseno geometricamente.
V	Redução ao primeiro quadrante	Tratar de arcos com a finalidade de entender as simetrias no ciclo trigonométrico, bem como observar o seno e cosseno de cada ângulo ou radiano.
VI	Dinâmica Final	Praticar utilizando os conceitos adquiridos em aula para a resolução de questões.

Fonte: Elaboração própria.

A seguir, estão descritos os procedimentos pedagógicos que direcionam cada momento da sequência didática. A aula começa com a apresentação do título “Circulando com a Geometria: Uma Proposta de Aprendizagem das Razões Trigonométricas”.

I. Vídeo de Introdução

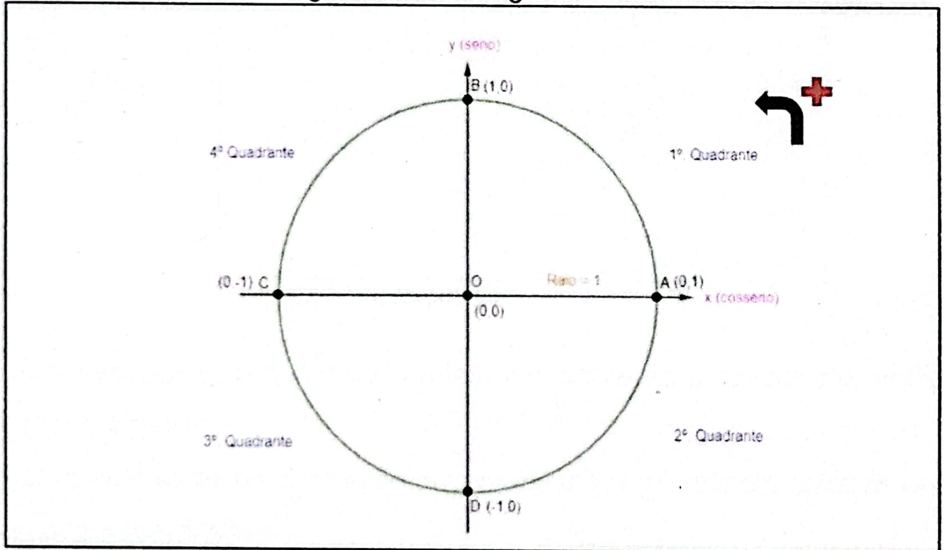
A aula deve ser iniciada a partir de uma animação que explora a trigonometria de uma maneira divertida, o que faz com que os alunos tenham interesse pelo tema. O vídeo em questão pode ser acessado por meio do link a seguir: https://www.youtube.com/watch?v=Qdl87RohgWc.

Após a turma assistir o desenho animado, os professores em formação iniciam uma conversa com os alunos, sobre como a trigonometria está presente em nossas vidas, até mesmo na hora de repartir uma pizza. Em seguida, a apresentação prossegue com a introdução dos conteúdos, os quais envolvem o ciclo trigonométrico, principal tema da aula.

II. Definição do Ciclo Trigonométrico

Neste segundo momento da aula, a proposta é conduzir para a definição do ciclo trigonométrico (Figura 1).

Figura 1 - Ciclo Trigonométrico



Fonte: Elaboração própria.

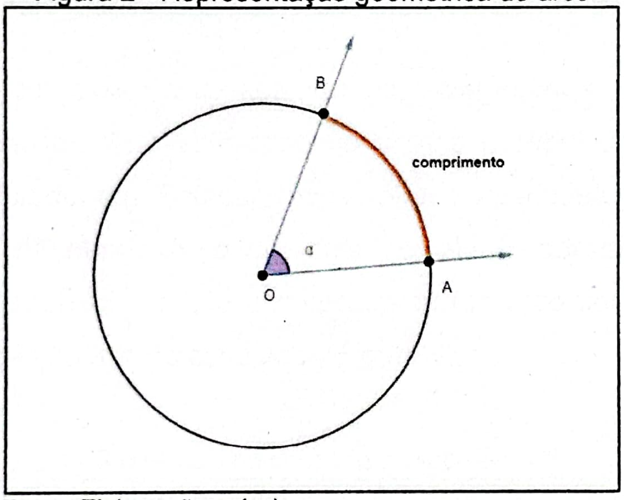
É de extrema importância que os professores em formação esclareçam para o aluno o porquê de o raio desta circunferência ser 1. Segundo Lima (2012, p.214) “Como todas as linhas trigonométricas são quocientes entre duas medidas, o valor de cada uma delas se mantém inalterado quando se passa de uma unidade para outra. Por isso não faz mal convencionar raio igual a 1 (r=1)".

Além disso, vale ressaltar o motivo de o comprimento da circunferência trigonométrica (C) ser igual a 2π.

III. O que é arco?

No terceiro momento da aula, os professores em formação devem recordar, junto à turma, o conceito de arco na circunferência. Essa formalização deve ser construída indicando que o arco é delimitado por dois pontos na circunferência e tem ligação com o ângulo central que o compreende. É importante mostrar a representação geométrica do arco (Figura 2), com o intuito de permitir que o aluno visualize o que está sendo falado.

Figura 2 - Representação geométrica do arco



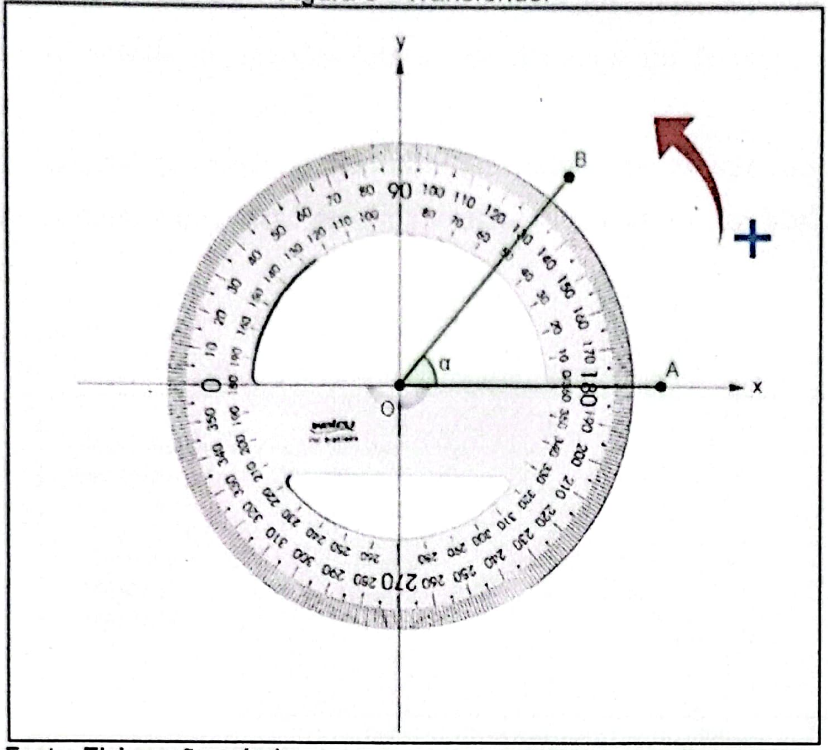
Fonte: Elaboração própria.

Em sequência, é necessário relembrar sobre as unidades de medida dos arcos: graus e radianos.

Os professores em formação devem frisar a equivalência entre as unidades que foram apresentadas.

É interessante mostrar um material manipulável de conhecimento dos alunos, mesmo que a sequência didática seja aplicada no ensino remoto. Neste caso, os professores em formação podem usar um transferidor (Figura 3) indicando com esse material a percepção do sentido anti-horário que guia a circunferência trigonométrica.

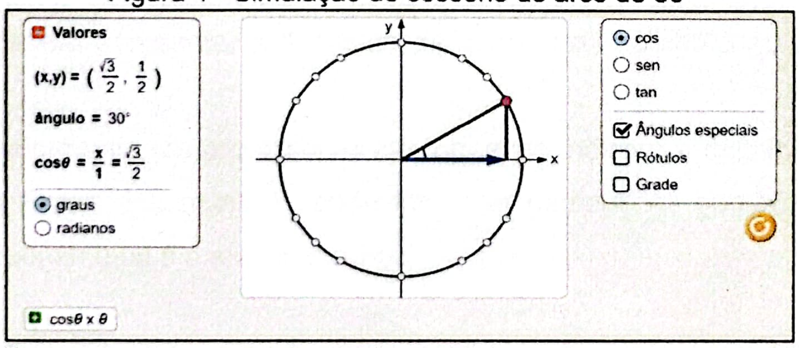
Figura 3 - Transferidor



Fonte: Elaboração própria.

A proposta continua apresentando a congruência entre arcos trigonométricos e para trabalhar este conceito usa-se o simulador criado pela Universidade do Colorado em Boulder (https://phet.colorado.edu/sims/html/trig-tour/latest/trig-tour_pt_BR.html). A partir dele, o aluno consegue ter uma percepção de forma dinâmica do que acontece para um arco ser congruente a outro. A seguir, exemplo de uso do simulador (Figura 4).

Figura 4 - Simulação do cosseno do arco de 30º

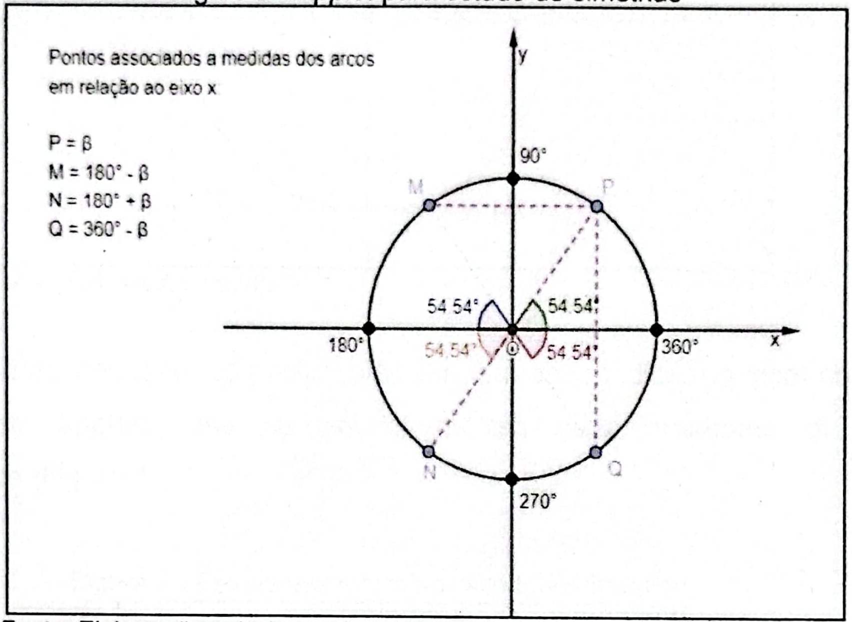


Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/trig-tour/latest/trig-tour_pt_BR.html

A seguir, para iniciar o conteúdo de simetria, os professores em formação devem indicar o significado de simetria no dicionário. E assim, a partir de uma sequência de figuras mostrar a relação de medida de arcos com extremidades simétricas em relação a um dos eixos coordenados ou a origem do plano cartesiano.

Para dinamizar essa parte do conteúdo um *applet* do geogebra (https://www.geogebra.org/m/dy2abwym) é usado com intuito de fixação (Figura 5).

Figura 5 - *Applet* para estudo de simetrias



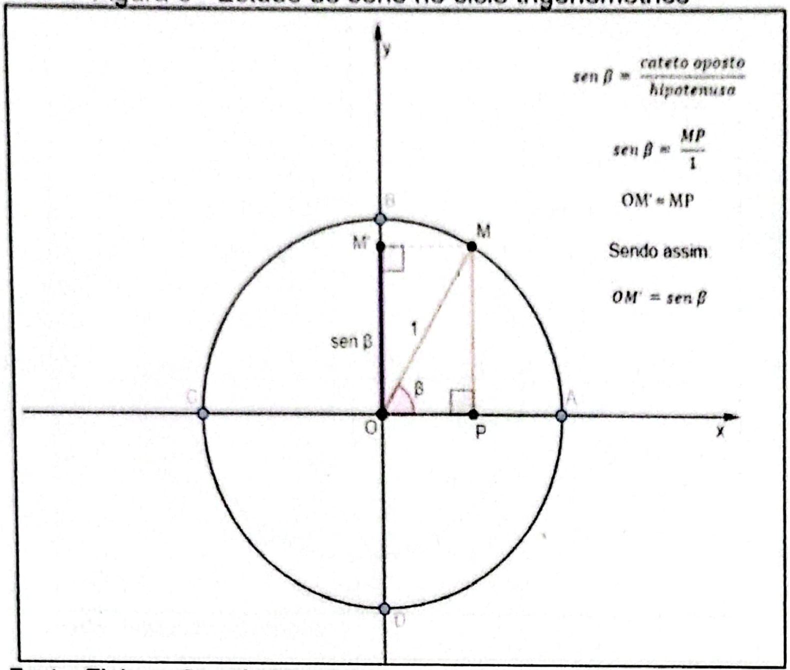
Fonte: Elaboração própria.

IV. Definição de Seno e Cosseno

Para o penúltimo momento dessa sequência didática os professores em formação devem apresentar a definição de seno, assim como a do cosseno de um arco.

Primeiramente, os professores em formação indicam a definição de seno. A partir da Figura 6 o aluno é conduzido a ter percepções geométricas que o ajudam a deduzir qual é o eixo dos senos.

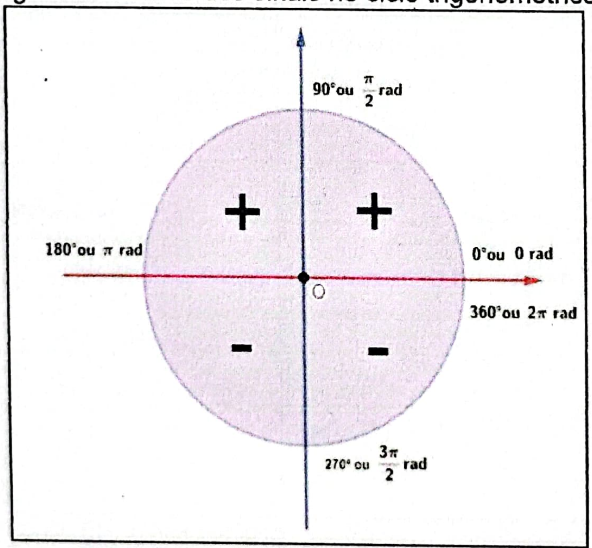
Figura 6 - Estudo do seno no ciclo trigonométrico



Fonte: Elaboração própria.

Após essa dedução, os professores em formação indicam o sinal do valor de seno dos ângulos que se encontram em cada quadrante do ciclo trigonométrico (Figura 7).

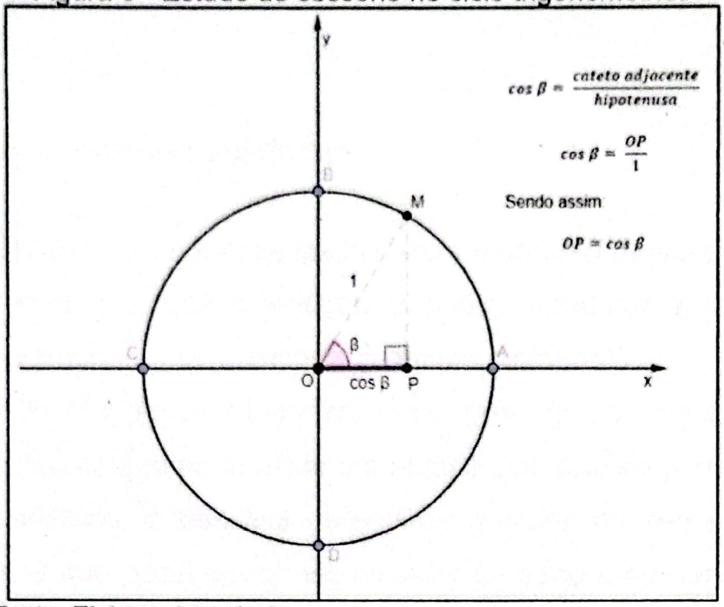
Figura 7 - Estudo dos sinais no ciclo trigonométrico



Fonte: Elaboração própria.

Em seguida, o mesmo processo de dedução por meio de figura é feito anteriormente, é usado para deduzir informações sobre o eixo dos cossenos (Figura 8).

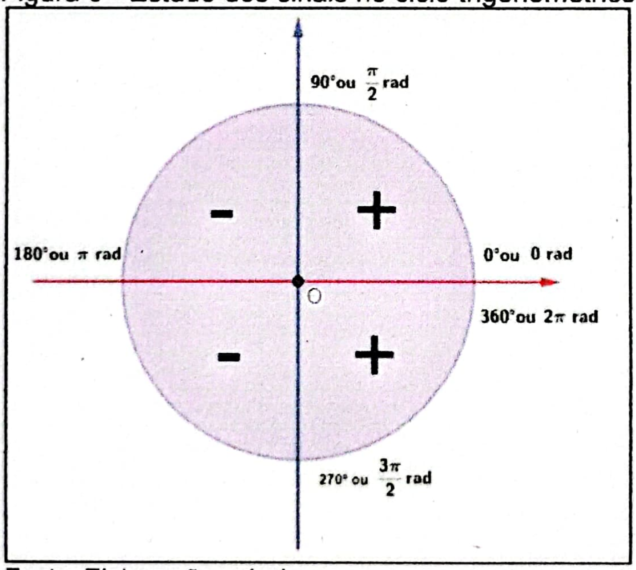
Figura 8 - Estudo do cosseno no ciclo trigonométrico



Fonte: Elaboração própria.

Após essa dedução, os professores em formação indicam o sinal do valor do cosseno dos ângulos que se encontram em cada quadrante do ciclo trigonométrico (Figura 9).

Figura 9 - Estudo dos sinais no ciclo trigonométrico



Fonte: Elaboração própria.

Após concluir a definição de seno e cosseno, o simulador é usado novamente para elucidar o comportamento da imagem de cada razão nos eixos em que se encontram.

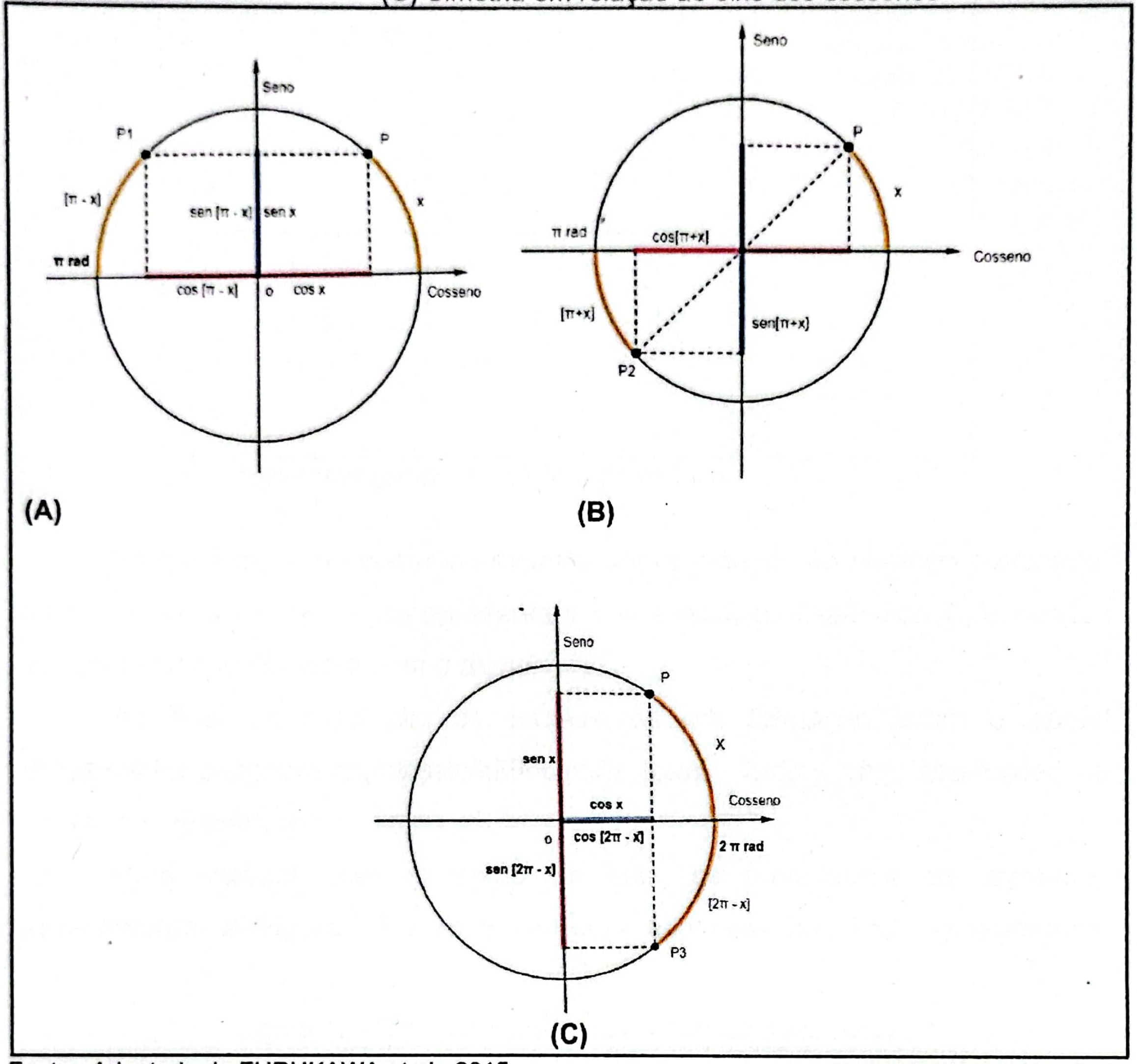
É relevante apontar os valores de seno e cosseno para cada ângulo e arco notável.

V. Redução ao primeiro quadrante

Os professores em formação iniciam esse momento da aula indicando para o aluno qual o objetivo de usar a redução ao primeiro quadrante, enfatizando que a ideia de simetria também será importante nesse momento.

Sendo assim, é apresentado ao aluno três figuras (Figuras 10) com a finalidade de ensiná-lo que ao analisar um ângulo que está no primeiro quadrante do ciclo trigonométrico, é possível determinar ângulos do segundo, terceiro e quarto quadrantes que possuem o mesmo valor de seno e cosseno, em módulo, do primeiro ângulo. Essas figuras tem como partida um ponto P e em sequência elas mostram os pontos simétricos a P que se encontram no 2.º, 3.º e 4.º quadrantes, indicando assim, os ângulos que se encontram nesses quadrantes e seus respectivos valores de seno e cosseno.

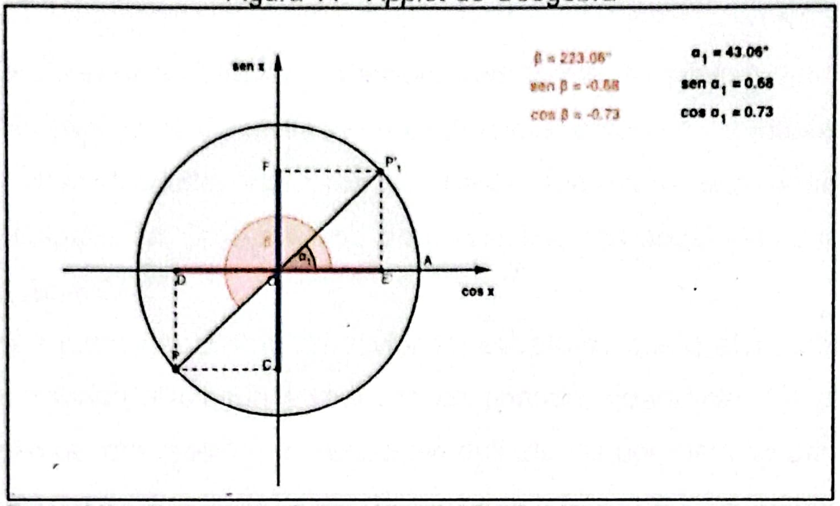
Figura 10 - (A) Simetria em relação ao eixo dos senos
(B) Simetria em relação à origem (0,0)
(C) Simetria em relação ao eixo dos cossenos



Fonte: Adaptado de FURUKAWA et al., 2015.

Para complementar a explicação é usado o *applet* (https://www.geogebra.org/classic/kRwEvqJp). O objetivo deste é indicar que apesar das simetrias, os valores de seno e cosseno podem ser opostos de acordo com o quadrante (Figura 11).

Figura 11 - *Applet* do Geogebra



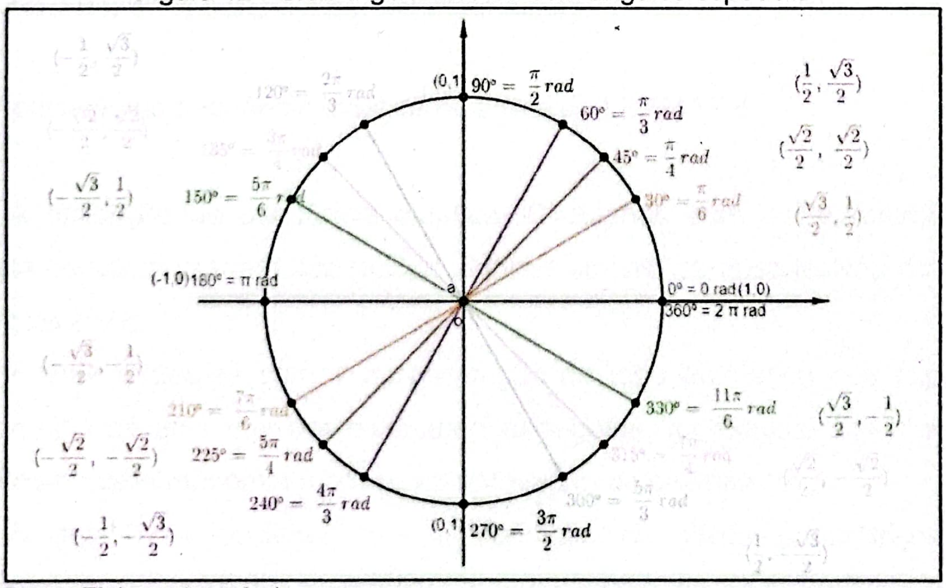
Fonte: https://www.geogebra.org/classic/kRwEvqJp.

Para a fixação do conteúdo exposto sobre redução ao primeiro quadrante, os professores em formação apresentam três exercícios (Apêndice C) e conduz as resoluções juntamente com o aluno.

Ao final da resolução os professores em formação usam o *applet* (https://www.geogebra.org/classic/k89nQc55) para ilustrar as resoluções e conferir os resultados.

Para finalizar esse momento da aula, os professores em formação apresentaram a Figura 12 com os ângulos especiais no ciclo trigonométrico.

Figura 12 - Ciclo trigonométrico com ângulos especiais



Fonte: Elaboração própria.

VI. Dinâmica final

Para encerrar a aula, os professores em formação enviam para os alunos uma apostila (Apêndice C) com todo o conteúdo abordado e convidam os alunos a realizarem a atividade final proposta nesta. Espera-se que o aluno nesse momento, coloque em prática e use os conhecimentos adquiridos em aula para resolver as questões.

Com a primeira questão da atividade, espera-se que o aluno determine os ângulos solicitados utilizando a redução ao primeiro quadrante. Os professores em formação devem recolher as respostas dos alunos por meio de um formulário (Apêndice A), no qual os estudantes devem anexar fotos de suas respostas.

A segunda questão, tem o objetivo de complementar a questão anterior. Pretende-se fazer com que o aluno tenha seu próprio contato com o Geogebra usando o *applet* (https://www.geogebra.org/classic/mj7qpp4z). Nesta situação, ele pode conferir suas respostas usando a tecnologia disponível e a partir desta dinâmica, assimilar de uma maneira interativa o conteúdo aplicado em aula. O *applet* em questão faz com que o aluno tenha a percepção das simetrias em relação ao eixo das ordenadas (eixo dos senos) e das abscissas (eixo dos cossenos), quando trabalhada a redução ao primeiro quadrante. Além disso, a questão solicita que os alunos informem os senos e os cossenos de alguns ângulos específicos. Espera-se que o aluno visualize essa informação por meio do *applet* em questão.

2.2.2 Aplicação da sequência didática na turma do LEAMAT II

A aplicação da sequência didática "Circulando com a Geometria: Uma proposta de aprendizagem das razões trigonométricas" se desenvolveu no dia 25 de abril de 2022.

A aula iniciou-se com a apresentação de uma animação que explora a trigonometria de uma maneira divertida. Em seguida, foi exposto aos alunos os conceitos de ciclo trigonométrico e a comprovação de seu raio ser 1.

A sequência continua com a definição de arcos geométricos e a apresentação das unidades de medida: grau e radiano, nesse momento a relação entre elas foi demonstrada. Logo depois, foi comentado sobre os conceitos de arcos côngruos e simetria.

Trabalhou-se com as razões trigonométricas do seno e do cosseno e os ângulos notáveis foram evidenciados. Como a turma não apresentou dificuldade, a aula prosseguiu para os conceitos sobre redução ao primeiro quadrante.

Neste momento, foi desenvolvida com a turma três questões sobre as reduções ao primeiro quadrante para sanar qualquer dúvida.

A sequência foi finalizada com o envio do formulário como atividade de casa contendo duas questões.

Ao longo da aula, os alunos não apresentaram dúvidas diante das explicações dos professores em formação. Quando questionados se estavam compreendendo o que estava sendo explicado, os estudantes respondiam afirmando o entendimento.

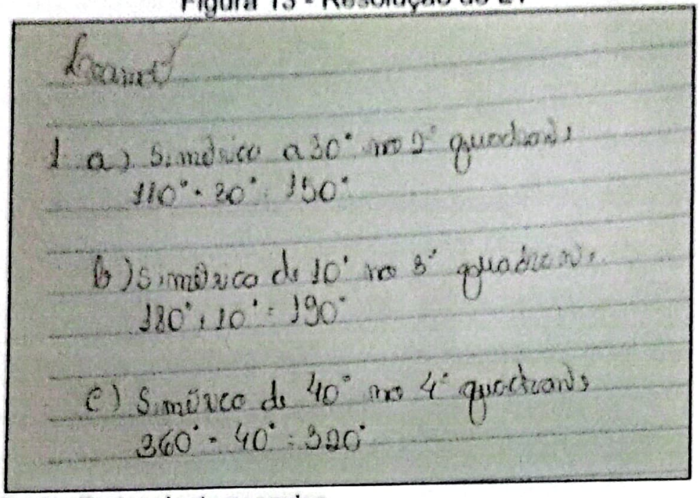
Após a finalização da apresentação da sequência, não foi pontuado nenhuma alteração no material, mas foram feitas algumas considerações sobre a aula, a saber:

- Repensar o tempo de aula;
- Constar no relatório que o objetivo da sequência didática é redução ao primeiro quadrante;
- Aula mais interativa com a turma;
- Refinar e atentar para a linguagem utilizada, principalmente na definição de conceitos e termos da trigonometria;
- Referência próxima a definição.

Como atividade extraclasse, foram propostas duas atividades das quais a primeira era trabalhar os conhecimentos adquiridos sobre redução ao primeiro quadrante, usando a simetria dos ângulos no ciclo trigonométrico de acordo com o que foi trabalhado em aula. Já na segunda, trabalhamos uma questão de múltipla escolha, também abordando a redução ao primeiro quadrante, utilizando o *applet* elaborado pelos professores em formação.

Participaram da aplicação 5 licenciandos e ao observar as respostas, em sua maioria, eles atenderam o objetivo proposto na questão 1, esperava-se que fossem solucionados de modo algébrico. Abaixo tem-se o exemplo feito pelo Licenciando 1 (L1) visualizado na (Figura 13).

Figura 13 - Resolução do L1

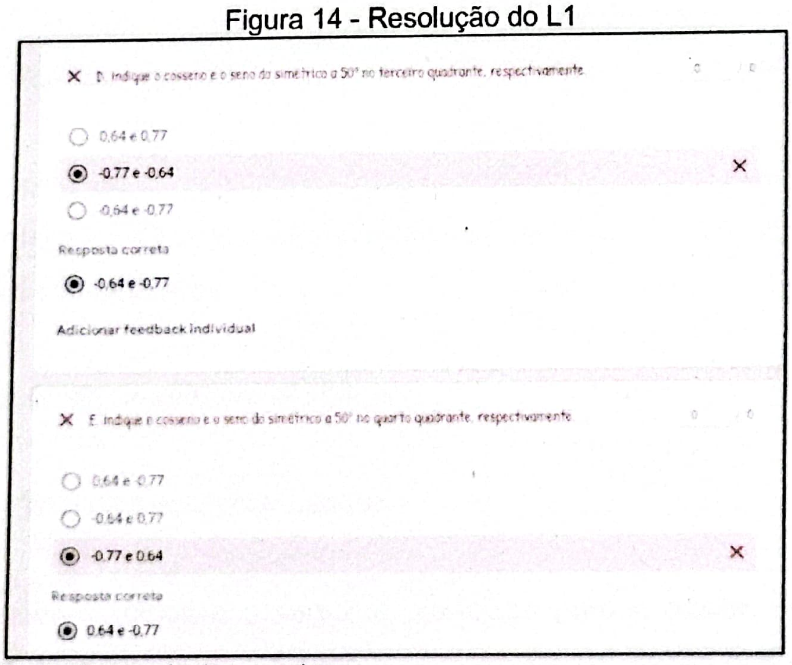


Fonte: Protocolo de pesquisa.

No entanto, percebeu-se que apenas o Licenciando 2 (L2) utilizou o *applet* para a resolução das questões, o que não atendeu as expectativas dos professores em formação.

Ao analisar a segunda questão observou-se que a maioria dos licenciandos assinalaram corretamente as opções. Entretanto, observou-se que em algumas respostas do L1 houve um equívoco de conceito em relação ao seno e cosseno, invertendo seus valores (Figura 14).

Figura 14 - Resolução do L1



Fonte: Protocolo de pesquisa.

3 RELATÓRIO DO LEAMAT III

3.1 Atividades desenvolvidas

No dia 11 de julho de 2022, aconteceu a primeira aula do Laboratório de Ensino e Aprendizagem Matemática III (LEAMAT III) de modo presencial. A partir deste momento iniciou-se os reparos finais no relatório do LEAMAT II, no qual consiste nos ajustes de imagens, análise das respostas obtidas pelos alunos na aplicação da sequência didática e formatação do trabalho.

Nas semanas posteriores foi iniciado o processo de elaboração do relatório do LEAMAT III, simultaneamente com a confecção do Ebook. Logo, nesta etapa o grupo reavaliou a sequência didática, decidindo assim acatar as sugestões feitas anteriormente pelos licenciandos e professoras orientadoras, durante a aplicação na turma do LEAMAT II. Através destas observações, o grupo dividiu a aula em dois blocos de dois tempos e adicionou jogos interativos, com a finalidade de tornar a aula mais dinâmica

. O Ebook substituirá a aplicação do presente trabalho em uma turma regular, conforme aconteceu nos anos anteriores nas turmas de LEAMAT III. Esta situação ocorreu devido a pandemia da COVID-19, que levou esta disciplina a ser aplicada no formato remoto. Assim, o Ebook apresenta a versão final da sequência didática, possibilitando que outros professores a utilizem em suas aulas.

Nas semanas entre os dias 17 de outubro de 2022 e 05 de novembro de 2022, os encontros da turma foram dedicados para as apresentações finais do LEAMAT III de cada grupo.

3.2 Elaboração da sequência didática

3.2.1 Versão final da sequência didática

A sequência didática a seguir é planejada para o ensino remoto, tendo como público-alvo alunos da 2.ª série do Ensino Médio, sendo que esta também pode ser usada no ensino presencial. Utilizando slides, feitos no Prezi, e como material exploratório o software Geogebra e o Simulador da Universidade do

Colorado. Busca-se com ela introduzir o tema ciclo trigonométrico de maneira clara, objetiva e dinâmica. Ao final desta sequência, espera-se que os alunos compreendam o conceito de seno e cosseno, além de conseguir trabalhar a redução ao primeiro quadrante. Os seis momentos da sequência didática são intitulados e apresentados no Quadro 2 abaixo:

Quadro 2 - Descrição dos momentos da sequência didática

Momentos	Título	Objetivos
I	Vídeo de Introdução	Introduzir a trigonometria de forma que chame a atenção dos alunos para o tema, mostrando que a trigonometria pode ser usada no dia a dia.
II	Definição do Ciclo Trigonométrico	Apresentar devidamente o ente que ampara toda essa sequência didática.
III	O que é arco?	Conceituar arcos para ajudar na introdução do tema.
IV	Definição de Seno e Cosseno	Ressaltar as características de cada razão no ciclo, a fim de entender melhor o seno e cosseno geometricamente.
V	Redução ao primeiro quadrante	Tratar de arcos com a finalidade de entender as simetrias no ciclo trigonométrico, bem como observar o seno e cosseno de cada ângulo ou radiano.
VI	Dinâmica Final	Praticar utilizando os conceitos adquiridos em aula para a resolução de questões.

Fonte: Elaboração própria.

A seguir, estão descritos os procedimentos pedagógicos que direcionam cada momento da sequência didática. A aula começa com a apresentação do título "Circulando com a Geometria: Uma Proposta de Aprendizagem das Razões Trigonométricas".

VII. Vídeo de Introdução

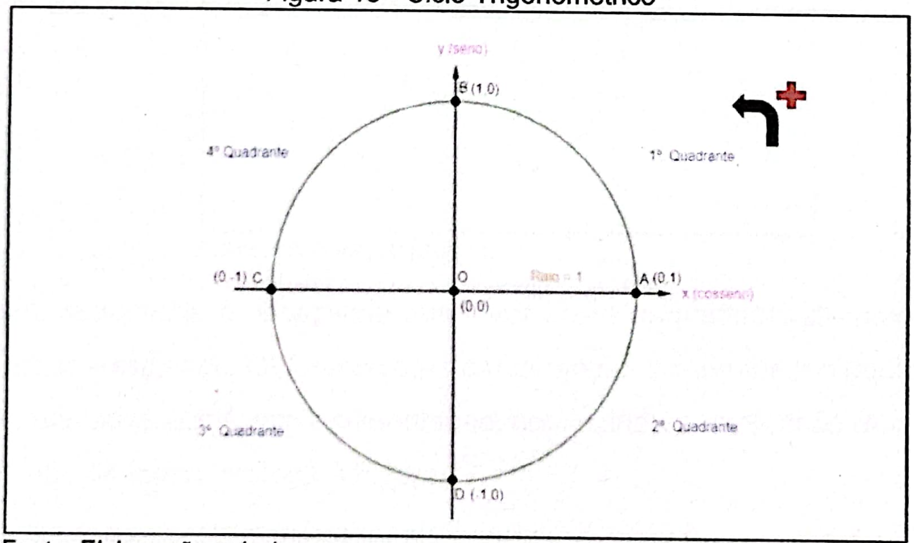
A aula deve ser iniciada a partir de uma animação que explora a trigonometria de uma maneira divertida, o que faz com que os alunos tenham interesse pelo tema. O vídeo em questão pode ser acessado por meio do link a seguir: https://www.geogebra.org/classic/mj7qpp4z.

Após a turma assistir o desenho animado, os professores em formação iniciam uma conversa com os alunos, sobre como a trigonometria está presente em nossas vidas, até mesmo na hora de repartir uma pizza. Em seguida, a apresentação prossegue com a introdução dos conteúdos, os quais envolvem o ciclo trigonométrico, principal tema da aula.

VIII. Definição do Ciclo Trigonométrico

Neste segundo momento da aula, a proposta é conduzir para a definição do ciclo trigonométrico (Figura 15).

Figura 15 - Ciclo Trigonométrico



Fonte: Elaboração própria.

É de extrema importância que os professores em formação esclareçam para o aluno o porquê de o raio desta circunferência ser igual a 1. Segundo Lima

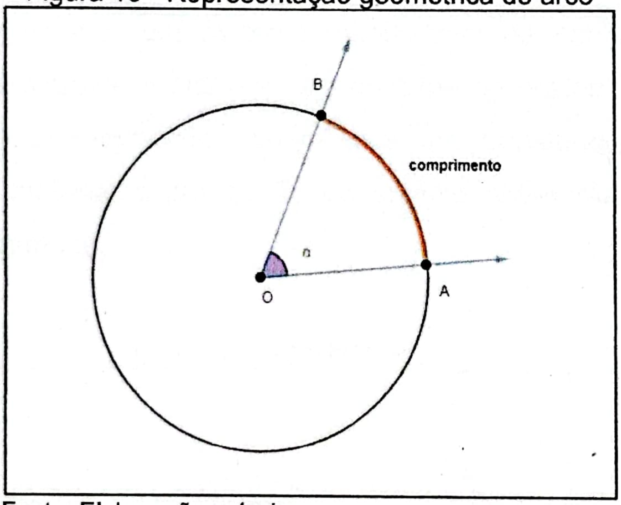
(2012, p.214) "Como todas as linhas trigonométricas são quocientes entre duas medidas, o valor de cada uma delas se mantém inalterado quando se passa de uma unidade para outra. Por isso não faz mal convencionar raio igual a 1 (r=1)".

Além disso, vale ressaltar o motivo de o comprimento da circunferência trigonométrica (C) ser igual a 2π.

IX. O que é arco?

No terceiro momento da aula, os futuros professores devem recordar, junto à turma, o conceito de arco na circunferência. Essa formalização deve ser construída indicando que o arco é delimitado por dois pontos na circunferência e tem ligação com o ângulo central que o compreende. É importante mostrar a representação geométrica do arco (Figura 16), com o intuito de permitir que o aluno visualize o que está sendo falado.

Figura 16 - Representação geométrica do arco



Fonte: Elaboração própria.

Em sequência, é necessário relembrar sobre as unidades de medida dos arcos: graus e radianos. Os professores em formação devem frisar a equivalência entre as unidades que foram apresentadas, conduzindo a explicação dessa parte do conteúdo de forma análoga à Figura 17.

Figura 17 - Equivalência entre grau e radiano

Sabemos que:

$$\boxed{Raio\,(r) = 1\,rad} \qquad \text{(I)}$$

E que:

$$\boxed{360^\circ = 2\pi . r} \qquad \text{(II)}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$$\mathbf{360^\circ = 2\pi . 1\ rad}$$

Sendo assim:

$$\pi\ rad = \frac{360^\circ}{2}$$

$$\boxed{\pi\ rad = 180^\circ}$$

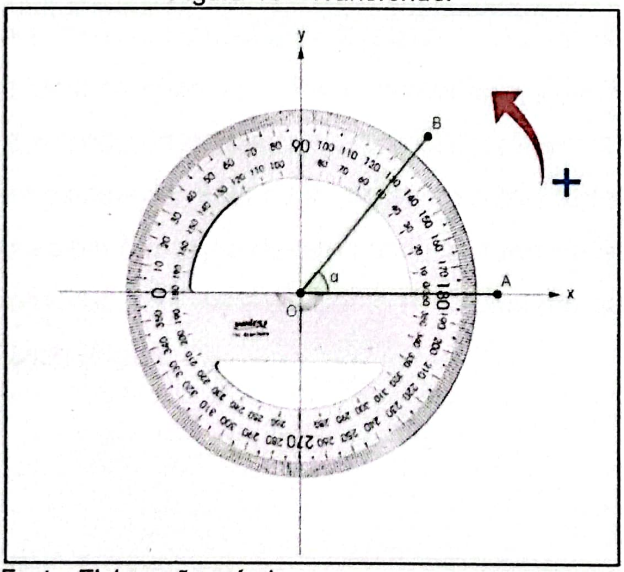
Conclusão:

Podemos dizer que **180º** equivale a $\boldsymbol{\pi\ rad}$.

Fonte: Elaboração própria.

É interessante mostrar um material manipulável de conhecimento dos alunos, mesmo que a sequência didática seja aplicada no ensino remoto. Neste caso, os professores em formação podem usar um transferidor (Figura 18) indicando com esse material a percepção do sentido anti-horário que guia a circunferência trigonométrica.

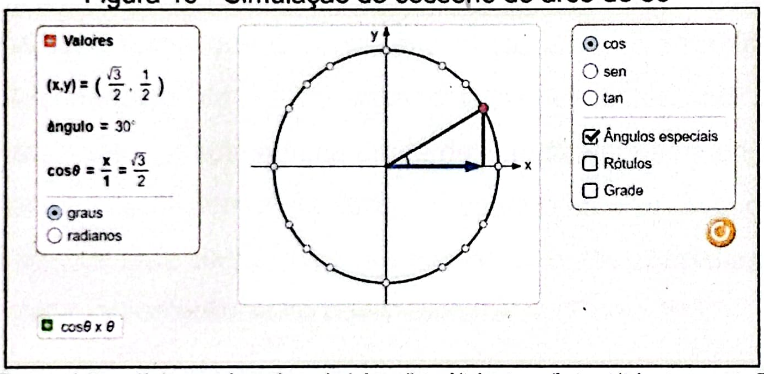
Figura 18 - Transferidor



Fonte: Elaboração própria.

A proposta continua apresentando a congruência entre arcos trigonométricos e para trabalhar este conceito usa-se o simulador criado pela Universidade do Colorado em Boulder (https://phet.colorado.edu/sims/html/trig-tour/latest/trig-tour_pt_BR.html). A partir dele, o aluno consegue ter uma percepção de forma dinâmica do que acontece para um arco ser congruente a outro. Para o uso do simulador é interessante, que ao acessar o site, a opção ângulos especiais que se encontra ao lado direito da circunferência, seja marcada, assim como a lacuna que indica cosseno. Com isso, ao mexer o cursor apontado por uma bolinha vermelha, consegue-se obter as informações em destaque no quadro à direita da circunferência trigonométrico dos principais ângulos. Os dados informativos são o par ordenado (x, y) referente ao ponto, indicação do ângulo e valor do cosseno, o qual tem-se a opção de graus ou radianos. A seguir, exemplo de uso do simulador (Figura 19).

Figura 19 - Simulação do cosseno do arco de 30º

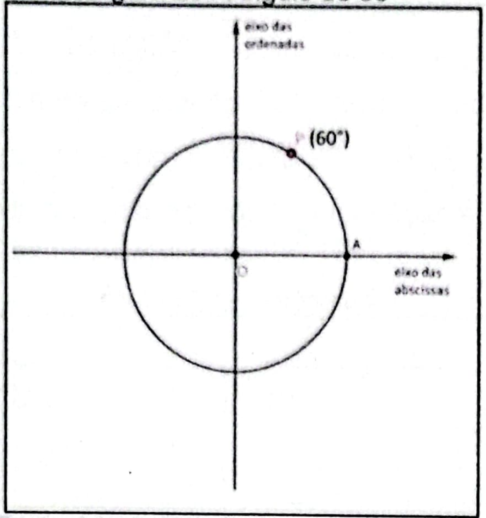


Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/trig-tour/latest/trig-tour_pt_BR.html.

A seguir, para iniciar o conteúdo de simetria, o futuro professor deve indicar o significado de simetria no dicionário. Posteriormente, a partir de uma sequência de figuras, indica a relação de medida de arcos com extremidades simétricas em relação a um dos eixos coordenados ou a origem do plano cartesiano.

Os professores em formação devem conduzir a aula indicando inicialmente um ponto A de coordenadas (1, 0) e um ponto P no primeiro quadrante, o ângulo $A\hat{O}P$ é 60°, neste caso (Figura 20).

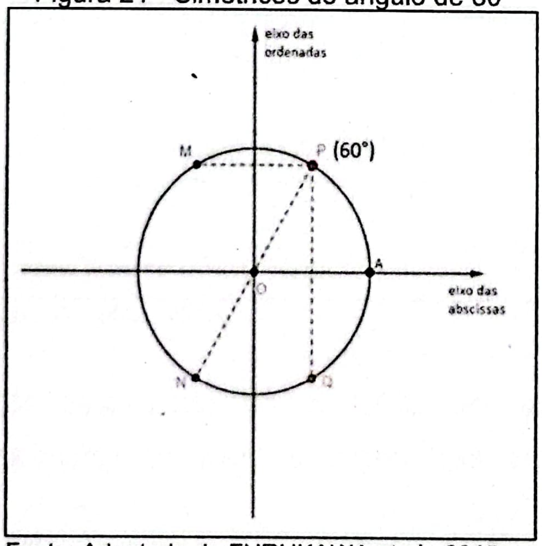
Figura 20 - Ângulo de 60°



Fonte: Adaptado de FURUKAWA et al., 2015.

Em seguida, é exposto aos alunos que no segundo, terceiro e quarto quadrantes existem pontos simétricos ao ponto P. Estes pontos serão representados por M, N, Q, nesta ordem. Para achar o ponto M, o professor em formação sinaliza à turma que é necessário traçar uma corda, paralelo ao eixo das abscissas, partindo de P até intersectar a circunferência no segundo quadrante. Assim como, traça-se uma corda de P passando pela origem O (0, 0), até intersectar o circunferência no terceiro quadrante. Por fim, o ponto Q é encontrado traçando uma corda, perpendicular ao eixo das abscissas, partindo de P até intersectar a circunferência no quarto quadrante (Figura 21).

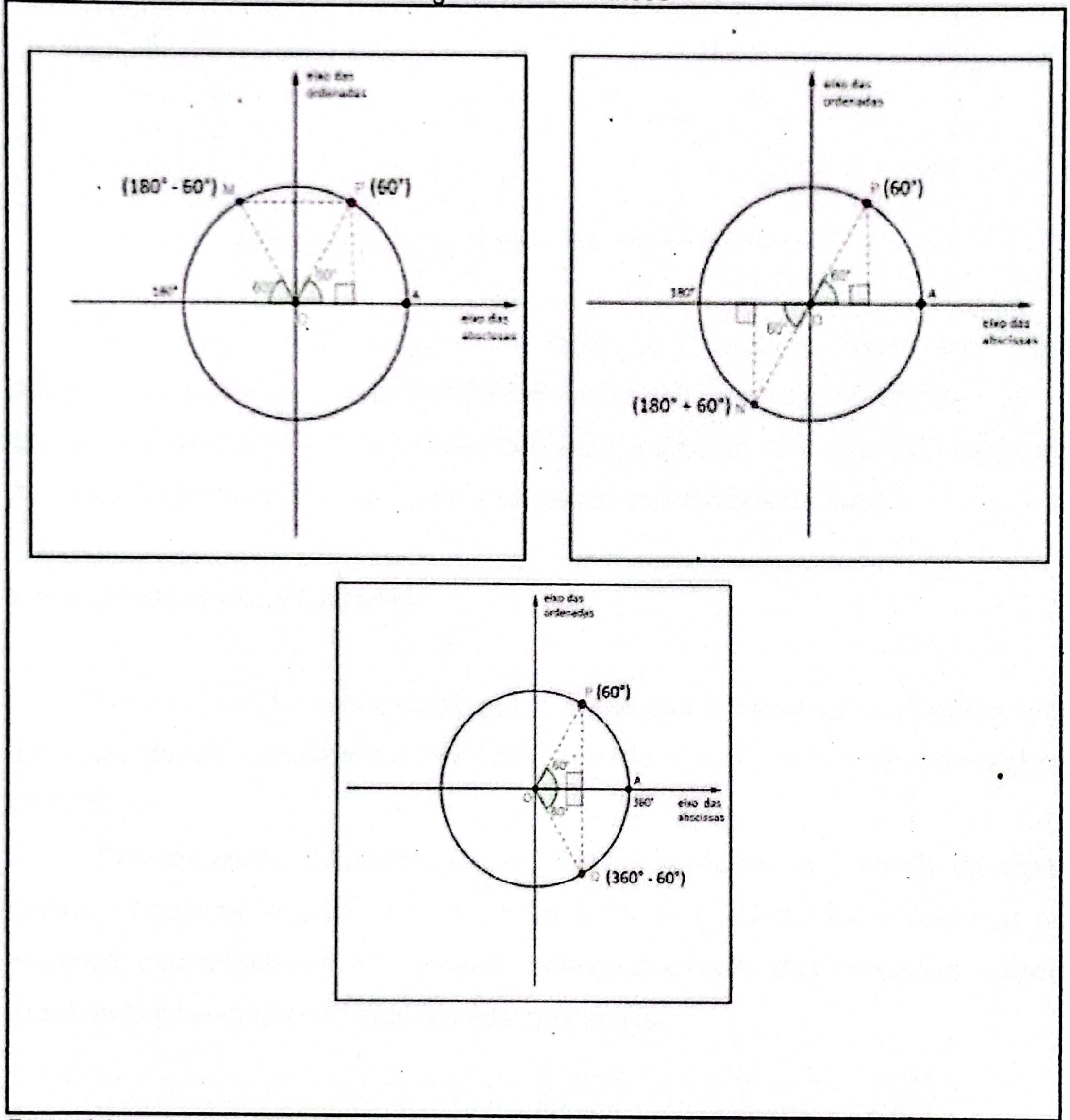
Figura 21 - Simétricos do ângulo de 60°



Fonte: Adaptado de FURUKAWA et al., 2015.

Dando sequência a aula, é analisado junto aos alunos que subtraindo 180° de 60° encontra-se o AÔM. Já o AÔN é obtido através da soma de 180° com 60° e o AÔQ pode ser calculado subtraindo 360° de 60°. Todas essas informações devem ser exibidas juntamente com a Figura 22, assim o professor em formação consegue apresentar graficamente o porquê da interação entre os ângulos.

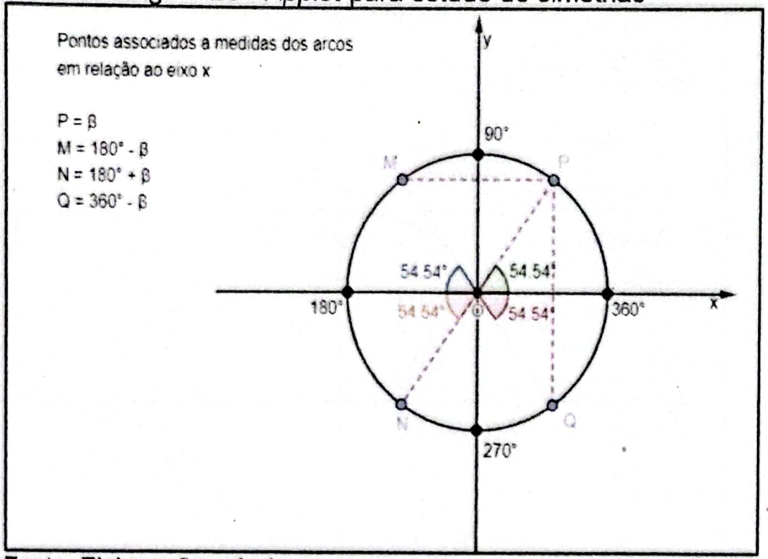
Figura 22 - Simétricos



Fonte: Adaptado de FURUKAWA et al., 2015.

Para dinamizar essa parte do conteúdo um *applet* do geogebra (https://www.geogebra.org/m/dy2abwym) é usado com intuito de fixação do conteúdo (Figura 23).

Figura 23 - *Applet* para estudo de simetrias



Fonte: Elaboração própria.

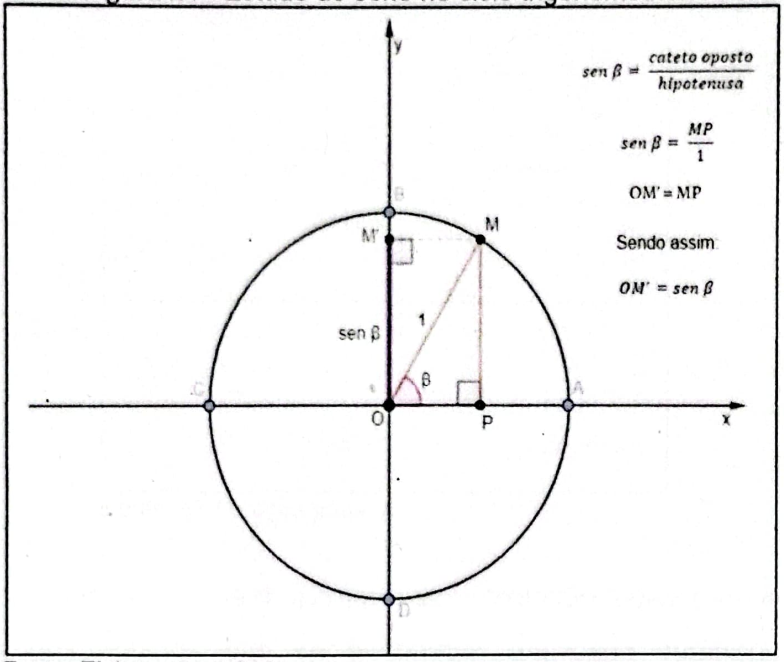
Ao final desta etapa da aula, é indicado usar um jogo (https://quizizz.com/admin/quiz/6335aa5841467c001d8acd1d/quiz-leamat-geometria) abordando o que foi estudado até o momento. O intuito é a fixação do conteúdo de forma dinâmica, finalizando assim dois tempos de aula.

X. Definição de Seno e Cosseno

Para o penúltimo momento dessa sequência didática os professores em formação devem apresentar a definição de seno, assim como a do cosseno de um arco.

Primeiramente, os professores em formação indicam a definição de seno. Dando sequência, a partir da Figura 24 o aluno é conduzido a observar as relações trigonométricas no triângulo retângulo através das projeções, sendo assim este poderá deduzir qual é o eixo dos senos.

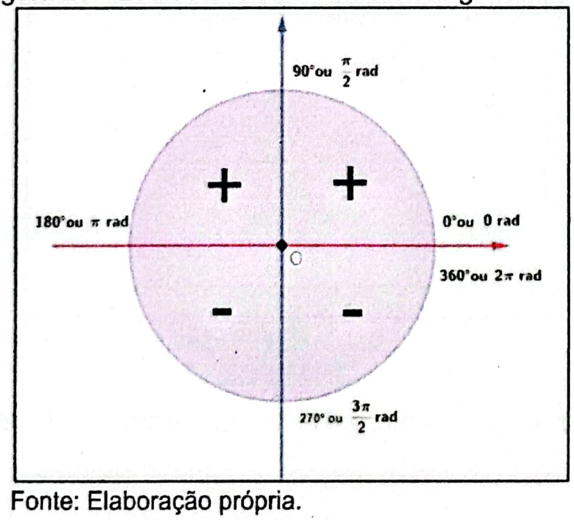
Figura 24 - Estudo do seno no ciclo trigonométrico



Fonte: Elaboração própria.

Após essa dedução, os professores em formação indicam o sinal do valor de seno dos ângulos que se encontram em cada quadrante do ciclo trigonométrico (Figura 25).

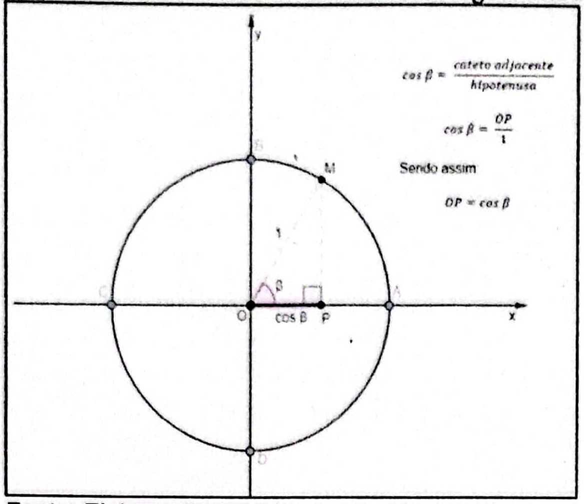
Figura 25 - Estudo dos sinais no ciclo trigonométrico



Fonte: Elaboração própria.

Em seguida, o mesmo processo de dedução por meio de figura é feito anteriormente, é usado para deduzir informações sobre o eixo dos cossenos (Figura 26).

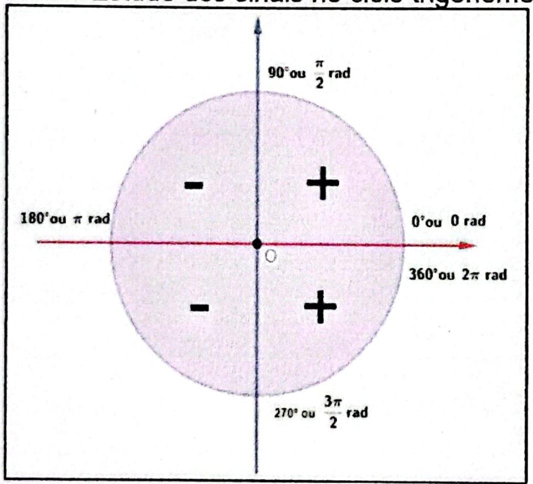
Figura 26 - Estudo do cosseno no ciclo trigonométrico



Fonte: Elaboração própria.

Após essa dedução, os professores em formação indicam o sinal do valor do cosseno dos ângulos que se encontram em cada quadrante do ciclo trigonométrico (Figura 27).

Figura 27 - Estudo dos sinais no ciclo trigonométrico

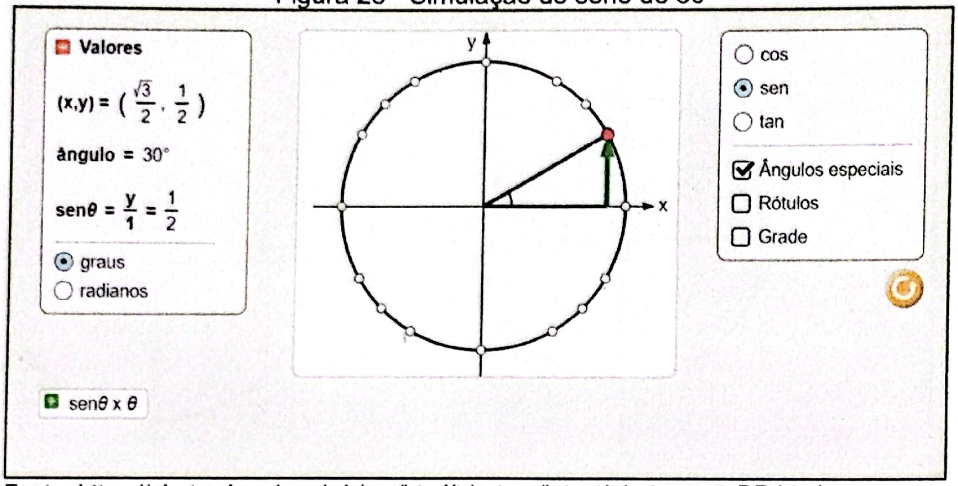


Fonte: Elaboração própria.

Após concluir a definição de seno e cosseno, o simulador é usado novamente, de forma análoga à anterior, porém neste momento deve-se marcar a lacuna que indica seno no quadro à direita da circunferência (Figura 28). O intuito é elucidar o comportamento da imagem de cada razão nos eixos em que se encontram.

É relevante apontar os valores de seno e cosseno para cada ângulo e arco notável.

Figura 28 - Simulação do seno de 30°



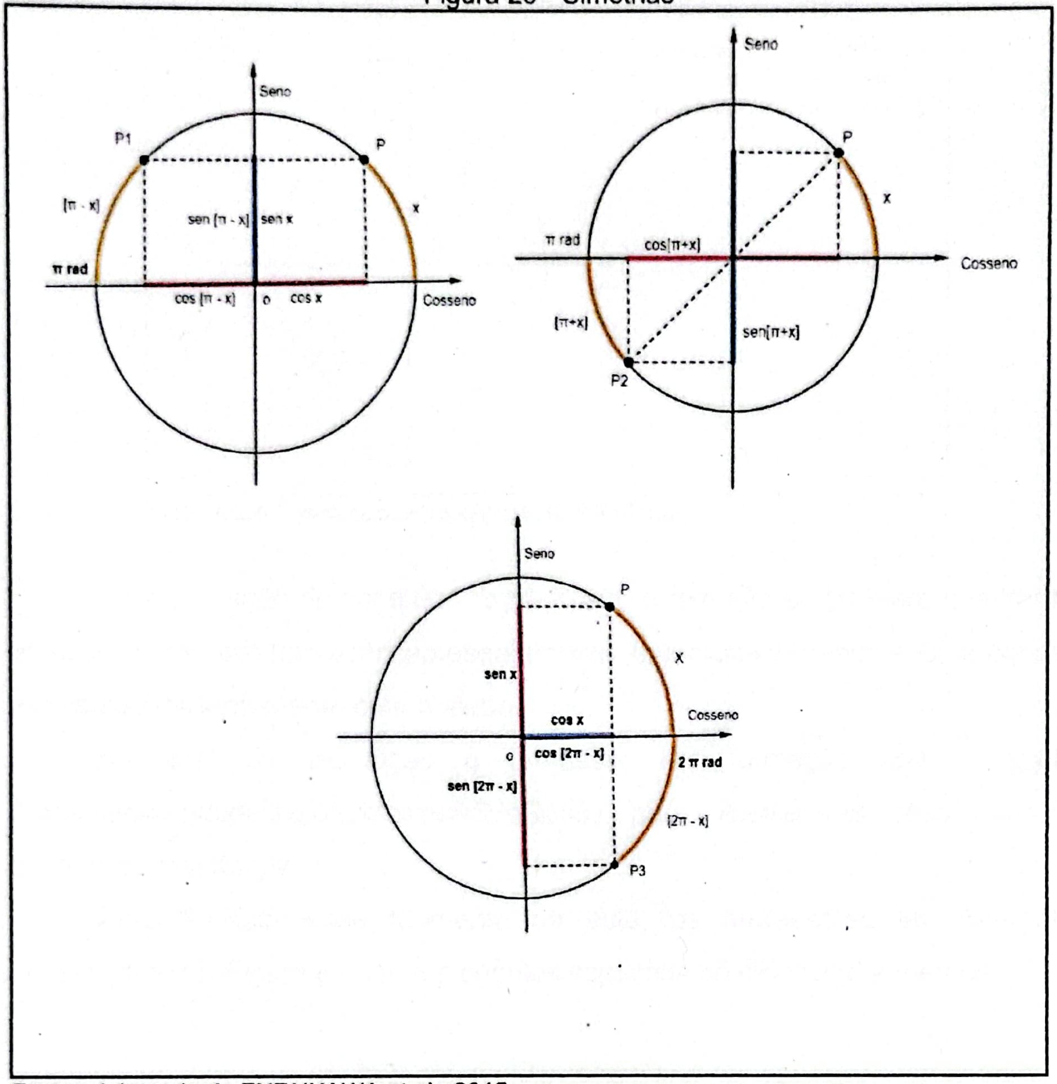
Fonte: https://phet.colorado.edu/sims/html/trig-tour/latest/trig-tour_pt_BR.html.

XI. Redução ao primeiro quadrante

Os professores em formação iniciam esse momento da aula indicando para o aluno qual o objetivo de usar a redução ao primeiro quadrante, enfatizando que a ideia de simetria também será importante nesse momento.

Sendo assim, é apresentado ao aluno três figuras (Figuras 29) com a finalidade de ensiná-lo que ao analisar um ângulo que está no primeiro quadrante do ciclo trigonométrico, é possível determinar ângulos do segundo, terceiro e quarto quadrantes que possuem o mesmo valor de seno e cosseno, em módulo, do primeiro ângulo. Essas figuras tem como partida um ponto P e em sequência elas mostram os pontos simétricos a P que se encontram no 2.º, 3.º e 4.º quadrantes, indicando assim, os ângulos que se encontram nesses quadrantes e seus respectivos valores de seno e cosseno.

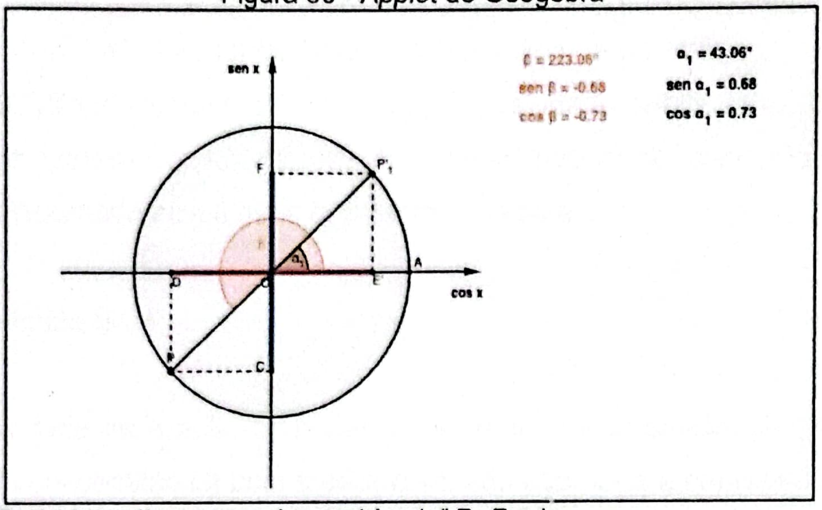
Figura 29 - Simetrias



Fonte: Adaptado de FURUKAWA et al., 2015.

Para complementar a explicação um *applet* do geogebra (https://www.geogebra.org/classic/kRwEvqJp) é utilizado. O objetivo deste é indicar que apesar das simetrias, os valores de seno e cosseno podem ser opostos de acordo com o quadrante (Figura 30).

Figura 30 - *Applet* do Geogebra



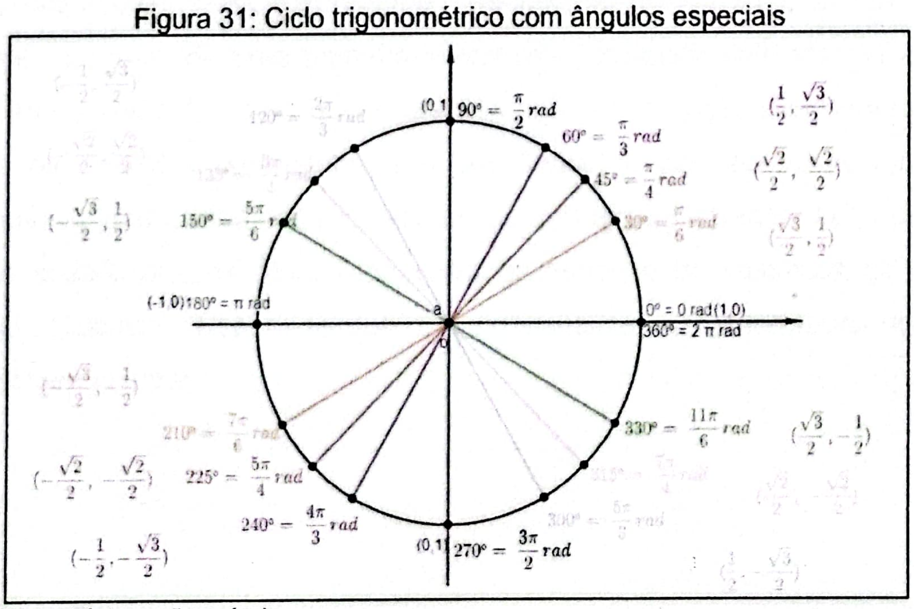
Fonte: https://www.geogebra.org/classic/kRwEvqJp.

Para a fixação do conteúdo exposto sobre redução ao primeiro quadrante, os professores em formação apresentam três exercícios (Apêndice C) e conduz as resoluções juntamente com o aluno.

Ao final da resolução o professor em formação usa o *applet* (https://www.geogebra.org/classic/k89nQc55) para ilustrar as resoluções e conferir os resultados.

Para finalizar esse momento da aula, os professores em formação apresentaram a Figura 31 com os ângulos especiais no ciclo trigonométrico.

Figura 31: Ciclo trigonométrico com ângulos especiais



Fonte: Elaboração própria.

Ao final deste momento, é indicado usar mais um jogo (https://wordwall.net/pt/resource/12138501/trigonometria-no-ciclo-trigonom%C3%A9trico) abordando o que foi estudado sobre seno, cosseno e redução ao primeiro quadrante. O intuito é a fixação do conteúdo de forma dinâmica, finalizando assim mais dois tempos de aula.

XII. Dinâmica final

Para encerrar a aula, os professores em formação enviam para os alunos uma apostila (Apêndice C) com todo o conteúdo abordado e convidam os alunos a realizarem a atividade final proposta. Espera-se que o aluno nesse momento, coloque em prática e use os conhecimentos adquiridos em aula para resolver as questões.

Com a primeira questão da atividade, espera-se que o aluno determine os ângulos solicitados utilizando a redução ao primeiro quadrante. Os professores em formação devem recolher as respostas dos alunos por meio de um formulário (Apêndice A), no qual os estudantes devem anexar fotos de suas respostas.

A segunda questão tem o objetivo de complementar à questão anterior. Pretende-se fazer com que o aluno tenha seu próprio contato com o Geogebra usando o *applet* (https://www.geogebra.org/classic/mj7qpp4z). Nesta situação, ele pode conferir suas respostas usando a tecnologia disponível e a partir desta dinâmica, assimilar de uma maneira interativa o conteúdo aplicado em aula. O *applet* em questão faz com que o aluno tenha a percepção das simetrias em relação ao eixo das ordenadas (eixo dos senos) e das abscissas (eixo dos cossenos), quando trabalhada a redução ao primeiro quadrante. Além disso, a questão solicita que os alunos informem os senos e os cossenos de alguns ângulos específicos. Espera-se que o aluno visualize essa informação por meio do *applet* em questão.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os professores em formação consideram que o referido trabalho contribuiu para um amadurecimento acadêmico e profissional, visto que, este foi o primeiro contato de todos com a escrita acadêmica. A aplicação da sequência didática fez com que o grupo enxergasse um novo método para introduzir o estudo do ciclo trigonométrico, usando o Simulador da Universidade do Colorado e o *Software* Geogebra.

Vale ressaltar que o presente trabalho foi aplicado remotamente devido a Pandemia da Covid-19, sendo essa uma nova experiência do LEAMAT. Em função disso, a aplicação aconteceu na própria turma do LEAMAT. Acredita-se que os recursos utilizados possibilitaram uma nova percepção do conteúdo apresentado.

Sobre as mudanças sugeridas, acatou-se a que se refere ao tempo de aula e a interatividade. Como solução, optou-se por dividir a aula em dois blocos de 2 tempos cada e ao final de cada aula introduzir os jogos interativos. Assim, a aula ficará menos expositiva e contará com maior participação dos alunos que conseguem assimilar melhor o que foi proposto.

O trabalho em questão também pode ser aplicado no ensino presencial, sem sofrer alterações. Sugerimos apenas, que após o momento V da sequência, o professor solicite que cada aluno faça uma circunferência trigonométrica em uma folha A4, marcando os ângulos notáveis, destacando os simétricos a esses ângulos nos demais quadrantes. Assim, o estudante tem o contato com a manipulação da circunferência trigonométrica.

Apesar dos desafios, acredita-se que os recursos utilizados possibilitaram uma nova percepção do conteúdo apresentado. Considera-se que o objetivo da sequência didática foi atingido, visto que, a turma respondeu com êxito às atividades propostas. Espera-se também que ao servir de material de apoio ao docente, diferentes turmas possam ter um olhar diferenciado sobre as relações trigonométricas no ciclo.

REFERÊNCIAS

ALVES, George de Souza; SAMPAIO, Fábio Ferrentini. O modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele e possíveis contribuições da geometria dinâmica. **Revista de Sistema de Informação do FSMA**, Macaé, n. 5, p. 69-76, 2010. Disponível em: http://www.fsma.edu.br/si/sistemas.html. Acesso em: 23 nov. 2021.

ANGELO, Mateus Santos; SANTOS, Maria Flavia Melo dos; BARBOSA, Renata Sa de Jesus. O ensino de geometria no Brasil: uma abordagem histórica. *In*: Colóquio Internacional Educação e Contemporaneidade, 14., 2020, São Cristóvão/SE. **Anais eletrônicos** [...]. São Cristóvão: UFS, 2020. p. 1-12. Disponível em: https://ri.ufs.br/bitstream/riufs/13711/37/36. Acesso em: 14 set. 2021.

AZEVEDO, Italândia Ferreira de; ALVES, Francisco Régis Vieira. Trigonometria e suas aplicações no Geogebra: aulas experimentais com alunos do ensino médio. **Tangram - Revista de Educação Matemática,** Dourados - MS, v. 2, ed. 2, p. 102-115, 2019. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/332390676_Trigonometria_e_suas_aplicacoes_no_Geogebra_aulas_experimentais_com_alunos_do_ensino_medio. Acesso em: 16 out. 2021.

BEZERRA, Verlene Eufrásio. **Jogos como uma ferramenta no ensino da trigonometria**. 2014. 50 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte, 2014. Disponível em: http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/60138/1/2014_dis_vebezerra.pdf. Acesso em: 16 out. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 16 out. 2021

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriçulares Nacional.** Brasília, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/introducao.pdf. Acesso: em 16 out. 2021.

CÂNDIDO, Claúdia C.; GALVÃO, Maria Elisa E. L. **Matemática:** Geometria Plana. São Paulo: USP, 2019. 48 p. v. 3. Disponível em: https://issuu.com/bibliotecaifspbirigui/docs/_geometriaplana.apostila. Acesso em: 16 nov. 2021.

CROWLEY, Mary L. O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. *In*: LINDQUIST, Mary Montgomery *et al*. **Aprendendo e ensinando geometria**. São Paulo: Atual, 1994. cap. 1, p. 1-20.

DAMASCENO, Linda Nayara; RABELO, Juliany Cândida Ribeiro. Matemática: nos atuais ainda existe um nível alto de rejeição?. *In*: SESMAT,13., 2019, Mato Grosso do Sul. **Anais** [...]. Mato Grosso do Sul: [*s. n.*], 2019. p. 313-323. Disponível em: https://periodicos.ufms.br/index.php/sesemat/article/view/8200. Acesso em: 16 nov. 2021.

FURUKAWA, Clayton *et al.* Circunferência Trigonométrica - Parte. *In*: FURUKAWA, Clayton *et al.* **Ensino Médio - Livro de Teoria e Atividades:** Matemática, Ciências da Natureza e suas Tecnologias - n.6. Ribeirão Preto - SP: COC by Pearson, 2015. v. 1, cap. 8, p. 72 - 79.

FURUKAWA, Clayton *et al.* Circunferência Trigonométrica - Parte. *In*: FURUKAWA, Clayton *et al.* **Ensino Médio - Livro de Teoria e Atividades:** Matemática, Ciências da Natureza e suas Tecnologias - n.7. Ribeirão Preto - SP: COC by Pearson, 2015. v. 1, cap. 8, p. 55 - 68.

IEZZI, Gelson. Razões Trigonométricas na Circunferência. *In:* IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar:** Trigonometria. 8 ed. São Paulo - SP: Saraiva, 2010. v. 3, cap. IV, p. 39 - 60.

LIMA, Elon Lages. **Meu professor de matemática.** 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 240 p. (Coleção Professor de Matemática; 4).

LORENZATO, Sergio. Por que ensinar não geometria?. **A educação matemática em revista - SBEM**, Blumenau, n. 4, p. 3-13, 1.º semestre 1995. Disponível em: http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/revista/index.php/emr/issue/view/87. Acesso em: 16 nov. 2021.

NASCIMENTO, Maurício Alves. Trigonometria: um olhar com a pesquisa em sala de aula. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XI., 2013, Curitiba. **Anais** [...]. Curitiba, 2013. p. 1-16. Disponível em: http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/916_2029_ID.pdf. Acesso em: 16 out. 2021.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetike**, Campinas, SP, v. 1, n. 1, 1993. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646822. Acesso em: 16 nov. 2021.

PEREIRA, Thales de Lélis Martins. **O uso do software geogebra em uma escola pública:** interações entre alunos e professor em atividades e tarefas de geometria para o ensino fundamental e médio. 2012. 122 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2012. Disponível em: https://repositorio.ufjf.br/jspui/handle/ufjf/1790. Acesso em: 16 nov. 2021.

SENA, Rebeca Moreira; DORNELES, Beatriz Vargas. Ensino da Geometria: Rumos da Pesquisa (1991-2011). **REVEMAT,** Florianópolis, v. 08, n. 1, p. 138-155, 2013. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2013v8n1p138. Acesso em: 23 nov. 2021.

STEINMACHER, Igor Fabio *et al*. Uso do GeoGebra no Ensino de Matemática: Avaliação de Usabilidade e de Aprendizado. *In*: ENINED - ENCONTRO NACIONAL DE INFORMÁTICA E EDUCAÇÃO, 2., 2011, Cascavel - PR. **Anais** [...]. Cascavel-PR], 2011. p. 1-10. Disponível em: http://www.inf.unioeste.br/enined/anais/artigos_enined/A44.pdf. Acesso em: 16 nov. 2021.

URDANETA, Stephanie Chiquinquira Diaz; GONZALEZ, Juan Luis Prieto; CASTILLO, Ana Duarte. Interpretação geométrica dos signos das razões trigonométricas com Geogebra. **Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemática**, v. 13, ed. 28, p. 78-89, 2.º semestre 2017. Disponível em: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6318124. Acesso em: 16 out. 2021.

VALENTE, José Armando (org.). **O computador na sociedade do conhecimento**. São Paulo: USP, 1999. 115 p. Disponível em: http://usuarios.upf.br/~teixeira/livros/computador-sociedade-conhecimento.pdf. Acesso em: 16 nov. 2021.

Campos dos Goytacazes (RJ), 27 de outubro de 2022.

Isabela Lima da Silva

Julia Dutra Pereira

Marina Martins de O. de Jesus

Nathalia Santos de Almeida

Paulo Ricardo F. M. Júnior

APÊNDICES

Apêndice A: Formulário com questões extraclasse.

Atividade Complementar

Circulando com a Geometria: Uma proposta de aprendizagem das razões trigonométricas

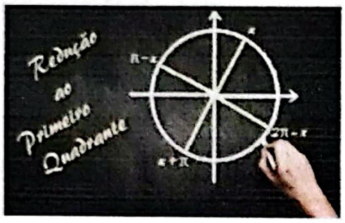
m.marina@gsuite.iff.edu.br Alternar conta

A foto e o nome associados à sua Conta do Google serão registrados quando você fizer upload de arquivos e enviar este formulário . Seu e-mail não faz parte da resposta.

Nome:

Sua resposta

1. Determine o ângulo que se pede, usando seus conhecimentos de redução ao primeiro quadrante.



A. O ângulo simétrico a 30° que se encontra no 2° quadrante.

Adicionar arquivo

B. O ângulo simétrico a 10° que se encontra no 3° quadrante.

Adicionar arquivo

C. O ângulo simétrico a 40° que se encontra no 4° quadrante.

Adicionar arquivo

2. Utilizando o applet do Geogebra disponível abaixo, confira suas respostas em relação à primeira questão e determine o que se pede a seguir.

https://www.geogebra.org/classic/mj7qnp4z

A. Ângulos simétricos a 50° nos quadrantes 2, 3 e 4, respectivamente, são: 0 pontos

- ○ 130°, 230° e 310°
- ○ 110°, 220° e 300°
- ○ 130°, 220° e 310°

B. Indique o cosseno e o seno de 50° no primeiro quadrante, respectivamente. 0 pontos

- ○ -0,64 e 0,77-
- ○ 0,77 e 0,64
- ○ 0,64 e 0,77

C. Indique o cosseno e o seno do simétrico a 50° no segundo quadrante, respectivamente. 0 pontos

- ○ 0,77 e 0,64
- ○ -0,64 e 0,77
- ○ 0,64 e -0,77

D. Indique o cosseno e o seno do simétrico a 50° no terceiro quadrante, respectivamente. 0 pontos

- ○ 0,64 e 0,77
- ○ -0,77 e -0,64
- ○ -0,64 e -0,77

E. Indique o cosseno e o seno do simétrico a 50° no quarto quadrante, respectivamente. 0 pontos

- ○ 0,64 e -0,77
- ○ -0,64 e 0,77
- ○ -0,77 e 0,64

Apêndice B: Manual do *applet* usado na atividade extraclasse.

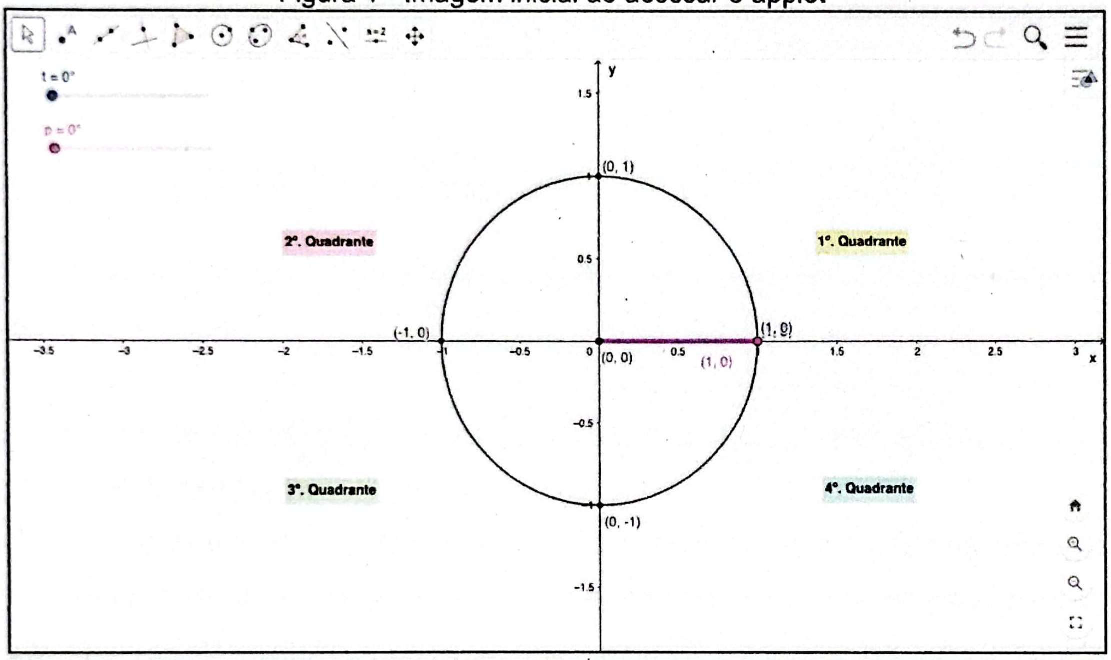
MANIPULAÇÃO DO *APPLET*
(https://www.geogebra.org/classic/mj7qpp4z)

1. O applet em questão possui dois controles deslizantes: azul e rosa (Figura 1).

Controle deslizante azul: para consulta dos parâmetros dos ângulos que se encontram no 1°. quadrante (0≤α≤90°)

Controle deslizante rosa: para consulta dos parâmetros dos ângulos que se encontram no 2°., 3°. e 4°. quadrantes (90°<α≤360°)

Figura 1 - Imagem inicial ao acessar o applet

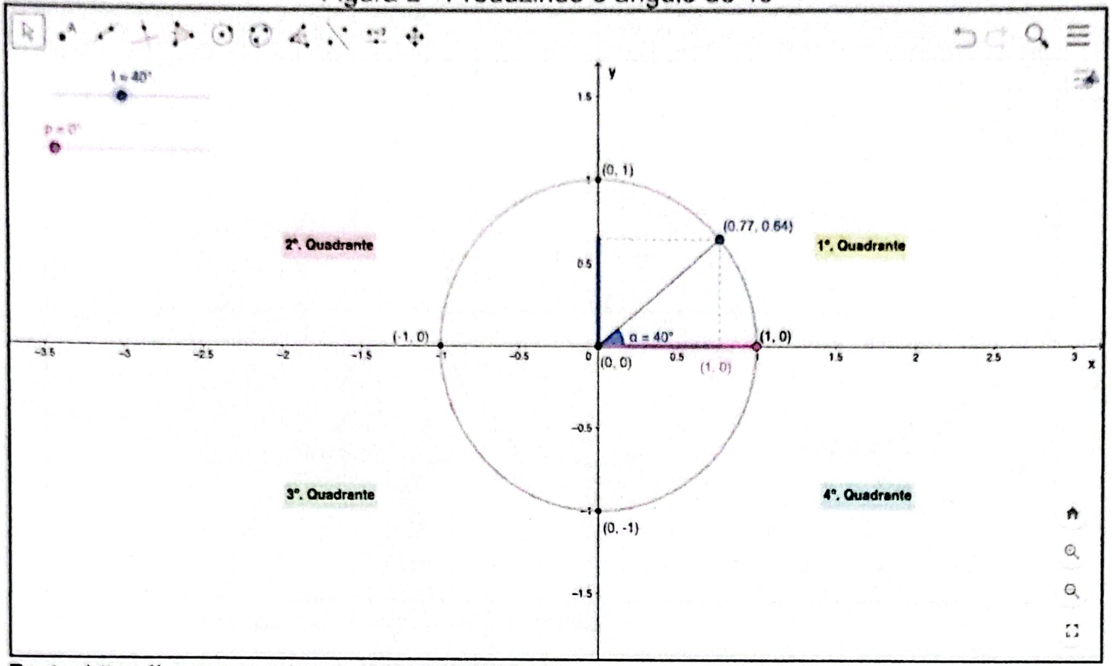


Fonte: https://www.geogebra.org/classic/mj7qpp4z.

2. Segue abaixo exemplo de manipulação do applet para consulta do ângulo de 40°.

Para tal consulta, o estudante deve arrastar o controle deslizante azul, até obter o ângulo com medida 40° (Figura 2).

Figura 2 - Produzindo o ângulo de 40°



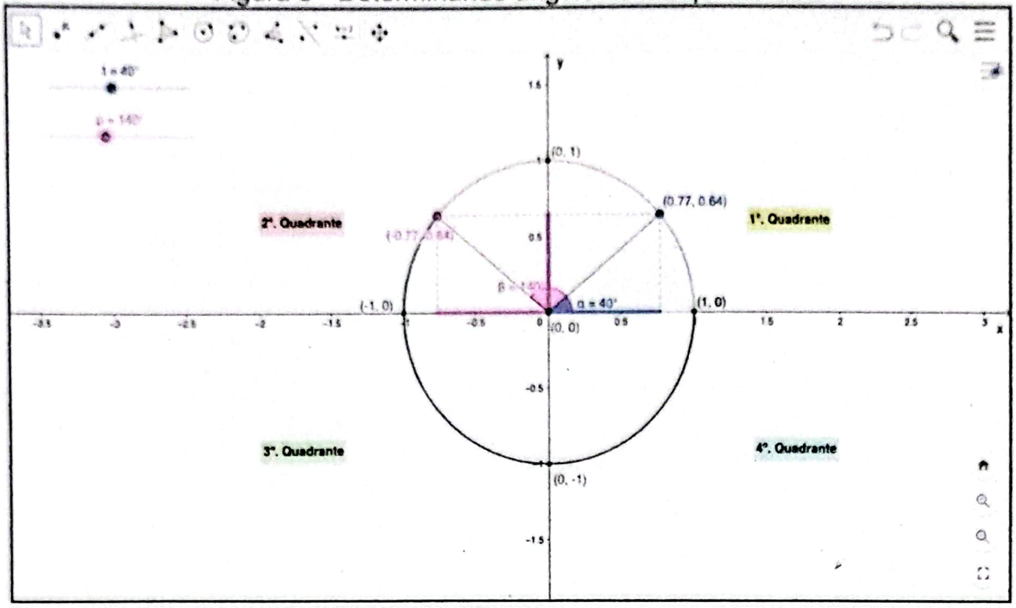
Fonte: https://www.geogebra.org/classic/mj7qpp4z.

Importante: A abscissa indica o cosseno do ângulo α e a ordenada representa o seno do ângulo α.

3. Para achar o ângulo simétrico a 40° que se encontra no 2º. quadrante, usa-se o controle deslizante rosa.

O aluno deve deslizar o controle até obter o ângulo que terá o valor da abscissa oposto ao valor do cosseno de 40° e ordenada com valor igual ao seno de 40°. Por tanto, nesta situação, o aluno arrasta o controle deslizante até obter o ângulo de 140° (Figura 3).

Figura 3 - Determinando ângulo no 2°. quadrante



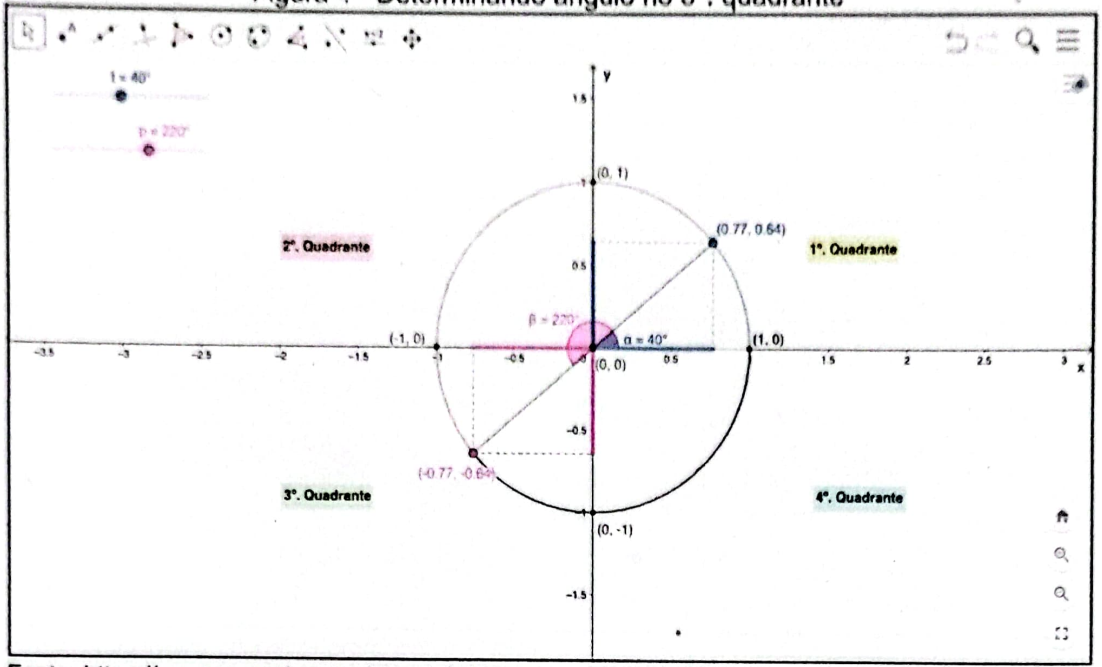
Fonte: https://www.geogebra.org/classic/mj7qpp4z.

Importante: Neste momento o aluno faz a associação usando a redução ao primeiro quadrante. Ele deve ter o conceito de que o ângulo, no 2°. quadrante, simétrico a um ângulo α no 1°. quadrante é indicado por β=180°- α.

4. Para determinar o ângulo simétrico a 40° que se encontra no 3°. quadrante, também usa-se o controle deslizante rosa.

O aluno deve deslizar o controle até obter o ângulo que terá o valor da abscissa oposto ao valor do cosseno de 40° e ordenada que também terá o valor oposto do seno de 40°. Assim, nesta situação, o aluno arrasta o controle deslizante até obter o ângulo de 220° (Figura 4).

Figura 4 - Determinando ângulo no 3°. quadrante



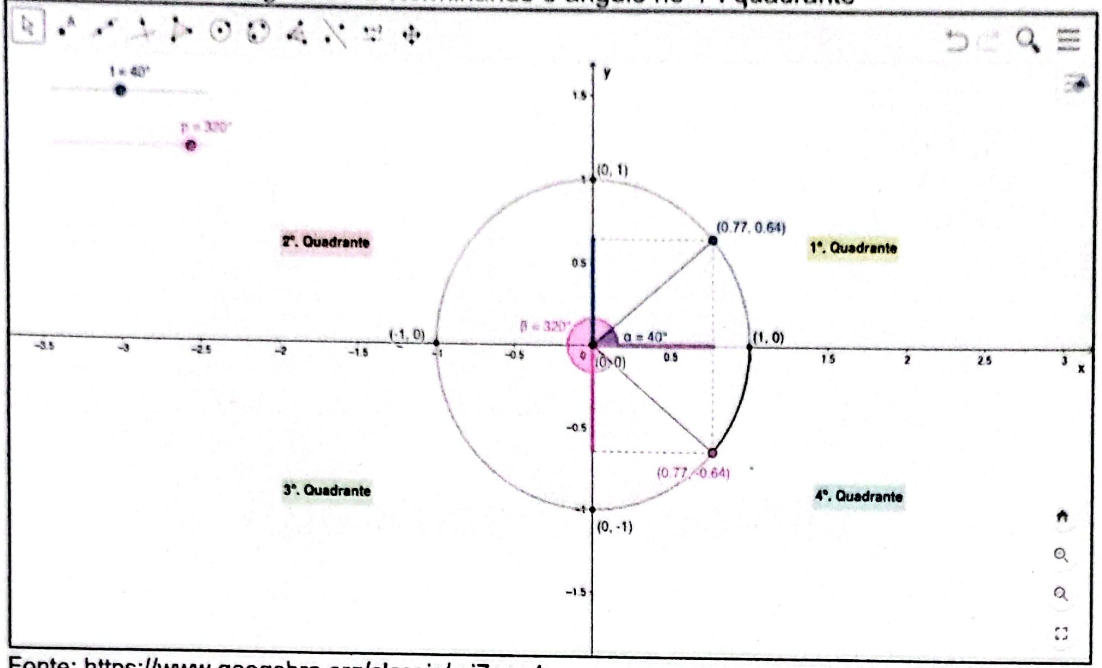
Fonte: https://www.geogebra.org/classic/mj7qpp4z.

Importante: Neste momento o aluno faz a associação usando a redução ao primeiro quadrante. Ele deve ter o conceito de que o ângulo, no 3°. quadrante, simétrico a um ângulo α no 1°. quadrante é indicado por β=180°+ α.

5. Para achar o ângulo simétrico a 40° que se encontra no 4°. quadrante, usa-se o controle deslizante rosa.

O aluno deve deslizar o controle até determinar o ângulo que terá o valor da abscissa igual ao valor do cosseno de 40° e ordenada com valor oposto ao seno de 40°. Logo, nesta situação, o aluno arrasta o controle deslizante até obter o ângulo de 320° (Figura 5).

Figura 5 - Determinando o ângulo no 4°. quadrante



Fonte: https://www.geogebra.org/classic/mj7qpp4z.

Importante: Neste momento o aluno faz a associação usando a redução ao primeiro quadrante. Ele deve ter o conceito de que o ângulo, no 4°. quadrante, simétrico a um ângulo α no 1°. Quadrante é indicado por β=360°- α.

Apêndice C: Apostila

INSTITUTO FEDERAL
Fluminense
Campus Campos Centro

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
PÁTRIA AMADA BRASIL
GOVERNO FEDERAL

Diretoria de Ensino Superior
Licenciatura em Matemática
Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática
Linha de Pesquisa: Ensino e Aprendizagem em Geometria
Licenciandos: Isabela Lima da Silva, Julia Dutra Pereira, Marina Martins de O. de Jesus, Nathalia Santos de Almeida, Paulo Ricardo F. Maciel Júnior
Orientadora: Profª. Mylane Barreto dos Santos

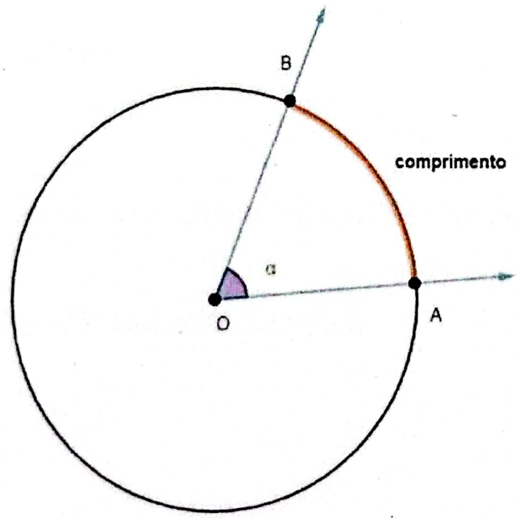
Nome: ______________________________________ Data: ___ / ___ / ___

APOSTILA

1) Definindo Arco:

Arco geométrico é uma das partes da circunferência delimitada por dois pontos, incluindo-os. Esses dois pontos são chamados de extremos e dividem a circunferência em um arco maior e um arco menor

O arco é sempre relacionado ao seu ângulo central: todo arco de circunferência tem a mesma medida do ângulo central que o subentende.



2) Definindo Grau e Radiano:

Grau: quando dividimos uma circunferência em 360 partes iguais, cada uma dessas partes é um arco de um grau (1°).

Radiano: um arco de um radiano (1 rad) é um arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência. Ou seja, se temos um arco de medida 1 radiano, seu ângulo central irá também medir 1 radiano.

Sabemos que:

$$\boxed{Raio\ (r) = 1\,rad} \qquad \text{(I)}$$

E que:

$$\boxed{360° = 2\pi . r} \qquad \text{(II)}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$$\mathbf{360° = 2\pi . 1\, rad}$$

Sendo assim:

$$\pi\, rad = \frac{360°}{2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\pi\, rad = 180°}}$$

Conclusão:

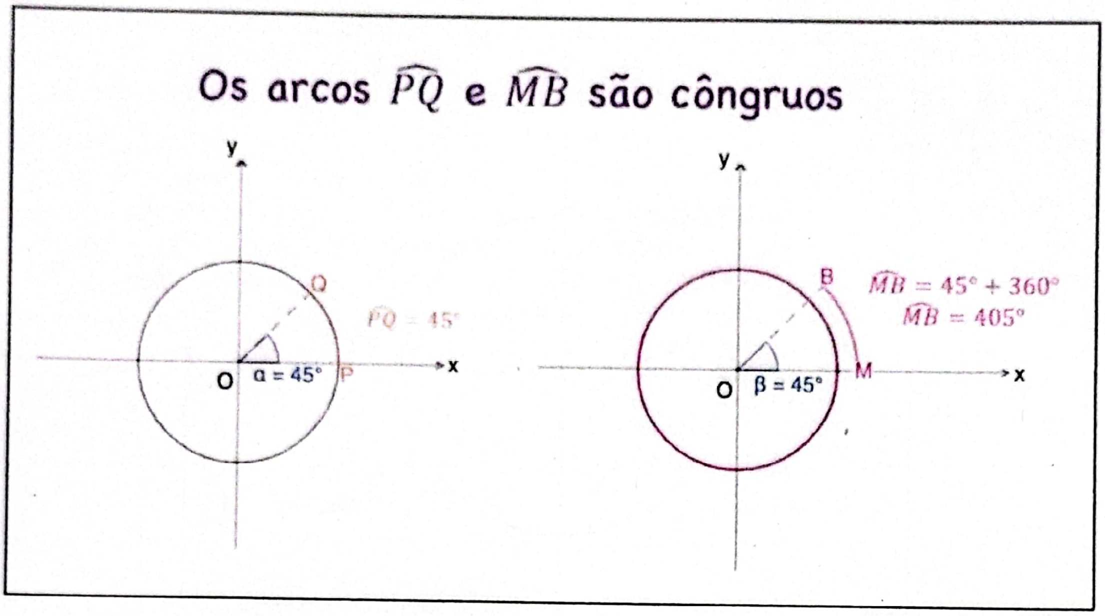
Podemos dizer que **180°** equivale a $\boldsymbol{\pi\, rad}$.

3) Arcos Trigonométricos

a) Arcos Côngruos:

Dizemos que dois arcos são côngruos, quando ambos tiverem a mesma extremidade.

Na figura abaixo, 45° e 405° são arcos côngruos.



Generalizando, um arco é côngruo a outro arco quando ambos tiverem a mesma extremidade.

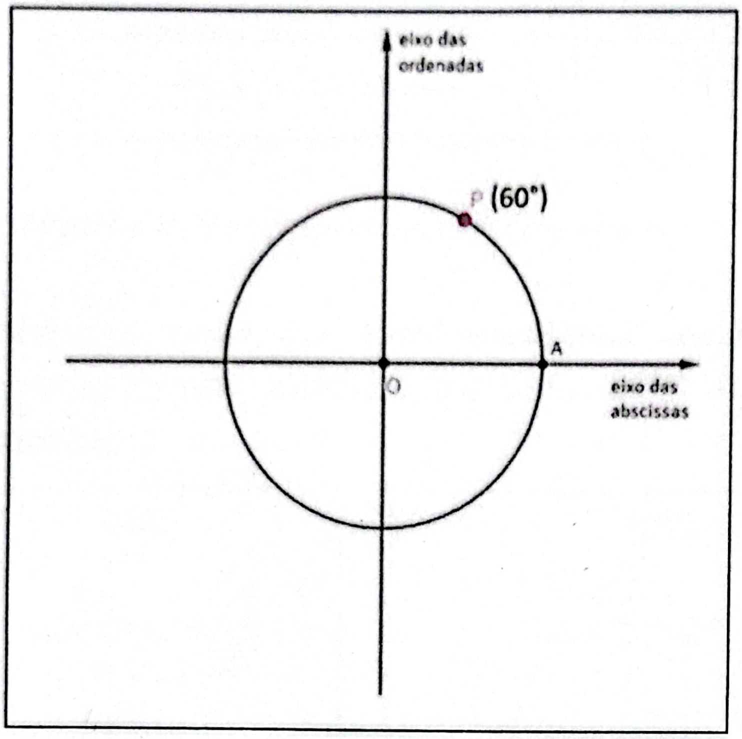
b) Simetria:

A simetria é importante no estudo da circunferência trigonométrica, pois ela nos ajudará a relacionar medidas de arco com extremidades simétricas. Esse estudo será um suporte no cálculo de seno e cosseno dos arcos da circunferência.

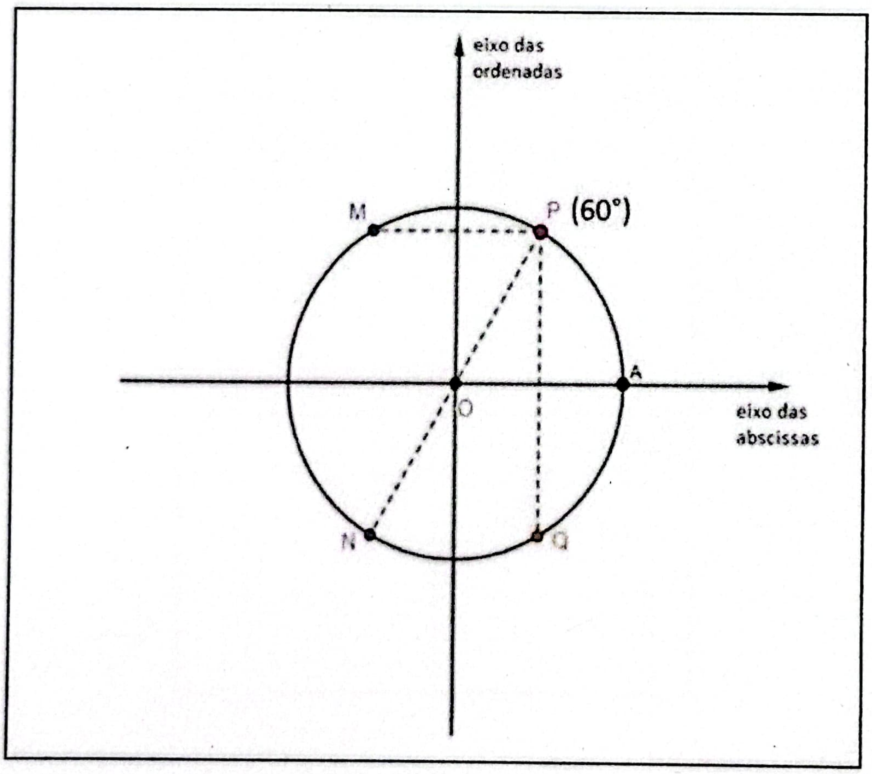
> **Segundo o Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa Michaelis, pode-se dizer que simetria é a correspondência em tamanho, forma ou arranjo, de partes dispostas em lados contrários de uma linha divisória, um plano, um centro ou um eixo.**

Segundo o Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa Michaelis, pode-se dizer que simetria é a correspondência em tamanho, forma ou arranjo, de partes dispostas em lados contrários de uma linha divisória, um plano, um centro ou um eixo.

I. Considere o ponto P na figura abaixo. Este ponto está associado a medida de 60°



II. São traçadas, com extremidades no ponto P, três cordas, como mostra a figura a seguir:



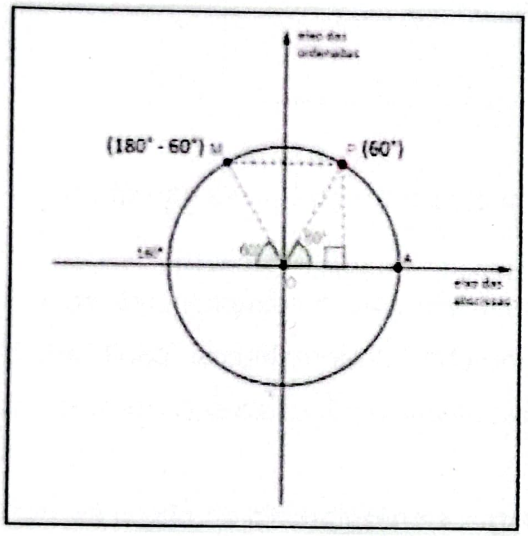
$\overline{PM}$ **- Segmento traçado perpendicular ao eixo das ordenadas.**

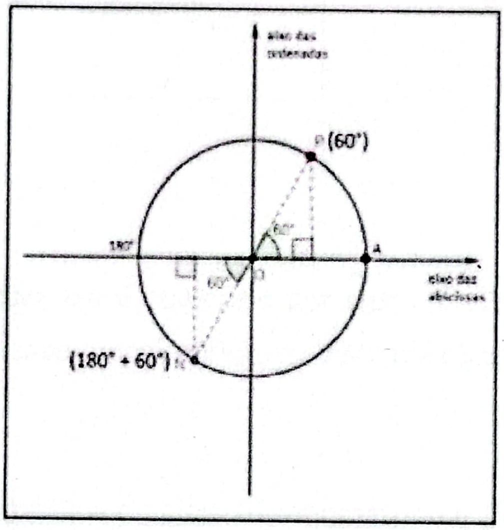
$\overline{PN}$ **- Segmento traçado passando pela origem O.**

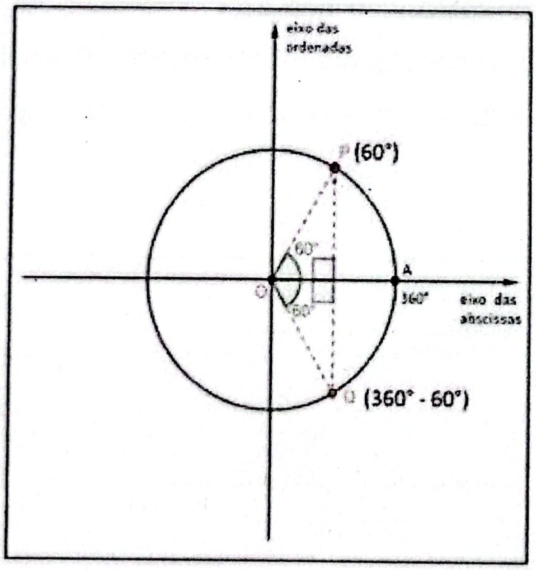
$\overline{PQ}$ **- Segmento traçado perpendicular ao eixo das abscissas.**

Os pontos M, N e Q são pontos simétricos ao ponto P.

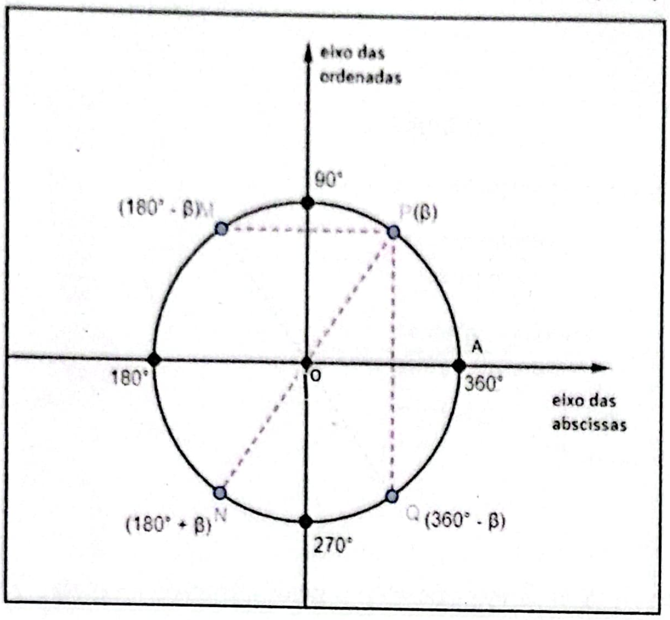
III. Observando as figuras que serão apresentadas abaixo, podemos determinar as medidas associadas aos pontos M, N e Q, no ciclo trigonométrico.







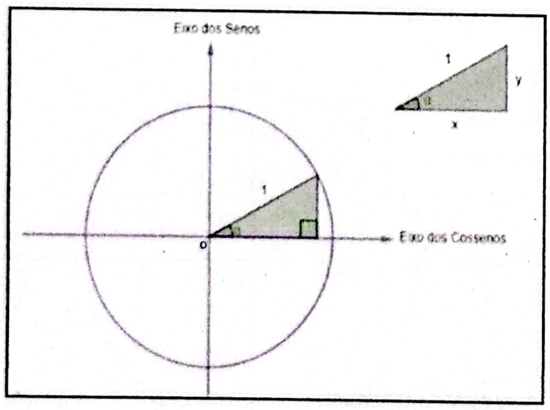
IV. Generalizando, este conceito pode ser aplicado a qualquer arco:

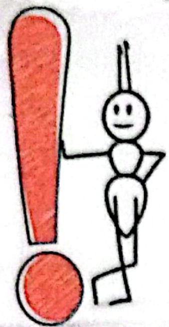


4) Definindo Ciclo Trigonométrico:

O ciclo trigonométrico é uma circunferência, ele é composto por arcos, frações dessa "linha" circunferencial. Cada um desses arcos representa diferentes graus ou radianos, que estão dispostos no ciclo.

Porque o raio da circunferência trigonométrica ou ciclo trigonométrico é 1?
"Como todas as linhas trigonométricas são quocientes entre duas medidas, o valor de cada uma delas se mantém inalterado quando se passa de uma unidade para outra. Por isso não faz mal convencionar raio igual a 1 (r=1)." (LIMA, 2012, p.214)





LEMBRE-SE:

No triângulo retângulo temos que:

$$Sen\ \alpha = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$$

$$Cos\ \alpha = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$$

Importante:

O comprimento (C) de uma circunferência é indicado por $C = 2\pi R$, sendo R o raio da circunferência.

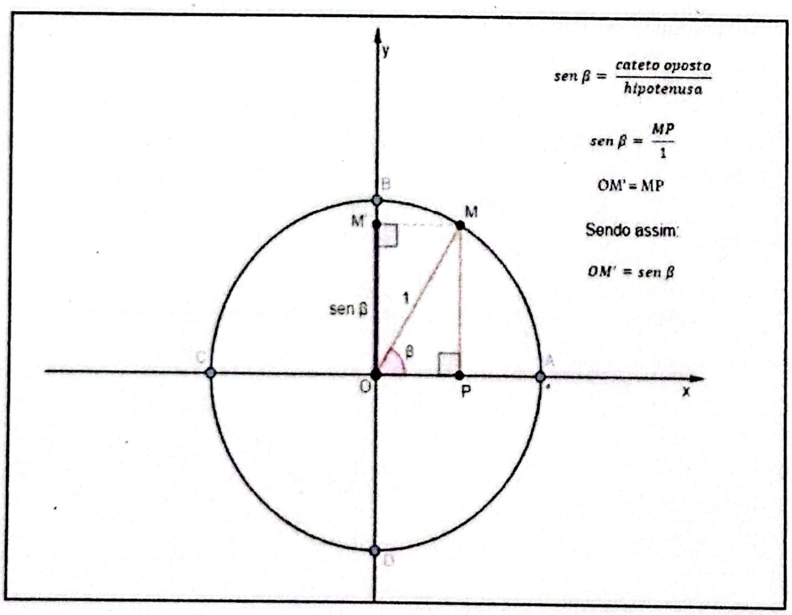
O raio da circunferência trigonométrica é 1, logo seu comprimento será $C = 2\pi$

5) Seno e Cosseno

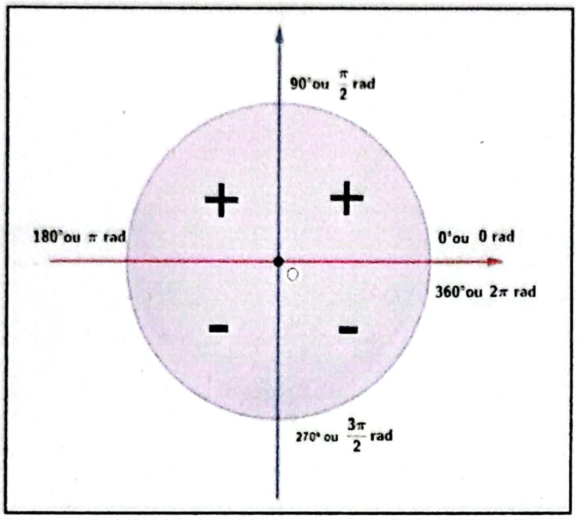
a) Definição de Seno

Dado um número real b [0, 2π], seja M sua imagem no ciclo. Chamamos de seno de b (sen b) a ordenada OM' do ponto M em relação ao sistema xOy.

$$-1 \leq sen\,\beta \leq 1$$



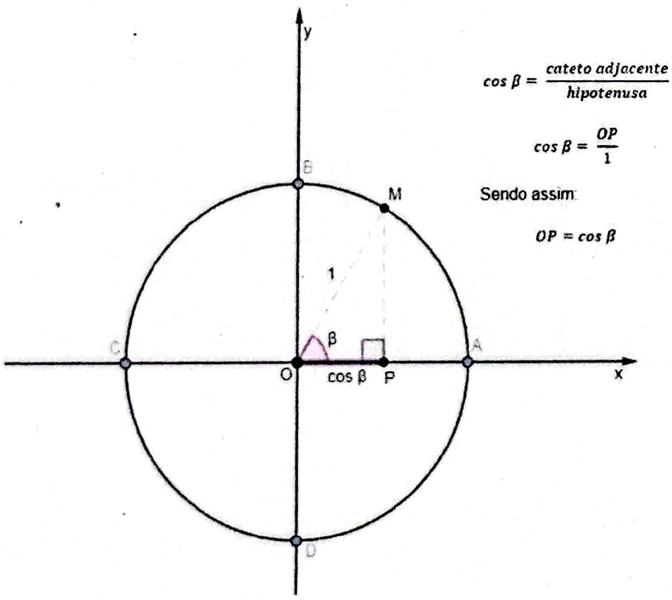
Os senos dos arcos que se encontram no primeiro e no segundo quadrante do ciclo trigonométrico possuem valor positivo. Já os arcos que se encontram no terceiro e no quarto quadrante, possuem seno com valor negativo.



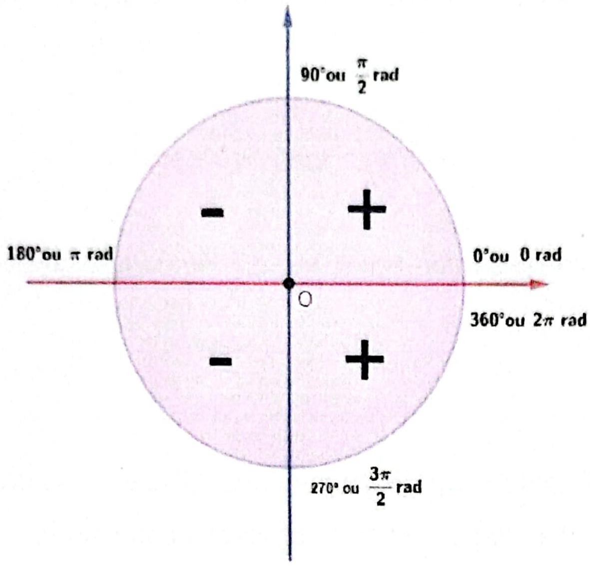
b) Definição de Cosseno

Dado um número real b pertencentes à [0, 2π], seja P sua imagem no ciclo. Chamamos de cosseno de b (cos b) a abscissa OP do ponto M em relação ao sistema xOy.

$$-1 \leq cos\,\beta \leq 1$$



Os cossenos dos arcos que se encontram no primeiro e no quarto quadrante do ciclo trigonométrico possuem valor positivo. Já os arcos que se encontram no segundo e terceiro quadrante, possuem cosseno com valor negativo.



6) **Ângulos e Arcos Notáveis:**

	30°	45°	60°
SENO ($sen\ \theta$)	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
COSSENO ($\cos\theta$)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

7) Redução ao Primeiro Quadrante

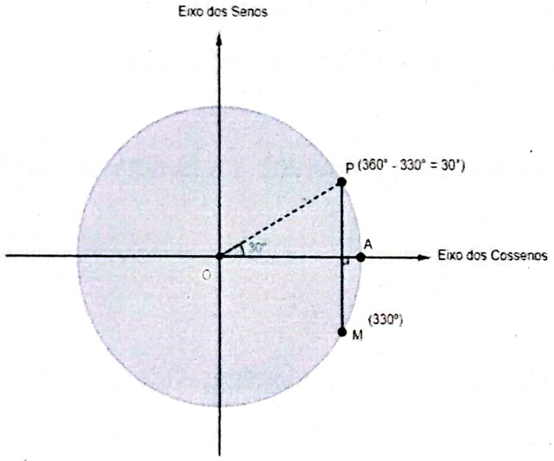
A redução ao primeiro quadrante é a técnica que nos permite encontrar o seno e cosseno de qualquer arco do segundo, terceiro ou quarto quadrante, achando seu simétrico no primeiro quadrante.

Questões para exercitar

1. Consultando a tabela trigonométrica dos arcos notáveis, determinar sen 330° e cos 330°.

Resolução

A extremidade M do arco de 330° pertence ao 4º. quadrante. Trançando por M a perpendicularidade ao eixo dos cossenos, obtemos o ponto P, simétrico de M no 1º. quadrante:



Os pontos M e P têm ordenadas opostas e abscissas iguais. Logo:

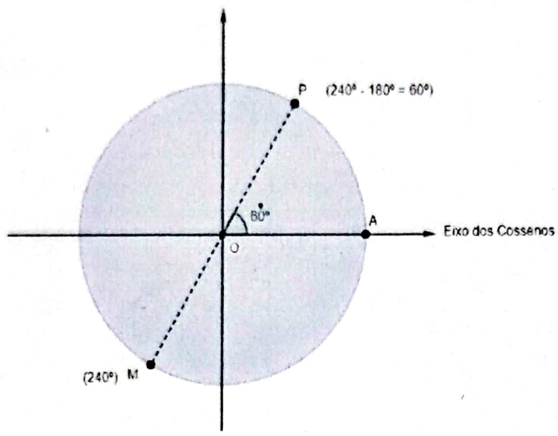
sen 330º = - sen 30º = -12

cos 330° = cos 30º = 32

2. Consultando a tabela trigonométrica dos arcos notáveis, determinar sen 240° e cos 240°.

Resolução

A extremidade M do arco de 240º pertence ao 3º. quadrante. Traçando por M a reta que passa pelo centro de circunferência, obtemos o ponto P, simétrico de M no 1º quadrante.



Os pontos M e P têm ordenadas opostas e abscissas opostas. Logo:

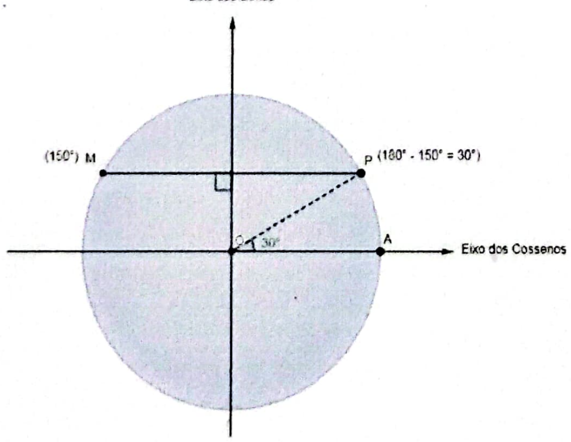
sen 240º = - sen 60º = -32

cos 240° = - cos 60º = -12

3. Consultando a tabela trigonométrica dos arcos notáveis, determinar sen 150° e cos 150°.

Resolução

A extremidade M do arco de 150º pertence ao 2º. quadrante. Traçando por M a reta perpendicular ao eixo dos senos, obtemos o ponto P, simétrico de M no 1º. quadrante.

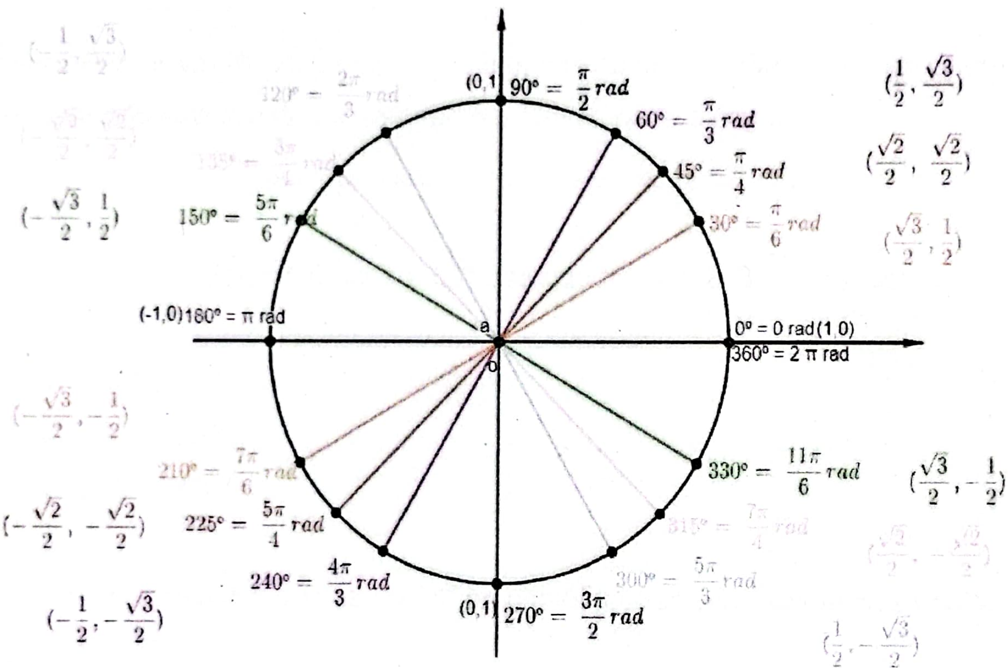


Os pontos M e P têm ordenadas iguais e abscissas opostas. Logo:

$$sen\ 150° = sen\ 30° = \frac{1}{2}$$

$$cos\ 150° = -\ cos\ 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

8) Ângulos Especiais:



ATIVIDADE COMPLEMENTAR

1) Determine o ângulo que se pede, usando seus conhecimentos de redução ao primeiro quadrante.

a) O ângulo simétrico a 30° que se encontra no 2º. quadrante

b) O ângulo simétrico a 10° que se encontra no 3º. quadrante.

c) O ângulo simétrico a 40° que se encontra no 4º. quadrante.

2) Utilizando o *applet* do Geogebra disponível abaixo, confira suas respostas em relação à primeira questão e determine o que se pede a seguir.

https://www.geogebra.org/classic/mj7qpp4z

I. Marque os ângulos simétricos a 50º nos quadrantes 2, 3 e 4, respectivamente, são:

a) 130º, 230º e 310º

b) 110º, 220º e 300º

c) 130º, 220º e 310º

II. Marque o cosseno e o seno de 50° no primeiro quadrante, respectivamente.

a) -0,64 e 0,77

b) 0,77 e 0,64

c) 0,64 e 0,77

III. Marque o cosseno e o seno do simétrico a 50º no segundo quadrante, respectivamente.

a) 0,77 e 0,64

b) -0,64 e 0,77

c) 0,64 e -0,77

IV. Marque o cosseno e o seno do simétrico a 50° no terceiro quadrante, respectivamente.

a) 0,64 e 0,77

b) -0,77 e -0,64

c) -0,64 e -0,77

V. Marque o cosseno e o seno do simétrico a 50° no quarto quadrante, respectivamente.

a) 0,64 e -0,77

b) -0,64 e 0,77

c) -0,77 e 0,64

Referência

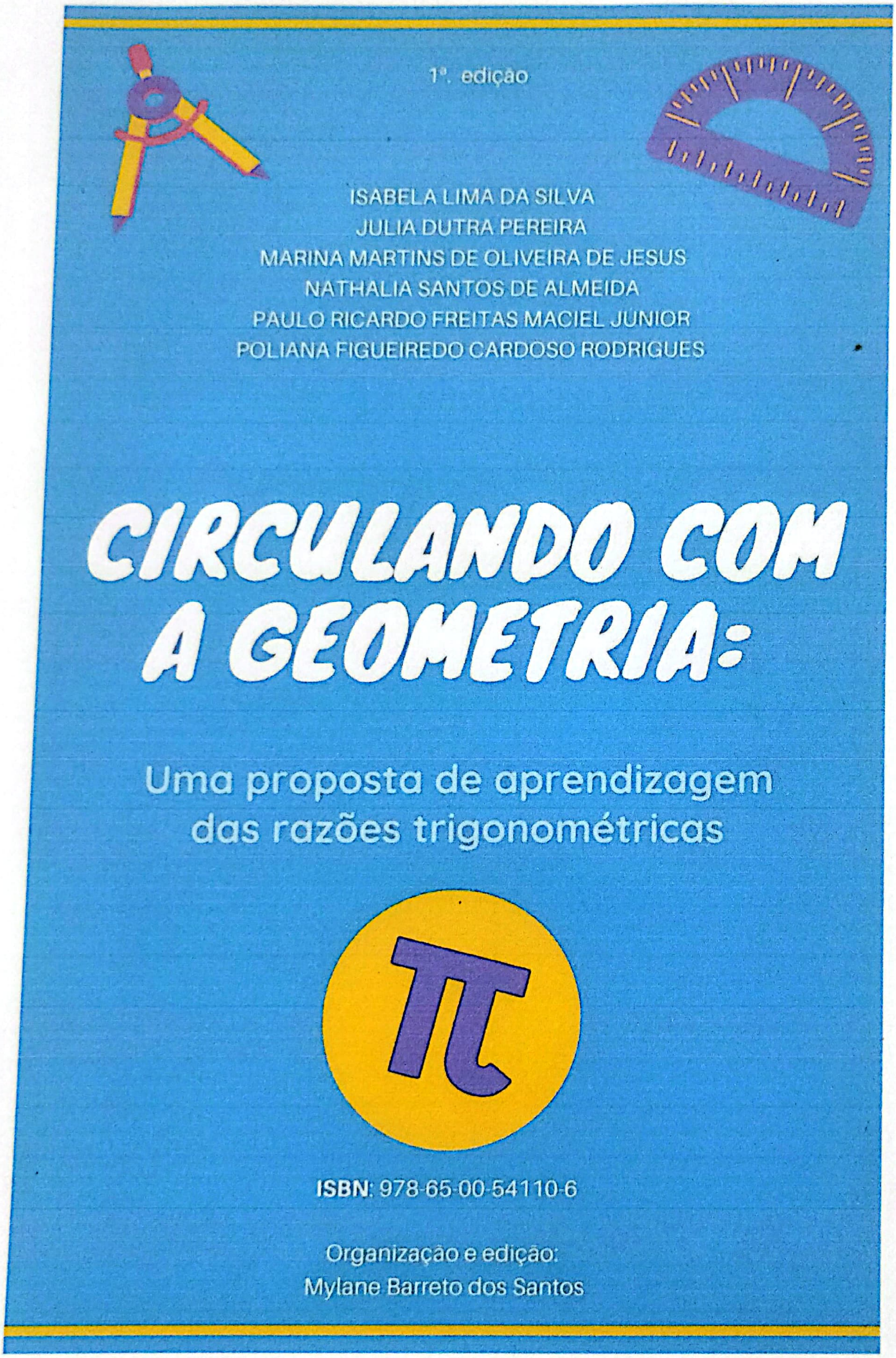
FURUKAWA, Clayton *et al.* Circunferência Trigonométrica - Parte. *In*: FURUKAWA, Clayton *et al.* **Ensino Médio - Livro de Teoria e Atividades:** Matemática, Ciências da Natureza e suas Tecnologias - n.6. Ribeirão Preto - SP: COC by Pearson, 2015. v. 1, cap. 8, p. 72 - 79.

FURUKAWA, Clayton *et al.* Circunferência Trigonométrica - Parte. *In*: FURUKAWA, Clayton *et al.* **Ensino Médio - Livro de Teoria e Atividades:** Matemática, Ciências da Natureza e suas Tecnologias - n.7. Ribeirão Preto - SP: COC by Pearson, 2015. v. 1, cap. 8, p. 55 - 68.

IEZZI, Gelson. Razões Trigonométricas na Circunferência. *In:* IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar:** Trigonometria. 8 ed. São Paulo - SP: Saraiva, 2010. v. 3, cap. IV, p. 39 - 60.

LIMA, Elon Lages. **Meu professor de matemática.** 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 240 p. (Coleção Professor de Matemática; 4).

Apêndice D: Ebook publicado com a versão final da sequência didática



Disponível em: www.amazon.com.br