INSTITUTO FEDERAL
Fluminense
Campus Campos Centro

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

PÁTRIA AMADA BRASIL
GOVERNO FEDERAL

RELATÓRIO DO LEAMAT

EQUIVALÊNCIA DE ÁREAS DE FIGURAS POLIGONAIS POR MEIO DA APRENDIZAGEM BASEADA EM JOGOS DIGITAIS

ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA

GABRIELA BARRETO MESQUITA MOTTA
GABRIELE DA SILVEIRA FREITAS
JÚLIA NOGUEIRA MONTOVANELLI
MARIANA DE AZEVEDO DA CONCEIÇÃO
THAÍZA DA SILVA

CAMPOS DOS GOYTACAZES – RJ
2022.1

GABRIELA BARRETO MESQUITA MOTTA
GABRIELE DA SILVEIRA FREITAS
JÚLIA NOGUEIRA MONTOVANELLI
MARIANA DE AZEVEDO DA CONCEIÇÃO
THAÍZA DA SILVA

RELATÓRIO DO LEAMAT

EQUIVALÊNCIA DE FIGURAS POLIGONAIS POR MEIO DA APRENDIZAGEM BASEADA EM JOGOS DIGITAIS

ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA

Trabalho apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, *Campus* Campos Centro, como requisito parcial para conclusão da disciplina Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Prof. Me. Leandro Sopeletto Carreiro

CAMPOS DOS GOYTACAZES – RJ
2022.1

SUMÁRIO

1 RELATÓRIO DO LEAMAT I

1.1 Atividades desenvolvidas

Na primeira semana letiva do semestre 2021.1, mais precisamente nos dias 16/08/21 a 21/08/21, ocorreu a VI SEMANA DAS LICENCIATURAS e II ENCONTRO DE PROGRAMAS INSTITUCIONAIS DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES (PIBID[1], RESIDÊNCIA PEDAGÓGICA[2] E PET[3]), onde foram ofertados minicursos, palestras e mesas redondas, visando o aperfeiçoamento de alunos e professores. As integrantes deste grupo consideram que a semana trouxe experiências enriquecedoras, na qual algumas dúvidas foram sanadas e alguns assuntos, ainda desconhecidos, foram mencionados.

No dia 25 de agosto de 2021, houve a apresentação da disciplina Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática I (LEAMAT I), nas linhas de pesquisa de Álgebra e Geometria, por seus respectivos orientadores. Nessa mesma data, foi realizada a divisão da turma em três grupos, sendo dois deles compostos por cinco integrantes e apenas um grupo composto por seis. No dia 26 de agosto de 2021, durante o encontro do LEAMAT I de Geometria, foi realizada uma apresentação dos relatórios finais de alunos que já haviam concluído a disciplina de LEAMAT III nas duas linhas de pesquisa, Álgebra e Geometria, visando auxiliar no entendimento da proposta do componente curricular. Durante esse encontro, também foi explicado como funcionariam os fichamentos a serem elaborados.

Na terceira semana letiva, no dia 2 de setembro de 2021, iniciamos a entrega dos fichamentos e as discussões sobre os textos sugeridos pelos professores orientadores. O primeiro deles, na linha de Geometria, foi o texto “O Ensino de Geometria no Brasil: uma abordagem histórica” (ANGELO; SANTOS; BARBOSA, 2020), que retrata o percurso histórico do ensino de Geometria no Brasil e como este foi se modificando em consonância com o contexto social e político do país. Dessa forma, o texto explicita algumas razões que levaram à subvalorização da Geometria como objeto de ensino tanto pelos alunos quanto pelo corpo docente.

---

[1] Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência
[2] Programa de Residência Pedagógica
[3] Programa de Educação Tutorial

Posteriormente, no dia 9 de setembro de 2021, foi entregue o segundo fichamento da disciplina sobre o texto “Ensino de Geometria: Rumos da Pesquisa (1991 – 2011)” (DORNELES; SENA, 2013, p. 139), o qual consistiu em mapear, nas pesquisas brasileiras em Educação Matemática, aquelas que fazem referência à Geometria. Para a análise, os autores consideraram a história da Geometria no Brasil por meio de revisão teórica e análise de resumos sobre o tema presentes no banco de dados da Capes. Entre os pontos que mais chamaram a atenção dos autores desse projeto está o crescimento significativo nas pesquisas sobre Educação Matemática a partir da década de 90, contudo, somente 1% das linhas de pesquisa encontradas referem-se à etnomatemática e 3% ao currículo escolar. Além disso, a análise realizada no artigo mostra que a Geometria não é uma das prioridades no ensino da Matemática devido a razões históricas.

Na quinta semana letiva, no dia 16 de setembro de 2021, foi discutido o texto “Por que não ensinar geometria?” (LORENZATO, 1995), o qual apresenta os possíveis motivos para a omissão da Geometria na sala de aula, ou seja, a ausência ou quase ausência da Geometria nesse ambiente. Quando a geometria ganha espaço, acaba sendo, muitas vezes, abordada de forma inadequada, como afirma Lorenzato ao perceber que “[...] a Geometria é apresentada apenas como um conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas, desligado de quaisquer aplicações ou explicações de natureza histórica ou lógica” (LORENZATO, 1995, p.4). Ademais, o autor ressalta a importância desta na formação do aluno e apresenta exemplos de problemas geométricos.

No dia 23 de setembro de 2021, não houve entrega de fichamento, porém a discussão realizada no momento síncrono foi sobre o texto “O modelo de van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico” (SHULTE; LINDQUIST, 1994), que emergiu dos trabalhos de doutoramento de Dina Van Hiele-Geldof e Pierre Van Hiele, finalizados simultaneamente na Universidade de Utrecht. O modelo elaborado pelo casal consiste em cinco níveis de compreensão, denominados “visualização”, “análise”, “dedução informal”, “dedução formal” e “rigor”, os quais descrevem características do processo de aprendizagem. Conhecer essas teorias permite uma melhor compreensão sobre a forma de executar as tarefas no ambiente escolar e a estruturação lógica do pensamento geométrico.

Na sétima semana letiva, no dia 30 de setembro de 2021, houve a apresentação dos trabalhos sobre os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). O trabalho tornou possível investigar esses documentos e perceber a diferença entre eles, sendo o PCN uma orientação para a escola e professores, e a BNCC um documento normativo, que indica os conteúdos a serem ensinados e as competências e habilidades a serem desenvolvidas pelos estudantes. A exploração desses documentos auxiliou na construção de conhecimento dos alunos, sanando dúvidas e trazendo novas informações necessárias para a prática docente.

Nas semanas seguintes, a partir do dia 7 de outubro de 2021, os encontros síncronos foram voltados, exclusivamente, para a elaboração do projeto do LEAMAT I. A orientadora criou salas virtuais separadas para cada grupo, visitando-as durante o momento síncrono a fim de esclarecer possíveis dúvidas. A pauta foi, primeiramente, o tema, o objetivo geral, a motivação e o público alvo e, posteriormente, as atividades desenvolvidas e as justificativas do projeto.

No dia 1 de dezembro de 2021, houve a apresentação dos principais tópicos do relatório do LEAMAT I na linha de Geometria, com o tema “Equivalência de áreas de figuras poligonais por meio da aprendizagem baseada em jogos digitais”. O grupo 2 apresentou-se nessa mesma data, com o tema “Explorando a homotetia por meio do GeoGebra”, e o grupo 3 no dia 24 de novembro de 2021, com o tema “Explorando as isometrias de rotação e reflexão por meio da construção de rosáceas com o auxílio do *software* livre GeoGebra”.

1.2 Elaboração da sequência didática

1.2.1 Tema

Equivalência de áreas de figuras poligonais por meio da aprendizagem baseada em jogos digitais.

1.2.2 Justificativa

Desde o início da civilização, a Matemática é uma ciência que se desenvolve à medida das necessidades dos seres humanos. A cada dia surgem novas perguntas e problemas, repercutindo em novas pesquisas e descobertas. Corroborando essa fala, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) trazem:

> A matemática caracteriza-se como uma forma de compreender e atuar no mundo e o conhecimento gerado nessa área do saber como um fruto da construção humana na sua interação constante com o contexto natural, social e cultural. (…) é uma ciência viva, não apenas no cotidiano dos cidadãos, mas também nas universidades e centros de pesquisas, onde se verifica, hoje, uma impressionante produção de novos conhecimentos que, a par de seu valor intrínseco, de natureza lógica, têm sido instrumentos úteis na solução de problemas científicos e tecnológicos de maior importância. (BRASIL, 1998, p. 24).

Nota-se, então, que a Matemática contribui de diversas formas para o desenvolvimento do mundo, tanto numa abordagem científica quanto social. Os PCN propõem que uma das atitudes esperadas do aluno ao estudar Matemática no quarto ciclo deve ser a "predisposição para usar os conhecimentos matemáticos como recursos para interpretar, analisar e resolver problemas em contextos diversos" (BRASIL, 1998, p. 91).

Ao nos aprofundarmos nessa ciência, encontramos a Geometria, que, segundo Lima (2011 apud QUINTÃN, 2018), possui "medida da terra" como seu sentido etimológico. O historiador Heródoto (século V a.C.), que atribui a criação da Geometria aos egípcios, justifica este nome devido ao fato de os proprietários de terra, naquela época, pagarem impostos cujos valores eram diretamente proporcionais às áreas de cada lote.

Segundo Lorenzato (1995), a Geometria faz parte do nosso cotidiano. Mesmo sem querer, lidamos com ideia de paralelismo, perpendicularismo, congruência, semelhança, proporcionalidade, comprimento, área, volume, simetria e muitas outras situações. Assim, seja na profissão, no lazer ou na comunicação, estamos sempre envolvidos com a Geometria. Logo, a apropriação desse domínio possibilita ao aluno desenvolver capacidades como: visualizar, perceber formas no cotidiano e representá-las por meio de desenhos, identificando suas propriedades. Desse modo, as aulas de Geometria podem contribuir de forma natural e espontânea ao aprendizado dos alunos, propiciando maior interesse para com a Matemática.

Nesse âmbito, Quintãn (2018) sinaliza que um dos segmentos contidos na Geometria é o estudo das áreas de figuras planas, o qual nutre registros desde o início da civilização, sendo um fator que contribuiu para o desenvolvimento e formação das entidades territoriais. A autora afirma ainda que o cálculo das áreas foi uma das primeiras noções geométricas que despertaram o interesse do homem, e salienta que, no estudo de áreas, “A sua aplicação é tão considerável, que na educação, seu conceito está sempre sendo cobrado em avaliações externas, tais como SAEB, PISA, ENEM, vestibulares e concursos públicos” (QUINTÃN, 2018, p. 26).

As conversões das áreas planas, em relação às equivalências e à equidecomposição das figuras, propiciam uma visualização diferenciada das figuras planas, de modo a simplificar e facilitar o cálculo de áreas não regulares. Sob essa perspectiva, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) afirma que:

> A equivalência de áreas, por exemplo, já praticada há milhares de anos pelos mesopotâmios e gregos antigos sem utilizar fórmulas, permite transformar qualquer região poligonal plana em um quadrado com mesma área (que os gregos chamavam ‘fazer a quadratura de uma figura’). Isso permite, inclusive, resolver geometricamente problemas que podem ser traduzidos por uma equação do 2º grau. (BRASIL, 2018, p. 272–273).

Adicionalmente, a BNCC menciona, entre os objetos de conhecimento a serem expostos nos anos finais do Ensino Fundamental referentes à Geometria, o tópico “Equivalência de área de figuras planas: cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras, cujas áreas podem ser facilmente determinadas como triângulos e quadriláteros” (BRASIL, 2018, p. 310). As habilidades a serem desenvolvidas para esse objeto de conhecimento visam propiciar que os alunos consigam decompor polígonos em outros já conhecidos, tais como quadrados, retângulos e/ou triângulos, e solucionar problemas de cálculo de área por meio da equivalência.

Contudo, apesar da sua constante presença e importância na sociedade, ainda ocorrem equívocos sobre a conceituação da área de figuras planas e o processo de assimilação destas. Como afirmam Douady e Perrin-Glorian (1989, *apud* RODRIGUES, BELLEMAIN, 2016), um dos equívocos ocorridos é o fato de alguns alunos remeterem a caracterização da superfície à própria figura, além de apresentarem a percepção de que a modificação da figura necessariamente altera a área. As autoras consideram ainda o uso inadequado das fórmulas como um dos erros que mais geram confusões na resolução de problemas sobre áreas.

Ao analisar esse conteúdo para o ambiente escolar de modo a atrair o foco dos alunos e propiciar uma aprendizagem significativa e integrada à realidade de grande parte deles, as tecnologias digitais apresentam-se como uma opção a ser estudada. Considerando a mudança não somente do perfil dos alunos, mas também das estruturas dos ambientes de ensino e do contexto da sala de aula, a inserção da realidade tecnológica integrada aos materiais didáticos supera o caráter apenas de opinião, embasado por documentos como o Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), que corrobora tal afirmativa ao considerar que “recursos matemáticos como jogos, livros, vídeos, calculadoras, computadores e outros materiais, têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem” (BRASIL, 1997, p.19).

Aprofundando tais considerações, os jogos digitais, especificamente aqueles voltados para a educação, surgem como a união da tecnologia com o lúdico capaz de auxiliar o professor em diversas situações, como no ensino da Matemática. Prensky (2012), ao estudar tais ferramentas, conclui que a aprendizagem baseada nos jogos digitais é eficiente por abranger os interesses dos alunos, uma vez que é motivadora, divertida e versátil, podendo ter sua aplicação adaptada para inúmeros conteúdos e obtendo resultados eficientes, se bem utilizada. No que tange ao estudo de áreas e sua equivalência, esses meios facilitariam o entendimento, a divisão e a decomposição das figuras, permitindo tanto a compreensão dos conceitos quanto a aplicação e verificação dos conhecimentos adquiridos.

Entretanto, é preciso preparo e conhecimento para utilizar tais alternativas em sala de aula. Assim como é necessário trazer a interdisciplinaridade e promover novas experiências durante o processo de aprendizagem, também é preciso que estas ocorram de maneira proveitosa e significativa. Trazer a tecnologia por meio dos jogos educacionais para os estudantes deve ter um objetivo definido, não apenas para divertir e ocupar tempo sem haver algum tipo de reflexão por trás disso.

Com isso, Antunes (1998) considera que

> O jogo somente tem validade se usado na hora certa e essa hora é determinada pelo seu caráter desafiador, pelo interesse do aluno e pelo objetivo proposto. Jamais deve ser introduzido antes que o aluno revele maturidade para superar seu desafio e nunca quando o aluno revelar cansaço pela atividade ou tédio por seus resultados. (ANTUNES, 1998, p. 40).

Em consonância, Prensky (2010) afirma, em entrevista à Revista Época, que o uso de tecnologias durante as aulas não melhora imediatamente o aprendizado do aluno, dado que sua utilização concede amparo para a pedagogia, e não o contrário. Além disso, a tecnologia não serve de apoio para a aula tradicional, a não ser para tarefas como passar imagens e vídeos. Logo, além da inserção de novas tecnologias na sala de aula, são necessárias alterações na estrutura da aula, de modo a alcançar os reais benefícios educacionais com o uso desta no aprendizado dos alunos.

1.2.3 Objetivo Geral

Desenvolver e aplicar o conceito de equivalência de áreas de figuras poligonais planas por meio dos jogos digitais.

1.2.4 Público Alvo

Alunos do 8.° ano do Ensino Fundamental.

2 RELATÓRIO DO LEAMAT II

2.1 Atividades desenvolvidas

As aulas do LEAMAT II referentes ao período 2021.2 iniciaram-se no dia 8 de fevereiro de 2022, dia de apresentação da disciplina.

Entre os dias 8 de fevereiro e 21 de abril de 2022, as reuniões foram destinadas à elaboração da sequência didática, com o auxílio do orientador durante os encontros semanais. A elaboração do material ocorreu, excepcionalmente, de forma virtual, devido à pandemia do vírus SARS-CoV-2. A partir de 26 de abril de 2022, as aulas foram destinadas às aplicações das sequências didáticas na turma do LEAMAT II, com o intuito de testá-las e simulá-las, de modo que, por meio da colaboração dos professores e dos alunos, fosse possível realizar seu aprimoramento.

Na linha de Geometria, a apresentação deste grupo foi realizada no dia 28 de abril de 2022, encerrando o ciclo de apresentações. Posteriormente, os encontros foram voltados para a elaboração e correção dos relatórios.

2.2 Elaboração da sequência didática

2.2.1 Planejamento da sequência didática

A sequência didática está estruturada para a aplicação, preferencialmente, em uma turma de oitavo ano do Ensino Fundamental, e será dividida em quatro etapas, as quais foram elaboradas tendo em mente o ensino remoto, devido à pandemia do vírus SARS-CoV-2. Entretanto, vale ressaltar que a sequência didática pode ser adaptada para a aplicação presencial, caso necessário.

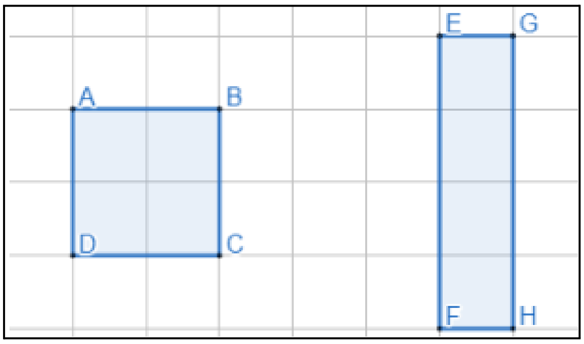
As etapas 1 e 2 terão como material de apoio uma apostila (Apêndice A) com o conteúdo a ser visto durante a aplicação, enquanto, na etapa 3, será necessário um celular ou *tablet* com acesso à internet, que será solicitado previamente aos alunos.

A primeira etapa consiste na retomada do conteúdo sobre áreas de figuras planas, apresentando os contextos históricos envolvidos na construção desse conceito e as fórmulas de algumas figuras elementares já conhecidas.

Na segunda etapa, os alunos serão introduzidos ao estudo de equivalência de áreas poligonais por meio de quatro exemplos, que irão propor formas distintas de comparar as áreas desses polígonos a fim de identificar se estes são equivalentes ou não.

No Exemplo 1, os alunos poderão, por meio da percepção visual da malha quadriculada utilizada como fundo para os polígonos, comparar as áreas destes.

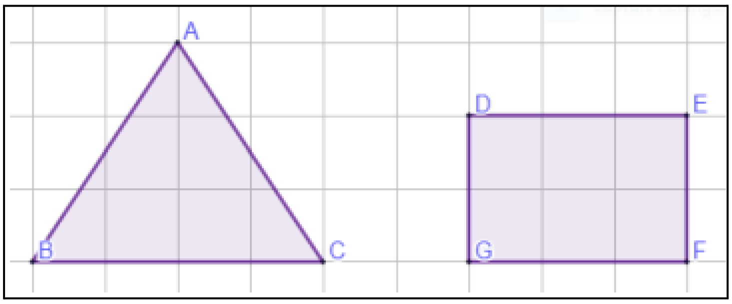
Figura 1 – Exemplo 1



Fonte: Elaboração própria.

No Exemplo 2, deverão usar a malha quadriculada para identificar o comprimento das bases e alturas das figuras, de modo a aplicar essas informações nas fórmulas conhecidas e identificar se as figuras são equivalentes ou não.

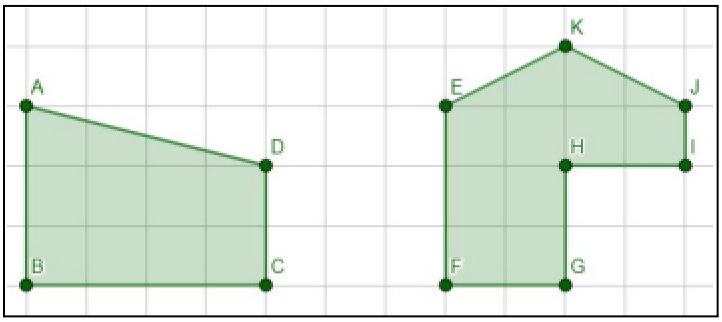
Figura 2 – Exemplo 2



Fonte: Elaboração própria.

No Exemplo 3, os alunos serão apresentados ao método da decomposição e deverão utilizá-lo para dividir os polígonos em figuras geométricas básicas com fórmulas conhecidas para, novamente, comparar as áreas. Seguindo tal ideia, o Tangram é apresentado como um objeto real que utiliza a decomposição.

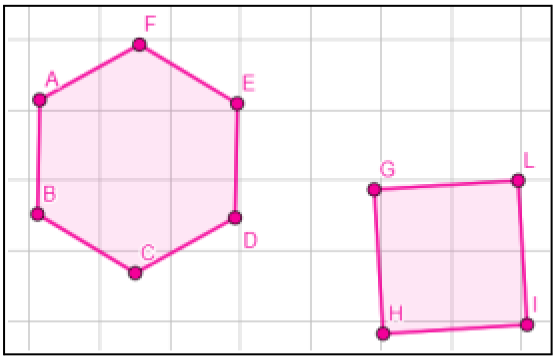
Figura 3 – Exemplo 3



Fonte: Elaboração própria.

No Exemplo 4, será necessário utilizar conhecimentos geométricos anteriores, como os postulados da reta e do ponto e mediatrizes, de forma a encontrar a reta que intersecta ambas as figuras enquanto divide cada uma em duas partes equivalentes. Espera-se que os alunos consigam compreender e aplicar resoluções que não precisem de cálculos algébricos.

Figura 4 — Exemplo 4



Fonte: Elaboração própria.

Na terceira etapa, após a apresentação de alguns conceitos relacionados à equivalência de figuras poligonais, os alunos irão se dividir em grupos de quatro a cinco pessoas para uma atividade com recurso tecnológico, e cada grupo será direcionado para diferentes salas de chamada em vídeo, recorrendo a serviços de comunicação como *Google Meet*, *Zoom*, entre outros. Com o celular ou *tablet*, os alunos deverão baixar o aplicativo *Pythagorea* (Figura 5) na loja de aplicativos do dispositivo e, se possível, um dos alunos deverá transmitir a tela do aplicativo para que todos visualizem a atividade e manipulem o jogo de maneira conjunta.

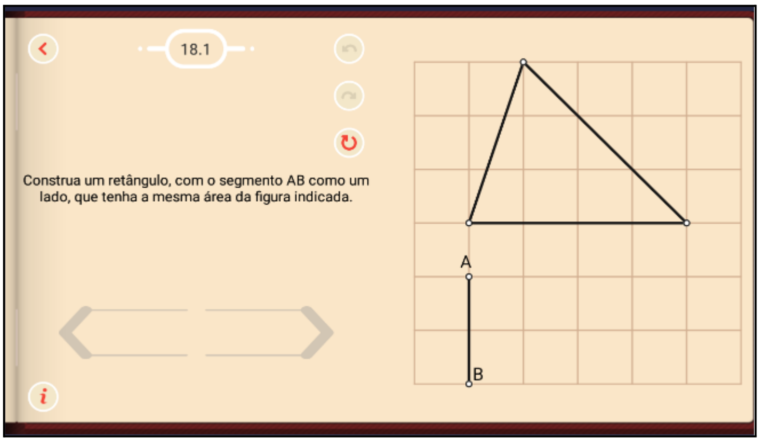
Figura 5 — Jogo *Pythagorea*

Fonte: *Google Play Store.*

Essa atividade será uma competição por tempo, na qual cada grupo, ao sinal do professor, terá 30 minutos para abrir o nível 18, nomeado “Área”, e solucionar os níveis de 18.1 a 18.7, sendo o grupo vencedor aquele que conseguir resolvê-los corretamente no menor tempo possível, com o apoio da apostila entregue anteriormente.

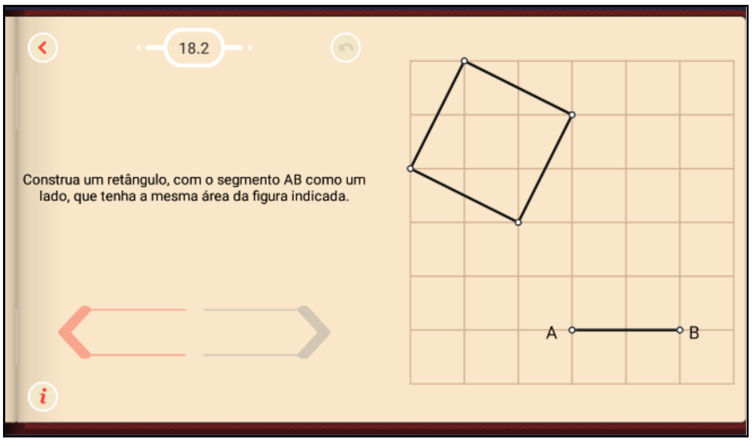
Os níveis escolhidos para a atividade serão resolvidos com base nos materiais apresentados na sequência, de modo a encontrar áreas equivalentes ou dividir figuras geométricas em partes equivalentes. Os níveis 18.1 (Figura 6), 18.2 (Figura 7) e 18.7 (Figura 8) seguirão os dois primeiros exemplos, utilizando as fórmulas de figuras elementares conhecidas para construir os polígonos equivalentes.

Figura 6 — Nível 18.1



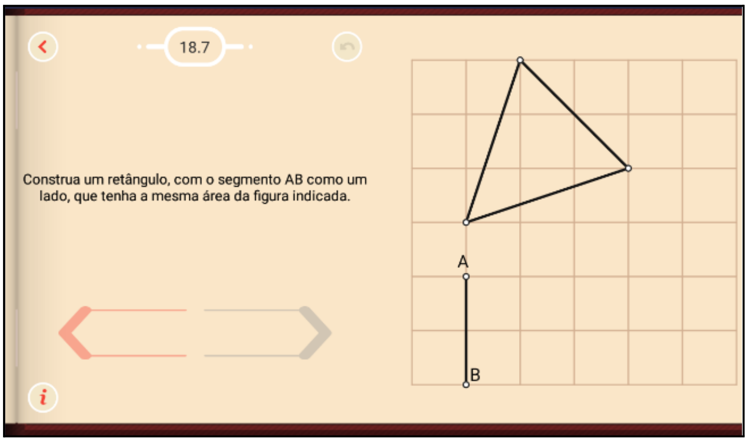
Fonte: *Pythagorea.*

Figura 7 — Nível 18.2



Fonte: *Pythagorea.*

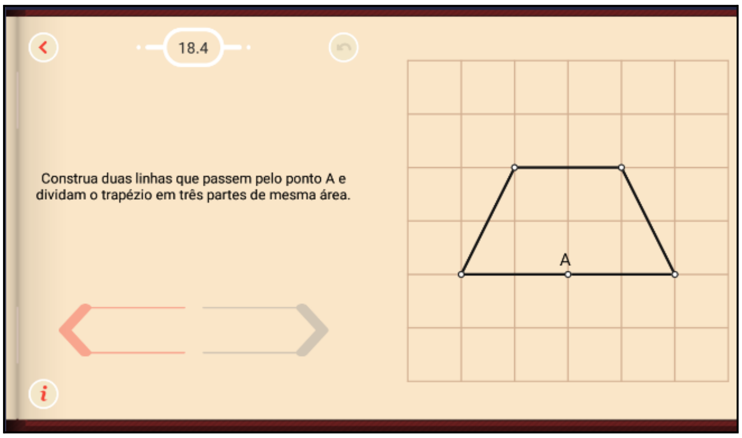
Figura 8 — Nível 18.7



Fonte: *Pythagorea.*

Já a fase 18.4 (Figura 9) utilizará, além das fórmulas, o conceito de decomposição.

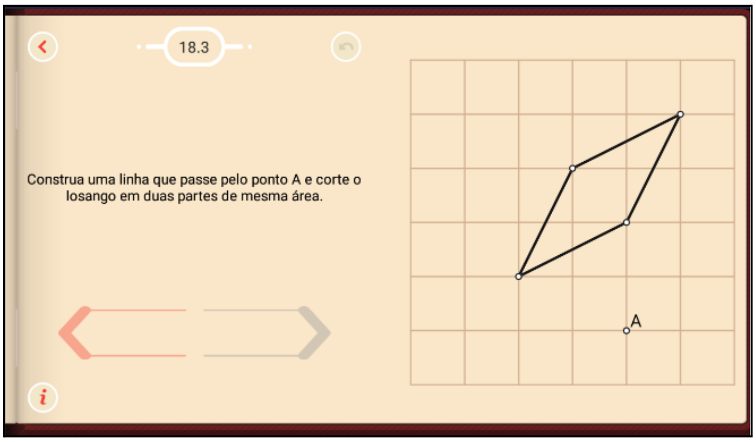
Figura 9 — Nível 18.4



Fonte: *Pythagorea.*

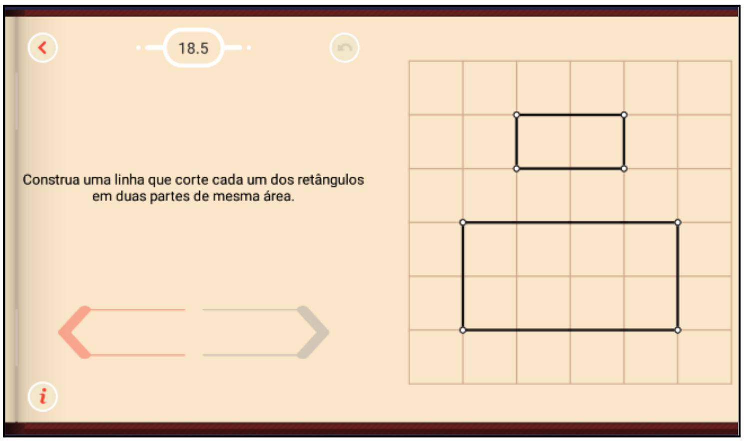
Por sua vez, as fases 18.3 (Figura 10), 18.5 (Figura 11) e 18.6 (Figura 12) terão como base os conceitos de ponto e reta, além de propriedades geométricas.

Figura 10 — Nível 18.3



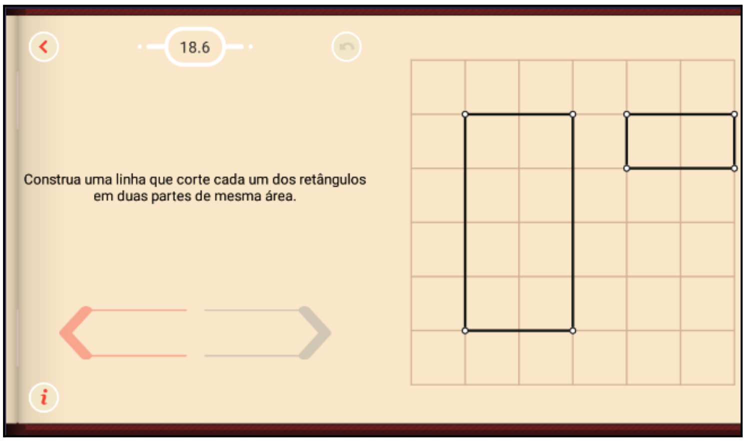
Fonte: *Pythagorea.*

Figura 11 — Nível 18.5



Fonte: *Pythagorea.*

Figura 12 — Nível 18.6



Fonte: *Pythagorea.*

Ao final da terceira etapa, ocorrerá a apresentação de algumas das possíveis soluções para os sete níveis do jogo *Pythagorea*, a fim de esclarecer possíveis dúvidas que possam surgir durante a resolução dos problemas. Um arquivo com as soluções apresentadas também será disponibilizado para a turma ao fim da atividade.

2.2.2 Aplicação da sequência didática na turma do LEAMAT II

Conforme a ementa organizada pelo Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática (LEAMAT), a aplicação desta sequência didática na turma de LEAMAT II ocorreu no dia 28 de abril de 2022, estando dez licenciandos presentes. Foram utilizados dois tempos de aula com cinquenta minutos cada. Devido às condições estabelecidas em decorrência da pandemia do vírus SARS-CoV-2, o encontro da turma foi realizado de forma remota pelo ambiente virtual *Google Meet*.

Figura 13 – Aplicação na turma do LEAMAT II

Fonte: Protocolo de pesquisa.

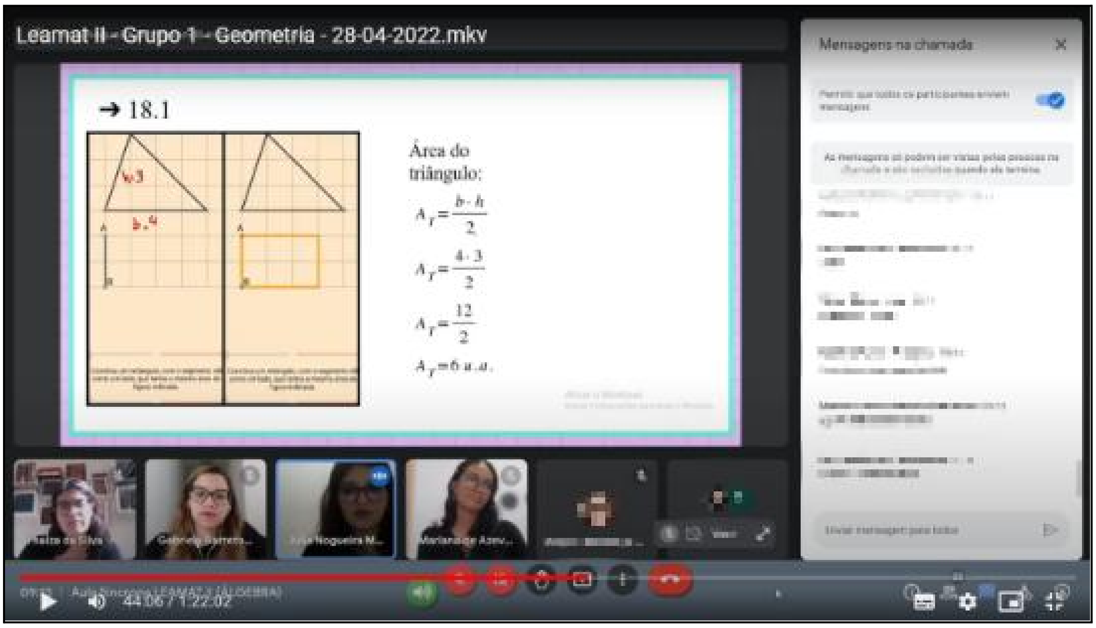
O emprego da sequência didática ocorreu conforme a elaboração do projeto. Dois dias antes, foram disponibilizados na plataforma *Google Classroom* um material teórico e orientações preliminares para a aula. Já durante a aplicação, apresentou-se uma breve contextualização histórica sobre áreas, revisando as fórmulas para o cálculo de áreas de polígonos elementares por meio de uma apresentação de *slides* (Apêndice B).

Em seguida, foi introduzido o estudo de equivalência de áreas poligonais, trazendo a definição de equivalência e alguns exemplos de como comparar áreas de polígonos distintos, bem como decompor figuras poligonais de modo a simplificar o cálculo da área. Além disso, foram apresentadas aplicações de decomposições no dia a dia.

Após salientar alguns conceitos essenciais relacionados à equivalência de figuras poligonais, foi apresentado aos alunos o jogo *Pythagorea* e seu funcionamento para a realização da atividade com recurso tecnológico. A turma foi dividida em dois grupos, que se dirigiram para duas salas virtuais distintas, cada um acompanhado por, no mínimo, duas integrantes deste projeto. Foram disponibilizados trinta minutos para a realização dessa atividade.

Um dos grupos apresentou maior dificuldade com a adaptação em relação à manipulação do jogo. Ao decorrer dos níveis, as resoluções foram feitas mais rapidamente. Em geral, os alunos não apresentaram grandes dificuldades com a resolução das questões, embora demorassem um pouco mais para alcançar a solução em alguns níveis.

Figura 14 — Correção da atividade

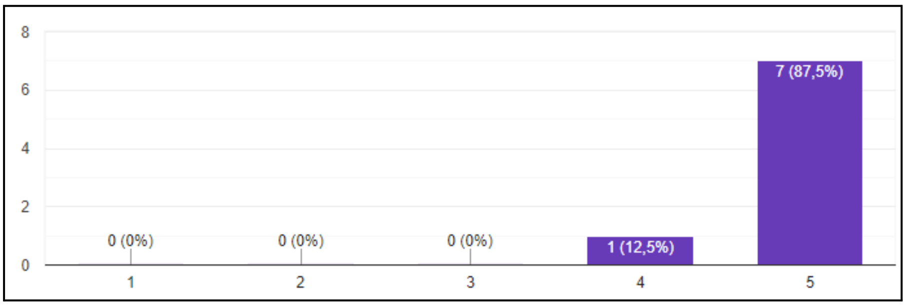


Fonte: Protocolo de pesquisa.

No decorrer da apresentação, os alunos não apontaram sugestões para a sequência didática. Após a implementação da sequência didática, foi disponibilizado um formulário, elaborado no *Google Forms*, com o intuito de sistematizar as contribuições para o aperfeiçoamento do trabalho, além de permitir que os demais licenciandos tivessem um tempo maior para a análise do material. Nos gráficos abaixo, foi utilizada a escala Likert, de modo que, nas Figuras 8, 9 e 10, a escala varia de 1 (Muito ruim) a 5 (Muito boa); na Figura 11, de 1 (Não é importante) a 10 (Muito importante); e, na Figura 12, de 1 (Muito ruim) a 10 (Muito boa). Dispomos, a seguir, algumas das contribuições apresentadas:

- Questionamento 1: Como você avalia a apostila desenvolvida?

Figura 15 — Gráfico gerado para o Questionamento 1

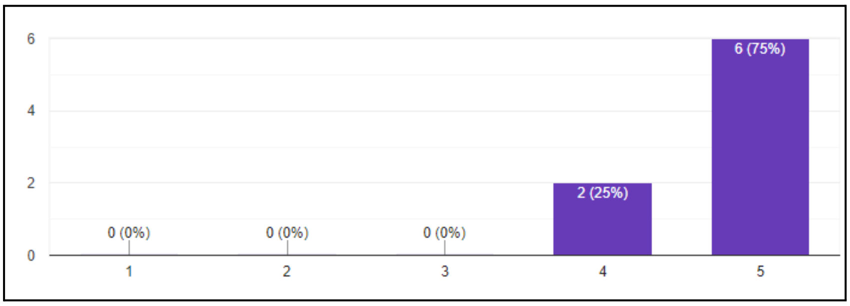


Fonte: Protocolo de pesquisa.

- Questionamento 2: Comentários sobre a apostila:
  - ↳ Licenciando 1: “Gostei muito da apostila! Bem formatada, com linguagem fluida e uso de várias imagens. Nota 10.”
  - ↳ Licenciando 2: “A apostila trata o conteúdo aplicado em aula de forma bem didática e de fácil compreensão do conteúdo, o grupo conseguiu resumir bem através dela, os conceitos que foram aplicados durante a aula.”

- Questionamento 3: Como você avalia a didática e os exemplos apresentados?

Figura 16 — Gráfico gerado para o Questionamento 3

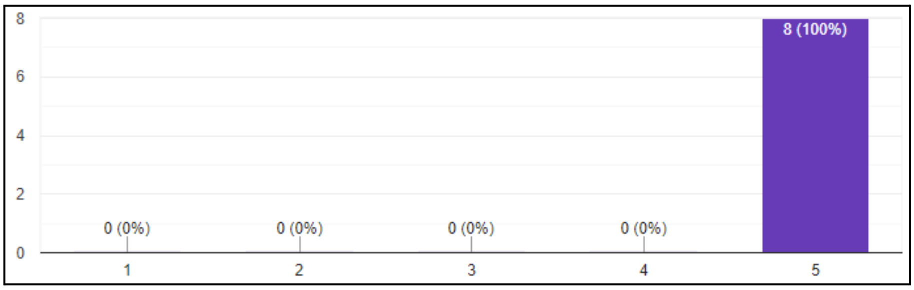


Fonte: Protocolo de pesquisa.

- Questionamento 4: Comentários:
  - ↳ Licenciando 1: “Gostei bastante do passo a passo na decomposição das áreas. Ficou bem intuitivo e fácil de enxergar.”
  - ↳ Licenciando 2: “A forma com a qual a aula foi conduzida foi excelente. Gostei muito da introdução ao conteúdo, os slides estavam ótimos e a explicação excelente. Ficou tudo bem claro a partir dos exemplos e da didática com a qual a aula foi aplicada!”

- Questionamento 5: Como você avalia o uso e aplicação das tecnologias e dos jogos digitais?

Figura 17 — Gráfico gerado para o Questionamento 5



Fonte: Protocolo de pesquisa.

- Questionamento 6: Comentários sobre o uso e aplicação das tecnologias e dos jogos digitais:

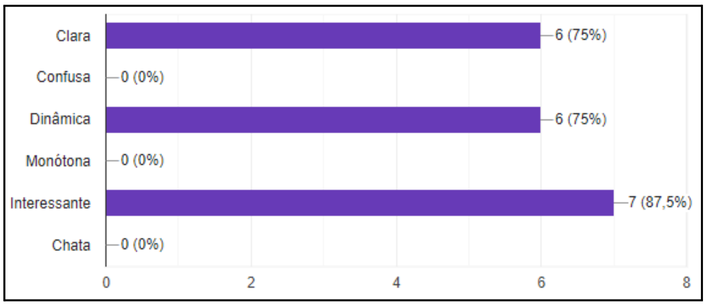
  ↳ Licenciando 2: "A utilização da mesa digitalizadora, o *gif* que foi utilizado para mostrar o conceito que por um ponto passam infinitas retas, entre outros recursos... foram pontos que mais me chamaram a atenção, fez com que a aula fosse bem dinâmica e permitiu que tudo ficasse bem claro. O aplicativo do jogo digital abriu perfeitamente no meu dispositivo móvel, não conhecia o jogo e achei ótimo para trabalhar os conceitos matemáticos com os alunos, em especial o que foi apresentado pelo grupo."

  ↳ Licenciando 3: "Acho que essa ideia da aplicação dos jogos e da tecnologia muito interessante. Eu sinceramente tinha muita vontade de estudar mais sobre uma abordagem gamificada do ensino de matemática e essa apresentação de você [sic] me fez reavivar essa curiosidade."

  ↳ Licenciando 5: "Achei bem legal. Fez com que prendesse minha atenção para solucionar os problemas das áreas. Foi uma forma dinâmica e com bastante interação dos integrantes do grupo. Gostei muito"

- Questionamento 7: O tema escolhido pelo grupo foi apresentado de forma:

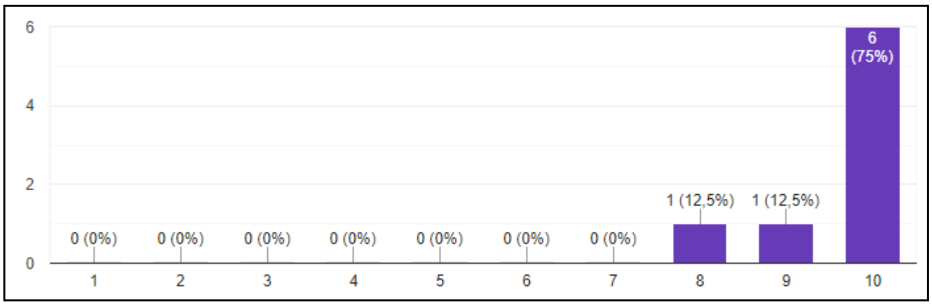
Figura 18 – Gráfico gerado para o Questionamento 7



Fonte: Protocolo de pesquisa.

- Questionamento 8: Você considera o tema abordado como:

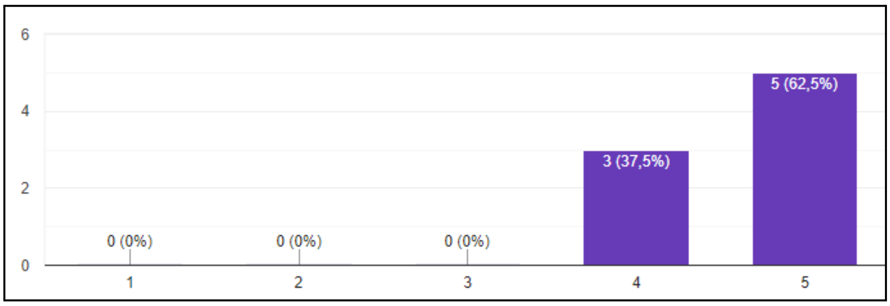
Figura 19 – Gráfico gerado para o Questionamento 8



Fonte: Protocolo de pesquisa.

- Questionamento 9: Como você avalia a sequência didática no geral?

Figura 20 – Gráfico gerado para o Questionamento 9



Fonte: Protocolo de pesquisa.

- Questionamento 10: Sugestões, críticas, elogios e opiniões sobre o trabalho em geral e/ou as integrantes:

  ↳ Licenciando 2: “Muito capricho na elaboração do material didático. Parabéns!”

  ↳ Licenciando 3: “Mais uma vez desejo a todo grupo, meus parabéns! A confiança e a didática com a qual vocês conduziram a aula foi ótima. Parabéns!”

- ↳ Licenciando 5: “Achei o trabalho muito importante e com uma explicação muito clara. O aplicativo escolhido fez um grande diferencial para a dinâmica. Parabéns, meninas!”
- ↳ Licenciando 6: “É difícil fazer uma crítica justa tendo em vista o pouco tempo que vocês tiveram para desenvolver o assunto. Para mim a apresentação tem um padrão de qualidade muito bom. Eu sugeriria uma demonstração melhor sobre a questão de criar novos pontos na malha, pois só pelo *gif* e pela explicação verbal não foi o suficiente. É claro que isso exigiria mudança de compartilhamento de tela e tals [sic], o que não é muito bom. Mas em contrapartida ajudaria com a clareza. Ver alguém mexendo é sempre mais claro do que só ouvir uma explicação sobre como utilizar.”
- ↳ Licenciando 7: “Achei muito boa explicação, a didática muito clara e atingiu o objetivo final.”
- ↳ Licenciando 8: “Tenho apenas elogios, creio q numa turma de 8 ano eles iriam gostar muito, do mesmo jeito que eu gostei. Estão de parabéns!”

O intuito com esse formulário foi elaborar uma forma de obter recomendações para aperfeiçoamento da sequência didática, porém, apenas oito dos dez alunos que participaram da sequência didática responderam à pesquisa. Ademais, apenas a resposta do Licenciando 6 no Questionamento 10 apontou para melhorias no trabalho, sugerindo que fosse explicado de outra forma como criar novos pontos na malha do jogo. De forma geral, a aplicação da sequência didática ocorreu conforme o planejado, sem grandes problemas ou questionamentos e com um retorno positivo da turma.

3 RELATÓRIO DO LEAMAT III

3.1 Atividades Desenvolvidas

As atividades do LEAMAT III tiveram início no dia 11 de julho de 2022, assim como o retorno das atividades presenciais. No primeiro encontro, ocorreu uma breve explanação feita pelo professor orientador de como seria o planejamento da disciplina no semestre e a apresentação do modelo de *e-book* que deveria ser seguido, visto que, mesmo com as atividades presenciais, o planejamento da disciplina adaptado para o ensino remoto foi mantido.

Do dia 14 de julho ao dia 31 de outubro de 2022, as aulas foram voltadas para a realização de alterações e correções no relatório do LEAMAT II e para a elaboração do *e-book* e do relatório do LEAMAT III nas duas linhas de pesquisa.

No dia 3 de novembro de 2022, ocorreu a apresentação dos grupos do LEAMAT III para mostrar o que foi realizado durante os três semestres.

No dia 16 de novembro de 2022, foram entregues os e-books das duas linhas de pesquisa, para a criação do ISBN (Padrão Internacional de Numeração de Livro) e posterior publicação.

3.2 Elaboração da Sequência Didática

3.2.1 Versão final da Sequência Didática

A sequência didática a seguir, estruturada na linha de pesquisa de Geometria, possui como tema *Equivalência de áreas de figuras poligonais por meio da aprendizagem baseada em jogos digitais*, tendo como público alvo o oitavo ano do Ensino Fundamental. Sua aplicação será dividida em três etapas, as quais foram elaboradas considerando o ensino remoto devido à pandemia do vírus SARS-CoV-2. Entretanto, vale ressaltar que a sequência didática pode ser adaptada para a aplicação presencial, caso necessário.

Inicialmente, para a compreensão do tema estabelecido, propõe-se retomar conceitos de áreas de figuras elementares. Posteriormente, serão abordadas equivalências de áreas de figuras poligonais a fim de apresentar maneiras distintas de resolver questões relacionadas ao tema. Por fim, o jogo *Pythagorea* será utilizado como ferramenta para a verificação da aprendizagem dos conteúdos propostos, expondo, ao fim, possíveis resoluções para os níveis escolhidos.

A sequência didática é estruturada pelas seguintes etapas:

I. Retomada da noção de áreas

- Abordagem histórica;
- Exposição das fórmulas de áreas de figuras elementares.

II. Conceituação da noção de equivalência de figuras poligonais

- Definição;
- Decomposição de figuras poligonais em figuras elementares e suas aplicações;

III. Jogo *Pythagorea*

- Apresentação e aplicação;
- Resolução dos níveis selecionados.

As etapas I e II terão, como material de apoio para o aluno, uma apostila (Apêndice A) com o conteúdo a ser abordado durante a aplicação. Na etapa III, a turma será dividida em grupos, fazendo-se necessário um celular ou *tablet* com acesso à internet, de modo que ao menos um dos integrantes de cada equipe possa transmitir a tela de seu dispositivo para os demais. Assim, para a realização da aula, essas últimas condições deverão ser definidas previamente com os alunos. Todas as etapas estão contempladas na apresentação de *slides* (Apêndice B) que nortear á a sequência didática.

➔ **Etapa I**

Esta etapa consiste na retomada do conteúdo sobre áreas de figuras planas. Inicialmente, por meio dos primeiros conhecimentos geométricos, será apresentado o contexto histórico envolvido na construção do conceito de áreas de regiões planas, trazendo alguns pensadores e suas interpretações acerca do tema (Figura 21). Em seguida, serão expostas as fórmulas de algumas figuras elementares já conhecidas, de modo a contribuir para as etapas seguintes da sequência didática (Figura 22).

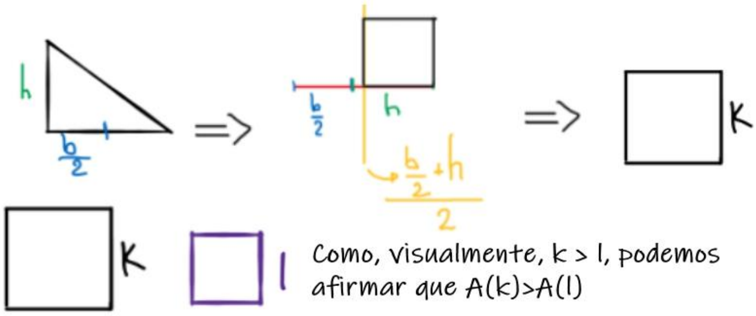
Figura 21 – Contextualização histórica sobre o conceito de áreas

❖ **Recordando sobre áreas**

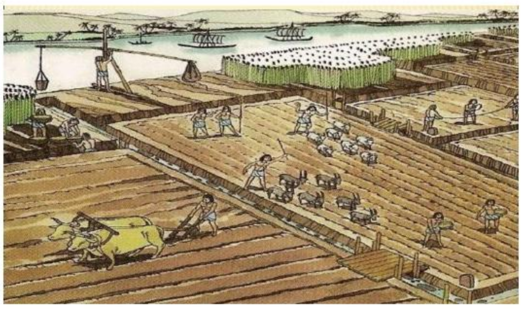
As áreas foram um dos primeiros conhecimentos geométricos obtidos pelo homem, devido à necessidade de entender e agir sobre o ambiente. A busca pela delimitação de terras, mediante a observação e comparação de formas e tamanhos, levou, por exemplo, ao surgimento de cálculos de medidas de comprimento de áreas. Contudo, estes eram realizados por deduções, obtendo resultados reais sem o uso de fórmulas específicas.

Seguindo esse pensamento, os gregos não mediam áreas da maneira que fazemos hoje. Em seu livro *Elementos*, Euclides, famoso matemático, apresentava sua forma de calcular áreas, ainda que não tenha definido tal conceito. Por meio da transformação geométrica de duas regiões planas distintas em figuras de mesmo formato (pelo processo de quadratura), era possível comparar suas dimensões para determinar o seu tamanho. Para os matemáticos gregos, a palavra "igual" podia significar tanto "ser congruente" quanto "ter a mesma área".

Para realizar o processo da quadratura de um triângulo qualquer com base b e altura h, é necessário transportar, de modo adjacente, a altura (h) e metade da base $\left(\frac{b}{2}\right)$ para uma reta e encontrar o ponto médio entre essas duas por meio da construção da mediatriz desse segmento de medida $h + \frac{b}{2}$. Com a divisão desse segmento em duas partes congruentes, encontraremos o lado (l) do quadrado e, assim, será possível construí-lo.

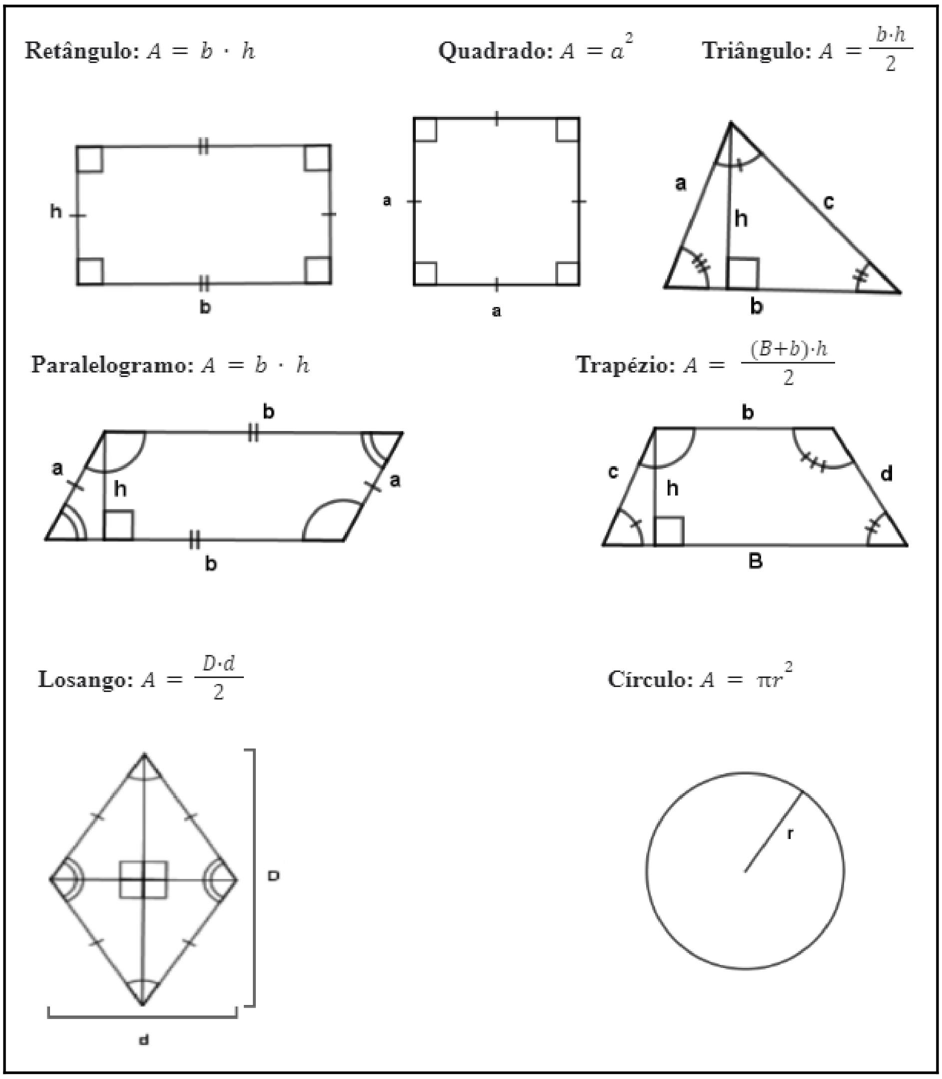


Já Heródoto, em seus escritos datados do século V a.E.C., considera que o conceito de áreas surgiu às bordas do rio Nilo, no Egito. Visto que o rio transbordava e atingia áreas habitadas, era constante a necessidade de medir as áreas das terras a serem redistribuídas entre os que sofreram prejuízos. Como os impostos eram diretamente proporcionais à área de cada lote de terra, a medição era constante, originando tal conceito.



Fonte: Elaboração própria.

Figura 22 – Fórmulas das áreas de figuras elementares básicas



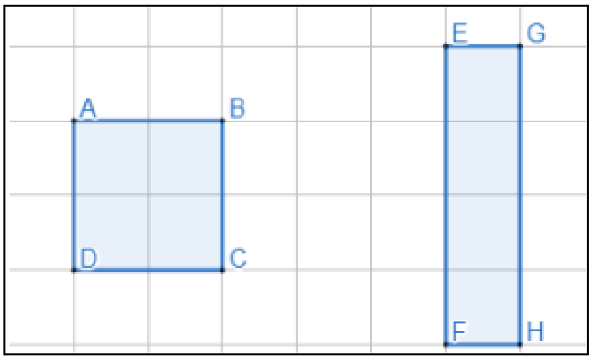
Fonte: Elaboração própria.

➔ **Etapa II**

Os alunos serão introduzidos ao estudo de equivalência de áreas poligonais tendo como base a definição de equivalência na Matemática e na Geometria. Para desenvolver a noção de equivalência na Geometria, serão apresentados quatro exemplos propondo formas distintas de comparar as áreas de polígonos, com o intuito de identificar se estes são equivalentes ou não.

No Exemplo 1 (Figura 23), serão apresentados um quadrado e um retângulo, ajustados na malha quadriculada, com o objetivo de saber se estes são equivalentes. Dessa forma, por meio da percepção visual, os alunos poderão comparar as áreas dos polígonos e comprovar sua equivalência.

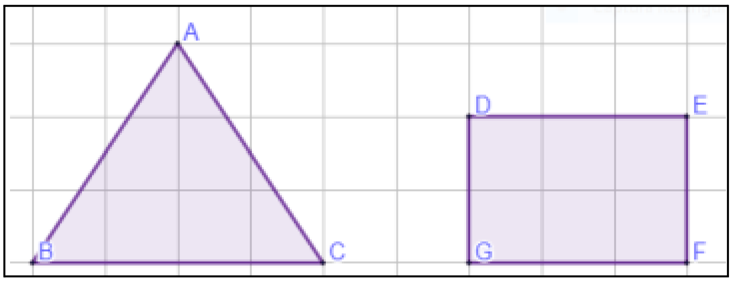
Figura 23 – Exemplo 1



Fonte: Elaboração própria.

Com o mesmo objetivo do exemplo anterior, no Exemplo 2 (Figura 24), serão apresentados um triângulo e um retângulo, posicionados na malha quadriculada, a fim de que os alunos observem que, em contraste com o caso anterior, a percepção visual não é a técnica mais adequada para analisar a área de todos os polígonos. No caso do triângulo, a contagem dos quadrados que compõem sua área se torna mais trabalhosa. Por isso, é preciso utilizar a malha quadriculada para identificar o comprimento de sua base e sua altura, de modo a aplicar essas informações nas fórmulas conhecidas e identificar a equivalência entre as figuras.

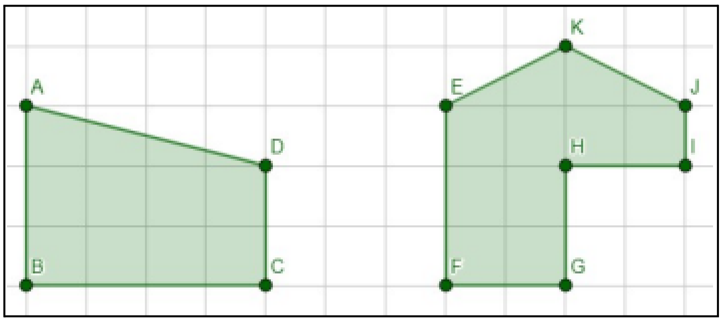
Figura 24 — Exemplo 2



Fonte: Elaboração própria.

Ainda com o mesmo objetivo, no Exemplo 3 (Figura 25), serão apresentados um quadrilátero e um heptágono não regulares posicionados na malha quadriculada.

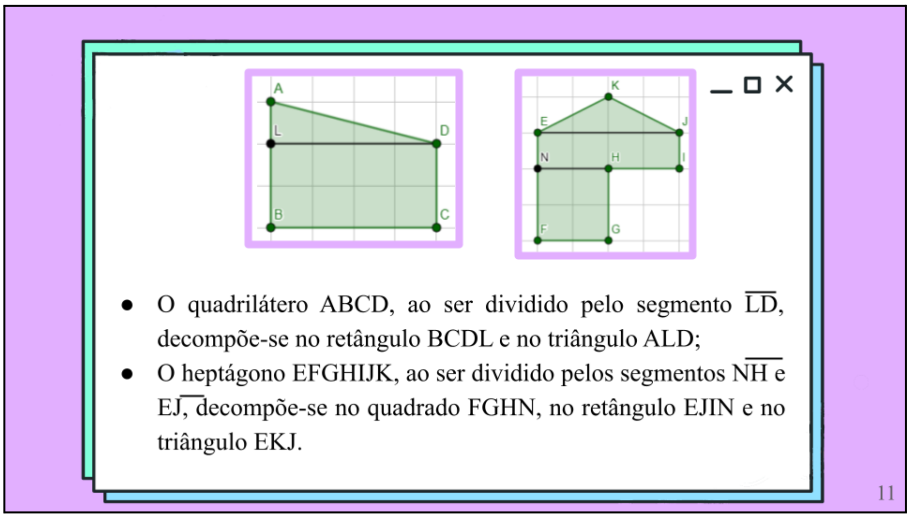
Figura 25 — Exemplo 3



Fonte: Elaboração própria.

Novamente, espera-se que os alunos percebam que o caso é parecido com o exemplo anterior em termos de obtenção da área por meio da visualização da malha. Contudo, uma vez que o heptágono apresentado não é regular, ele não possui uma fórmula específica para o cálculo de sua área. Portanto, serão apresentados métodos de decomposição de polígonos em figuras elementares com fórmulas conhecidas (Figura 26) para, por meio da soma das áreas encontradas, descobrir a área total do polígono inicial. Durante esse processo de decomposição, almeja-se que o aluno compreenda que essa técnica pode ser utilizada em qualquer polígono, incluindo o quadrilátero presente neste exemplo. Assim, após obter as áreas de ambos os polígonos, será possível compará-las e comprovar sua equivalência.

Figura 26 – Possibilidade de decomposição dos polígonos do Exemplo 3



Fonte: Elaboração própria.

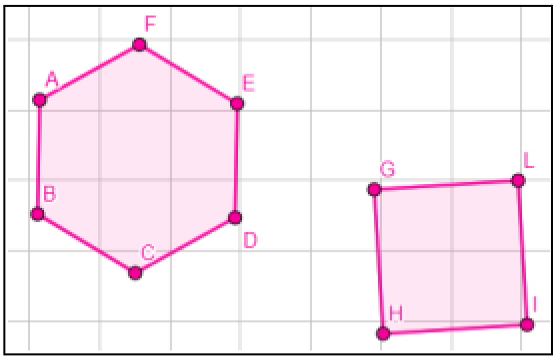
Seguindo tal ideia, serão apresentadas aplicações da decomposição em situações reais, como o Tangram (Figura 27), um quebra-cabeça geométrico chinês composto por sete peças que formam figuras equivalentes distintas, e a colocação de revestimentos em pisos e paredes. Neste último, o processo de decomposição ocorre de maneira implícita na divisão da área a ser revestida de acordo com o tamanho e o formato do piso utilizado.

Figura 27 – Aplicações da decomposição

Fonte: Elaboração própria.

No Exemplo 4 (Figura 28), serão apresentados dois polígonos regulares (um hexágono e um quadrado) posicionados na malha quadriculada, com o objetivo de dividir cada um deles em duas partes equivalentes traçando apenas uma reta.

Figura 28 – Exemplo 4

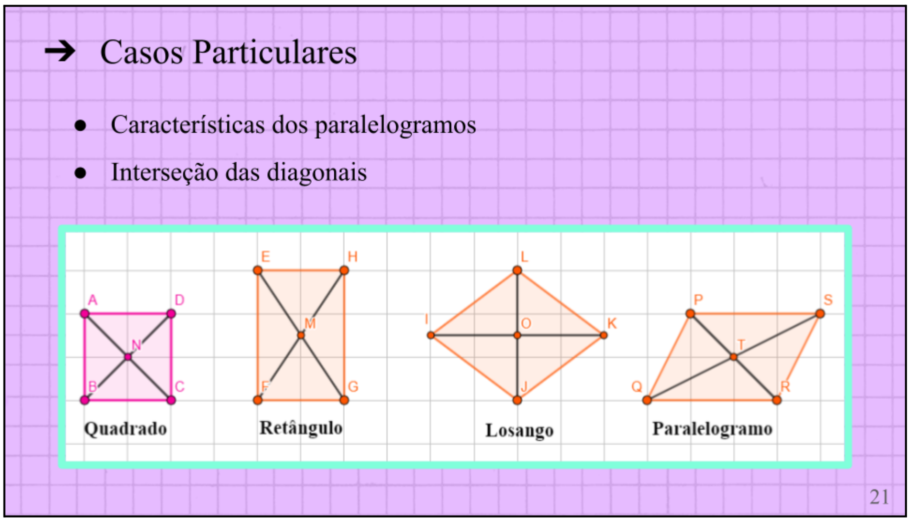


Fonte: Elaboração própria.

Com uma abordagem diferente dos exemplos anteriores, este caso apresenta certa dificuldade para ser resolvido usando as fórmulas de figuras elementares ou pela percepção visual, visto que o quadrado não tem lados coincidentes com os eixos da malha. O intuito é que o aluno perceba que, uma vez que é preciso dividir simultaneamente dois polígonos regulares, a reta a ser traçada necessariamente deve passar pelo centro de ambos. Logo, esse ponto será o centro da circunferência circunscrita a cada um desses polígonos. Para encontrar os centros das figuras, o aluno deverá utilizar conhecimentos geométricos já vistos anteriormente, como a mediatriz, reta perpendicular ao segmento que passa pelo seu ponto médio. Aplicando também os postulados da reta e do ponto, será possível traçar a reta que intersecta ambas as figuras enquanto divide cada uma em duas partes equivalentes.

Dentro desse exemplo, podem surgir, ainda, outras maneiras de encontrar esse ponto central de acordo com a figura apresentada, sendo importante incentivar as diferentes formas de solucionar os problemas propostos. Assim, após a resolução, os paralelogramos serão apresentados como um caso particular (Figura 29), ressaltando suas características, com a intenção de que eles compreendam as especificidades dessas figuras. Independentemente dos conhecimentos geométricos utilizados, espera-se que, quando possível, os estudantes compreendam e apliquem resoluções que não precisem de cálculos algébricos.

Figura 29 – Caso particular: quadriláteros e o ponto médio



Fonte: Elaboração própria.

➔ Etapa III

Para a verificação da aprendizagem, será realizada uma competição entre equipes utilizando, como recurso tecnológico, o jogo *Pythagorea*, uma coleção de quebra-cabeças que utilizam conceitos da Geometria e das Construções Geométricas para encontrar a resposta. O aplicativo possui uma interface simples e atrativa, além de abordar diversos tópicos em cada fase, o que torna o *Pythagorea* uma opção interessante de atividades para aulas que abordem a Geometria Euclidiana.

Antecedendo a realização da atividade, as regras do jogo deverão ser explicadas, preferencialmente, utilizando as instruções fornecidas pelo próprio aplicativo. Os alunos irão se dividir em grupos de quatro a cinco pessoas, que serão direcionados para diferentes salas de chamada em vídeo, recorrendo a serviços de comunicação como *Google Meet*, *Zoom*, entre outros. Com o celular ou *tablet*, os alunos deverão fazer o *download* do aplicativo *Pythagorea* (Figura 30) na loja de aplicativos do dispositivo, de modo que um deles transmita a tela do aplicativo para que todos visualizem a atividade e manipulem o jogo de maneira conjunta.

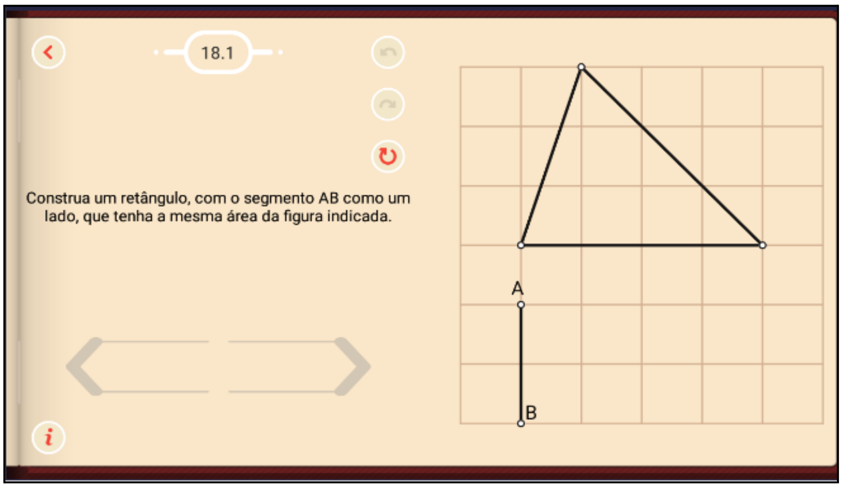
Figura 30 – Jogo *Pythagorea*

Fonte: *Google Play Store.*

Ao sinal do professor, os grupos terão cerca de 30 minutos para abrir o nível 18, nomeado “Área”, e solucionar os níveis de 18.1 a 18.7, sendo o grupo vencedor aquele que conseguir resolvê-los corretamente no menor tempo, podendo utilizar o material de apoio disponibilizado anteriormente. Apesar de haver outros níveis dentro dessa categoria, foram escolhidos aqueles que mais se relacionavam com o conteúdo proposto e com o público alvo. Cada etapa escolhida para a atividade será resolvida com base nos materiais apresentados na sequência, de modo a encontrar áreas equivalentes ou dividir figuras geométricas em partes equivalentes.

No nível 18.1 (Figura 31), o objetivo é que, com base nos dois exemplos iniciais apresentados na apostila, os alunos utilizem as fórmulas das áreas de figuras elementares para construir o polígono equivalente a partir do segmento fornecido.

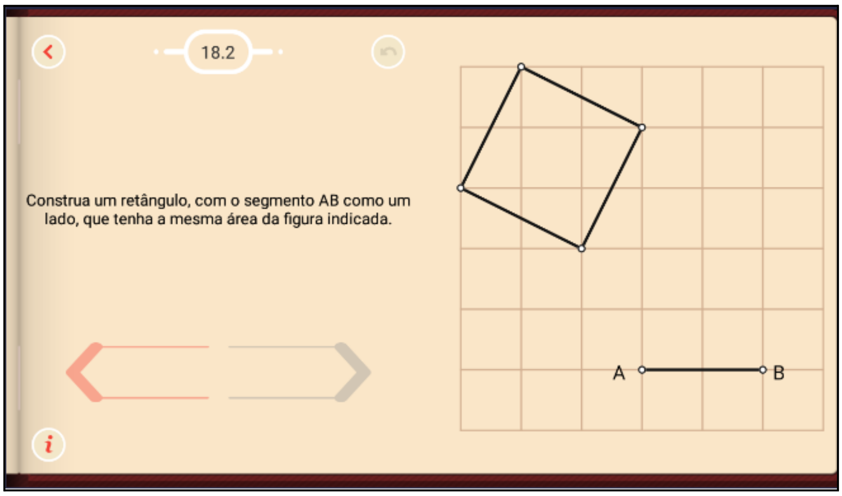
Figura 31 – Nível 18.1



Fonte: *Pythagorea.*

O nível 18.2 (Figura 32) possui objetivo semelhante ao nível anterior, porém serão necessários outros conhecimentos geométricos, como o Teorema de Pitágoras, para encontrar a medida do lado do quadrado fornecido e realizar a construção do retângulo.

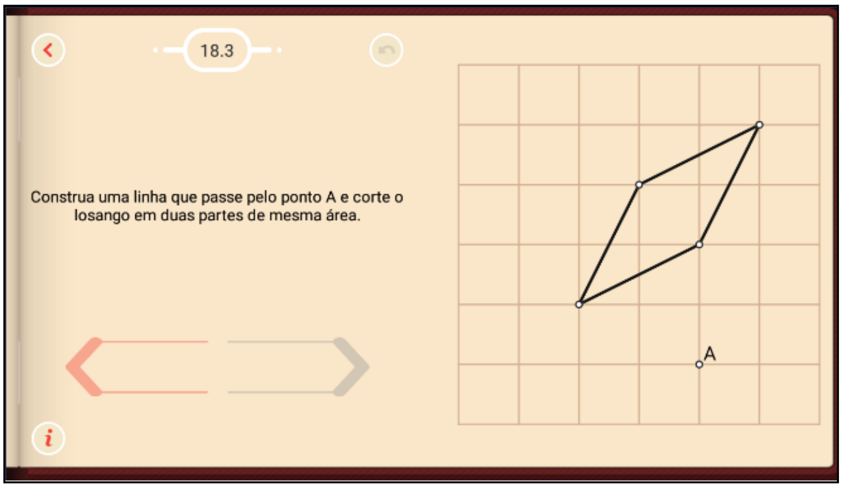
Figura 32 — Nível 18.2



Fonte: *Pythagorea.*

Já no nível 18.3 (Figura 33), o último exemplo da apostila pode ser utilizado para auxiliar na resolução, considerando também os conceitos de ponto e reta, além das propriedades geométricas do losango.

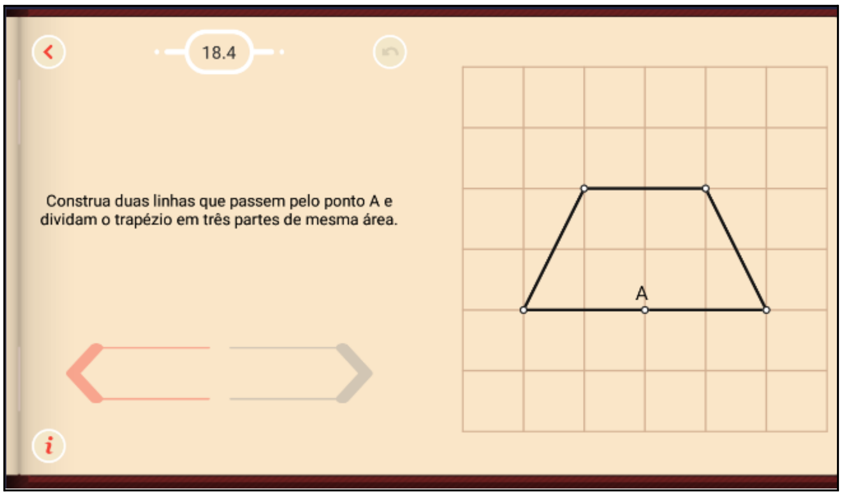
Figura 33 — Nível 18.3



Fonte: *Pythagorea.*

Na fase 18.4 (Figura 34), o conceito de decomposição, apresentado no terceiro exemplo da apostila, poderá ser utilizado para pensar em figuras equivalentes que componham o trapézio apresentado.

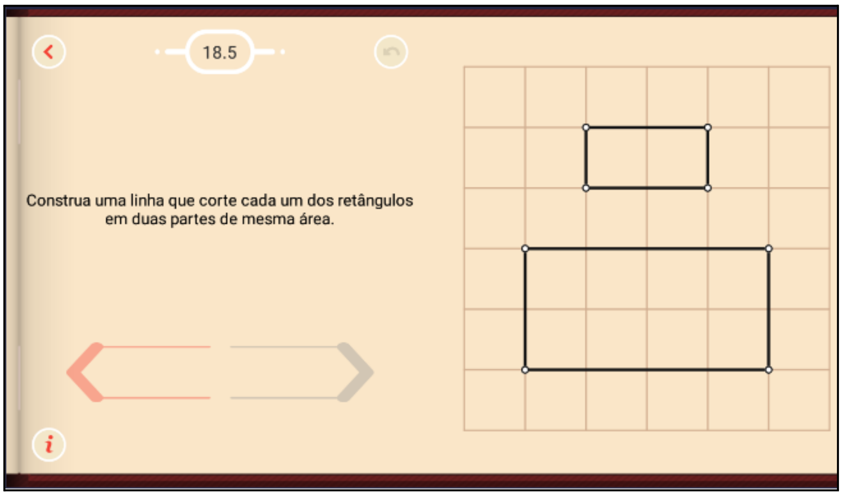
Figura 34 – Nível 18.4



Fonte: *Pythagorea.*

Para o nível 18.5 (Figura 35), o intuito será encontrar o ponto médio de cada um dos polígonos para construir a reta que os dividirá em partes equivalentes. Espera-se que os alunos usem diferentes métodos para achar esses pontos, como a mediatriz, as diagonais, ou mesmo a percepção visual, dado o posicionamento dos quadriláteros.

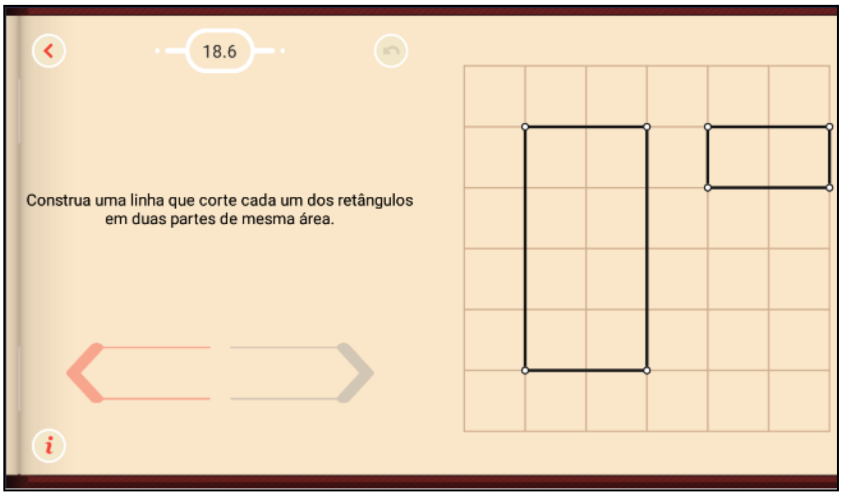
Figura 35 – Nível 18.5



Fonte: *Pythagorea.*

Com objetivo semelhante à fase anterior, o nível 18.6 (Figura 36) apresenta os mesmos quadriláteros, porém com posicionamentos distintos. Neste caso, espera-se que os alunos percebam que a posição do polígono na malha não interfere na forma de encontrar o ponto médio deste, assim como a diferença no formato das partes seccionadas não interferirá nas áreas, que permanecerão equivalentes.

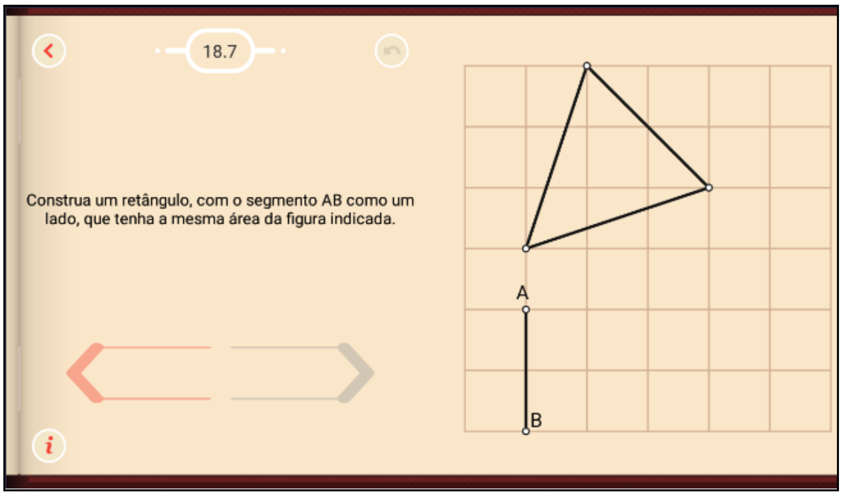
Figura 36 – Nível 18.6



Fonte: *Pythagorea.*

Por fim, o nível 18.7 (Figura 37) exigirá outros conhecimentos geométricos para ser solucionado, como o Teorema de Pitágoras ou a medida da diagonal de um quadrado. O aluno deverá analisar o posicionamento do triângulo apresentado e encontrar as medidas de sua base e altura para construir um retângulo equivalente.

Figura 37 – Nível 18.7



Fonte: *Pythagorea.*

Para finalizar a Etapa III, após todos os grupos terminarem os níveis propostos ou o tempo fornecido acabar, serão apresentadas algumas das possíveis soluções para os sete níveis escolhidos, a fim de esclarecer possíveis dúvidas que possam surgir durante a resolução dos problemas. Um arquivo com as soluções apresentadas também será disponibilizado para a turma ao término da aula, para que possam revisar e corrigir suas resoluções, se necessário (Apêndice C).

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em caráter excepcional, devido à pandemia do vírus SARS-CoV-2, a estrutura do LEAMAT foi modificada para aplicação educacional remota. Assim, foram desenvolvidas atividades pensadas para o ensino *on-line* que explorem diversos aspectos e auxiliem na aprendizagem de propostas didáticas nesse contexto, visando desenvolver e aplicar o conceito de equivalência de áreas de figuras poligonais por meio dos jogos digitais.

Uma vez que, no transcorrer da aula, a temática proposta foi desenvolvida sem muita dificuldade e os alunos da turma de LEAMAT II relataram compreender o conteúdo, conclui-se que o objetivo da sequência didática se sucedeu com êxito. Entretanto, vale ressaltar que, apesar de o público alvo da sequência didática serem alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental, esta foi aplicada em uma turma de licenciandos em Matemática. Logo, alguns ajustes podem ser necessários para a aplicação em uma turma com o público alvo desejado.

Com base nas respostas ao questionário disponibilizado, foi possível observar que o uso do jogo digital *Pythagorea* contribuiu para a assimilação do conteúdo aplicado, além de atuar como um fator motivacional e atrativo para o aluno. Ademais, os recursos utilizados e o modo como o conteúdo foi apresentado nos *slides* e na apostila colaboraram para a dinâmica e clareza da aula.

Desse modo, percebe-se que um dos fatores positivos do trabalho foi justamente a utilização do jogo digital *Pythagorea* e como este complementou a sequência didática, bem como o encadeamento lógico delimitado para a abordagem da temática. Entretanto, tendo em vista que o primeiro contato das integrantes deste trabalho com a organização e aplicação de uma sequência didática se deu na disciplina do LEAMAT de forma remota, considera-se que a retórica das integrantes é um dos pontos a serem aperfeiçoados.

Esta sequência didática pode ser adaptada para ministração na modalidade presencial de ensino, com a adição de outros aparatos facilitadores ou o acréscimo de novas propostas e atividades. Assim, sugere-se que futuras pesquisas e projetos abordem outros níveis do *Pythagorea* e do *Pythagorea 60°*, que possui uma malha com formato de triângulos equiláteros unitários. Outra sugestão é trabalhar a quadratura das figuras elementares básicas dentro de uma contextualização histórica.

A disciplina do LEAMAT e a confecção deste projeto proporcionaram uma visão ampla acerca do processo de elaboração e aplicação de uma aula, contribuindo para a formação acadêmica e profissional das professoras em formação que o elaboraram, graças aos desafios e aprendizados experienciados durante a criação da sequência didática. Além disso, as integrantes foram introduzidas ao contexto de pesquisa e produção acadêmica, experiência esta que as auxiliará em futuros projetos. Toda a experiência vivenciada nesta disciplina foi essencial para o amadurecimento e crescimento profissional e pessoal das integrantes do grupo, resultado do trabalho em grupo e das discussões realizadas.

REFERÊNCIAS

ANGELO, M. S.; SANTOS, M. F. M.; BARBOSA, R. S. J. O ENSINO DE GEOMETRIA NO BRASIL: UMA ABORDAGEM HISTÓRICA. *In*: **Anais do XIV Colóquio Internacional “Educação e Contemporaneidade”** São Cristóvão/SE, p., v. 14, n. 14, p. 1-12, Set. 2020. Disponível em: <https://ri.ufs.br/bitstream/riufs/13711/37/36#:~:text=A%20Geometria%20como%20se%20pode> Acesso em: 28 ago. 2021.

ANTUNES, C. **As inteligências múltiplas e seus estímulos**. São Paulo. Papiros, 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais : matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília : MEC/SEF, 1997.

______. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais : Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998.

_______. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar 9: geometria plana**. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

DORNELES, B. V.; SENA, R. M. Ensino de Geometria: Rumos da Pesquisa (1991–2011). **REVEMAT,** Florianópolis, v. 8, n. 1, p. 138–155, 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8n1p138>. Acesso em: 05 set. 2021.

LORENZATO, S. A**. Porque não ensinar Geometria?** In: A Educação Matemática em Revista, Ano III, n. 4, 1.° semestre, p. 3–13, Blumenau, SBEM. Acesso em: 13 set. 2021**.**

LIMA, E. L. **Medida e forma em geometria: comprimento, área, volume e semelhança**. Rio De Janeiro: Sociedade Brasileira De Matemática, 2009. (Coleção do Professor de Matemática)

PRENSKY, M. Marc Prensky:“O aluno virou o especialista”. [Entrevista concedida a] Camila Guimarães. **Revista Época**, [*s.l.*], n. 634, Jul. 2010. Disponível em:<http://revistaepoca.globo.com/Revista/Epoca/0,,EMI153918-15224,00-MARC+PRENSKY+O+ALUNO+VIROU+O+ESPECIALISTA.html>. Acesso em: 23 out. 2021

_________. **Aprendizagem baseada em jogos digitais.** São Paulo: Editora Senac, São Paulo, 2012.

QUINTÃN, B. S. **O conceito de área sob uma perspectiva investigativa, concreta e contextualizada.** Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Centro de Ciência e

Tecnologia, 2018. Campos dos Goytacazes, RJ.

RODRIGUES, A. D.; BELLEMAIN, P. M. B.. A comparação de áreas de figuras planas em diferentes ambientes: papel e lápis, materiais manipulativos e apprenti géométre 2. **EMTEIA**, Recife, PE, v. 7, n. 3, p. 01–25, 2016. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/issue/view/141>. Acesso em 04 nov. 2021

ROQUE, T. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio De Janeiro: Zahar, 2012.

ROQUE, T.; PITOMBEIRA, J. B. **Tópicos de história da matemática**. Rio De Janeiro: Sociedade Brasileira De Matemática, 2012.

SANTOS, F. K. C. B. **Construções geométricas e equivalência de áreas**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Ouro Preto: Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. Ouro Preto, MG, 2017.

SHULTE, A. P.; LINDQUIST, M. M. **Aprendendo e ensinando geometria**. São Paulo, SP. Atual, 1994.

VASCONCELOS, N. M. DO B. **ABORDAGEM PRÁTICA DOS CONCEITOS DE ÁREA E PERÍMETRO A PARTIR DA PLANTA BAIXA DE UMA ESCOLA**. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro (UENF): Centro de Ciência e Tecnologia. Campos dos Goytacazes, RJ, 2019.

APÊNDICES

APÊNDICE A: MATERIAL DIDÁTICO ELABORADO

Diretoria de Ensino Superior das Licenciaturas
Licenciatura em Matemática
Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática
Linha de Pesquisa: Geometria
Licenciandos: Gabriela Mesquita, Gabriele Freitas, Júlia Montovanelli, Mariana de Azevedo e Thaíza da Silva
Orientador: Prof. Me. Leandro Sopeletto Carreiro
Nome: ____
Data: ____/____/____

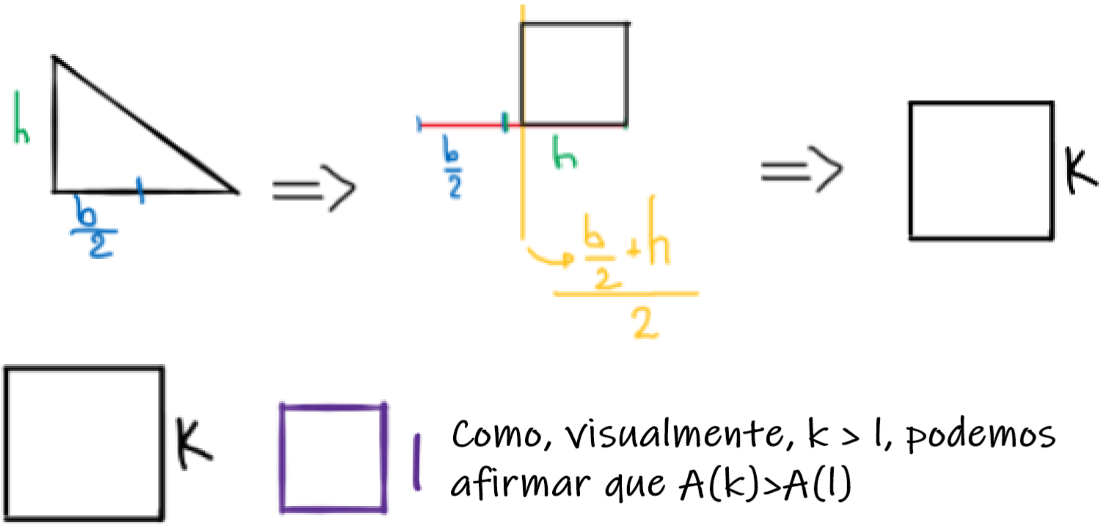
Equivalência de áreas poligonais

❖ Recordando sobre áreas

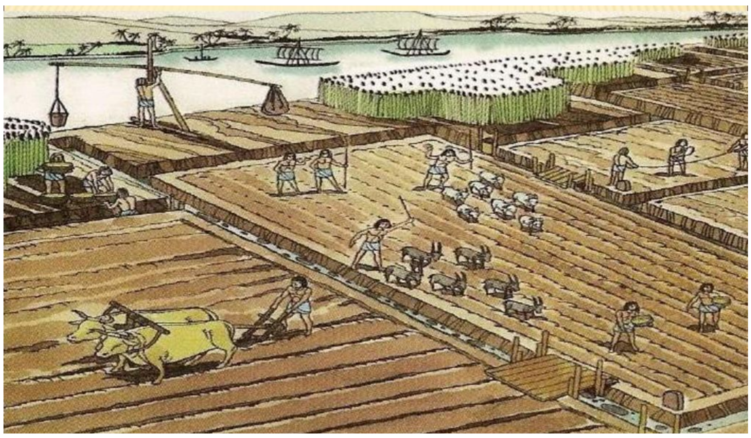
As áreas foram um dos primeiros conhecimentos geométricos obtidos pelo homem, devido à necessidade de entender e agir sobre o ambiente. A busca pela delimitação de terras, mediante a observação e comparação de formas e tamanhos, levou, por exemplo, ao surgimento de cálculos de medidas de comprimento de áreas. Contudo, estes eram realizados por deduções, obtendo resultados reais sem o uso de fórmulas específicas.

Seguindo esse pensamento, os gregos não mediam áreas da maneira que fazemos hoje. Em seu livro *Elementos*, Euclides, famoso matemático, apresentava sua forma de calcular áreas, ainda que não tenha definido tal conceito. Por meio da transformação geométrica de duas regiões planas distintas em figuras de mesmo formato (pelo processo de quadratura), era possível comparar suas dimensões para determinar o seu tamanho. Para os matemáticos gregos, a palavra "igual" podia significar tanto "ser congruente" quanto "ter a mesma área".

Para realizar o processo da quadratura de um triângulo qualquer com base b e altura h, é necessário transportar, de modo adjacente, a altura (h) e metade da base $\left(\frac{b}{2}\right)$ para uma reta e encontrar o ponto médio entre essas duas por meio da construção da mediatriz desse segmento de medida $h + \frac{b}{2}$. Com a divisão desse segmento em duas partes congruentes, encontraremos o lado (l) do quadrado e, assim, será possível construí-lo.



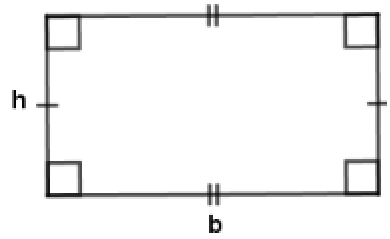
Já Heródoto, em seus escritos datados do século V a.E.C., considera que o conceito de áreas surgiu às bordas do rio Nilo, no Egito. Visto que o rio transbordava e atingia áreas habitadas, era constante a necessidade de medir as áreas das terras a serem redistribuídas entre os que sofreram prejuízos. Como os impostos eram diretamente proporcionais à área de cada lote de terra, a medição era constante, originando tal conceito.

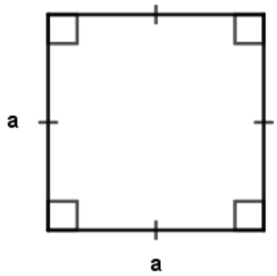


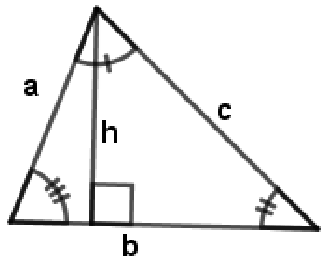
➔ Fórmulas para figuras geométricas básicas

Atualmente, usamos fórmulas para calcular a área de regiões poligonais, ou seja, a área ainda possui como função quantificar o espaço bidimensional ocupado por uma forma. Dessa maneira, a área sempre será representada por um número real positivo. Apesar de não ser possível calcular as áreas de todas as superfícies geométricas a partir de uma única fórmula que use suas medidas, existem figuras elementares que podem ter suas áreas expressas por meio das seguintes relações:

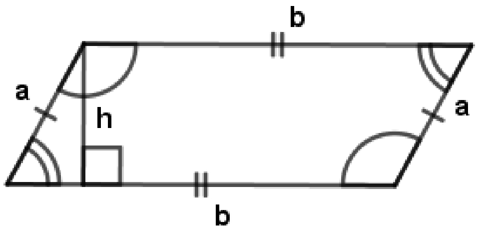
Retângulo: $A = b \cdot h$ **Quadrado:** $A = a^2$ **Triângulo:** $A = \frac{b \cdot h}{2}$

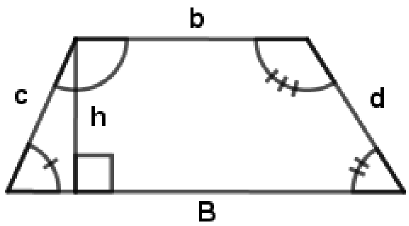




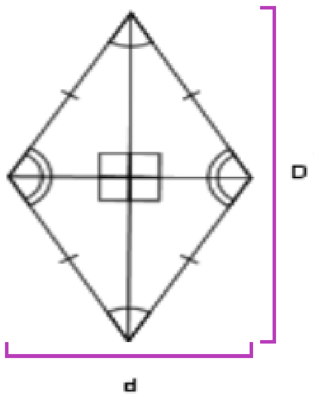


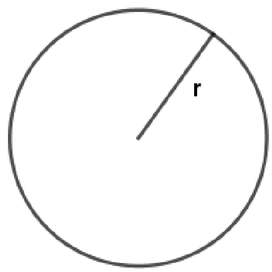
Paralelogramo: $A = b \cdot h$ **Trapézio:** $A = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$





Losango: $A = \frac{D \cdot d}{2}$ **Círculo:** $A = \pi r^2$





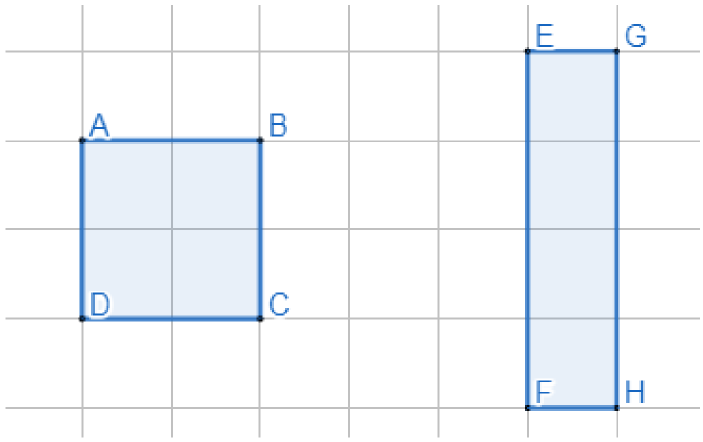
❖ Equivalência de áreas de figuras poligonais

A palavra equivalência deriva de *equi* (igual) e *valência* (valor). Portanto, as equivalências matemáticas são grandezas que possuem o mesmo valor. Quando falamos de equivalência na geometria plana, estamos nos referindo a áreas iguais, ou seja, figuras equivalentes são aquelas que possuem áreas iguais.

Analisando a quadratura do triângulo ilustrada anteriormente, podemos dizer que o triângulo e o quadrado de lado k possuem a mesma área, logo, são equivalentes. Dessa forma, é possível concluir que Euclides utilizava as transformações geométricas e a equivalência para comparar as áreas de duas figuras distintas.

Agora que começamos a entender melhor o que é a equivalência, veremos alguns exemplos:

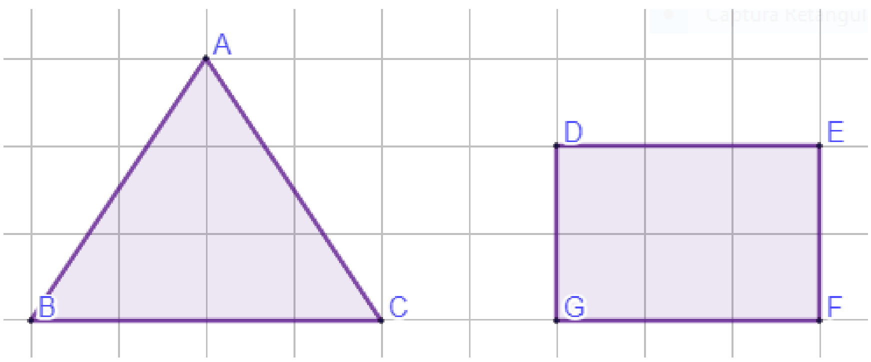
Na figura a seguir, temos o quadrado $ABCD$ e o retângulo $EFGH$. Observe-a atentamente, buscando identificar semelhanças e diferenças entre eles.



O quadrado $ABCD$ e o retângulo $EFGH$ possuem a mesma área, porque ambos são compostos por quatro quadrados unitários.

Entretanto, nem sempre será possível identificar essas semelhanças somente usando a visualização. Vejamos exemplos menos evidentes:

Observando a figura, como saber se as formas possuem áreas equivalentes?



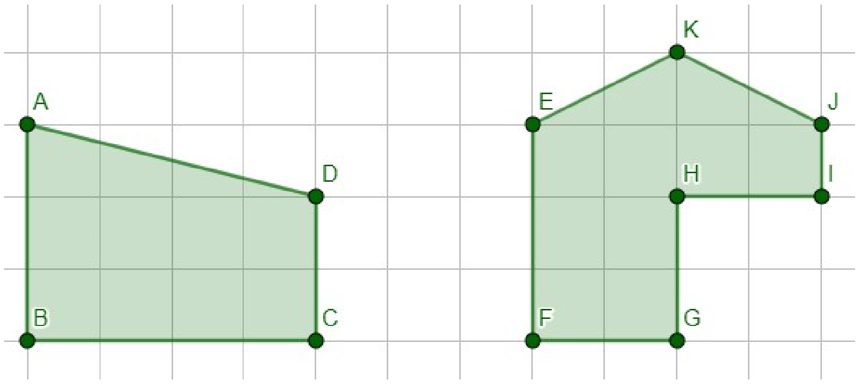
Vamos calcular a área de cada uma delas utilizando as fórmulas vistas anteriormente. Denominando a área do triângulo de A_T e a área do retângulo de A_R, temos:

$$A_T = \frac{b \cdot h}{2} \Leftrightarrow A_T = \frac{4 \cdot 3}{2} \Leftrightarrow A_T = \frac{12}{2} \Leftrightarrow A_T = 6\, u.a.$$

$A_R = b \cdot h \Leftrightarrow A_R = 3 \cdot 2 \Leftrightarrow A_R = 6\, u.a.$

Como $A_T = 6\, u.a.$ e $A_R = 6\, u.a.$, temos um quadrado e um triângulo equivalentes, ou seja, apesar de possuírem formas e dimensões diferentes, ambos ocupam o mesmo espaço no plano.

Contudo, a visualização dessas formas geométricas pode não ser simples em todos os casos. Como podemos afirmar que as áreas das figuras abaixo são equivalentes?

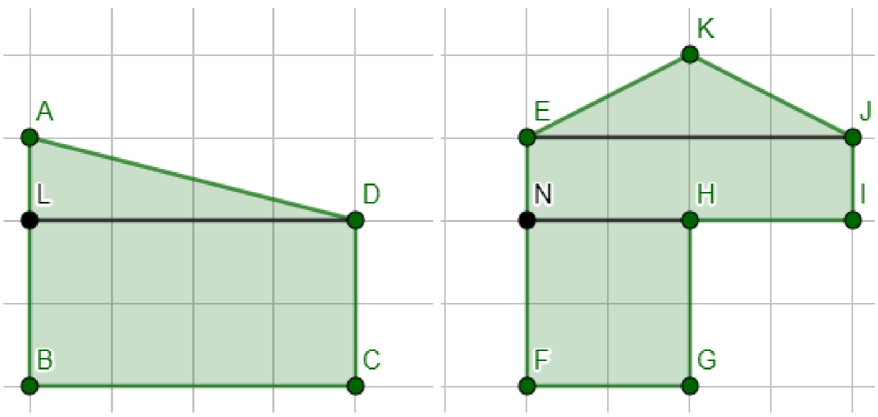


Analisando a imagem, percebemos que não é possível calcular diretamente a área dessas figuras por meio das fórmulas que já conhecemos, visto que não são polígonos elementares. Então, como realizar esse cálculo?

Dado que as figuras estão na malha quadriculada e podemos enxergar sua posição nesta, trabalharemos com a decomposição de figuras geométricas.

Neste caso, decompor significa cortar a figura de modo a obter outras que possuam fórmulas de área bem definidas e conhecidas. Assim, a soma das áreas das figuras cortadas será equivalente à área da figura inicial.

Uma das maneiras de decompor as figuras apresentadas anteriormente seria:



➔ O quadrilátero $ABCD$, ao ser dividido pelo segmento $\overline{LD}$, decompõe-se no retângulo $BCDL$ e no triângulo ADL;

➔ O heptágono $EFGHIJK$, ao ser dividido pelos segmentos $\overline{NH}$ e $\overline{EJ}$, decompõe-se no quadrado $FGHN$, no retângulo $EJIN$ e no triângulo EJK.

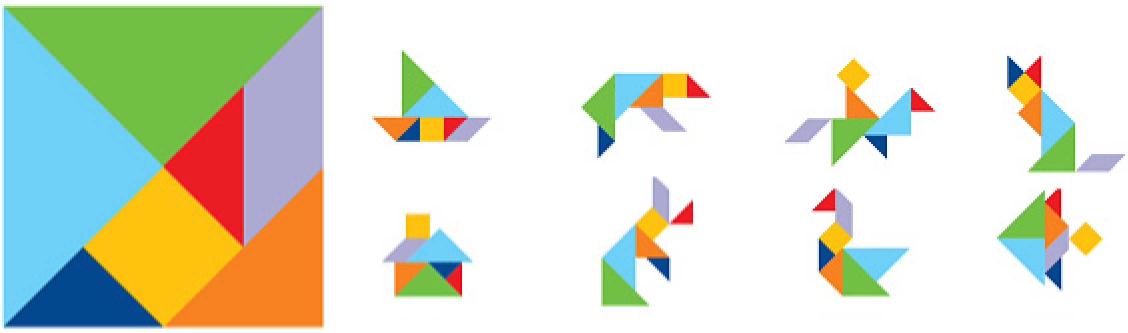
Decompostas as figuras poligonais, podemos calcular suas áreas e descobrir se elas são equivalentes:

$$A_{(ABCD)} = A_{(BCDL)} + A_{(ALD)}$$
$$A_{(ABCD)} = 4 \cdot 2 + \frac{4 \cdot 1}{2}$$
$$A_{(ABCD)} = 8 + 2$$
$$A_{(ABCD)} = 10\, u.a.$$

$$A_{(EFGHIJK)} = A_{(FGHN)} + A_{(EJIN)} + A_{(EJK)}$$
$$A_{(EFGHIJK)} = 2^2 + 4 \cdot 1 + \frac{4 \cdot 1}{2}$$
$$A_{(EFGHIJK)} = 4 + 4 + 2$$
$$A_{(EFGHIJK)} = 10\, u.a.$$

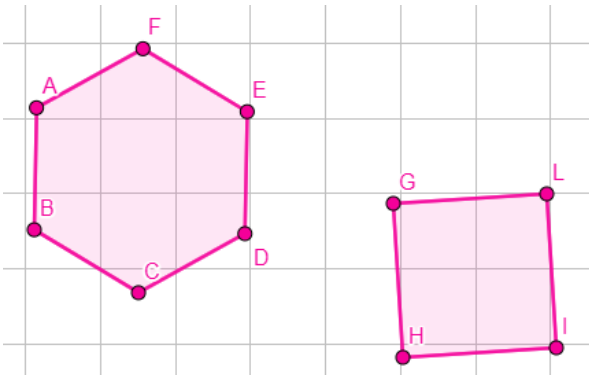
Logo, é possível afirmar que o quadrilátero $ABCD$ e o heptágono $EFGHIJK$ são equivalentes.

A decomposição de figuras geométricas está presente em várias situações do cotidiano, mesmo que discretamente. O quebra-cabeça Tangram é um exemplo claro disso: composto tradicionalmente por 5 triângulos retângulos e isósceles, 1 quadrado e 1 paralelogramo, é possível construir inúmeras formas diferentes que, por sempre conterem as mesmas 7 peças, serão equivalentes.



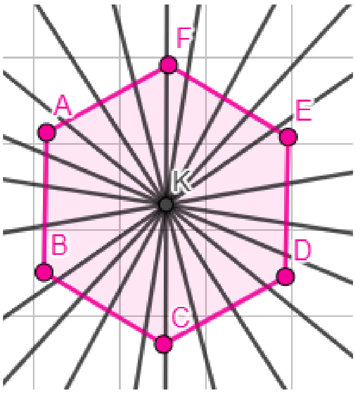
Nos exemplos acima, foram apresentadas algumas maneiras de decompor figuras distintas de modo a comparar suas áreas. Contudo, se quisermos apenas decompor simultaneamente dois polígonos distintos de modo a obter, em cada um, partes equivalentes entre si, sem necessariamente calcular suas áreas, seria possível encontrar tais partes equivalentes?

Tente encontrar uma reta que corte, simultaneamente, o hexágono e o quadrado, nesse caso ambos polígonos regulares, em duas partes de mesma área:



Apesar de parecer complicada, essa questão não precisa de cálculo algébrico algum para ser resolvida, mas, sim, das propriedades dessas figuras regulares. Como se trata de uma figura regular, podemos garantir que, para dividi-la em duas partes com áreas iguais, é preciso determinar uma reta que passe por seu centro.

Ao analisarmos apenas uma figura, existirão infinitas possibilidades para dividi-la em partes equivalentes, uma vez que por um ponto passam infinitas retas:

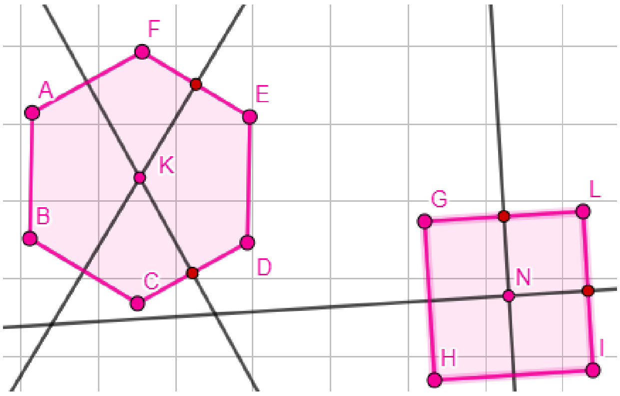


Como desejamos dividir simultaneamente dois polígonos regulares, a resposta será a reta que passa pelo centro de ambos. Essa reta será **única**, considerando que por dois pontos distintos passa apenas uma reta.

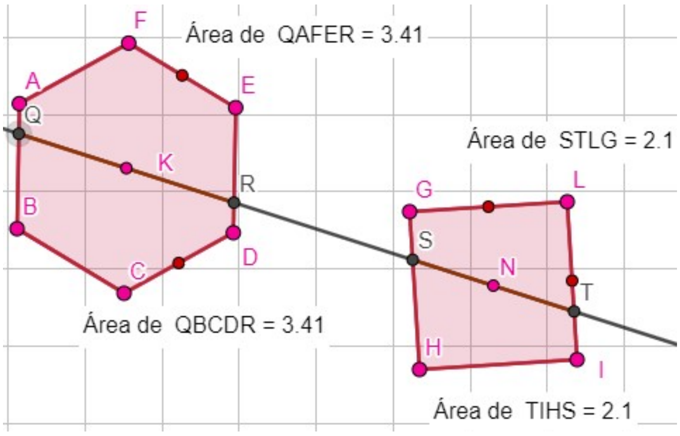
Logo, para resolver esse problema, é necessário encontrar o centro do hexágono $ABCDEF$ e do quadrado $GHIL$. De que maneira é possível encontrar esses pontos?

Novamente, não usaremos cálculos algébricos, mas, sim, propriedades geométricas da mediatriz. Por definição, temos que a mediatriz é a reta perpendicular ao segmento que passa pelo seu ponto médio (DOLCE; POMPEO, 2013, p.82). Então, construindo a mediatriz relativa a dois lados quaisquer não paralelos, é possível determinar o centro desse polígono regular, ou seja, o centro da circunferência circunscrita a ele.

Para construir a mediatriz, é necessário dividir o segmento ao meio, encontrando seu ponto médio, e traçar uma reta perpendicular que passe por esse ponto. Construindo nas figuras, temos:

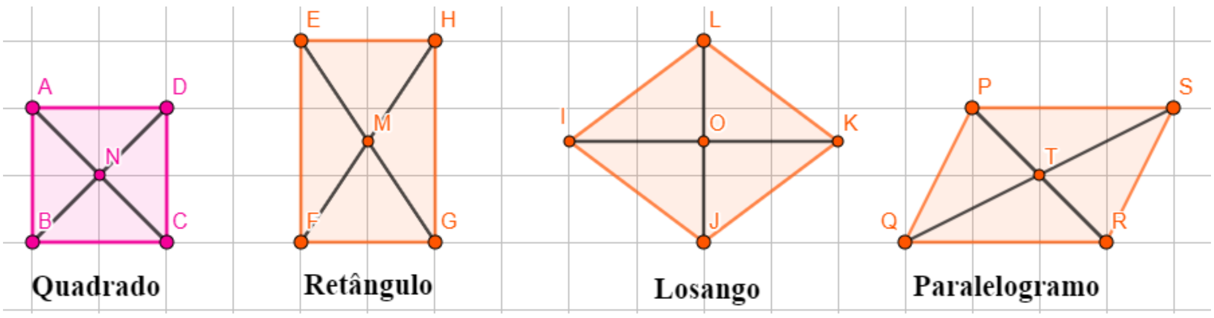


Agora que encontramos o centro de ambas as figuras, basta traçar a reta que passa por esses dois pontos para dividi-las, cada uma em duas partes de mesma área.

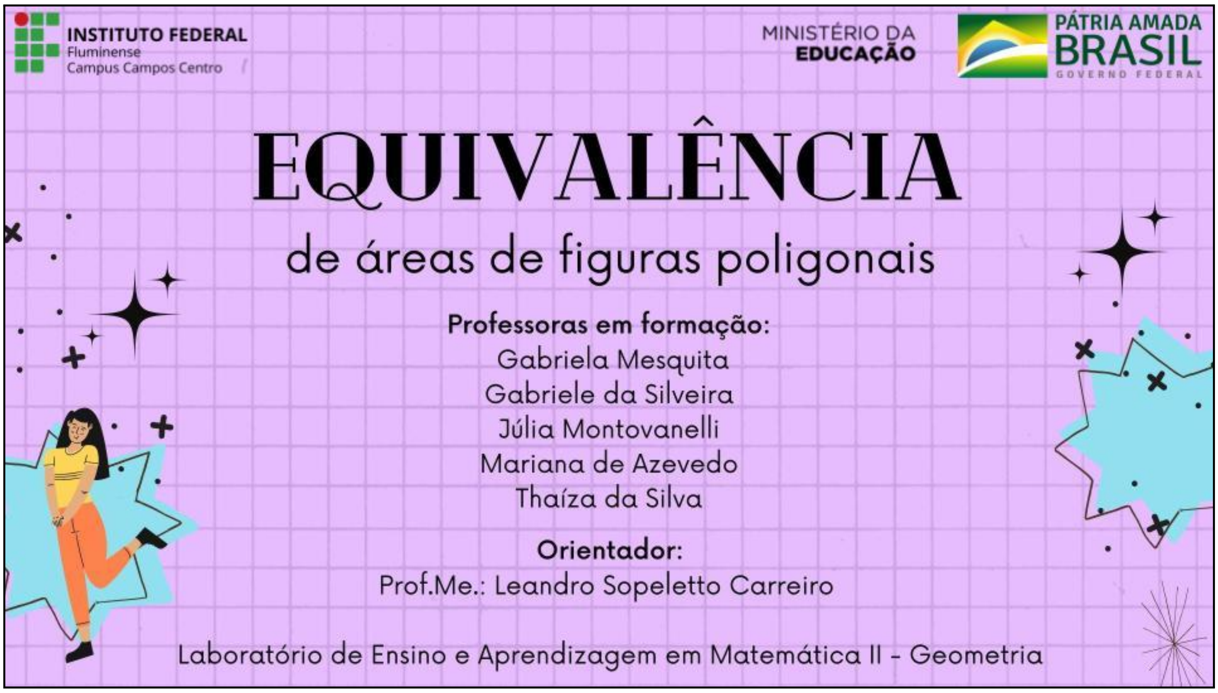


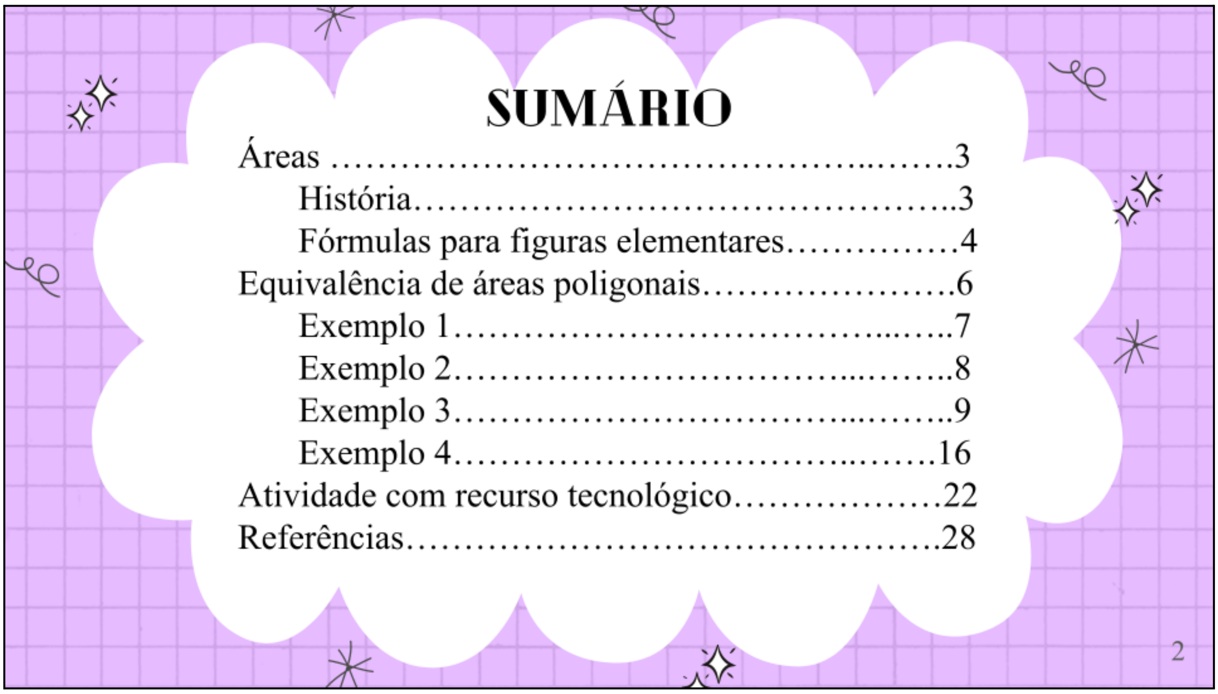
Observe que as áreas das partes do hexágono e do quadrado não são equivalentes entre si, mas as partes de uma mesma figura possuem essa equivalência.

Vale ressaltar que existem polígonos que, dentro de suas próprias definições, carregam características cuja aplicação define o ponto médio destas. Esse é o caso dos paralelogramos, figuras que possuem lados opostos paralelos e apenas duas diagonais, as quais a interseção resulta no ponto médio dessas figuras geométricas. Os paralelogramos podem ser classificados em quadrados, retângulos, losangos ou paralelogramos.



APÊNDICE B: APRESENTAÇÃO DE *SLIDES*

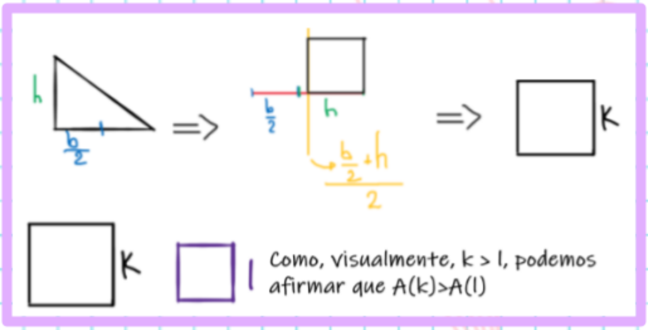

INSTITUTO FEDERAL
Fluminense
Campus Campos Centro
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
PÁTRIA AMADA BRASIL
GOVERNO FEDERAL
EQUIVALÊNCIA
de áreas de figuras poligonais
Professoras em formação:
Gabriela Mesquita
Gabriele da Silveira
Júlia Montovanelli
Mariana de Azevedo
Thaíza da Silva
Orientador:
Prof.Me.: Leandro Sopeletto Carreiro
Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática II - Geometria


SUMÁRIO
Áreas ……………………………………………..…….3
História……………………………………..3
Fórmulas para figuras elementares……………4
Equivalência de áreas poligonais…………………6
Exemplo 1…………………………………...…..7
Exemplo 2……………………………...……...8
Exemplo 3……………………………...……..9
Exemplo 4……………………………..…….16
Atividade com recurso tecnológico………………22
Referências……………………………………..28
2

Áreas

História

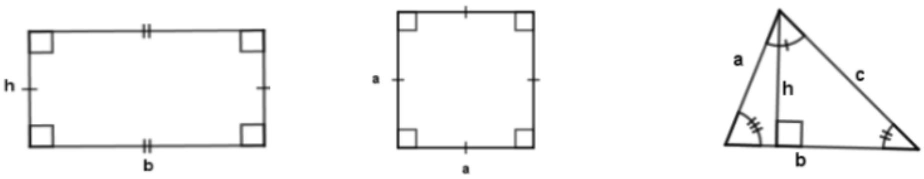
- Primeiros conhecimentos geométricos
- Heródoto e o Nilo
- Euclides
- Processo de quadratura



3

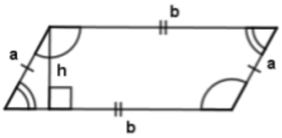
Fórmulas para figuras geométricas básicas

Retângulo: $A = b \cdot h$ **Quadrado:** $A = a^2$ **Triângulo:** $A = \frac{b \cdot h}{2}$

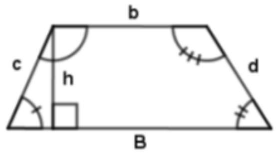


4

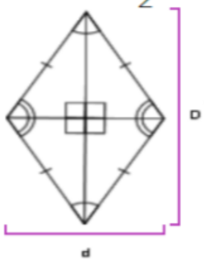
Paralelogramo: $A = b \cdot h$



Trapézio: $A = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$



Losango: $A = \frac{D \cdot d}{2}$

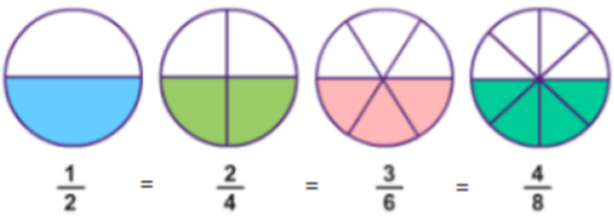


Círculo: $A = \pi r^2$

5

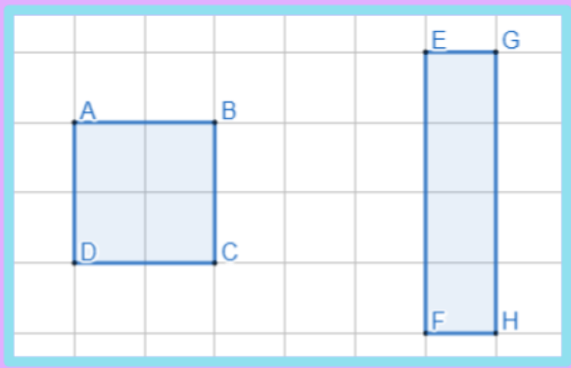
Equivalência de áreas de figuras poligonais

As equivalências matemáticas são grandezas que possuem o mesmo valor.



6

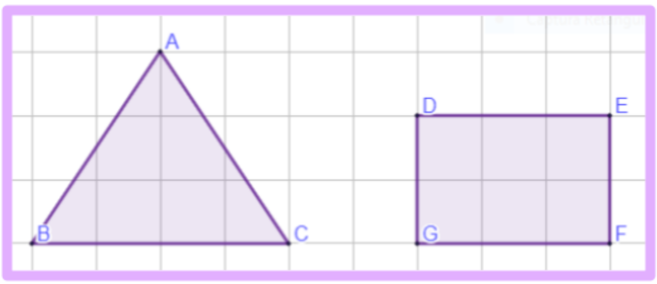
Exemplo 1



O quadrado ABCD e o retângulo EFGH possuem a mesma área porque ambas são compostas por quatro quadrados unitários.

7

Exemplo 2



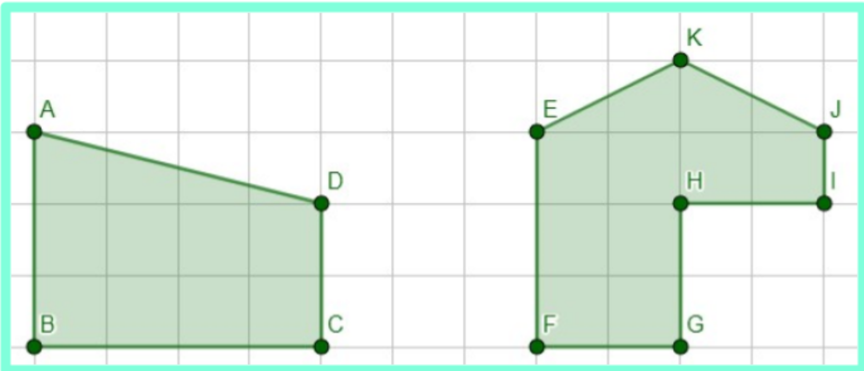
$$A_T = \frac{b \cdot h}{2} \Leftrightarrow A_T = \frac{4 \cdot 3}{2} \Leftrightarrow A_T = \frac{12}{2} \Leftrightarrow A_T = 6\, u.a.$$

$$A_R = b \cdot h \Leftrightarrow A_R = 3 \cdot 2 \Leftrightarrow A_R = 6\, u.a.$$

8

Exemplo 3

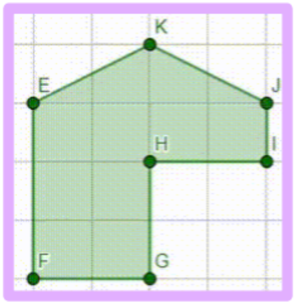
Essas áreas são equivalentes?



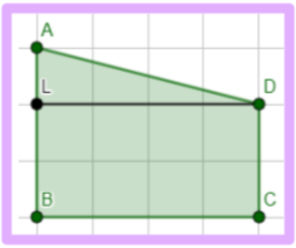
9

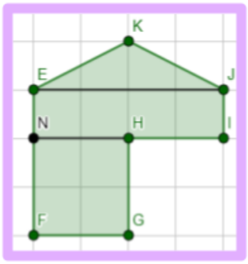
Decomposição

- Cortar a figura
- Obter outras que possuam fórmulas de área bem definidas e conhecidas
- A soma das áreas das figuras encontradas pelo corte será equivalente à área da figura inicial



10





- O quadrilátero ABCD, ao ser dividido pelo segmento $\overline{LD}$, decompõe-se no retângulo BCDL e no triângulo ALD;
- O heptágono EFGHIJK, ao ser dividido pelos segmentos $\overline{NH}$ e $\overline{EJ}$, decompõe-se no quadrado FGHN, no retângulo EJIN e no triângulo EKJ.

11

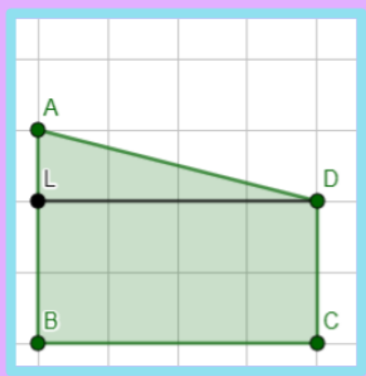
→ Cálculo da área do quadrilátero ABCD:

$$A_{ABCD} = A_{BCDL} + A_{ALD}$$

$$A_{ABCD} = 4 \cdot 2 + \frac{4 \cdot 1}{2}$$

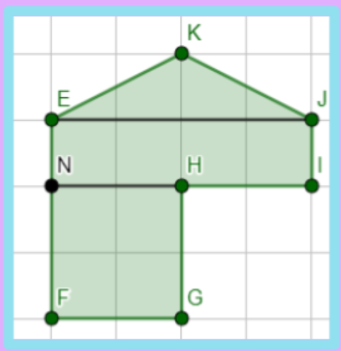
$$A_{ABCD} = 8 + 2$$

$$A_{ABCD} = 10\, u.a.$$



12

→ Cálculo da área do heptágono EFGHIJK:



$$A_{EFGHIJK} = A_{FGHN} + A_{EJIN} + A_{EKJ}$$

$$A_{EFGHIJK} = 2^2 + 4 \cdot 1 + \frac{4 \cdot 1}{2}$$

$$A_{EFGHIJK} = 4 + 4 + 2$$

$$A_{EFGHIJK} = 10\ u.a.$$

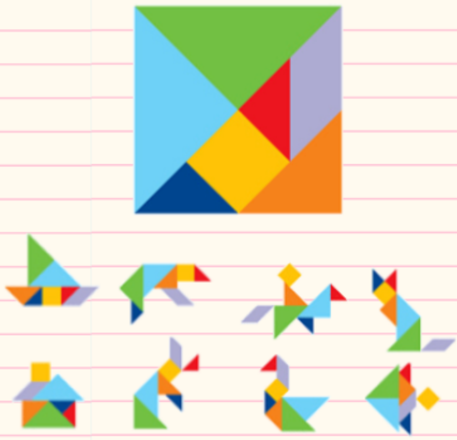
Assim, observamos que o quadrilátero ABCD e do heptágono EFGHIJK são equivalentes.

13

→ Aplicações

Tangram

- 5 triângulos retângulos e isósceles
- 1 quadrado
- 1 paralelogramo



14

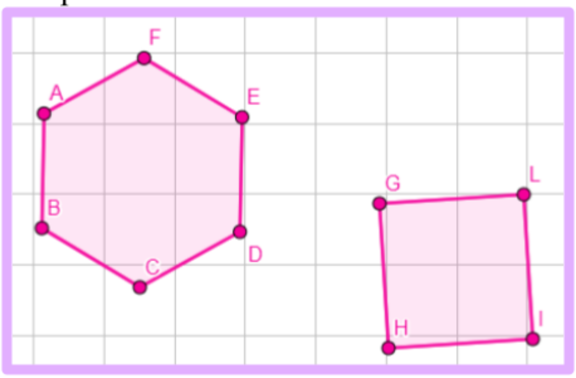
➔ Aplicações

- Construção civil
- Revestimentos

15

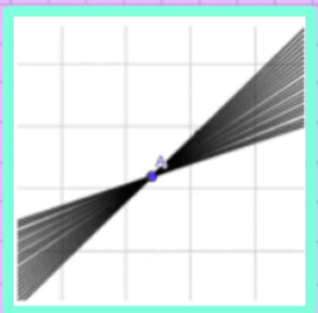
Exemplo 4

Como dividir cada um dos polígonos regulares abaixo em duas partes de áreas equivalentes, traçando apenas uma reta?

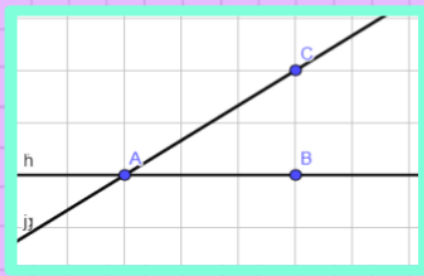


16

Como ambas as figuras são regulares, para dividi-las em duas partes com áreas iguais, é preciso que a reta que as intersecta passe pelo centro delas. Para encontrar esses pontos, usaremos dois postulados (afirmações aceitas sem demonstração):



Por um ponto passam infinitas retas.



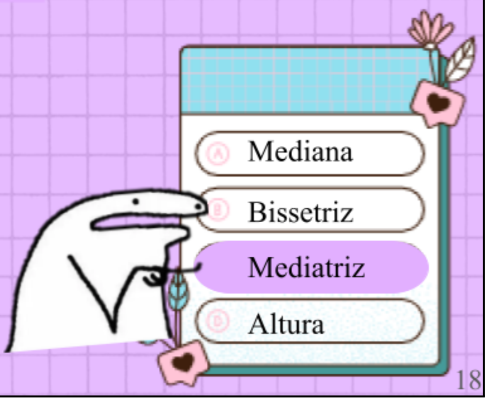
Por dois pontos distintos passa uma única reta.

17

Já que queremos dividir, simultaneamente, dois polígonos regulares, a resposta será a **única** reta que passa pelos centros de ambas.

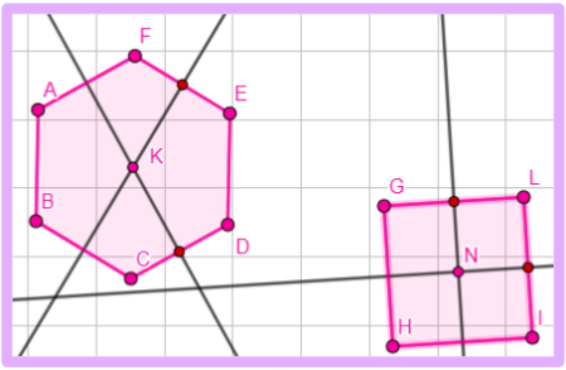
Logo, para resolver esse problema é necessário encontrar o centro do hexágono ABCDEF e do quadrado GHIL, ou seja, o centro da circunferência que circunscreve cada um dos polígonos regulares.

Para encontrar o circuncentro desses polígonos, é necessário construir qual desses elementos?



18

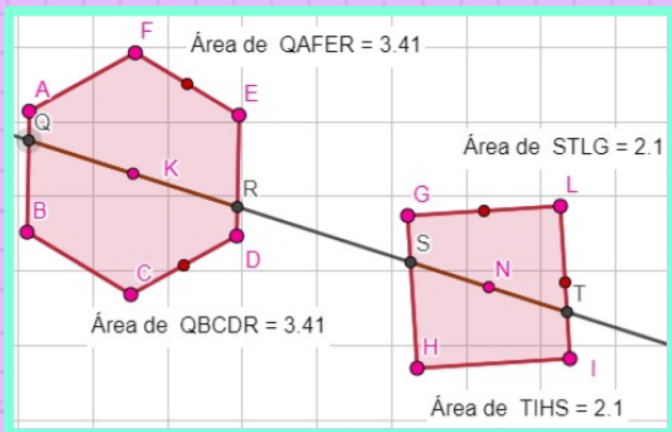
Traçando a mediatriz de dois lados não paralelos, conseguimos encontrar os pontos centrais de ambos os polígonos.



19

Dessa forma, traçando a reta $\overleftrightarrow{KN}$, conseguimos dividir ambas as figuras em duas partes de áreas equivalentes.

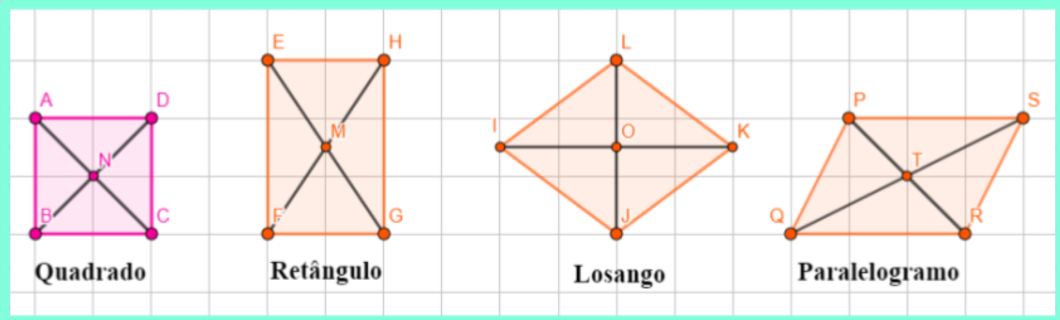
Importante lembrar que apenas as partes de um mesmo polígono serão equivalentes, sem necessariamente possuir áreas iguais às partes da outra figura.



20

➔ Casos Particulares

- Características dos paralelogramos
- Interseção das diagonais



21

Atividade com Recurso Tecnológico

Vamos verificar nossos conhecimentos através de um jogo. Instruções:

1. Dividir a turma em grupos;
2. Instalar o aplicativo Pythagórea

22

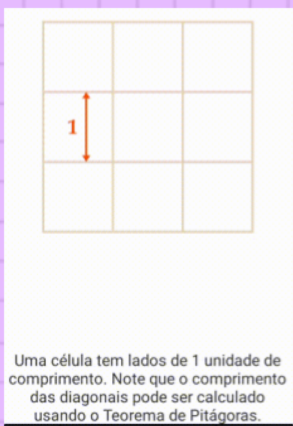
Pythagórea

App Store

Play Store

23

3. Após a instalação do jogo, vocês deverão ler as instruções, acessar o nível 18 e passar pelos 7 primeiros níveis (de 18.1 à 18.7)



24

4. O grupo que conseguir passar pelos 7 níveis corretamente e em menor tempo será o campeão!

25

Dúvidas?

26

27

REFERÊNCIAS

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar 9 : geometria plana**. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

LIMA, E. L. **Medida e forma em geometria: comprimento, área, volume e semelhança**. Rio De Janeiro: Sociedade Brasileira De Matemática, 2009. (Coleção do Professor de Matemática)

EUCLIDEA.XYZ. **Pythagórea**. Versão 2.18. Fase: 18 - Áreas. [Horis International Limited]: c2016.

ROQUE, T. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio De Janeiro: Zahar, 2012.

28

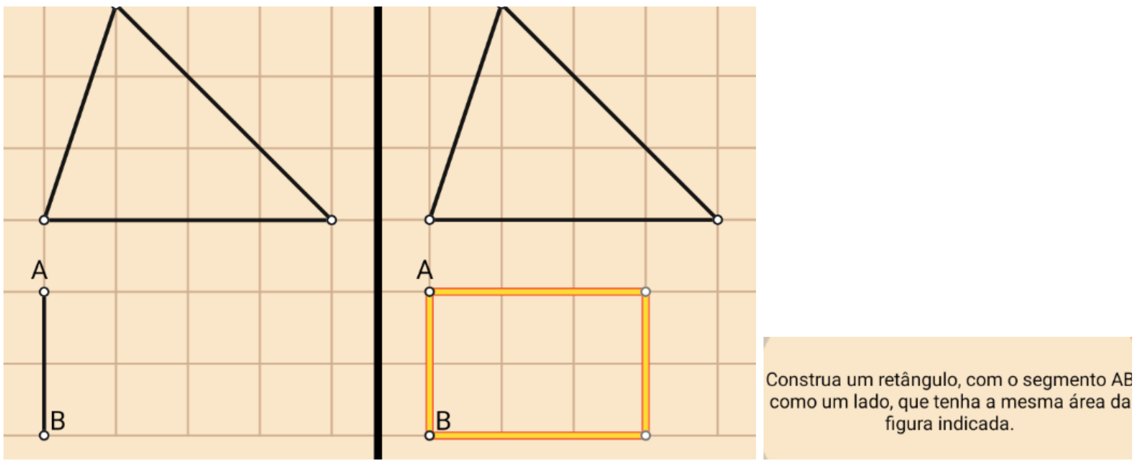
APÊNDICE C: APOSTILA DE RESOLUÇÕES DO JOGO *PYTHAGOREA*

Diretoria de Ensino Superior das Licenciaturas
Licenciatura em Matemática
Disciplina: Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática
Linha de Pesquisa: Geometria
Licenciandos: Gabriela Mesquita, Gabriele Freitas, Júlia Montovanelli, Mariana de Azevedo e Thaíza da Silva
Orientador: Prof. Me. Leandro Sopeletto Carreiro
Nome:____
Data:_____/____/____

Pythagorea- Áreas

Após realizar as etapas do jogo de verificação restou alguma dúvida? Confira a seguir a nossa resolução das etapas.

- 18.1



Vamos calcular a área do triângulo (A_T):

$$A_T = \frac{b \times h}{2}$$

$$A_T = \frac{4 \times 3}{2}$$

$$A_T = \frac{12}{2}$$

$$A_T = 6\, u.a.$$

Como queremos construir figuras equivalentes e já temos a altura (h) do retângulo(A_R), agora basta calcular a medida de sua base (b):

$A_R = b \times h$

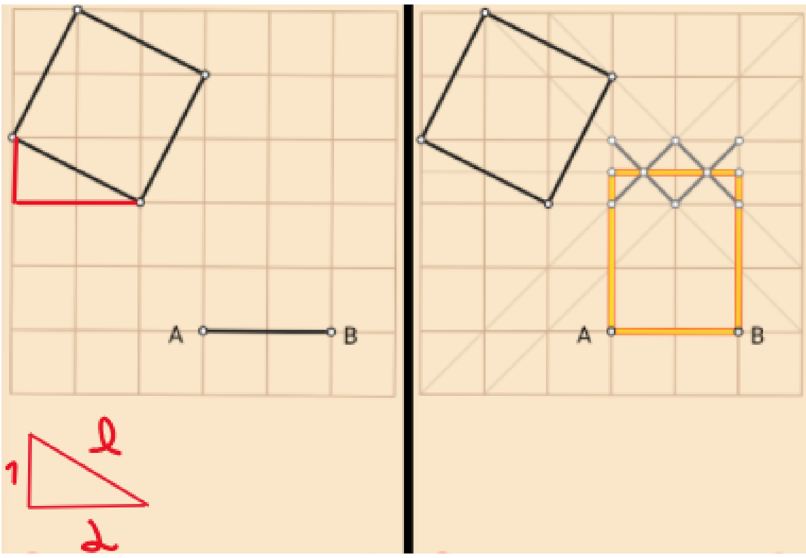
$6 = b \times 2$

$b = \frac{6}{2}$

$b = 3\, u.m.$

Logo, deveremos construir um retângulo com as medidas 3×2.

❖ 18.2



Construa um retângulo, com o segmento AB como um lado, que tenha a mesma área da figura indicada.

Analisando o triângulo em vermelho conseguimos descobrir a medida do lado do quadrado por meio do Teorema de Pitágoras:

$l^2 = 2^2 + 1^2$

$l^2 = 4 + 1$

$l^2 = 5$

$l = \sqrt{5}\, u.m.$

Com a medida do lado do quadrado conseguimos calcular a sua área (A_Q):

$A_Q = (\sqrt{5})^2$

$A_Q = 5\, u.a.$

Desse modo, devemos achar a medida da altura do retângulo (h), sabendo que a área (A_R) também deverá medir $5\ u.a.$

$A_R = b \times h$

$5 = 2 \times h$

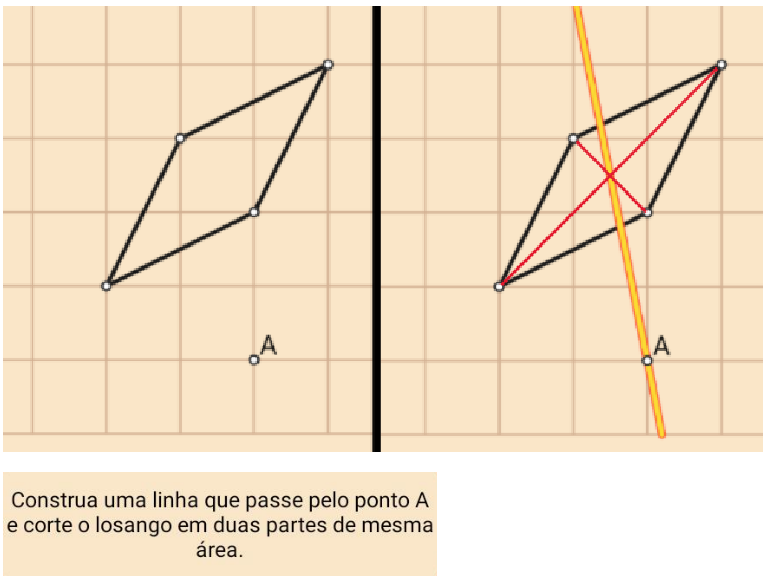
$h = \frac{5}{2}$

$h = 2,5\ u.m.$

Logo, a altura do quadrado deverá medir $2,5\ u.m.$

Como essa altura não é um a medida que possui “nó” para marcar o ponto, é preciso construí-lo de alguma maneira. Usando uma das propriedades do quadrado, que nos diz que a interseção entre suas diagonais é o ponto médio da figura, podemos encontrar esse ponto onde seria a nossa altura de $2,5\ u.m.$ Traçando novamente em outro quadrado adjacente a este, obtemos mais um ponto, que, com o anterior, definirá uma reta que dista $2,5\ u.m.$ da base, podendo então marcar os vértices desse retângulo.

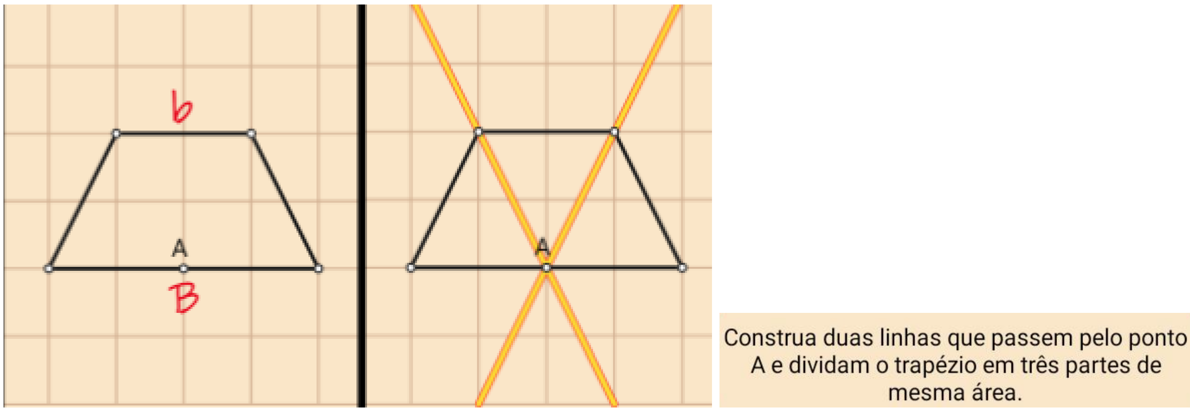
❖ 18.3



Uma vez que já temos o ponto A, externo ao losango, é preciso encontrar um ponto interno à figura, de modo que, ao traçar a reta que passa por esses dois pontos, sejam formadas duas figuras equivalentes. Para isso, é preciso encontrar o ponto médio da figura.

Como o polígono é um losango, por uma de suas propriedades sabemos que o encontro das duas diagonais forma o ponto médio. Logo, basta construir as diagonais, encontrar tal ponto e traçar a reta.

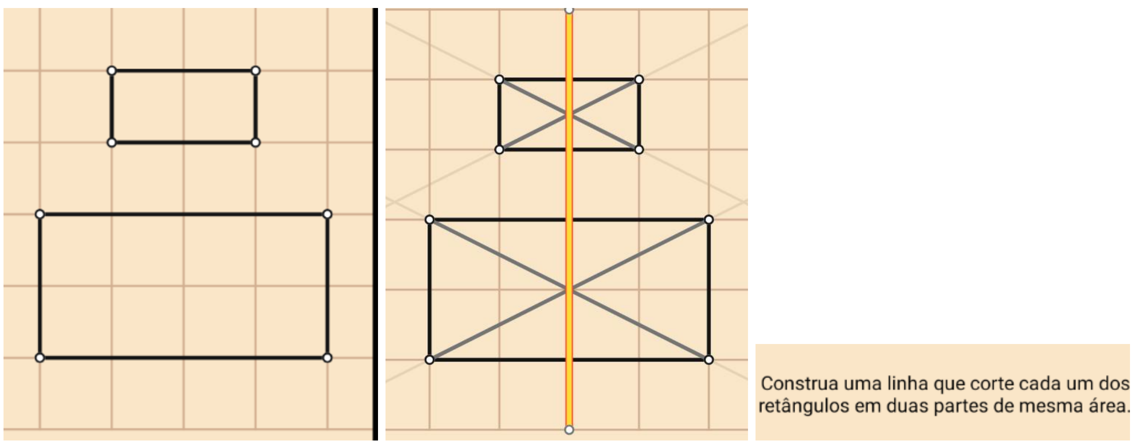
❖ 18.4



Observando a figura, percebemos que a base menor (b) e a altura do trapézio possuem a mesma medida, e que a base maior (B) é o dobro da base menor, além disso, tratar-se de um trapézio isósceles, sendo A o ponto médio de B.

Ao ligar o ponto A às extremidades de b, é possível decompor o trapézio em 3 triângulos de mesma base e mesma altura, ou seja, triângulos equivalentes. Isso ocorre porque a área do triângulo é dada por: $A_T = \frac{b \times h}{2}$, assim, quando temos triângulos com mesma base e mesma altura eles são equivalentes.

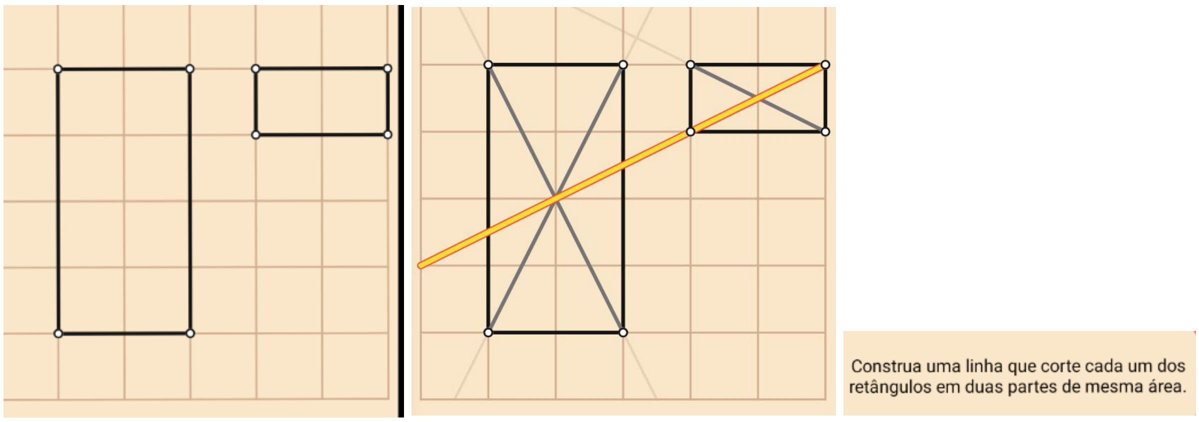
❖ 18.5



No primeiro retângulo temos uma área de $2\,u.a.$ e no segundo retângulo, uma área de $8\,u.a.$ Para dividir cada um dos retângulos em duas partes de mesma área com o uso de uma única linha, é preciso encontrar os pontos médios destes.

Como ambas figuras são retângulos e estes são, consequentemente, paralelogramos, temos que o ponto médio de cada um deles estará na interseção entre suas diagonais. Dado que os pontos médios dos dois polígonos estão alinhados entre si e alinhados com os pontos médios das bases paralelos, a reta que irá dividi-los em partes de mesma área será também a mediatriz das bases.

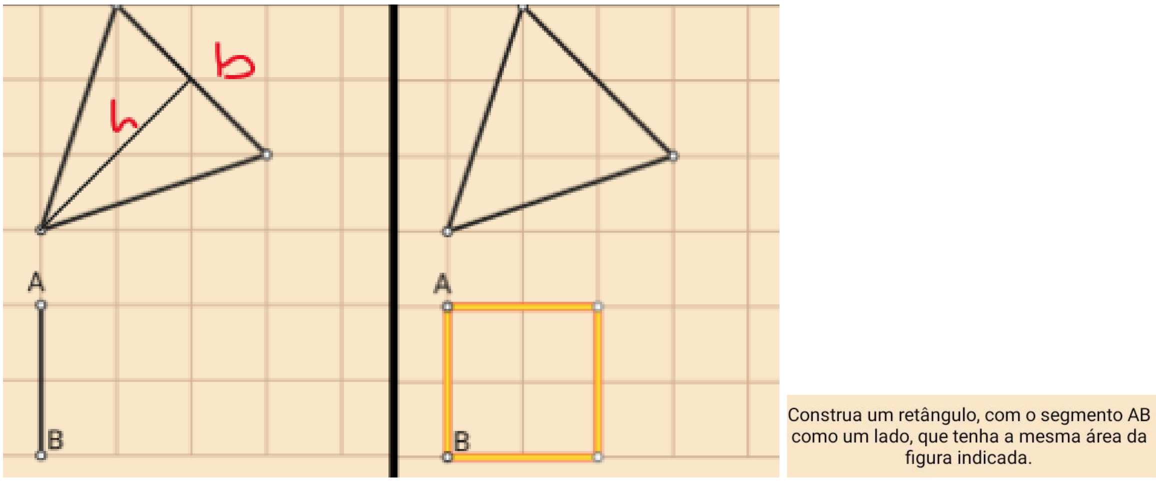
❖ 18.6



Seguindo o exemplo anterior, para dividir cada um dos retângulos em duas partes de mesma área com o uso de uma única linha, é preciso encontrar os pontos médios destes. Dado que os polígonos são retângulos, sabemos que esses pontos serão encontrados nas interseções entre as diagonais de cada um deles.

Como os pontos médios não estão alinhados, visto que um retângulo é maior em altura e o outro é maior em comprimento, dessa vez a reta não irá coincidir com a mediatriz. Entretanto, é possível observar que na figura menor, a reta coincidirá com uma de suas diagonais.

❖ 18.7



Analisando a imagem, é possível perceber que tanto a base do triângulo quanto a sua altura equivalem à medida da diagonal de um quadrado de lado 2, ou seja, medem $2\sqrt{2}$ u.m.

Considerando b como a base do triângulo e h como a altura, conseguimos calcular a área do triângulo (A_T):

$$A_T = \frac{b \times h}{2}$$

$$A_T = \frac{2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}}{2}$$

$$A_T = \frac{8}{2}$$

$$A_T = 4\, u.a.$$

Portanto, o retângulo a ser construído também deverá ter área (A_R) $4\, u.a.$:

$$A_R = b \times h$$

$$4 = b \times 2$$

$$b = \frac{4}{2}$$

$$b = 2\, u.m.$$

Logo, a base do retângulo deverá medir $2\, u.m.$