INTRODUÇÃO

O ensino de Matemática vem sendo alvo de críticas e classificado como deficiente pelos órgãos governamentais, constatado nos exames nacionais de Cursos em todos os níveis no Brasil. O país vem ocupando posições nada confortáveis na classificação dos estudantes de Matemática em comparação com os outros países do mundo.

Na esteira dessas críticas e deficiências, algumas partes da Matemática têm sido citadas como sendo aquelas em que os alunos têm tido fraco desempenho. E a Geometria é uma dessas partes.

Alguns pesquisadores vêm creditando uma parcela considerável da responsabilidade do fraco desempenho dos alunos em Geometria aos cursos de formação de professores que vêm deixando esses profissionais mal preparados e, que em conseqüência disto, trabalham mal este saber matemático.

Professores mal preparados não conseguem, em geral, estimular os seus alunos da Educação Básica a estudarem Geometria e verem a beleza e a importância desta parte da Matemática. Uma parcela desses alunos será no futuro aquela que estará estudando Matemática nos Cursos de Licenciatura e reproduzirá professores que não gostam de ensinar Geometria e, num círculo vicioso, irão desestimular seus alunos, levando-os ao desinteresse por esta área do saber.

> "*Muitos professores novos nunca estudaram Geometria tridimensional, talvez nunca tenham tomado conhecimento de uma geometria não euclidiana nem lidado com transformações ou vetores". (Lindquist, p.23, 1994).*

O despreparo dos docentes deve-se, em muito, ao fato de a Geometria não estar contemplada adequadamente nos programas de formação de professores.

Você ainda acha, como os nossos antepassados, que a Terra é plana?

Não se espera uma resposta afirmativa de nenhum dos leitores deste texto em pleno século XXI. Portanto, seria justo o nosso aluno estudar apenas a

Geometria Euclidiana, sabendo que ela não é considerada a única e verdadeira interpretação do espaço em que vivemos?

Não precisamos propor aqui um "Abaixo a Euclides", mas se fazem necessárias atividades adequadas que levem os estudantes de todos os níveis a desenvolver a compreensão de um sistema axiomático através da investigação e comparação das Geometrias Euclidiana e Não-Euclidianas.

As diversas reflexões feitas neste curso sobre o ensino-aprendizagem de Matemática tais como as experiências no Laboratório de Ensino de Matemática e atividades nas disciplinas como Seminários de Ambientes de Aprendizagem de Matemática e Produção e Gestão do Conhecimento, trouxeram-nos a motivação para questionar em que ponto as Geometrias Não Euclidianas deveriam ser inseridas na Licenciatura em Matemática do CEFET Campos.

A motivação para essa pesquisa é fruto também do trabalho de reflexão exigido pelos professores do curso quando nos faziam observar a importância entre o equilíbrio da construção do conhecimento necessário à formação do futuro professor e a metodologia adequada a essa construção ou da constante preocupação em aliar-se a transmissão dos saberes matemáticos à forma como esses saberes deverão ser trabalhados e adaptados à educação básica.

Todo esse conjunto contribuiu decisivamente para a escolha do tema dessa pesquisa.

A pesquisa se inicia com um estudo do desenvolvimento da Geometria a partir da publicação da famosa obra de Euclides, passando pelos estudos de alguns dos principais críticos de Os Elementos o que resulta no aparecimento das Geometrias Não Euclidianas.

Foi feito também um levantamento do estado da arte do ensino de Geometria em algumas Instituições de Ensino Superior brasileiras que indica como e quais Cursos abordam o objeto deste trabalho.

E, finalmente, foi aplicada uma atividade de construção dos conceitos das duas principais Geometrias Não Euclidianas com um grupo de professores em formação, procurando validar as expectativas da pesquisadora em relação à inclusão desse saber matemático nos Cursos de Licenciatura em Matemática.

Este trabalho pretende ser fonte de inspiração para que, no futuro, as pessoas envolvidas no currículo em construção deste curso, possam iniciar uma caminhada no sentido de incluir efetivamente as duas Geometrias Não Euclidianas clássicas como componente curricular.

A matriz curricular da Licenciatura em Matemática do CEFET Campos contempla uma carga horária razoável para Geometria Euclidiana, acrescida das aulas de Construções Geométricas e Geometria Descritiva, além do suporte tecnológico do uso das ferramentas através dos softwares educativos.

A nossa expectativa é que ocorra a implementação efetiva de uma proposta pedagógica que possa explorar as relações entre as duas Geometrias Não Euclidianas clássicas e a Geometria Euclidiana no curso de formação de professores.

O desenvolvimento de uma proposta pedagógica voltada para a formação inicial dos professores e que explore as relações entre as geometrias poderá contribuir para o aumento da compreensão dos conceitos da Geometria Euclidiana, influenciando no estado da arte do ensino de Geometria na região.

CAPÍTULO 1

GEOMETRIA EUCLIDIANA: BREVE RELATO

Origem da Geometria Euclidiana

Muitos são os registros de que o antigo Egito é o berço da geometria.

As constantes inundações anuais do Nilo faziam desaparecer as divisórias das terras e se tornou necessário fazer comparações com certa freqüência, de maneira que se pudessem distinguir as diferentes propriedades. Estas comprovações resultaram em uma série de fórmulas geométricas, muitas das quais não eram senão meras aproximações.

A geometria, como ciência dedutiva, porém, não começa até a antiga Grécia. Grandes descobertas geométricas devem ser creditadas nos esforços de muitos predecessores de Euclides, como Tales de Mileto (640-456 a.C.), Pitágoras (580-500 a.C.) e Eudoxo (408-355 a.C.). Platão (428-347 a.C.) interessou-se profundamente pela geometria e embora tenha dado pouca contribuição originais, destacou, ao longo de seus ensinamentos, a necessidade de demonstrações rigorosas, preparando desse modo o cenário para o papel que Euclides haveria de representar mais adiante.

Euclides (Fig. 1) viveu, provavelmente, de 330-260 a.C.. Nasceu na Síria. Estudou na escola platônica de Atenas e ensinou matemática no Museu de Alexandria, um conjunto de construções que incluía uma biblioteca (Fig. 2), um observatório astronômico, um jardim botânico e um jardim zoológico. Foi um dos primeiros geômetras e é reconhecido como um dos matemáticos mais importantes de todos os tempos.

Fig. 1 - Euclides

Fonte: http://mathworld.wofram.com

O complexo, reconstruído agora com o auxílio da Organização das Nações Unidas - ONU, foi fundado por volta de 300 a.C. por Ptolomeu I, o general macedônio de Alexandre, o Grande, e era conhecido como o Templo das Musas, isto é, um lugar onde estudiosos se encontravam para trabalhar e discutir idéias filosóficas e literárias.

Fig. 2 - Detalhe da biblioteca do Museu
de Alexandria, Egito

Fonte: GUELLI, 2003

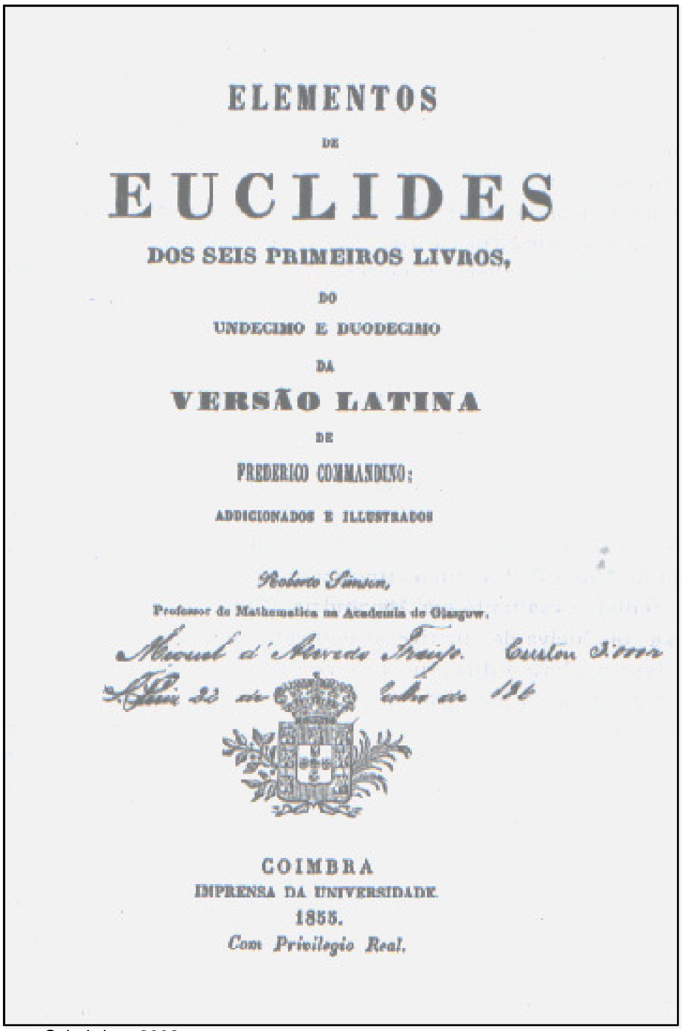
Proclus (410-485 d.C.) foi filósofo, matemático e historiador. Nasceu em Constantinopla (Turquia). Estudou em Alexandria e assumiu a direção da escola ateniense, ficando neste cargo até a sua morte. Proclus é considerado o maior representante do neoplatonismo em sua última fase, denominada ateniense. Ele diz que Euclides precedeu Arquimedes (287-212 a.C.), pois Arquimedes cita *Os Elementos*, e que foi posterior a Eudoxo e Teateto, cujos trabalhos foram incorporados a *Os Elementos*.

Existe uma história ligando Euclides a um rei Ptolomeu. A história diz que o rei tendo folheado *Os Elementos*, perguntou a Euclides se não havia um caminho mais curto para aprender geometria, e Euclides respondeu: “Em geometria não há estradas reais”. Assim Proclus conclui que este soberano deve ser Ptolomeu I.

Outra história curiosa que contam sobre Euclides, refere-se a um aluno que tinha começado a aprender geometria com ele e, que ao ultrapassar o primeiro teorema, perguntou: “O que lucrarei por ter aprendido isso?”. Então Euclides chamou um escravo e disse: “Dê-lhe algumas moedas, pois ele necessita ver os frutos do que aprende”.

Os Elementos consistem de treze livros contendo definições, *axiomas*, teoremas e demonstrações em que Euclides incorpora algumas descobertas próprias e praticamente todo o conhecimento matemático acumulado por seus antecessores, com exceção das seções cônicas e a Geometria Esférica. Assim, *Os Elementos* escritos há cerca de 2300 anos na Grécia, são considerados os mais antigos textos matemáticos gregos encontrados completos.

Fig. 3 - Capa da versão clássica portuguesa de
Os Elementos, segundo F. Commandino e R. Simson.


ELEMENTOS
DE
EUCLIDES
DOS SEIS PRIMEIROS LIVROS,
DO
UNDECIMO E DUODECIMO
DA
VERSÃO LATINA
DE
FREDERICO COMMANDINO:
ADDICIONADOS E ILLUSTRADOS
Roberto Simson,
Professor de Mathematica na Academia de Glasgow.

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE.
1855.
Com Privilegio Real.

Fonte: Schubring, 2003.

Fonte:

Os livros originais foram destruídos e nunca foi encontrado nenhum exemplar original de *Os Elementos*. As edições modernas da obra se baseiam numa revisão preparada pelo comentador grego Têon de Alexandria que viveu quase 100 anos depois de Euclides. Essa revisão foi, até o começo do século XIX, a mais antiga edição de *Os Elementos* que se conhecia. Porém, em 1808, quando Napoleão ordenou que fossem tomados de bibliotecas italianas e enviados a Paris os manuscritos de valor, F. Peyrard encontrou, na biblioteca do Vaticano, uma cópia do século X de uma edição da obra que é anterior à revisão de Têon. Um estudo dessa edição mais antiga e uma triagem cuidadosa de citações e notas feitas por comentadores antigos indicam que o material introdutório do tratado original de Euclides sofreu alterações nas revisões que se seguiram, mas os teoremas e demonstrações permaneceram em essência como Euclides escreveu.

A primeira tradução latina completa de *Os Elementos* não foi feita do grego e sim do árabe. No século VIII, os árabes fizeram traduções de muitos manuscritos bizantinos de trabalhos gregos e, em 1120, o erudito inglês Adelardo de Bath fez uma tradução latina de *Os Elementos* a partir de uma dessas antigas versões árabes. Duas outras traduções latinas foram feitas a partir do árabe, uma de Gerardo de Cremona (1114-1187) e a outra, 150 anos depois da de Adelardo, de Johannes Campanus. A primeira edição impressa de *Os Elementos* foi feita no ano de 1482 em Veneza e apresentava a tradução de Campanus. Esse livro raríssimo foi composto primorosamente, sendo a primeira obra de matemática importante a ser impressa. Uma tradução latina louvável, feita a partir do grego, é a de Commandino (1572). Essa tradução serviu de base para muitas outras subseqüentes, inclusive para a influente edição de Robert Simson da qual, por sua vez, derivaram tantas outras edições inglesas. A primeira e monumental tradução inglesa de *Os Elementos* foi feita por Billingsley e apareceu em 1570. A partir daí aproximadamente 1000 edições já foram lançadas.

O plano da obra de Euclides

Os Elementos

O procedimento axiomático que tanto repercutiu e influenciou a matemática contemporânea, iniciou-se em geometria no famoso livro *Os Elementos* de Euclides. Este livro foi escrito entre os anos de 330 e 320 a.C. e teve provavelmente mais influência sobre a atual civilização do que qualquer outra criação do gênio grego.

Embora *Os Elementos* estejam longe de alcançar a perfeição aspirada por Euclides, os livros têm merecido a admiração da humanidade durante mais de 2000 anos e estabelecem um modelo de demonstração rigorosa somente superado no século XIX.

Euclides foi o grande sistematizador de seu tempo. Poucos dos teoremas demonstrados em *Os Elementos* são obra sua, se é que existe algum. O verdadeiro mérito de Euclides está na proposta de ordenação da geometria do seu tempo em um sistema dedutivo.

Em *Os Elementos*, Euclides apresenta o conteúdo matemático na forma postulacional de raciocínio. Para estabelecer uma afirmação num sistema dedutivo, deve-se mostrar que essa afirmação é uma conseqüência lógica necessária de algumas afirmações previamente estabelecidas. Estas, por sua vez, devem ser estabelecidas a partir de outras também estabelecidas previamente e assim por diante. Assim as primeiras afirmações são aceitas sem demonstração e são chamadas, nos dias atuais, de *postulados* ou *axiomas* e delas decorrem as demais afirmações. Euclides deu o nome de *axiomas* às noções evidentes, não específicas da geometria, como por exemplo:

> *"Se se somam duas quantidades iguais a outras duas quantidades iguais entre si, as somas obtidas são iguais"*

e, reservou o termo *postulado* para as proposições de natureza geométrica, como por exemplo a proposição:

> *"Existe uma e só uma reta que passa por dois pontos".*

Provavelmente Euclides assumiu a afirmação: *"Um axioma é uma suposição comum a todas as ciências ao passo que um postulado é uma suposição peculiar a uma ciência particular em estudo"*, para distinguir *postulados* e *axiomas*.

Tão grande foi a impressão causada pelo aspecto formal de *Os Elementos* de Euclides nas gerações seguintes que a obra se tornou um paradigma de demonstração matemática rigorosa. A despeito de um considerável abandono nos séculos XVII e XVIII, o método postulacional inspirado em Euclides penetrou quase todos os campos da matemática a ponto de alguns matemáticos defenderem a tese de que não só o raciocínio matemático é postulacional mas que também, no sentido inverso, raciocínio postulacional é raciocínio matemático. Uma conseqüência, relativamente nova, foi a criação de um campo de estudos chamado axiomática, dedicação ao exame das propriedades gerais dos conjuntos de *postulados* e do raciocínio postulacional.

Os Elementos apresentam 465 proposições deduzidas e definições distribuídas em treze livros.

Livro I	Neste livro apresentam-se definições, *postulados* e *axiomas* ou noções comuns. As 48 proposições deste livro são distribuídas em três grupos. As primeiras 26 tratam principalmente das propriedades do triângulo incluindo os três teoremas de congruência. As proposições I 27 a I 32 tratam da teoria das paralelas e provam que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°. As demais proposições falam sobre paralelogramos, triângulos e quadrados, com atenção especial a relações entre áreas. A proposição I 47 é o teorema de Pitágoras com uma demonstração atribuída universalmente ao próprio Euclides e a proposição final, I 48, é o recíproco do teorema de Pitágoras. O material desse livro foi desenvolvido pelos pitagóricos antigos.
Livro II	Esse livro contém 14 proposições que tratam de transformações de áreas e álgebra geométrica da escola pitagórica. É nele que se encontram os equivalentes geométricos de muitas identidades algébricas.
Livro III	Apresenta 39 proposições que contêm muitos dos teoremas sobre círculos, cordas, secantes, tangentes e medidas de ângulos associados que hoje fazem parte dos textos de geometria elementar.
Livro IV	Contém 16 proposições que discutem a construção, com régua e compasso, de polígonos regulares de três, quatro, cinco, seis e quinze lados bem como a inscrição e a circunscrição desses polígonos num círculo dado.
Livro V	Nesse livro é apresentada a teoria das proposições de Eudoxo.
Livro VI	Esse livro contém aplicações da teoria das proporções eudoxiana à Geometria Plana. Encontram-se os teoremas fundamentais da semelhança de triângulos; construções de terceiras, quartas e médias proporcionais; a resolução geométrica de equações quadráticas; a proposição que assegura que a bissetriz de um ângulo de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos outros dois lados; uma generalização do teorema de Pitágoras na qual, em vez de quadrados, traçam-se sobre os lados de um triângulo retângulo três figuras semelhantes descritas de maneira análoga; e muitos outros teoremas.
Livro VII	Esse livro apresenta um processo, hoje conhecido como algoritmo Euclides, para achar o máximo divisor comum de dois ou mais números inteiros e o usa para verificar se dois inteiros são primos entre si. Encontra-se nele também uma exposição da teoria das proporções numérica ou pitagórica. Nesse livro constam muitas propriedades numéricas básicas.
Livro VIII	Contém proposições contínuas e progressões geométricas relacionadas.
Livro IX	Nesse livro encontram-se muitos teoremas, como o teorema fundamental da aritmética, uma dedução geométrica da fórmula da soma dos primeiros n termos de uma progressão geométrica e a fórmula para números perfeitos.
Livro X	Enfoca os irracionais, ou seja, segmentos de reta incomensuráveis com um segmento de reta dado; e fórmulas que fornecem ternos de números pitagóricos.
Livro XI	Encontram-se as definições, os teoremas sobre retas e planos no espaço e os teoremas sobre paralelepípedos.
Livro XII	Apresenta o método de exaustão.
Livro XIII	São desenvolvidas construções visando a inscrição dos cinco poliedros regulares numa esfera.

Os livros VII, VIII e IX, que no total têm 102 proposições, tratam da teoria elementar dos números.

Os livros XI, XII e XIII tratam de geometria sólida com exceção da esfera.

Importante destacar, como já mencionado anteriormente, que a obra de Euclides foi tão bem sucedida que *Os Elementos* foram considerados obra padrão para a matemática durante mais de 2000 anos e só superados em número de publicações pela Bíblia.

Postulados e *axiomas* ou noções comuns

A maioria dos matemáticos gregos antigos fazia distinção entre *postulado* e *axioma*. Pelo menos três distinções eram usadas pelas várias partes.

- Um *axioma* é uma afirmação assumida como auto-evidente e um *postulado* uma construção de algo assumida como auto-evidente: assim, os *axiomas* e os *postulados* estão entre si, em grande parte, como os teoremas e os problemas de construção.
- Um *axioma* é uma suposição comum a todas as ciências ao passo que um *postulado* é uma suposição peculiar a uma ciência particular em estudo.
- Um *axioma* é uma suposição de algo que é, ao mesmo tempo, óbvio e aceitável para o aprendiz; um *postulado* é uma suposição de algo que não é nem necessariamente óbvio nem necessariamente aceitável para o aprendiz.

A distinção utilizada por Euclides em *Os Elementos* é a segunda da lista que é apresentada anteriormente.

Na matemática, atualmente, não se faz nenhuma distinção nem se leva em conta a qualidade da auto-evidência ou da obviedade. Houveram alguns gregos antigos que adotaram este ponto de vista.

As dez afirmações classificadas como *postulados* e *axiomas* são os pilares para a obra de Euclides, pois as 465 proposições apresentadas em *Os Elementos* são baseadas nestas afirmações. Euclides estabeleceu umas poucas propriedades geométricas simples e procurou demonstrar as restantes como conseqüências lógicas delas.

Euclides chamou estas propriedades simples de *axiomas* ou *postulados*. Não deu nenhuma demonstração delas, pelo contrário, estas propriedades foram empregadas para construir o sistema arquitetado por ele.

Os *axiomas* e *postulados* são encontrados no Livro I de *Os Elementos*.

Euclides estabeleceu as dez propriedades escolhidas como base de seu sistema da maneira apresentada a seguir.

Eis os AXIOMAS selecionados:

A1 - Coisas que são iguais à mesma coisa também são iguais entre si.

A2 - Se iguais são somados a iguais, então os todos são iguais.

A3 - Se iguais são subtraídos a iguais, então os restos são iguais.

A4 - Coisas que coincidem entre si são iguais entre si.

A5 - O todo é maior do que a parte.

E os POSTULADOS foram os seguintes:

P1 - Se pode traçar uma linha reta de um ponto a outro ponto qualquer.

P2 - Se pode prolongar uma linha reta indefinidamente a partir de uma reta finita.

P3 - Se pode traçar um círculo com centro e raio dados.

P4 - Todos os ângulos retos são iguais.

P5 - Se uma linha reta encontra duas outras retas e com elas formam de um mesmo lado ângulos internos em que a soma é menor do que dois ângulos retos, então essas duas retas encontrar-se-ão no lado que formam ângulos cuja soma é menor que dois ângulos retos.

Definições

As definições apresentadas no Livro I de *Os Elementos* têm como finalidade fornecer ao leitor uma noção de como os termos matemáticos serão usados nos demais livros. Tais definições são:

1. Um ponto é o que não tem partes.
2. Uma linha é o que tem comprimento sem largura.
3. As extremidades de uma linha são pontos.
1. Uma linha reta é uma linha que assenta igualmente entre as suas extremidades.
2. Uma superfície é o que tem apenas comprimento e largura.
4. As extremidades de uma superfície são linhas.
3. Uma superfície plana é uma superfície sobre a qual assenta toda a linha reta entre dois pontos quaisquer da superfície.

4. Um ângulo plano é a inclinação recíproca de duas linhas que se tocam numa superfície plana e que não fazem parte da mesma linha reta.
5. E quando as linhas que contêm o ângulo são linhas retas, o ângulo chama-se raso.
10. Quando uma linha reta, incidindo com outra linha reta, fizer com este dois ângulos adjacentes iguais, cada um desses ângulos é reto, e a linha reta incidente diz-se perpendicular à linha com a qual incide.
11. Um ângulo obtuso é maior do que um ângulo reto.
12. Um ângulo agudo é menor do que um ângulo reto.
13. Uma fronteira é aquilo que é extremidade de alguma coisa.
14. Uma figura é aquilo que está contido por uma ou mais fronteiras.
15. Um círculo é uma figura plana fechada por uma só linha de forma que todas as linhas retas, que de um ponto existente no meio da figura se conduzem para a circunferência, são iguais entre si.
16. E o ponto chama-se centro do círculo.
17. O diâmetro do círculo é qualquer linha reta que passa pelo centro e termina em ambas as direções, na circunferência tal linha divide o círculo em duas partes iguais.
18. Um semicírculo é uma figura compreendida entre o diâmetro e a circunferência que é cortada pelo diâmetro. E o centro do semicírculo é o mesmo que o do círculo.
19. Figuras retilíneas são as que são formadas por linhas retas, sendo as figuras triláteras as que são formadas por três linhas retas, as quadriláteras as que são formadas por quatro linhas retas, e as multiláteras as que são formadas por mais de quatro linhas retas.
20. Das figuras triláteras, o triângulo eqüilátero é a que tem três lados iguais, o triângulo isósceles, a que tem dois lados iguais e, o triângulo escaleno, a que tem os três lados desiguais.
21. Das figuras triláteras, o triângulo retângulo é a que tem um ângulo reto, o triângulo obtusângulo é a que tem um ângulo obtuso e o triângulo acutângulo é a que tem todos os ângulos agudos.

22. Das figuras quadriláteras, o quadrado é a que é simultaneamente eqüilátera e retângula; o oblongo é a que é retângula, mas não é eqüilátera; o rombo é uma figura eqüilátera, mas não retângula; e o rombóide é a que, tendo os lados e ângulos opostos iguais, não é nem eqüilátera nem retângula. E todas as outras figuras quadriláteras se chamam trapézios.
23. Linhas retas paralelas são linhas retas que, estando na mesma superfície plana e sendo prolongadas indefinidamente em ambas as direções, nunca se tocam.

CAPÍTULO 2
QUINTO *POSTULADO* DE EUCLIDES

O quinto postulado ou postulado das paralelas é a pedra angular sobre a qual se baseia a grandeza de Euclides como um dos maiores matemáticos de todos os tempos.

Se levarmos em consideração as inúmeras tentativas feitas por mais de vinte séculos para demonstrar este postulado, muitas delas por geômetras de primeira linha, então não podemos deixar de admirar a genialidade do homem que teve a sensibilidade para chegar à conclusão de que tal hipótese, necessária para validar todo sistema proposto por ele, é realmente indemonstrável.

Contudo, esta pedra angular da grandeza do sistema proposto por Euclides foi a causa dos mais duros ataques ao seu sistema.

Os quatros postulados precedentes são proposições curtas e simples e, por isto, não é surpresa que a natureza muito mais completa da proposição que constitui o quinto postulado tenha levado comentadores e críticos da obra euclidiana a pensar mais em um teorema do que em uma hipótese. Tal ponto de vista provocou no próprio Euclides, inconscientemente, um momento de dúvida quando demonstrou o seu recíproco.

A demonstração do recíproco do quinto postulado, feita por Euclides, foi considerada um defeito por alguns críticos e comentadores da sua obra. Muitos esforços foram empreendidos, mesmo na época de Euclides, e continuaram até o século XIX. O fracasso destas tentativas acabou por corroborar a fama de Euclides e, o que é mais importante, abriu os caminhos para a invenção de novas geometrias.

A veracidade do quinto postulado foi contestada, por ele não ser tão evidente quanto os anteriores e por se referir a um ponto de intersecção que poderia estar a milhares de quilômetros.

Várias tentativas foram feitas com o objetivo de demonstrar o quinto postulado como conseqüência lógica dos outros quatro. Talvez estas demonstrações tenham sido motivadas para explicitar o pensamento de Euclides, melhor do que estava expresso em sua forma original, e acabaram introduzindo subrepticiamente hipóteses equivalentes ao próprio postulado e supunham, portanto, o mesmo que queriam demonstrar.

Dentre as várias tentativas de demonstrar o quinto postulado a partir dos quatro primeiros podemos citar o trabalho de Proclus (410-485), matemático e filósofo que estudou em Alexandria e posteriormente se mudou para Atenas, onde ensinou matemática.

Proclus gozava de grande prestígio entre seus contemporâneos por seus trabalhos e por sua sabedoria. Seus comentários sobre *Os Elementos* são uma das mais importantes fontes de informação de que se dispõe da geometria grega primitiva, uma vez que não foram conservados os trabalhos originais dos precursores de Euclides.

Proclus retratou em suas obras que, mesmo na época de Euclides, foram feitas tentativas de provar o quinto postulado como um teorema ou de livrar-se dele através de outra definição de retas paralelas.

O próprio Proclus propôs uma demonstração com a intenção de provar que se uma reta transversal corta uma de duas retas paralelas, então corta também a segunda e esta afirmação substituiria o quinto postulado.

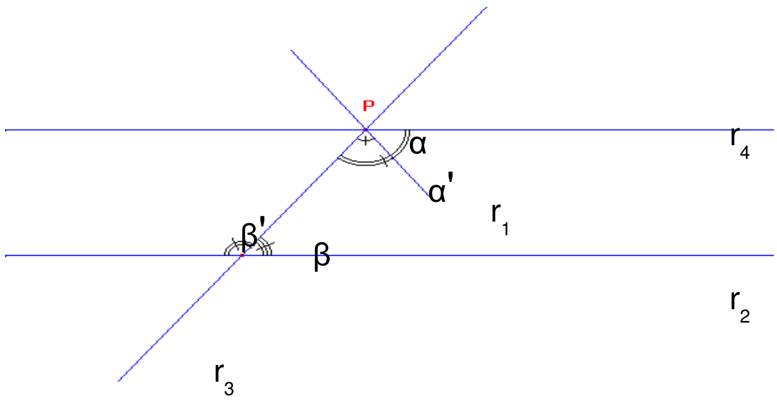
Na sua proposta, o quinto postulado podia ser provado se fosse demonstrado previamente que:

P_1 "Se l_1 e l_2 são duas retas paralelas quaisquer, e l_3 é outra reta distinta de l_1 que a intersecta, então l_3 intersecta também a reta l_2".

De fato:

Suponhamos que a proposição acima seja válida e sejam r_1 e r_2 duas retas e r_3 uma transversal tal que a soma dos ângulos internos α e β é menor que dois retos. (Fig. 4)

Fig. 4 - Demonstração de Proclus



Então existe uma reta r_4 que passa por P tal que $\alpha' + \beta = 2$ retos e, considerando a proposição 28[1] do Livro I de *Os Elementos*, para cuja demonstração não se utiliza o quinto postulado, tem-se que as retas r_2 e r_4 são paralelas. Portanto, a reta r_1 que é distinta de r_4 e intersecta-a em P, intersecta também r_2.

Então, as retas r_1 e r_2 intersectam-se do lado da transversal r_3 em que a soma dos ângulos internos é menor que dois retos, uma vez que se se intersectassem do outro lado de r_3, formariam com esta reta um triângulo com um ângulo externo α menor que o ângulo β'. Isto contraria a proposição 16[2] do Livro I cuja demonstração também não utiliza o postulado V.

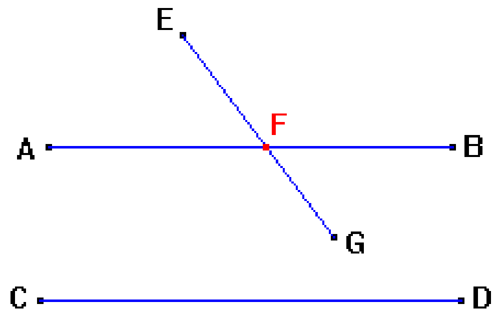
Tendo demonstrado isto, faltava para Proclus demonstrar a proposição P_1 a partir dos postulados I a IV.

A argumentação que demonstra P_1 é a seguinte:

Sejam AB e CD - duas retas paralelas.

Suponhamos que EG intersecta a reta AB no ponto F. Então EG intersecta a reta CD. (Fig. 5)

Fig. 5 - Demonstração do P_1 de Proclus



De fato, sendo BF e FG duas retas que se cortam em F, ao prolongá-las indefinidamente, chegam a ter entre si uma distância maior que qualquer magnitude, de modo que será maior que o intervalo entre as duas paralelas.

Portanto, se estão entre si a uma distância maior que das paralelas, então FG terá cortado a reta CD.

A afirmação feita no segundo parágrafo da demonstração de Proclus é, essencialmente, um axioma que Proclus atribuiu a Aristóteles. Não era um

[1] Esta proposição encontra-se no Anexo 2.
[2] Esta proposição encontra-se no Anexo 2.

postulado de *Os Elementos*, e nem sequer Proclus tratou de deduzi-lo dos postulados I a IV.

Um motivo também capaz de suscitar uma crítica mais severa encontra-se na hipótese tácita feita nas frases “o intervalo entre as paralelas” e “a distância entre elas”, as quais implicam que as paralelas estão a uma distância constante entre si. Porém a justificativa desta hipótese é o próprio postulado V, a qual é, certamente, seu equivalente lógico.

Na verdade, para fundamentar a demonstração no axioma de Aristóteles, bastaria que as distâncias medidas perpendicularmente dos pontos da reta AB à reta CD estivessem demarcadas, porém isto também é equivalente ao quinto postulado.

CAPÍTULO 3
PROPOSIÇÕES EQUIVALENTES AO QUINTO POSTULADO

Os gregos antigos tiveram muitas dificuldades em desenvolver logicamente a teoria das paralelas. Até mesmo Euclides enfrentou estas dificuldades, definindo retas paralelas como retas coplanares que não se intersectam por mais que sejam prolongadas em ambas direções e adotou como suposição o seu famoso postulado das paralelas.

O quinto postulado não é conciso nem de simples compreensão como os demais e não é, em hipótese alguma, auto-evidente. Além disto, Euclides não fez nenhum uso desse postulado até chegar à Proposição 29[3] do Livro I.

O fato de Euclides só ter utilizado o postulado das paralelas tardiamente provocou a curiosidade de saber se esse postulado era realmente necessário e levou estudiosos e críticos de *Os Elementos* a cogitar que talvez ele pudesse ser deduzido dos outros, como teorema, ou, pelo menos, ser substituído por uma proposição equivalente aceitável.

Alguns dos autores das proposições substitutivas que surgiram demonstraram explicitamente que as mesmas eram equivalentes ao quinto postulado, ainda que outros as tenham introduzido como hipóteses tácitas no transcurso de suas tentativas de demonstração do postulado.

A formulação mais comum do postulado V apareceu, em 1795, em um tratado sobre os seis primeiros livros de Euclides, escrito pelo matemático e físico John Playfair (1748-1819).

A popularidade do livro de Playfair foi tanta que atingiu a marca de dez edições - a última em 1846 - ligando o seu nome a esta proposição, embora esta particular alternativa tivesse sido usada por outros e seja considerada mesmo uma paráfrase de outra atribuída a Proclus, no século V.

O substitutivo de Playfair é o mais comum nos atuais livros de geometria e é enunciado como segue:

> *"Por um ponto fora de uma reta dada pode-se traçar uma reta paralela e só uma à dita reta".*

---
[3] Esta proposição encontra-se no Anexo 2.

Embora esta formulação pareça mais clara do que o próprio postulado, na realidade há várias razões para preferir conforme foi enunciado por Euclides, principalmente porque o quinto postulado proporciona uma maneira de saber quando duas retas se cortam, questão imprescindível no desenvolvimento de qualquer geometria.

Outras formulações substitutivas do postulado das paralelas podem ser destacadas.

“Duas retas paralelas entre si estão a uma distância finita.” - Proclus

“Existe um triângulo no qual a soma dos seus três ângulos vale dois retos.” - Legendre

“Existem dois triângulos não congruentes, com os ângulos de um respectivamente iguais aos ângulos do outro.” - Laplace e Saccheri

“Por um ponto qualquer interior a um ângulo menor que dois terços de um reto passa uma reta que corta ambos os lados do ângulo”.- Legendre e Lorentz

"Se K é um número inteiro qualquer, existe sempre um triângulo cuja área é maior que K." - Gauss

"Por três pontos não alinhados passa sempre uma circunferência”.- Bolyai

CAPÍTULO 4
A CONTRIBUIÇÃO DE SACCHERI

A tentativa mais elaborada para demonstração do quinto postulado, considerada realmente a primeira investigação científica do postulado das paralelas, foi feita pelo jesuíta italiano Girolamo Saccheri (1667-1733).

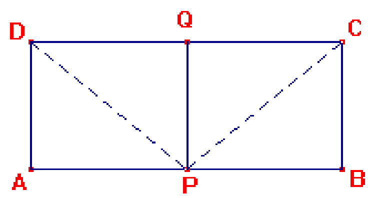
Sabe-se pouco sobre a vida de Saccheri. Nasceu em San Remo (Itália). Ensinava em colégios de sua ordem religiosa na Itália e se dedicava ao estudo da lógica formal tendo publicado o livro *Lógica Demonstrativa*.

No ano de sua morte Sachheri publicou a sua grande obra *Euclides ab omni naevo vindicatus sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa geometriae principia* (Euclides geômetra de inclinação livre de toda imperfeição pelo qual são estabelecidos os maiores princípios da geometria).

Ao que tudo indica, o objetivo de Saccheri ao escrever seu livro foi o de isentar Euclides de todas as suspeitas de erro e, o mais importante, de afastar também a suspeita de ter errado ao fazer a hipótese contida no quinto postulado.

Seu procedimento para lograr tal intento foi introduzir na geometria uma figura de grande importância que ficou conhecida pelo nome de "Quadrilátero de Saccheri".

Fig. 6 - Quadrilátero de Saccheri



Saccheri o construiu da seguinte forma: pelos extremos de um segmento AB traçou os segmentos congruentes AD e BC, perpendiculares a AB, e uniu os pontos C e D por mais de uma reta.

Demonstra-se a partir dos postulados I a IV que os ângulos $A\hat{D}C$ e $B\hat{C}D$ são congruentes. Com efeito, se P e Q são, respectivamente, os pontos médios dos segmentos AB e CD, então os dois triângulos retângulos ADP e BCP são congruentes, e conseqüentemente os ângulos $A\hat{D}P$ e $B\hat{C}P$ são congruentes e os segmentos PC e PD também são congruentes.

Portanto, os lados do triângulo CPQ são congruentes, respectivamente, aos lados do triângulo DPQ e, em conseqüência disso, ambos triângulos são congruentes.

Para a demonstração destas proposições não se requer o uso do postulado V mas as proposições 4[4] e 8[5] do Livro I.

Além disso, tem-se que os ângulos $P\hat{C}D$ e $P\hat{D}C$ são congruentes e, portanto

$$A\hat{D}C = A\hat{D}P + P\hat{D}C = B\hat{C}P + P\hat{C}D = B\hat{C}D \cdot$$

Sem usar o postulado das paralelas ele mostrou que os ângulos C e D dos vértices do "Quadrilátero de Saccheri" são congruentes e que há somente três possibilidades para os ângulos dos vértices:

1ª.) são retos;

2ª.) são obtusos;

3ª.) são agudos.

Estas três hipóteses foram chamadas, respectivamente, hipótese dos ângulos retos, hipótese dos ângulos obtusos e hipótese dos ângulos agudos.

Saccheri demonstrou que se uma dessas três hipóteses é válida para um dos quadriláteros então é válida para todos.

Utilizando tacitamente a infinitude da linha reta, Saccheri demonstrou que o postulado V é conseqüência da hipótese do ângulo reto e que a hipótese do ângulo obtuso é contraditória. Só restava por estudar a hipótese do ângulo agudo.

Da hipótese do ângulo agudo derivaram vários teoremas que pareceram estranhos a Saccheri porque diferiam dos obtidos por meio do quinto postulado mas ele não conseguia obter uma contradição.

Incapaz de rechaçar a hipótese do ângulo agudo baseando-se em resultados lógicos, Saccheri procurou refúgio no terreno menos firme da intuição e chegou à conclusão, na proposição XXXIII de seu livro, de que a hipótese do ângulo agudo é absolutamente falsa porque rejeita a natureza da linha reta.

Saccheri estava tão convencido de que a Geometria Euclidiana era a única válida que permitiu que esta postura preconceituosa interferisse em sua

---

[4] Esta proposição encontra-se no Anexo 2.
[5] Esta proposição encontra-se no Anexo 2.

lógica. Onde não havia contradição Saccheri torceu o raciocínio até chegar que a hipótese do ângulo agudo fosse um absurdo.

É pouco provável que esta conclusão vaga e obscura de uma investigação clara e lógica satisfizera realmente Saccheri. Se é que chegou a saber que, ao contrário de sua idéia fixa, não é possível deduzir uma contradição lógica da hipótese do ângulo agudo porque dá lugar a uma geometria muito diferente da de Euclides, porém tão consistente como ela. Ao descobrir as conseqüências da hipótese do ângulo agudo, o sacerdote italiano se encontrava, sem saber, desenvolvendo uma nova geometria.

Por não ter tido a sensibilidade ou não ter acreditado na descoberta do novo mundo que estava em suas mãos, Saccheri deixou de ter creditado para si a mais importante descoberta do século dezoito - a Geometria Não Euclidiana.

CAPÍTULO 5
UMA BUSCA INCESSANTE: AS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

Os esforços empreendidos, ao longo de 2000 anos para trocar o *status* da famosa proposição de Euclides de um postulado para um teorema, resultaram num completo fracasso neste sentido, mas conseguiram um êxito notável em outros aspectos. Na realidade o pensamento humano mudou acerca da natureza da geometria a partir de então.

Muito provavelmente, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) (Fig. 7) - considerado o maior matemático do século XIX, e talvez de todos os tempos - foi o primeiro que teve clareza da existência de uma geometria diferente da euclidiana.

Fig. 7 - Gauss

Fonte: http://mathworld.wolfram.com

Gauss estudou a teoria das paralelas durante mais de trinta anos, e logo se deu conta da natureza intrínseca das dificuldades que o impediram de demonstrar o quinto postulado. E depois de muitas reflexões ele formulou e começou a desenvolver uma nova geometria que chamou Não Euclidiana.

Mas Gauss não publicou nenhuma de suas descobertas neste campo. O que se sabe sobre estes seus trabalhos chegou até nós pelas cartas que ele escrevera para amigos e através de alguns papéis encontrados após sua morte.

Em 1829, um professor da Universidade de Kazan (Rússia), Nicolai Ivanovich Lobatschewsky (1793-1856) (Fig. 8) publicou os resultados da sua descoberta de uma nova geometria.

Fig. 8 - Lobatschewsky

Fonte: http://mathworld.wolfram.com

Alemanha, Hungria e Rússia foram berços dos trabalhos independentes de Gauss, Bolyai e Lobatschewsky que criaram uma nova geometria. Tal trabalho foi considerado libertador do cativeiro euclidiano. Foi saudado como o principal invento emancipador do intelecto humano e como o mais notável resultado obtido no século XIX.

A primeira fase do desenvolvimento da Geometria Não Euclidiana chegou ao auge com os trabalhos de Gauss, Bolyai e Lobatschewsky. Um feito importante da segunda fase foi a publicação, na segunda metade do século XIX, pelo geômetra italiano Eugenio Beltrami (1835-1900), de um artigo que respondeu definitivamente a questão da incompatibilidade, isto é, da não contradição da nova geometria.

Sabe-se que Saccheri estava convencido de que a hipótese do ângulo agudo, que deu origem à nova geometria, devia conduzir a uma contradição lógica, e que ao não ser capaz de estabelecer isto, recusou a hipótese, mais por razões estéticas do que por razões lógicas. Nenhum entre os três fundadores da nova geometria conseguiu resolver a questão da incompatibilidade lógica. Parece que Bolyai teria suspeitado que ao estender suas investigações ao espaço tridimensional encontraria incompatibilidades e Lobatschewsky teria alguns temores sobre o seu desenvolvimento.

O trabalho de Beltrami interpretava as Geometrias Não Euclidianas como geometrias sobre certas classes de superfícies no espaço tridimensional euclidiano. Portanto, as propriedades paradoxais da nova geometria ocorreram de fato nessas superfícies e, assim, uma incompatibilidade na Geometria Euclidiana.

A nova geometria é por tudo isto, tão compatível como a antiga e Euclides enfim está isento de todo erro.

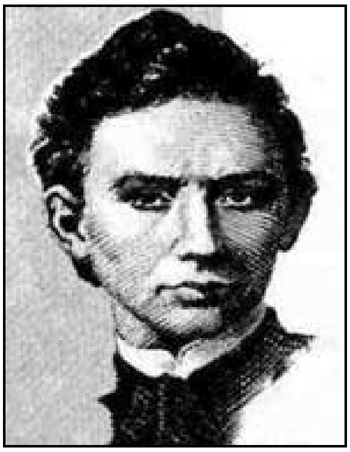
O termo Geometria Não Euclidiana foi usado, primeiramente por Gauss, para a geometria obtida ao substituir o quinto postulado de Euclides pela sua negação, permanecendo inalterados todos os demais postulados.

Durante a segunda década do século XIX Gauss chegou à conclusão que não era possível provar o *postulado* das paralelas, como tentaram fazer Saccheri, Lambert, Legendre e Farkas Bolyai (1775-1856), e que eram possíveis geometrias diferentes da Euclidiana. Entretanto ele não divulgou suas idéias, assim continuaram as tentativas de provar o *postulado* das paralelas.

Em 1825, Nicolai Lobatschewsky afirmou sobre o *postulado* das paralelas que “nunca foi descoberta uma prova rigorosa de sua validade”. No ano de 1826, na Universidade de Kazan, Lobatschewsky leu em francês o seguinte artigo “Une démonstration rigoureuse du theorème des parallélas” (Uma demonstração rigorosa do teorema das paralelas). Em 1829, no Mensageiro de Kazan, Lobatschewsky publicou o artigo “On the Principles of Geometry” (Sobre os Princípios de Geometria), assim este ano ficou marcado como o surgimento das Geometrias Não Euclidianas. A Geometria de Lobatschewsky diz que por um ponto C fora de uma reta AB pode-se traçar mais de uma reta do plano que não encontra AB. Essa nova geometria não tinha contradições lógicas inerentes e Lobatschewsky a chamou de “Geometria Imaginária”.

Em, aproximadamente, 1829 Janos Bolyai (1802-1860) (Fig. 9) chegou à conclusão a que poucos anos antes Lobatschewsky chegara. Ele desenvolveu o que chamou a “Ciência Absoluta do Espaço”, partindo da hipótese que por um ponto fora de uma reta podem ser traçadas infinitas retas do plano, não uma só, cada uma paralela à reta dada. A teoria de Janos foi publicada pelo seu pai Farkas Bolyai sob forma de um apêndice de um tratado cujo título em latim começava com Tentamen, que tem um imprimatur datado de 1829, o ano do artigo de Lobatschewsky no Mensageiro de Kazan, mas só apareceu em 1832.

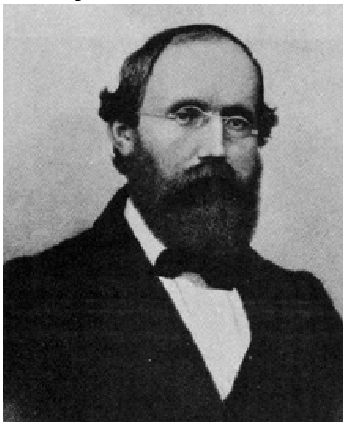
Fig. 9 - Bolyai



Fonte: http://mathworld.wolfram.com

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) (Fig. 10) em 1851 na sua aula inaugural para admissão como professor-adjunto na Universidade de Göttingen, apontou possibilidades para outras geometrias. Em sua Geometria Riemanniana ou Geometria Elíptica usou como modelo a superfície de uma esfera e um círculo máximo sobre a esfera para interpretar respectivamente o plano e a reta. O quinto postulado da Geometria Elíptica diz que todas as retas se intersectam em dois pontos. Nesse caso a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior do que 180º, correspondendo a hipótese do ângulo obtuso[6], ao passo que na Geometria de Lobatschewsky e Bolyai, correspondendo à hipótese do ângulo agudo[7] a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor do que 180º. Ao mostrar que a Geometria Não Euclidiana com soma dos ângulos maior do que 180º é realizada sobre a superfície de uma esfera, Riemann, essencialmente, provou a consistência dos *axiomas* de que a geometria deriva. No mesmo sentido Eugênio Beltrami, um colega de Cremona em Bolonha e mais

Fig. 10 - Riemann



Fonte: http://mathworld.wolfram.com

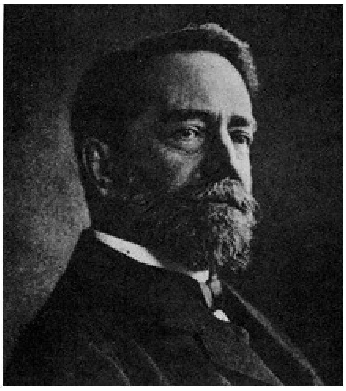
[6] A justificativa para a hipótese do ângulo obtuso encontra-se na página 44

[7] A justificativa para a hipótese do ângulo agudo encontra-se na página 37

tarde professor em Pisa, Pavia e Roma (Itália), mostrou que havia disponível um modelo para a Geometria de Lobatschewsky. Esse modelo é a superfície gerada pela revolução de uma tratriz em torno de sua assíntota, superfície denominada pseudo-esfera por ter curvatura negativa constante, assim como a esfera tem curva positiva constante. Se definirmos a "reta" entre dois pontos da pseudo-esfera como a geodésica por esses pontos, a geometria resultante terá as propriedades que resultam dos *postulados* de Lobatschewsky. Como o plano é uma superfície com curvatura constante nula, a Geometria Euclidiana pode ser considerada como um intermediário entre os dois tipos de Geometrias Não Euclidianas.

A terminologia usada atualmente para as Geometrias Não Euclidianas é devida ao matemático alemão Félix Klein (Fig. 11) (1849-1925). A Geometria Não Euclidiana de Sacchieri, Gauss, Bolyai e Lobatschewsky recebeu a denominação de Geometria Hiperbólica; a geometria sem paralelas de Riemann foi chamada de Geometria Elíptica e a Geometria Euclidiana é também chamada Geometria Parabólica.

Fig. 11 - Klein



Fonte: http://mathworld.wolfram.com

No século XIX Karl Friedrich Gauss, Janos Bolyai, Bernard Riemann e Nicolai Ivanovich Lobatschewsky demonstraram que o quinto *postulado* de Euclides se trata de um *axioma* independente dos outros. Supuseram que o *postulado* de Euclides não era verdadeiro e substituíram-no por outros *axiomas*.

Geometria de Lobatschewsky:

Por um ponto exterior a uma reta podemos traçar uma infinidade de paralelas a essa reta.

Geometria de Riemann:

Por um ponto exterior a uma reta não podemos traçar nenhuma paralela a essa reta.

Assim foi admitido que era possível construir duas geometrias diferentes da Geometria Euclidiana, igualmente coerentes e que não conduziam a nenhuma contradição. Foi demonstrado que se qualquer das duas pudesse apresentar alguma contradição, a própria Geometria Euclidiana seria também contraditória.

Desde então, encontramo-nos perante três sistemas geométricos diferentes:

- A Geometria Euclidiana ou Parabólica;
- A Geometria de Lobatschewsky ou Hiperbólica;
- A Geometria de Riemann ou Elíptica ou Esférica.

As duas últimas são chamadas de Geometrias Não Euclidianas. Essas novas geometrias permitiram às ciências exatas do século XX uma série de avanços, entre os quais a elaboração da Teoria da Relatividade de Einstein (1879-1955). O que permitiu provar que essas teorias ao contrário do que muitos afirmavam, tinham realmente aplicações práticas.

Configurava-se assim, a idéia de que aquela geometria de Gauss fundamentada por Euclides há 2000 anos podia não ser a única possível. Vários caminhos podem levar a diversas geometrias, basta que se admitam *axiomas* distintos.

CAPÍTULO 6

GEOMETRIA HIPERBÓLICA

A contestação do postulado de Euclides deu origem às Geometrias Não Euclidianas, fundadas principalmente por Gauss, Bolyai e Lobatschewsky.

Sabe-se que os quatro primeiros postulados são compatíveis tanto com o postulado das paralelas quanto com sua negação, e, portanto isto assegura a independência dos postulados de Euclides.

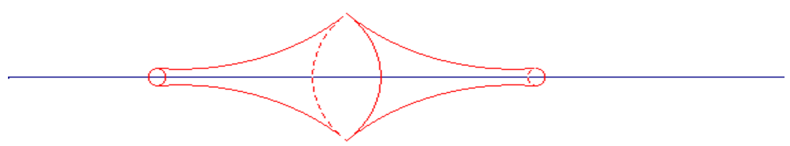
Uma das geometrias resultantes da negação do quinto postulado é a *Geometria Hiperbólica*, chamada por Nicolai Ivanovitsch Lobatschewsky, seu criador, de *Geometria Imaginária* e também conhecida como *Geometria de Lobatschewsky*.

Essa geometria foi desenvolvida pelo russo Lobatschewsky e, quase que simultaneamente pelo matemático húngaro Janos Bolyai.

A Geometria Hiperbólica admite todos os *postulados* da Geometria Euclidiana, substituindo apenas o quinto *postulado*:

1- *É possível desenhar uma linha reta de qualquer ponto a qualquer ponto.*
2- *É possível prolongar continuamente uma linha reta finita sobre uma reta.*
3- *É possível descrever um círculo com qualquer raio e centro.*
4- *Todos os ângulos retos são iguais.*
5- *Por um ponto P fora de uma reta r passa mais de uma reta paralela à reta r.*

Fig. 12 - Pseudo-esfera



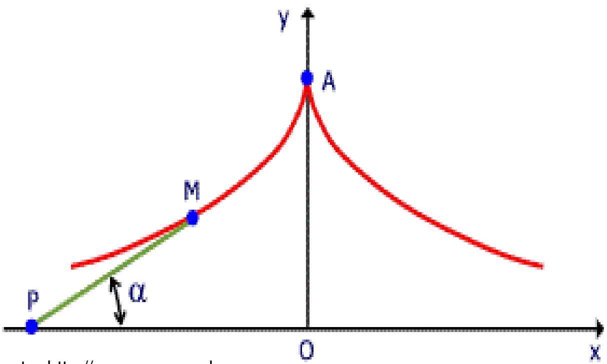
Essa geometria tem como modelo plano a superfície de uma pseudo-esfera (Fig. 12) que foi apresentada pelo matemático Eugênio Beltrami.

A pseudo-esfera é a superfície na qual o *Postulado* de Lobatschewsky é possível. Ela é gerada pela revolução de uma curva chamada de tratriz (Fig. 13) em torno do seu eixo horizontal. Na tratriz, o segmento formado por uma reta tangente a ela entre o ponto de tangência e o ponto de intersecção com o eixo horizontal, tem sempre a mesma distância. As equações da tratriz em relação ao ângulo α são:

$$x = a \cos \alpha + a \ln (\tan \alpha/2)$$

$$y = a \operatorname{sen} \alpha$$

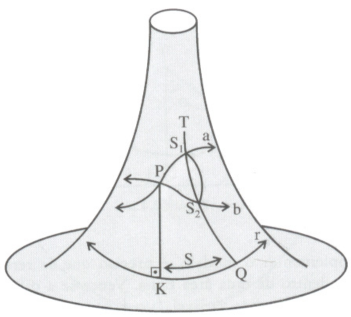
Fig. 13 - Tratriz



Fonte: http://myspace.eng.br

Na Fig.14 temos uma pseudo-esfera e nela são construídas as retas a e b que são paralelas à reta *r*. As retas a e b são encontradas da seguinte forma:

Fig. 14 - Retas paralelas na pseudo-esfera no modelo plano da Geometria Hiperbólica



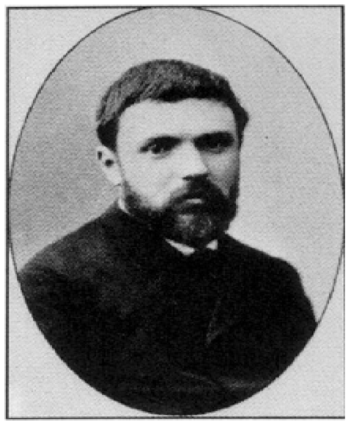
Sobre uma reta r traçamos um segmento KP e QT perpendicular a r, sendo K e Q pontos da reta *r*. Com a distância KQ e centro em P traçamos um arco que intersectará o segmento QT nos pontos S_1 e S_2. Daí os pontos P e S_1 determinam a reta *a* e os pontos P e S_2 determinam a reta *b*.

Conceitos Primitivos

O conceito de ponto na Geometria Hiperbólica é análogo ao conceito euclidiano de ponto.

Existem dois modelos para representação dos conceitos da Geometria Hiperbólica no plano euclidiano: um formulado por Henri Poincaré (1854-1912) (Fig. 15) e outro por Félix Klein.

Fig. 15 - Poincaré



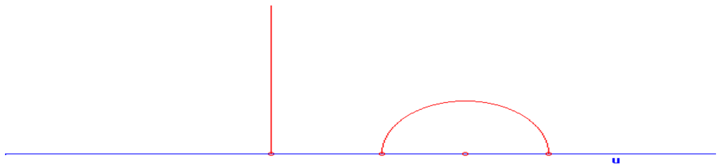
Fonte: http://mathworld.wolfram.com

No modelo de Poincaré da Geometria Hiperbólica uma reta horizontal ***u*** divide o plano euclidiano em duas partes: um semiplano "superior" e um semiplano "inferior". A reta ***u*** não pertence a nenhum dos semiplanos.

Os *pontos* do plano hiperbólico são pontos do semiplano euclidiano superior determinados por ***u***.

As retas do plano hiperbólico são as semicircunferências abertas euclidianas com centros em ***u*** e situadas no semiplano superior de ***u*** juntas com as semi-retas superiores perpendiculares a ***u***.

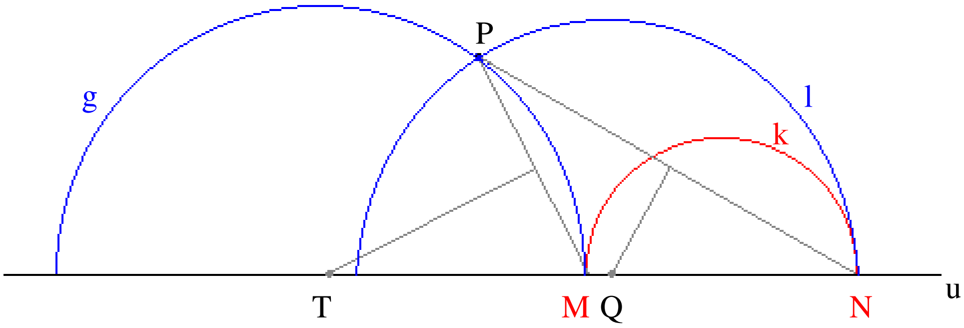
Fig. 16 - Retas hiperbólicas



Observemos as figuras a seguir. Seja a reta hiperbólica *k* - é bom que se diga que os pontos M e N de k são pontos infinitamente afastados, isto é, a reta hiperbólica k se aproxima assintoticamente da reta euclidiana u - e o ponto P. As duas retas paralelas a *k*, que passam por P são as semicircunferências que passam pelo ponto M ou N. Construímos estas semicircunferências da seguinte forma:

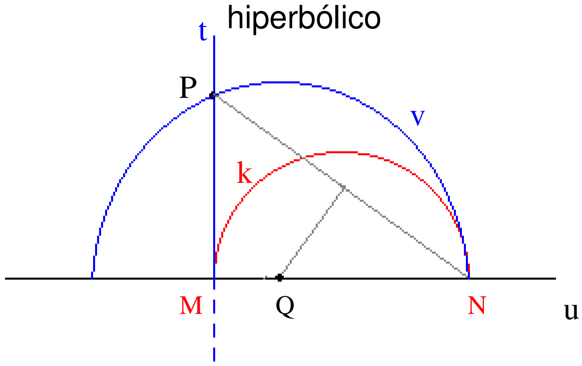
Ligamos os pontos M e P, construindo o segmento MP. Traçando a mediatriz deste segmento obtemos assim o ponto T - intersecção da mediatriz com a reta ***u***. O ponto T é o centro da semicircunferência *g*. O ponto Q é obtido através da intersecção da mediatriz do segmento NP com a reta ***u***. Ele é o centro da semicircunferência *l*, que passa pelo ponto N. As duas retas hiperbólicas paralelas a *k*, são as semicircunferências euclidianas *g* e *l*. (Fig. 17)

Fig. 17 - Retas hiperbólicas paralelas na representação euclidiana de Poincaré do plano hiperbólico



Se P é um ponto da reta *t* - que passa pelo ponto M e é perpendicular a reta euclidiana ***u,*** as retas hiperbólicas paralelas a *k* são as retas *t* perpendicular à reta euclidiana ***u*** e a semicircunferência *v*, com centro em Q - que é obtido através da intersecção da mediatriz do segmento PN com a reta ***u*** - e passando pelo ponto N. (Fig. 18)

Fig. 18 - Outro exemplo de retas hiperbólicas paralelas na representação euclidiana de Poincaré do plano hiperbólico



O modelo de Klein do plano hiperbólico é um círculo da Geometria Euclidiana, excluindo a circunferência (Fig. 19). As retas deste plano são as cordas do círculo, excluindo suas extremidades (Fig. 20)

Fig. 19 - Representação euclidiana de Klein do plano hiperbólico

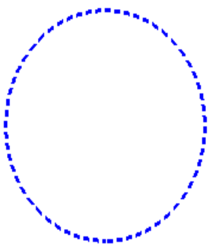


Fig. 20 - Retas no modelo plano hiperbólico de Klein

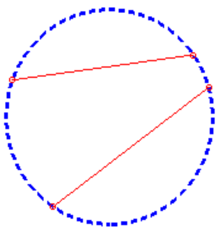
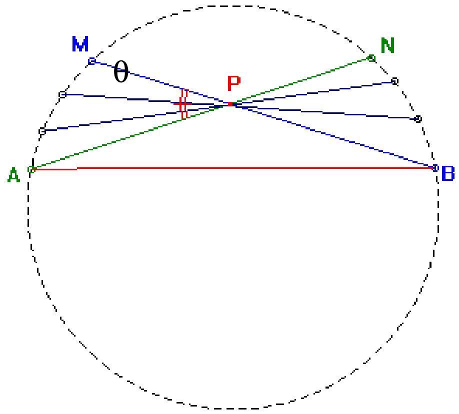


Fig. 21 - Retas paralelas no modelo
de Klein do plano hiperbólico

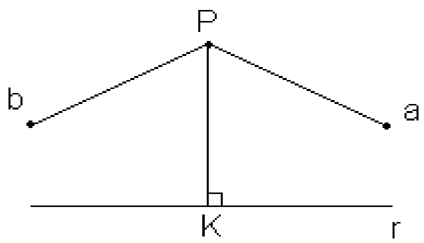


As retas PA e PB são paralelas à reta AB (Fig. 21)

Existem infinitas retas que passam por P e estão no interior do ângulo θ elas são chamadas retas não-secantes e não são paralelas a AB.

A Fig. 22 é uma outra representação simplificada de duas retas paralelas do modelo de Klein do plano hiperbólico.

Fig. 22 - Retas paralelas à esquerda e à direita
num modelo simplificado de Klein do plano hiperbólico

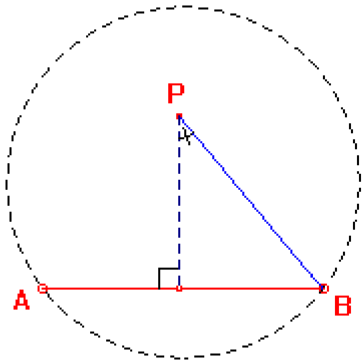


As retas a e b (Fig. 22) são chamadas de reta paralela à direita e reta paralela à esquerda, e elas existem para cada segmento PK perpendicular a r, sendo K qualquer ponto de r.

Duas retas hiperbólicas são paralelas quando têm um ponto comum afastado infinitamente.

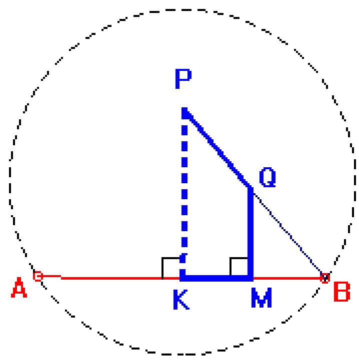
Algumas características da Geometria Hiperbólica plana são:

Fig. 23 - Ângulo de paralelismo
da Geometria Hiperbólica



- O ângulo de paralelismo é agudo e não reto como na Geometria Euclidiana. Observe que as retas paralelas não se encontram no ponto B, pois o modelo do plano da Geometria Hiperbólica é o círculo excluindo sua extremidade, não se encontram em um ponto entre A e B, pois não seriam paralelas, então se encontram em um ponto depois de B, daí o ângulo é agudo.
- O ângulo de paralelismo não é fixo, depende da distância do ponto P à reta AB.
- Duas retas distintas e perpendiculares à reta AB formam com a paralela PB um quadrilátero PQMK (Fig. 24) que eqüivale para a Geometria Hiperbólica ao retângulo da Geometria Euclidiana. A construção do quadrilátero e existência deste têm como conseqüência a seguinte propriedade: a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor do que 180º.

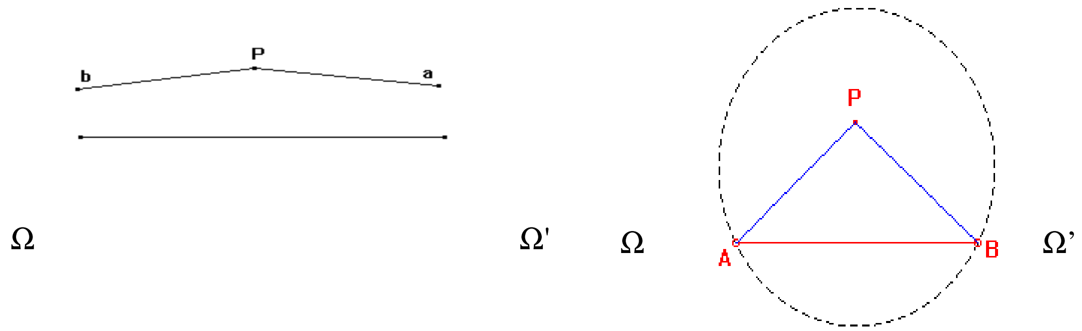
Fig. 24 - Retângulo da Geometria
Hiperbólica



Pontos

Chama-se de ideal o ponto de encontro de uma reta com as duas retas que são paralelas a ela. Cada reta possui dois pontos ideais distintos Ω e Ω’ (Fig.

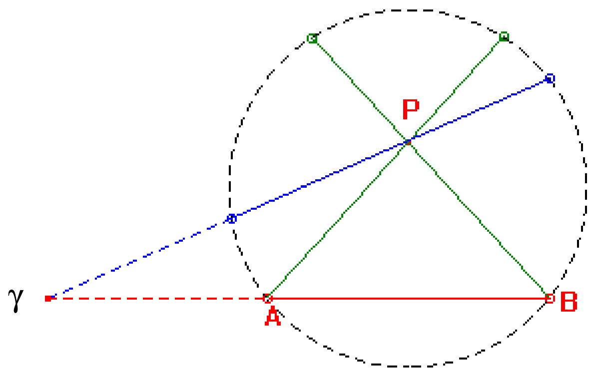
Fig. 25 - Pontos ideais



25), pois se não fossem distintos existiria uma única reta paralela a r passando por P, o que contraria o *Postulado* de Lobatschewsky.

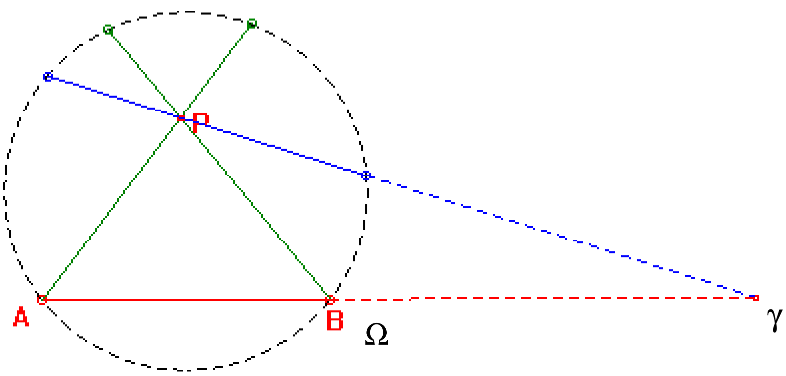
Duas retas não-secantes encontram-se num ponto gama γ ou ponto ultra-ideal.

Fig. 26 - Ponto ultra-ideal



Os três tipos de pontos da Geometria Hiperbólica estão esquematizados na figura a seguir.

Fig. 27 - Pontos hiperbólicos



Triângulos

Na Geometria Hiperbólica existem dois tipos de triângulos, os triângulos ordinários que têm como vértices pontos próprios - cujo conceito é análogo ao euclidiano de ponto - e os triângulos ômegas ou hiperbólicos que têm um vértice num ponto ideal.

Fig. 28 - Triângulo ordinário

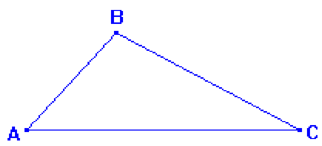
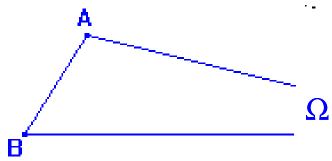


Fig. 29 - Triângulo ômega



Congruência de triângulos ômegas

A seguir são retratados os casos de congruência de triângulos ômegas na Geometria Hiperbólica:

a) Caso Ângulo Lado Ângulo (ALA): Dois triângulos ômegas ABΩ e A'B'Ω' são congruentes se os lados de extensão finita são congruentes e se os ângulos correspondentes Â e Â' ou $\hat{B}$ e $\hat{B}'$ são congruentes.

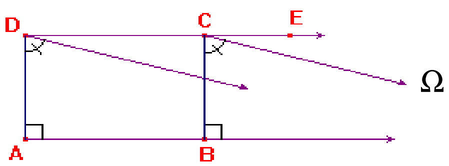
b) Caso Ângulo Ângulo (AA): Dois triângulos ômegas ABΩ e A'B'Ω' são congruentes se os ângulos correspondentes Â e Â' , $\hat{B}$ e $\hat{B}'$ são congruentes.

Quadrilátero de Saccheri

Os ângulos do topo do Quadrilátero de Saccheri são congruentes e agudos.

Na Fig. 30 CΩ e DΩ são retas paralelas à reta AB e CDΩ é um triângulo ômega. $E\hat{C}\Omega$ é um ângulo externo desse triângulo, logo sua medida é maior do que o ângulo interno $C\hat{D}\Omega$, $E\hat{C}\Omega > C\hat{D}\Omega$. Mas $A\hat{D}\Omega = B\hat{C}\Omega$, porque são ângulos de paralelismo para pontos que estão a uma mesma distância da reta AB, AD = BC, que são os lados do quadrilátero de Saccheri.

Fig. 30 - Demonstração do Quadrilátero de Saccheri



Se $A\hat{D}\Omega = B\hat{C}\Omega$ e $C\hat{D}\Omega < E\hat{C}\Omega$ então $B\hat{C}E > A\hat{D}C$, $B\hat{C}E$ é um ângulo obtuso e $A\hat{D}C$ é um ângulo agudo.

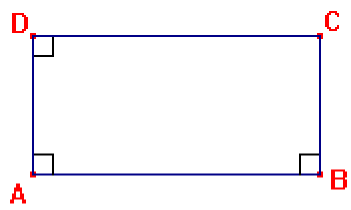
Como $B\hat{C}D$ e $B\hat{C}E$ são ângulos adjacentes com os lados não comuns alinhados e $B\hat{C}E$ é obtuso, então $B\hat{C}D$ é um ângulo agudo e congruente ao ângulo $A\hat{D}C$.

Portanto os ângulos do Quadrilátero de Saccheri são congruentes e agudos.

Quadrilátero de Lambert

O suíço-alemão Johannn Heinrich Lambert tentou provar o quinto postulado de Euclides com um quadrilátero com três ângulos retos que é conhecido como Quadrilátero de Lambert. (Fig. 31)

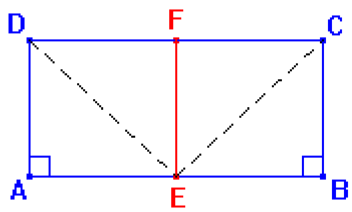
Fig. 31 - Quadrilátero de Lambert



O quarto ângulo do Quadrilátero de Lambert é agudo.

Sendo ABCD um Quadrilátero de Saccheri, E e F os pontos médios dos lados AB e CD respectivamente. Traçando os segmentos EF, CE e DE, são formados os triângulos ADE e EBC que são congruentes, então DE é congruente a CE. Como F é ponto médio de CD, o triângulo DFE é congruente ao triângulo CFE e EF é perpendicular a CD, daí EF é mediatriz do segmento CD então é perpendicular ao segmento AB (Fig. 32)

Fig. 32 - Demonstração do Quadrilátero de Lambert



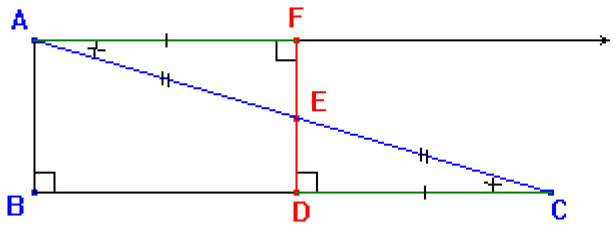
Assim AEFD é um Quadrilátero de lambert e como ABCD é um Quadrilátero de Saccheri e o ângulo $A\hat{D}C$ é agudo.

A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo retângulo é menor do que 180º

Na figura a seguir ABC é um triângulo retângulo em B e E o ponto médio da hipotenusa AC. ED é perpendicular a BC. AF é congruente a DC e o ângulo FÂE tem mesma medida do ângulo $D\hat{C}E$. Assim o triângulo AFE é congruente ao triângulo CDE, os pontos F, E e D são colineares e F é um ângulo reto. Portanto ABDF é um Quadrilátero de Lambert e BÂF é um ângulo agudo, BÂC + CÂF < 90º, coma CÂF é congruente a $A\hat{C}B$:

$$A\hat{B}C + B\hat{A}C + A\hat{C}B = 90º + B\hat{A}C + A\hat{C}B < 180º$$

Fig. 33 - Soma dos ângulos internos de um triângulo retângulo

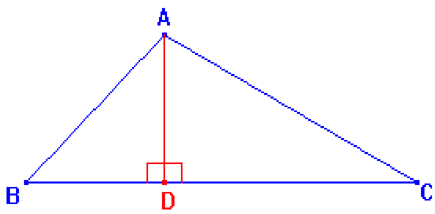


A soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é menor do que 180º

Seja ABC um triângulo não retângulo (Fig. 34). Traçando AD perpendicular a BC são formados os triângulos retângulos ABD e ACD, cujas somas das medidas dos ângulos internos é menor do que 180º, assim:

$$2\hat{D} + \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 360º \rightarrow 180º + \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 360º \rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 180º$$

Fig. 34 - Soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer



CAPÍTULO 7
GEOMETRIA ELÍPTICA

Outra geometria originada da contestação do quinto postulado de Euclides é a Geometria Elíptica, criada pelo matemático alemão Georg Bernhard Riemann (1826-1866), também chamada de Geometria Esférica ou Geometria de Riemann.

O principal fundamento dessa Geometria está no fato de que não existem paralelas a uma reta dada.

Postulados e conceitos primitivos

O modelo de plano da Geometria Elíptica é a superfície de uma esfera (Fig. 35).

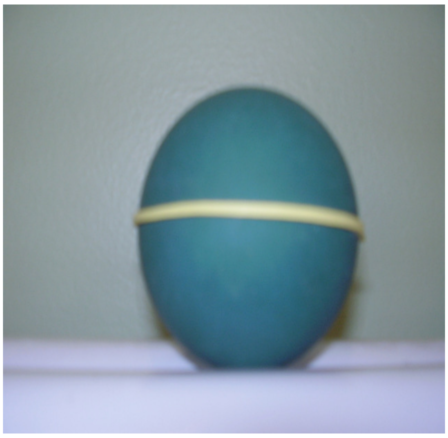
Fig. 35 - Superfície Esférica

O conceito de ponto da Geometria Elíptica é análogo ao conceito euclidiano de ponto.

As retas elípticas são círculos máximos ou geodésicas da superfície esférica.

Na superfície esférica, as geodésicas são circunferências de centro coincidente com o centro da superfície esférica. (Fig. 36)

Fig. 36 - Reta Elíptica

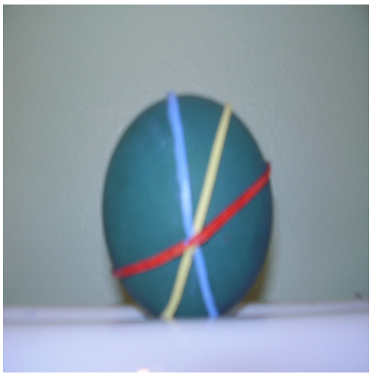


A Geometria Elíptica também admite todos os *postulados* da Geometria Euclidiana, exceto o quinto *postulado*. Assim os postulados que fundamentam essa nova geometria são:

1- *É possível desenhar uma linha reta de qualquer ponto a qualquer ponto.*
2- *É possível prolongar continuamente uma linha reta finita sobre uma reta.*
3- *É possível descrever um círculo com qualquer raio e centro.*
4- Todos os ângulos retos são iguais.
5- Todas as retas intersectam-se em dois pontos.

Nessa perspectiva as retas elípticas são sempre secantes. (Fig. 37)

Fig. 37 - Retas elípticas



A geometria elíptica não considera a noção de "estar entre" e as retas não são infinitas e sim ilimitadas.

A reta é finita considerada ilimitada porque entre dois pontos quaisquer podemos encontrar um outro ponto.

Na geometria elíptica não existem retas paralelas, pois quaisquer duas retas dessa geometria sempre se intersectam em dois pontos. Isso só ocorre se considerarmos retas elípticas geodésicas da superfície esférica; se qualquer circunferência dessa superfície fosse uma reta elíptica o quinto postulado da Geometria de Riemann não seria válido.

Geometria Euclidiana na superfície esférica

Considerando que a noção de plano da Geometria Euclidiana é construída sobre a superfície da Terra, que tem a forma de uma esfera achatada nos pólos, ao construirmos duas retas paralelas sobre a superfície de uma laranja, que tem a forma idêntica à da Terra, teremos a situação a seguir:

Fig. 38 - Retas euclidianas paralelas na superfície da Terra

Como mostra a seqüência de figuras, as retas que são consideradas paralelas se encontram em dois pontos distintos e a distância entre elas não é constante em qualquer ponto.

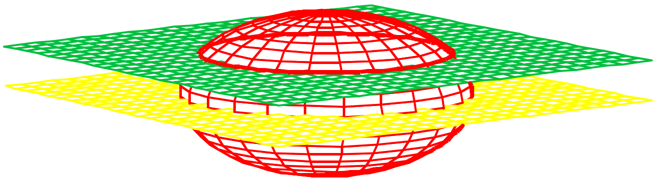
Daí a Geometria Euclidiana é inconsistente para esse modelo de superfície.

Retas não elípticas

Na figura a seguir foram traçadas duas circunferências euclidianas que não são consideradas retas elípticas, pois essas circunferências não são geodésicas da superfície esférica. Observa-se que essas circunferências não se intersectam, portanto são consideradas paralelas, o que contraria o quinto postulado da geometria elíptica. Isso seria considerado uma falha da geometria elíptica e, portanto, o quinto postulado seria considerado uma falha da geometria euclidiana.

Fig. 39 - Retas não elípticas

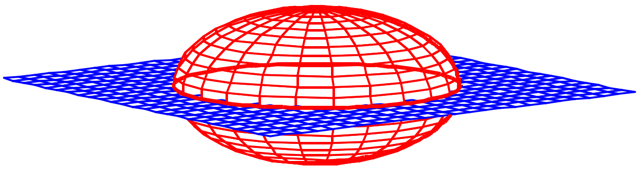
Fig. 40 - Intersecção de planos paralelos
com a superfície elíptica



Esse fato se confirma se traçarmos planos paralelos que intersectam a superfície esférica determinando retas não elípticas chamadas de círculos menores. Como os planos são paralelos, as circunferências que pertencem a eles não se intersectam.

Quando o plano determina um círculo cujo centro coincide com o centro da superfície esférica, as retas são elípticas e chamadas de círculo máximo.

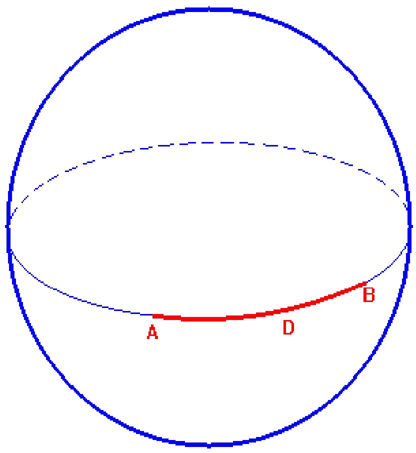
Fig. 41 - Círculo máximo



Distância entre dois pontos

A distância entre dois pontos é determinada pelo menor arco do círculo máximo (geodésica) que contém esses pontos.

Fig. 42 - Distância entre dois pontos



A distância entre os pontos A e B é a medida do arco ADB. (Fig. 42)

Distância polar

Na figura m temos as retas elípticas KJ e HI. H e I são os pólos da reta KJ, K e J são os pólos da reta HI. Na geometria elíptica a distância entre qualquer reta e seu pólo é sempre constante e igual para todas as retas (Fig. 43). Portanto, uma reta tem um comprimento finito, que é quatro vezes a distância polar. (Fig. 44)

Importante destacar que a reta tem comprimento finito, porém ela é ilimitada, pois entre dois pontos quaisquer sempre é possível encontrar outro ponto.

Fig. 43 - Distância polar

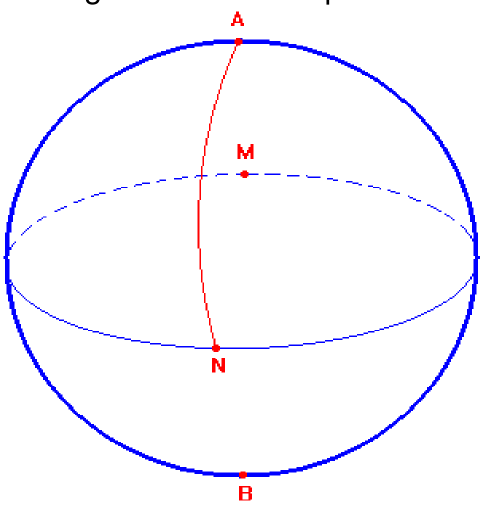
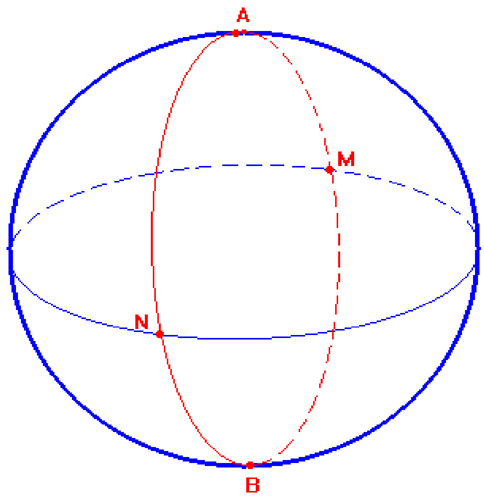


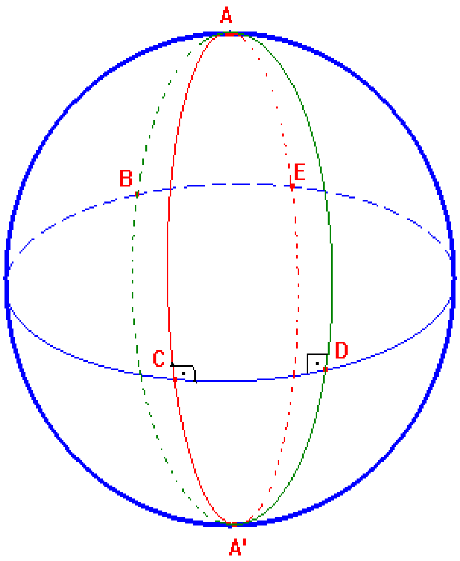
Fig. 44 - Comprimento de uma reta

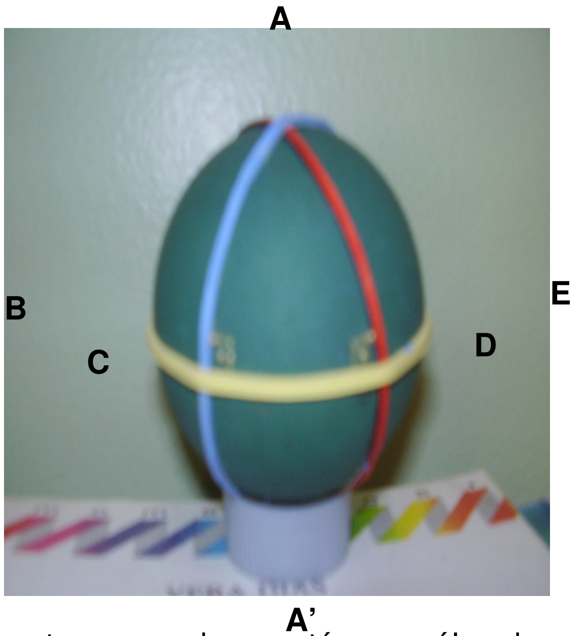


Retas perpendiculares

Na figura abaixo temos duas retas elípticas ACA’ e ADA’ que se intersectam nos pontos antípodas (extremidades de um diâmetro da esfera) A e A’.

Fig. 45 - Retas perpendiculares





Uma reta r é perpendicular a uma reta s, quando r contém os pólos da reta s. (Fig. 45)

Os pólos da reta ACA’ são os pontos B e D, e da reta ADA’ são os pontos E e C. A reta BCDE perpendicular a reta ACA’ será também perpendicular a reta ADA’, pois contém os pontos E e C. Daí a reta BCDE será perpendicular a todas as retas que contêm os pontos A e A’.

Portanto uma reta é perpendicular a infinitas retas, pois por dois pontos podemos traçar infinitas retas.

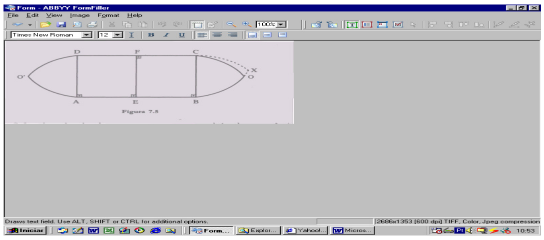
Quadrilátero de Saccheri

Os ângulos do topo do Quadrilátero de Saccheri são congruentes e obtusos.

Seja ABCD um Quadrilátero de Saccheri, EF a reta que passa pelos pontos médios dos lados AB e CD e O e O’ os pólos de EF.

Se X está em BO e é pólo de BC, então BX > BO, pois BO < EO. Como X é pólo de BC então CX é perpendicular a BC, $X\hat{C}B = 90^{º}$ e $B\hat{C}O < 90^{º}$, assim $B\hat{C}F$ é obtuso pois é adjacente a $B\hat{C}O$.

Fig. 46 - Quadrilátero de Saccheri



Fonte: COUTINHO, 2001.

Quadrilátero de Lambert

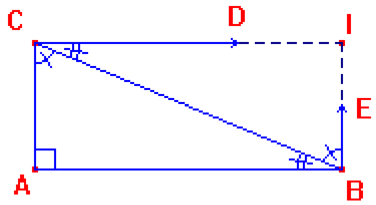
O quarto ângulo do Quadrilátero de Lambert é obtuso. Isso foi provado no ítem anterior, pois o Quadrilátero de Saccheri foi dividido em dois Quadriláteros de Lambert.

A soma das medidas dos ângulos de um triângulo retângulo é maior do que 180º

Seja ABC um triângulo retângulo. Traçando as retas CD e BE, formam-se com o lado BC os ângulos $D\hat{C}B$ e $C\hat{B}E$ congruentes aos ângulos $C\hat{B}A$ e $A\hat{C}B$ respectivamente. Daí o triângulo ABC é congruente ao triângulo ICB o que é um absurdo, pois não existem retângulos na Geometria Elíptica, logo:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > 180º$$

Fig. 47 - Soma dos ângulos internos
de um triângulo retângulo



A soma das medidas dos ângulos de um triângulo qualquer é maior do que 180º

Se um triângulo pode ser dividido em dois triângulos retângulos, as somas das medidas dos ângulos destes triângulos é maior do que 360º e assim a soma das medidas dos ângulos do triângulo primitivo é maior do que 180º

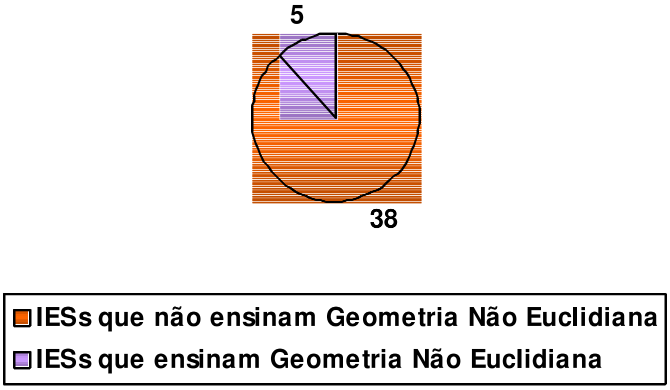
CAPÍTULO 8

GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS NO CONTEXTO ESCOLAR: DO MITO A POSSIBILIDADE DE INCLUSÃO

A partir do entendimento de que o estudo das Geometrias Não Euclidianas constitui um tema importante e relevante na aprendizagem da Matemática, considera-se que ele deveria compor o currículo dos Cursos de Licenciaturas em Matemática quer como uma disciplina, quer como tema inserido em uma das disciplinas, de maneira que a formação dos docentes torne-os aptos a abordarem com segurança esses conhecimentos quando do desempenho de suas funções docentes.

Neste sentido, o presente estudo busca, num primeiro momento investigar dentre as Instituições de Ensino Superior - IES - que oferecem Cursos de Licenciatura em Matemática, no Brasil as que incluem em sua estrutura curricular o tema Geometria Não Euclidiana.

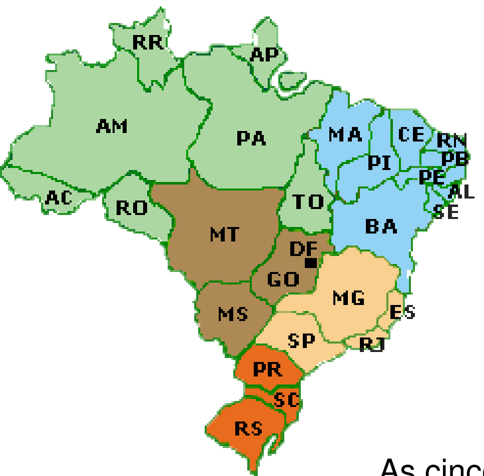
Fig. 48 - Gráfico



Para tanto se investigou, via INTERNET, dentre algumas das IES reconhecidas pelo Ministério de Educação e Cultura que oferecem, em 2005, Cursos de Licenciatura em Matemática. Do total de 46 (quarenta e seis) IESs identificadas nos diversos Estados brasileiros (Fig. 49), três não apresentaram em seus *sites* a matriz curricular nem os programas das disciplinas para que fosse possível identificar a inclusão ou não do tema Geometria Não Euclidiana. Assim, do total de 43 (quarenta e três) IESs, apenas cinco indicam que na formação de professores de matemática abordam o objeto de estudo da presente Monografia, qual seja: Geometria Não Euclidiana (Fig. 48).

Estados	Quantidade de IESs pesquisadas
AC	1
BA	1
CE	1
GO	2
MA	1
MG	7
MS	2
MT	1
PA	2
PE	1
PR	5
RJ	6
RN	1
RR	1
RS	4
SC	3
SE	1
SP	6
TOTAL	**46**

Fig. 49 - Mapa



Fonte: <www.detran.ro.gov.br>

As cinco IESs podem ser assim caracterizadas:

- Todas são Universidades, sendo que apenas uma pertence à rede particular de ensino e as demais pertencem à rede federal.
- As cinco IESs estão situadas em quatro estados brasileiros, tendo em vista que duas federais a um mesmo estado (Minas Gerais).
- Em todas, a temática - Geometria Não Euclidiana é abordada através de disciplinas com denominações diferenciadas (Geometria Não Euclidiana, Introdução às Geometrias Não Euclidianas, Geometria

Espacial e Não Euclidiana, Geometrias Euclidiana e Não Euclidiana), sendo que com exceção de uma considerada optativa para o aluno as demais são obrigatórias.

Diante do exposto, uma questão se levanta: *Por que as Geometrias Não Euclidianas encontram-se ausentes na maioria dos Cursos de Licenciatura em Matemática?*

Apesar das várias hipóteses levantadas decorrentes da questão enunciada anteriormente, priorizou-se, neste trabalho monográfico, por refletir acerca de procedimentos metodológicos mais adequados a serem utilizados no ato de ensinar-aprender objetivando facilitar o desempenho didático do professor em exercício e/ou em formação que ainda não teve oportunidade de estudar o referido tema. Aos primeiros, professores em exercício, o assunto pode ser oferecido na perspectiva da Educação Continuada, em nível de Cursos de Extensão e aos professores em formação inicial como disciplina eletiva ou mesmo como Curso de Aperfeiçamento cuja carga horária pode ser computada na Prática Profissional do Currículo Escolar inserida no componente *Atividades acadêmico-científico-culturais*, componente requerido pela legislação vigente que subsidia os Cursos de Licenciatura.

Assim, após meditar acerca da transposição didática mais adequada a respeito do tema, partiu-se para a criação de situações de aprendizagem relacionadas aos conceitos iniciais das Geometrias Não Euclidianas, a partir do quinto postulado de Euclides, utilizando recursos audiovisuais como a apresentação de slides, software matemático além de uma miniatura da Pseudo-esfera feita em argila, na perspectiva de oportunizar a compreensão do tema.

Os passos da transposição didática observados na abordagem do tema são sintetizados, a seguir:

A princípio foi enunciado o quinto postulado de Euclides que foi o ponto de partida para o surgimento das Geometrias Não Euclidianas, pois elas surgiram da tentativa frustrada de provar que o quinto postulado era um teorema e podia ser demonstrado.

Slide 1

V Postulado de Euclides

Se uma linha reta, encontra duas outras retas e com elas formam de um mesmo lado ângulos internos em que a soma é menor do que dois ângulos retos, então essas duas retas encontrar-se-ão no lado que formam ângulos cuja soma é menor que dois ângulos retos.

Slide 2

Slide 4

Slide 5

Slide 6

Esse slide apresenta um breve relato da história das Geometrias Não Euclidianas, tais como: os nomes, ano de surgimento e os nomes dos principais responsáveis pela descoberta dessas geometrias.

Nos slides 4 e 5 são apresentados o plano elíptico que é uma superfície esférica e o plano hiperbólico que é uma pseudo-esfera. A pseudo-esfera é a superfície gerada pela revolução de uma tratriz em torno do seu eixo horizontal

Slide 7

A tratriz é uma curva na qual o segmento formado por uma reta tangente entre o ponto de tangência e o ponto de intersecção com o eixo horizontal é constante. O software winplot apresenta ferramentas capazes de ilustrar a superfície originada pela revolução da tratriz em torno do seu eixo horizontal.

Slide 8

Slide 10

Utilizando o winplot e sabendo as equações paramétricas da tratriz, os participantes puderam observar a superfície originada pela revolução da tratriz determinando um ângulo α e uma constante a. Esse slide mostra o traçado da tratriz e a superfície de revolução como é determinado pelo winplot.

Slide 11

Os matemáticos Felix Klein e Henri Poincaré determinaram uma representação do plano hiperbólico no plano euclidiano. Tal representação ou modelo é um círculo excluindo a circunferência.

Slide 12

Retas elípticas são geodésicas ou círculos máximos da superfície esférica. Uma geodésica é uma circunferência da superfície com centro coincidente com o centro da superfície esférica.

Slide 13

A reta hiperbólica no modelo de Klein é uma corda do círculo que representa o plano excluindo suas extremidades.

Slide 15

A reta hiperbólica no modelo de Poincaré é um arco de circunferência ortogonal ao círculo que representa o plano hiperbólico.

Slide 16

Retas hiperbólicas são geodésicas da pseudo-esfera.

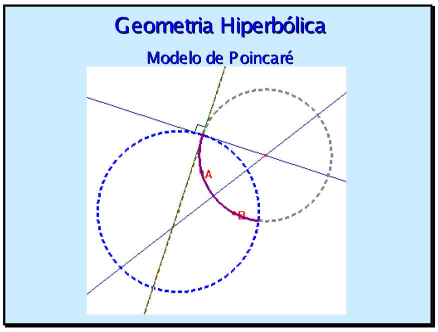
Slide 17

A reta elíptica que passa por dois pontos distintos A e B de uma superfície esférica é a circunferência resultante da intersecção da superfície esférica com o plano euclidiano determinado pelos pontos A, B e o centro da superfície esférica.

A intersecção de uma reta que passa por dois pontos distintos com a circunferência que representa o plano euclidiano determina uma corda que é a reta hiperbólica procurada.

No modelo hiperbólico de Poincaré a reta é o arco da circunferência ortogonal à circunferência que representa o plano hiperbólico.

Slide 17



Usando o software Cabri Géomètre II determina-se a reta hiperbólica que passa por dois pontos A e B. A medriatriz do segmento AB e uma reta tangente no ponto P ao plano hiperbólico se intersectam em um ponto que será o centro de uma circunferência c que passa pelos pontos A e B. Duas circunferências são ortogonais quando têm tangentes perpendiculares nos pontos de intersecção, então para identificar a circunferência ortogonal basta traçar a reta tangente à circunferência c no ponto de intersecção com o plano hiperbólico e movimentar o ponto P até as tangentes formarem ângulos retos. Assim as circunferências são ortogonais e a reta hiperbólica será o arco da circunferência c que é interior ao plano hiperbólico.

Slide 19

Os slides 19 e 20 mostram planos euclidianos que não passam pelo centro da superfície esférica. Eles determinam na superfície circunferências que não são retas

Slide 20

elípticas pois nem sempre essas circunferências intersectam-se, o que contraria o quinto postulado da Geometria Elíptica que afirma ter um ponto de intersecção entre todas as retas.

Slide 22

Os slides 22 e 23 mostram cordas que contêm suas extremidades. Assim elas não são retas hiperbólicas, pois se fossem as retas paralelas teriam um ponto de intersecção, logo não seriam paralelas.

Slide 23

Slide 25

Existem infinitas retas não-secantes.

Slide 29

Nos slides 29, 30, 31 e 32 são apresentadas fotos comprovando a validade dos quatro primeiros postulados de Euclides na superfície da Geometria Elíptica.

Slide 30

Slide 31

Slide 32

Slide 34

Nos slides 34, 35, 36 e 37 são apresentadas figuras comprovando a validade dos quatro primeiros postulados de Euclides na representação plana euclidiana de Klein da Geometria Hiperbólica.

Slide 35

Slide 36

Slide 37

Slide 39

Nos slides 39, 40, 41 e 42 são apresentadas fotos comprovando a validade dos quatro primeiros postulados de Euclides na pseudo-esfera que é o plano hiperbólico.

Slide 40

Slide 41

Slide 42

Slide 44

Esse slide mostra as retas elípticas que se intersectam em dois pontos, comprovando a afirmação do quinto postulado da Geometria Elíptica.

Slide 45

A figura mostra a validade do quinto postulado da Geometria Hiperbólica no modelo plano hiperbólico de Klein.

Slide 46

Os slides 46 e 47 mostram a foto e os passos da construção de duas retas paralelas na pseudo-esfera.

Slide 47

Concluída a transposição didática para a introdução da Geometria Não Euclidiana no processo de ensino-aprendizagem, passa a ser necessária a validação do material através da pré-testagem, com o objetivo de detectar principalmente o grau de dificuldade do material quando utilizado no contexto da aula.

Neste sentido, foi apresentada para cinco alunos do Curso de Licenciatura em Matemática de uma Instituição de Ensino Superior de Campos dos Goytacazes, a partir deste momento são identificados com os números 1, 2, 3, 4 e 5, uma atividade a respeito de Geometrias Não Euclidianas a fim de verificar a possibilidade de inclusão desse tema nos Cursos de Licenciatura em Matemática.

A descrição dos participantes da atividade está a seguir:

- Quatro são do sexo feminino e um do sexo masculino.
- Duas são professoras do Curso de Licenciatura em Matemática de duas IESs de Campos dos Goytacazes, sendo uma da rede federal de ensino e outra da rede particular.
- Duas são alunas do 7°. Período do Curso de Licenciatura em Matemática de uma IESs da rede particular de ensino em Campos dos Goytacazes.
- Um é aluno do 5°. Período do Curso de Licenciatura em Matemática de uma IESs da rede particular de ensino em Campos dos Goytacazes.

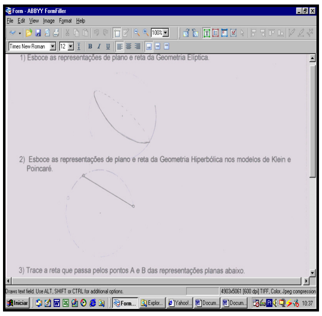
Tal atividade teve duração de 2 horas/aula. Os recursos usados mencionados anteriormente tiveram o objetivo de apresentar concretamente conceitos que certamente, até então, eram desconhecidos de todos que estavam presentes. Além disso, os participantes receberam um material escrito contendo postulados, conceitos primitivos e atividades sobre a Geometria Elíptica e Geometria Hiperbólica.

Após a apresentação do tema foi aplicada à turma uma atividade escrita individual com o objetivo de avaliar não só o instrumento mas também o grau de compreensão dos participantes tendo como referência suas respostas

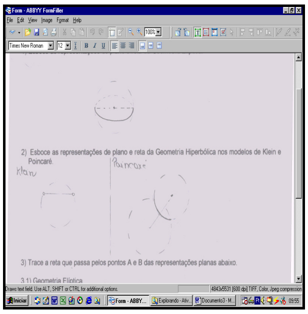
Assim foi feita a leitura, análise e interpretação de cada uma das respostas dos participantes que são descritas a seguir

1ª. Questão - Esboce as representações de plano e reta da Geometria Elíptica.

Participante 1

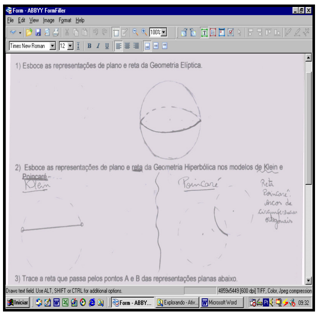


Participante 2

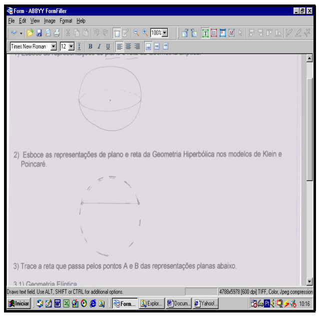


Participante 3

Participante 4



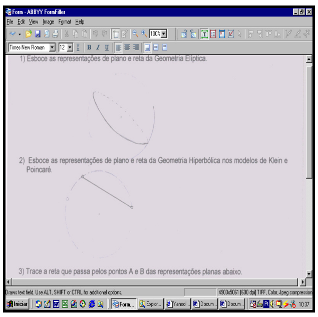
Participante 5



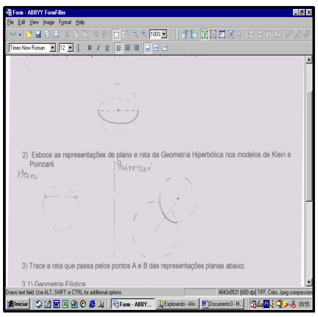
Todos os alunos compreenderam que o plano e a reta da Geometria Elíptica são uma superfície esférica e uma geodésica dessa superfície, respectivamente. Sabendo que geodésica é a circunferência com centro coincidente com o centro da superfície esférica, todos esboçaram uma circunferência com essas características, como pode ser observado nas figuras.

2ª. Questão - Esboce as representações de plano e reta da Geometria Hiperbólica nos modelos de Klein e Poincaré.

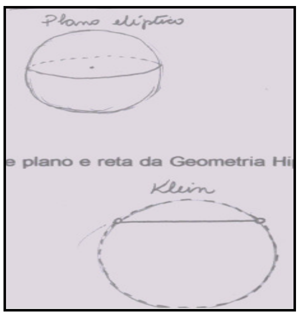
Participante 1



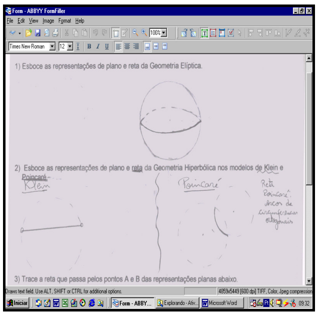
Participante 2



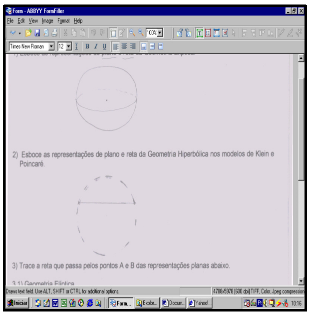
Participante 3



Participante 4



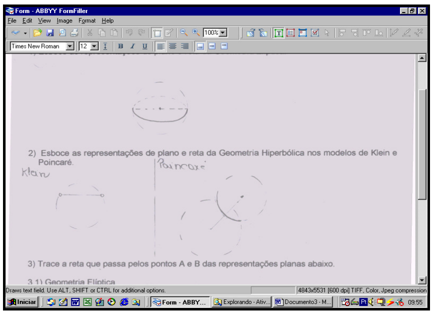
Participante 5



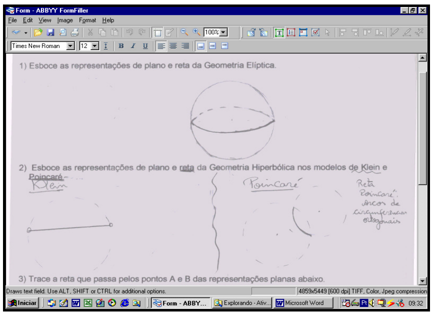
Na representação plana feita por Klein, da Geometria Hiperbólica, o plano é um círculo excluindo a circunferência, e reta é uma corda dessa circunferência excluindo as extremidades.

Assim os participantes representaram corretamente o plano com uma circunferência pontilhada e a reta com uma corda que não contém suas extremidades.

Participante 2



Participante 4

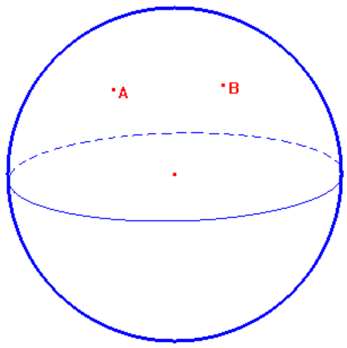


Na representação plana de Poincaré da Geometria Hiperbólica o plano é o mesmo da representação de Klein e a reta é o arco de uma circunferência que é ortogonal ao plano. Os participantes 1, 3 e 5 não fizeram essa representação pois não sabiam o conceito de circunferências ortogonais. Esse conceito não havia sido apresentado até então pois a intenção dessa atividade era fazer um esboço das representações planas hiperbólicas distinguindo a representação de Klein e Poincaré.

Os participantes 2 e 4 representaram corretamente as retas hiperbólicas no modelo de Poincaré como arcos de circunferências.

3ª. Questão - Trace a reta que passa pelos pontos A e B das representações planas abaixo.

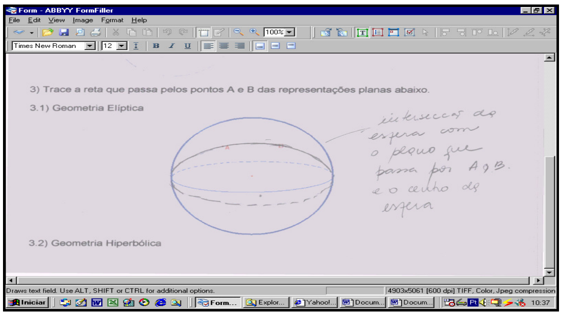
Item 1 - Geometria Elíptica



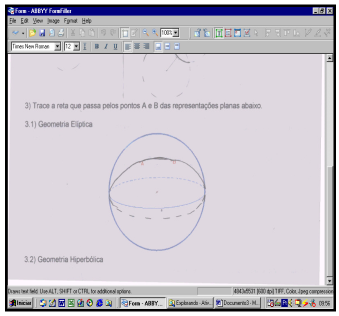
Os esboços representaram corretamente as retas elípticas como circunferências euclidianas que são formadas pela intersecção da superfície esférica com o plano euclidiano que passa pelos pontos A, B e pelo centro da superfície esférica.

Seguem as respostas dos participantes.

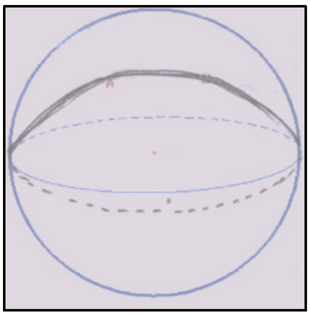
Participante 1



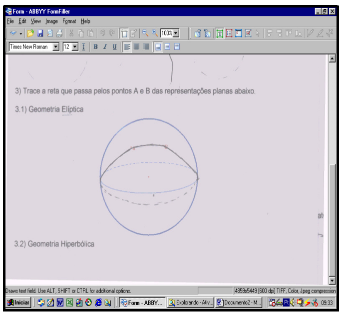
Participante 2



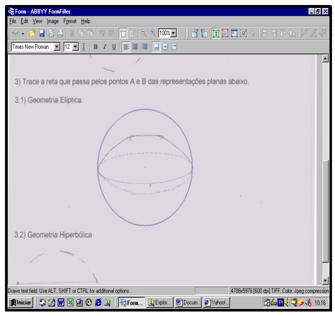
Participante 3



Participante 4

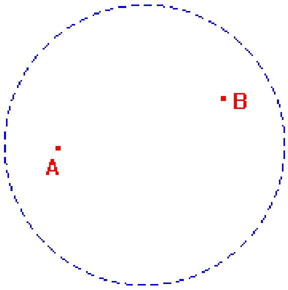


Participante 5



Item 2 - Geometria Hiperbólica

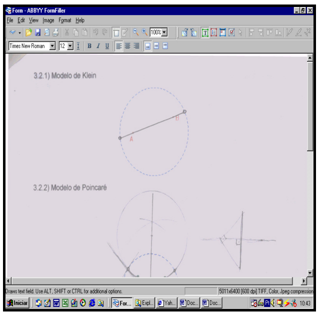
Modelo de Klein



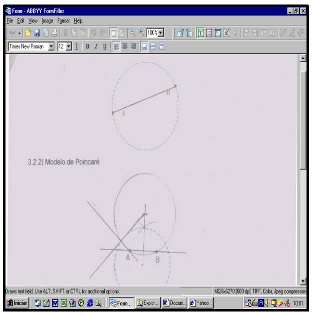
Os participantes perceberam que sendo as retas hiperbólicas desse modelo cordas de uma circunferência excluindo suas extremidades, para traçar uma reta hiperbólica passando pelos pontos A e B dados, é necessário traçar a reta euclidiana determinada pelos pontos A e B, que determina com a circunferência considerada o plano hiperbólico, a corda que é a reta hiperbólica pedida.

Pode-se observar o aproveitamento dos participantes através de suas respostas.

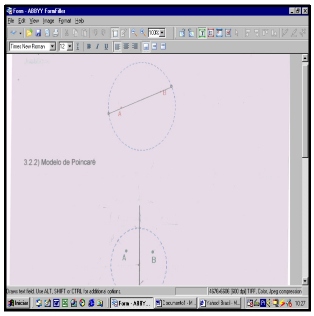
Participante 1



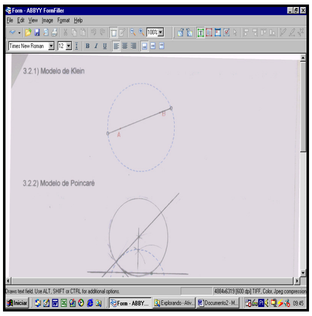
Participante 2



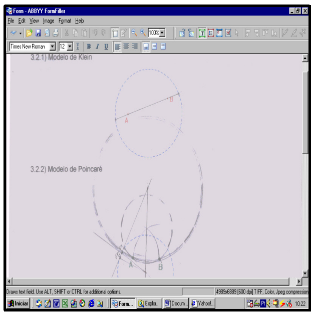
Participante 3



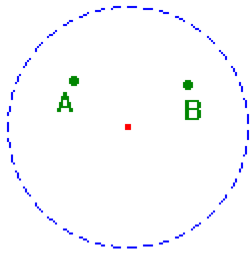
Participante 4



Participante 5



Modelo de Poincaré



Nesse item devia-se traçar uma circunferência contendo os pontos A e B, ortogonal à circunferência que representa o plano hiperbólico.

O participante 1 chegou à conclusão de que o centro dessa circunferência está na mediatriz do segmento com extremidades em A e B, pois a mediatriz do segmento AB representa o lugar geométrico dos pontos que são eqüidistantes de A e B. Porém a mediatriz contém infinitos pontos e portanto podem ser traçadas infinitas circunferências com centro na mediatriz passando pelos pontos A e B, mas somente uma delas é ortogonal ao plano hiperbólico. A questão era encontrar alguma propriedade que determinasse exatamente esta circunferência.

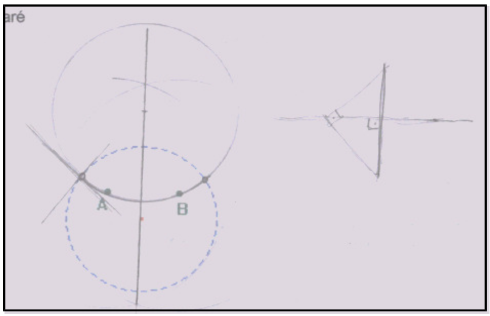
Utilizando o software cabri-géomètre II pode-se determinar essa reta da seguinte forma:

Traça-se a mediatriz m do segmento AB, um raio OP qualquer da circunferência que representa o plano hiperbólico, sendo O centro da circunferência e P um ponto dela. Pelo ponto P traça-se uma reta p perpendicular ao raio OP, assim essa reta é tangente ao plano hiperbólico. Com centro na intersecção O’ das retas m e p, passando pelos pontos A e B, traça-se uma circunferência c que intersecta o plano hiperbólico nos pontos I e I’.

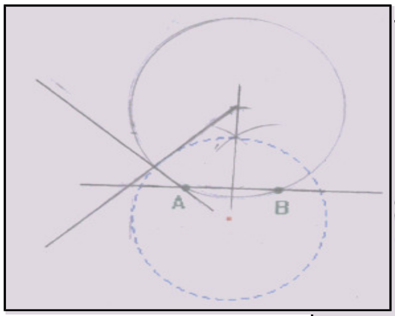
Como circunferências ortogonais são aquelas cujas tangentes no ponto de intersecção são perpendiculares, determina-se a tangente t à circunferência c no ponto I, porém o ângulo formado pelas retas p e t não é reto, isso só acontece quando P e I são coincidentes. Movendo o ponto P sobre a circunferência até coincidir com o ponto I, encontra-se a circunferência ortogonal ao plano hiperbólico.

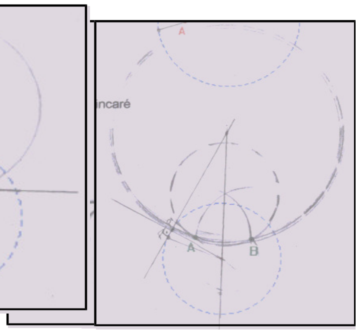
A construção mais próxima da ideal foi a do participante 1 representado abaixo.

Participante 1



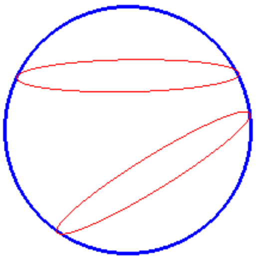
Participante 2





Participante 3 Participante 4 Participante 5

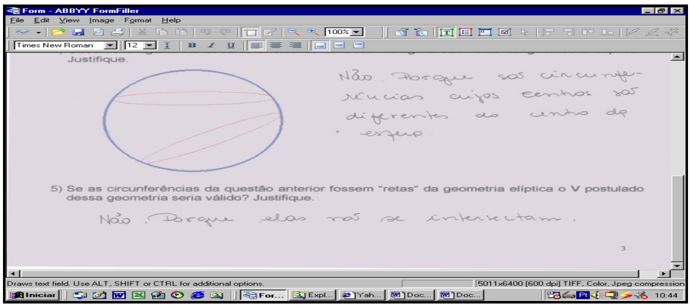
4ª. Questão - Observe a figura. As circunferências destacadas na figura são retas da geometria elíptica? Justifique.



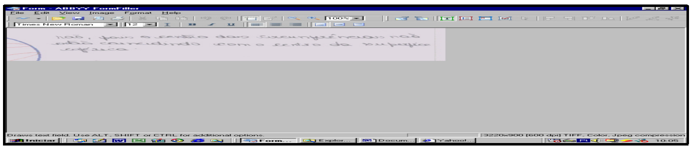
Os participantes 3 e 5 responderam de forma equivocada ao dizer que retas elípticas têm que passar pelo centro da superfície esférica, pois estas têm que Ter centro coincidente com a superfície esférica.

As respostas dos participantes 1, 2 e 4 estão corretas, pois as circunferências da figura não são retas elípticas pois seus centros não coincidem com o centro da superfície esférica.

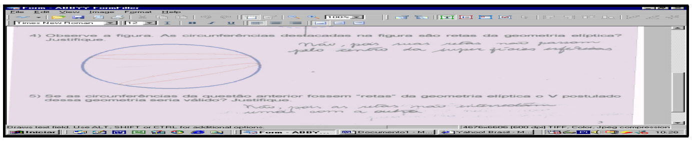
Participante 1



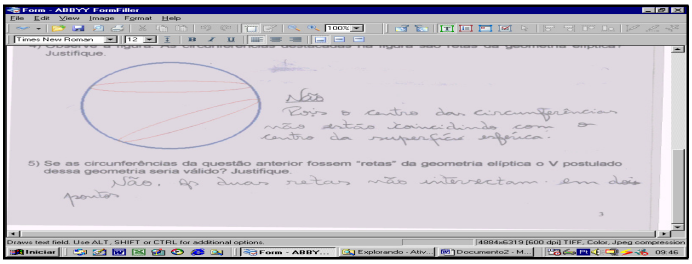
Participante 2



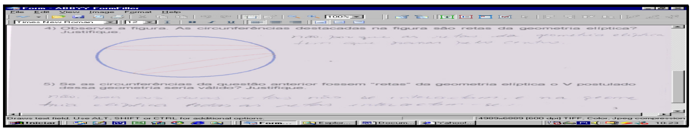
Participante 3



Participante 4

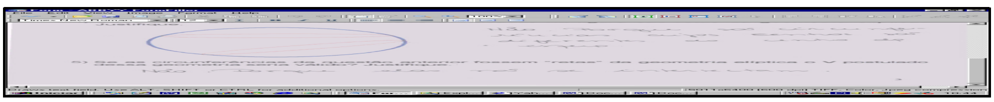


Participante 5

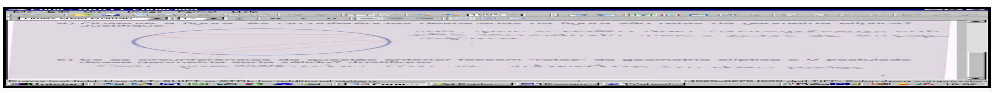


5ª. Questão - Se as circunferências da questão anterior fossem “retas” da geometria elíptica o V postulado dessa geometria seria válido? Justifique.

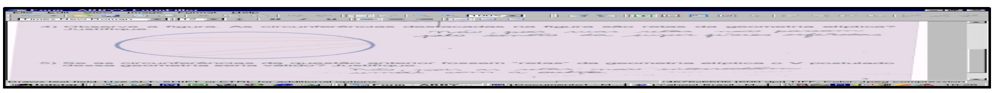
Participante 1



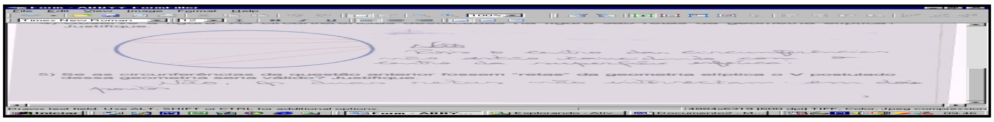
Participante 2



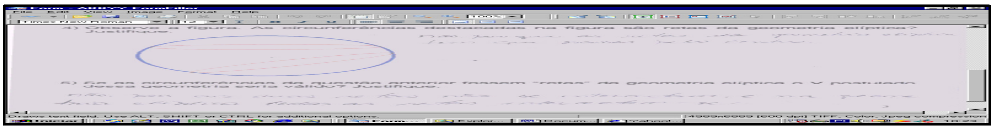
Participante 3



Participante 4

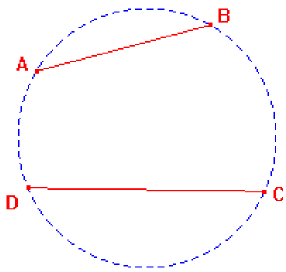


Participante 5



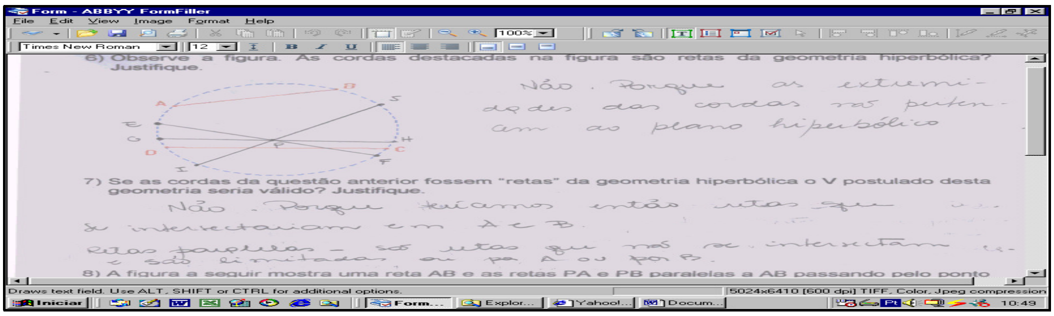
Nesta questão todos os participantes responderam que se as retas da questão anterior fossem elípticas o quinto postulado dessa geometria não seria válido pois as retas não teriam ponto de intersecção. Justamente, se traçarmos circunferências quaisquer sobre a superfície esférica, podemos encontrar circunferências paralelas, pois elas não se intersectam, o que contraria o quinto postulado da Geometria Elíptica que afirma ter um ponto de intersecção entre todas as retas.

6ª. Questão - Observe a figura. As cordas destacadas na figura são retas da geometria hiperbólica? Justifique.

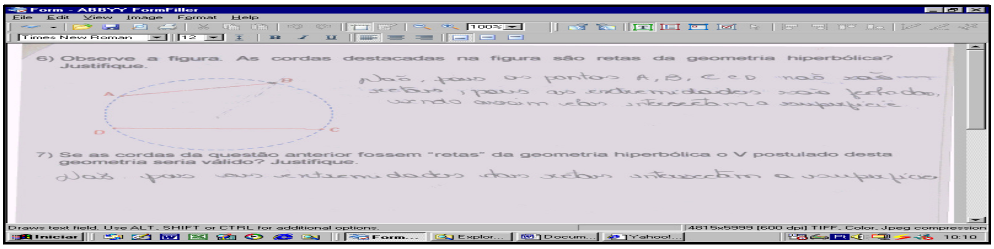


Os participantes justificaram corretamente, que as cordas apresentadas na figura não são retas hiperbólicas, pois estas são cordas excluindo suas extremidades e as cordas da figura continham suas extremidades.

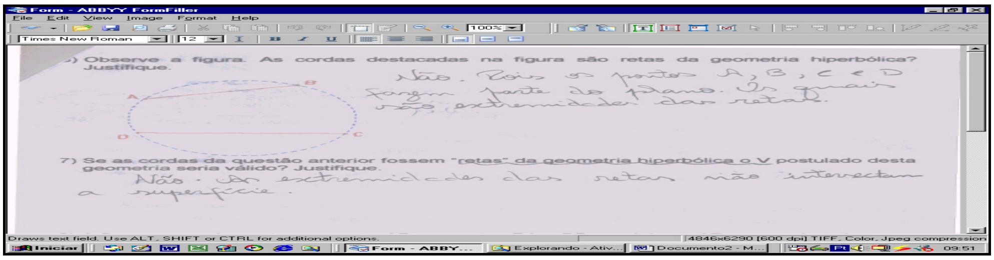
Participante 1



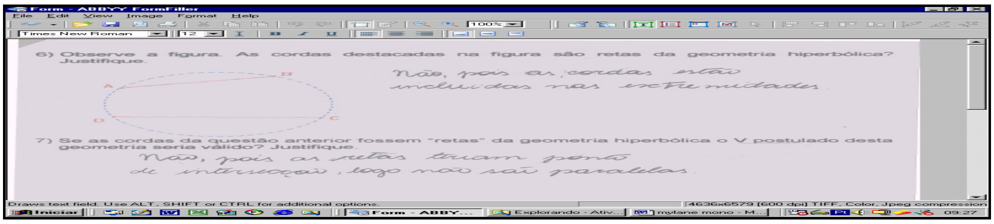
Participante 2



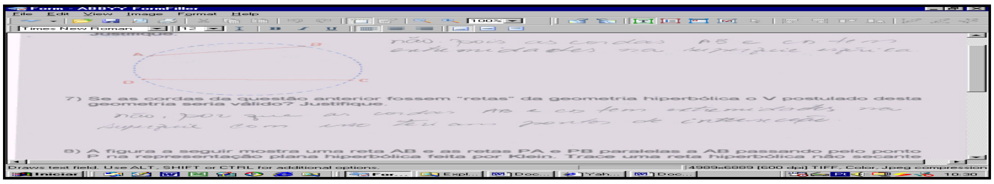
Participante 3



Participante 4



Participante 5



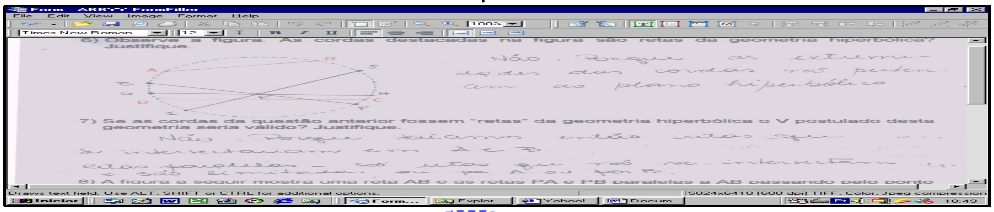
7ª. Questão - Se as cordas da questão anterior fossem "retas" da geometria hiperbólica o V postulado desta geometria seria válido? Justifique.

O participante 4 respondeu que as extremidades das retas não intersectam a superfície. Esse participante refere-se corretamente às retas hiperbólicas, porém não explica porque o quinto postulado dessa geometria não seria válido.

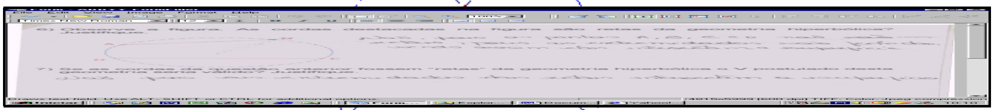
O participante 2 responderu equivocadamente que as cordas AB e CD intersectam a superfície logo não são paralelas, mas não justificou esse fato.

Os participantes 1, 3 e 5 responderam corretamente que se as cordas representadas na questão anterior fossem retas hiperbólicas, o quinto postulado dessa geometria não seria válido devido ao fato de que as retas paralelas teriam um ponto comum, logo não seriam paralelas.

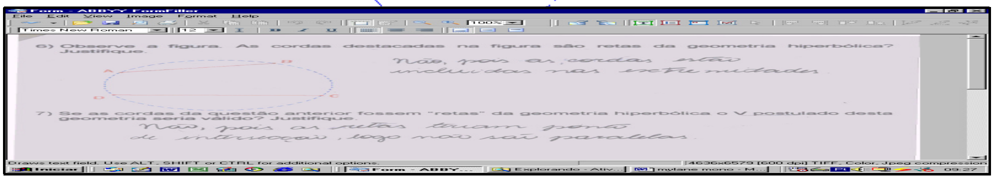
Participante 1



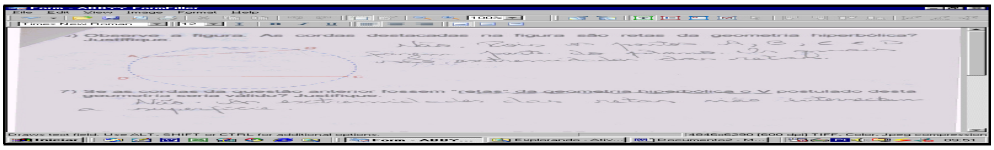
Participante 2



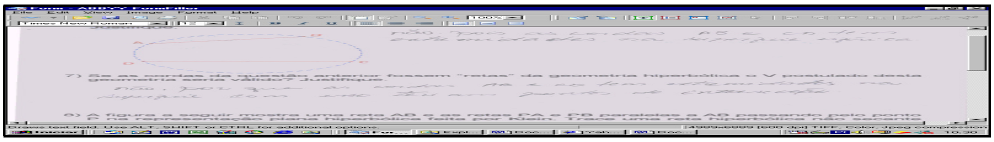
Participante 3



Participante 4



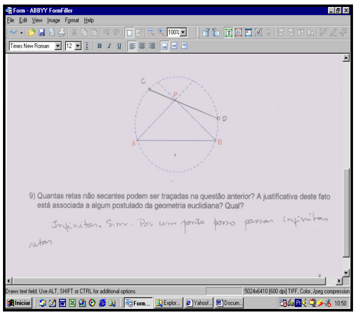
Participante 5



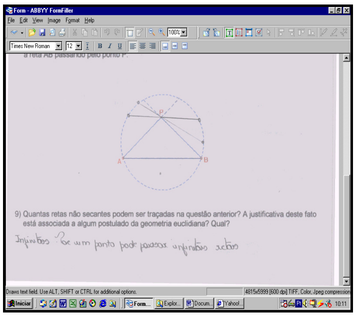
8ª. Questão - A figura a seguir mostra uma reta AB e as retas PA e PB paralelas a AB passando pelo ponto P na representação plana hiperbólica feita por Klein. Trace uma reta hiperbólica não secante a reta AB passando pelo ponto P.

Nesta questão, os participantes mostraram dificuldade em aceitar que as retas não-secantes não são consideradas paralelas à reta AB, já que são retas hiperbólicas e não intersectam a reta AB. Assim foi considerado duvidoso o quinto postulado da Geometria Hiperbólica que afirma haver mais de uma reta paralela a uma reta e um ponto dados. Porém as retas paralelas a uma reta de extremidades A e B passando pelo por um ponto P são as duas retas que passam por P e têm extremidade no ponto A ou B. Os participantes concluíram que são as retas que contêm o ponto P e são limitadas pelo ponto A ou pelo ponto B.

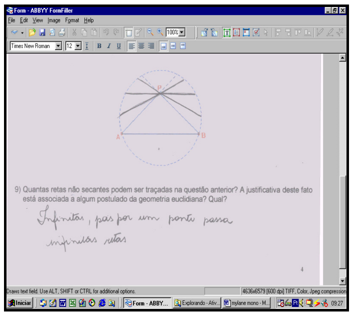
Participante 1



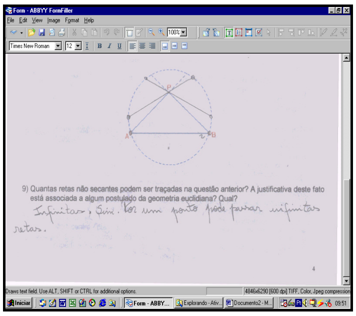
Participante 2



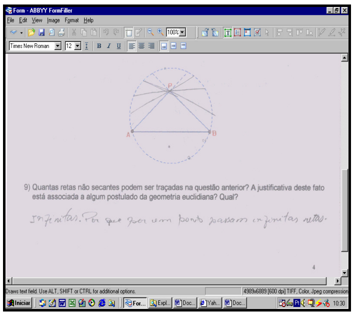
Participante 3



Participante 4



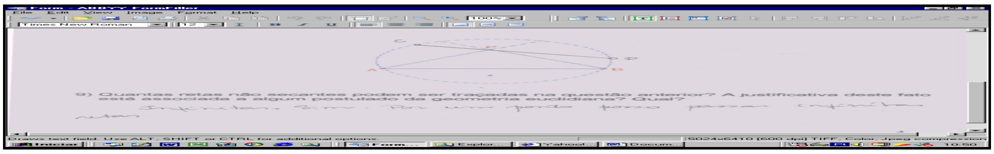
Participante 5



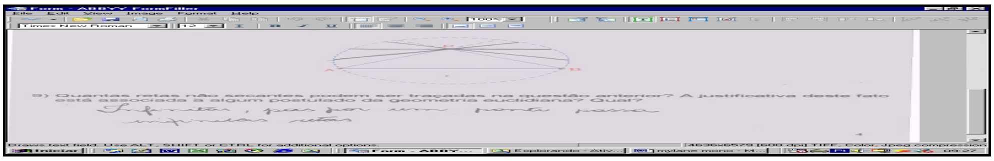
9ª. Questão - Quantas retas não secantes podem ser traçadas na questão anterior? A justificativa deste fato está associada a algum postulado da geometria euclidiana? Qual?

Tirada a dúvida na questão anterior, todos concordaram que existem infinitas retas não-secantes. A justificativa desse fato está no postulado de Euclides que afirma existirem infinitas retas passando por um ponto qualquer.

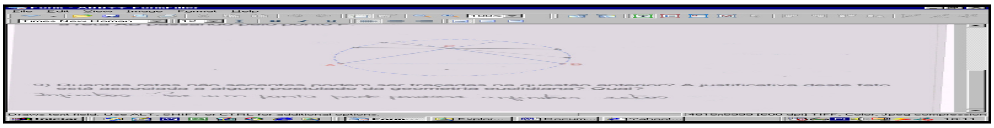
Participante 1



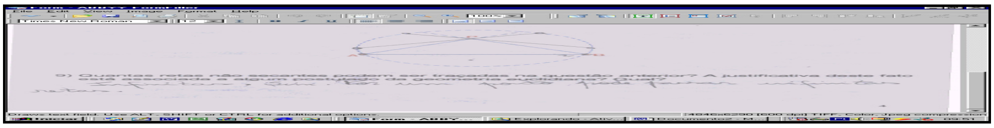
Participante 2



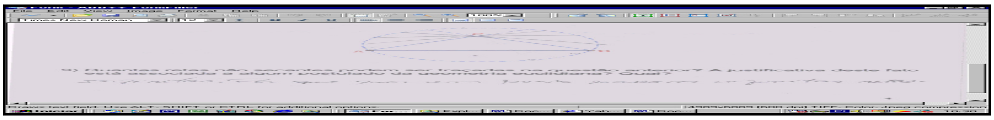
Participante 3



Participante 4



Participante 5



Durante as atividades surgiram dúvidas como a construção de circunferências ortogonais e retas não-secantes que culminaram em discussões entre os participantes na tentativa da resolução do problema, tornando a aula interativa. Os participantes não apresentaram dificuldade de compreensão do tema em debate devido a utilização de recursos facilitadores da aprendizagem além de visualização das superfícies em que as Geometrias Não Euclidianas são válidas.

Nos adendos, encontram-se o modelo da lista de atividades, as respostas dos participantes e as fotos da aplicação das atividades.

Em anexo estão além das proposições euclidianas citadas neste texto, as matrizes curriculares e ementas das IESs pesquisadas que apresentam nos Cursos de Licenciatura em Matemática, disciplinas que envolvem o ensino de Geometrias Não Euclidianas. Esses materiais foram extraídos dos sites das respectivas instituições e encontram-se nas referências.

PALAVRA FINAL - CONSTRUINDO EXPECTATIVAS

Nessa palavra final não estaremos concluindo esse trabalho.

Essas reflexões não devem conduzir o leitor a uma tomada de decisão definitiva sobre o ensino de Geometria e, principalmente, sobre o ensino de Geometrias Não Euclidianas.

Não se pode dizer ainda o quanto de Geometrias Não Euclidianas deverá ser inserido nos currículos escolares, quer seja na educação básica, quer seja nos cursos de formação de professores.

A perspectiva deste trabalho foi estimular o debate sobre qual geometria é adequada em cada momento da vida dos estudantes.

Dessas reflexões, espera-se que os educadores matemáticos sejam movidos na direção da compreensão de que a Geometria Euclidiana no mundo contemporâneo não sendo mais considerada o único e absoluto modelo do espaço físico, então há que se abrir a possibilidade de os estudantes traçarem seus caminhos seguindo linhas hiperbólicas ou elípticas e não só euclidianas.

É necessário que sejam feitas atividades que levem os estudantes do Ensino Médio a desenvolver a compreensão de um sistema axiomático através da investigação e comparação das Geometrias Euclidiana e Não Euclidiana.

Há algumas justificativas para um estudo de Geometria Não Euclidiana.

Por exemplo, a palavra “definição” tem um significado muito preciso em Geometria que é inteiramente diferente do seu significado na linguagem comum.

A Geometria Não Euclidiana está tendo um importante crescimento do seu próprio papel na ciência e tecnologia.

Um estudo de Geometria Não Euclidiana faz clarear que Geometria não é algo que foi completado 3000 anos passados na Grécia. Isto é um atual e ativo campo de pesquisa.

Seguem alguns outros exemplos de, como estudando Geometria Hiperbólica, os estudantes podem ser ajudados a entender a Geometria Euclidiana:

A definição de linhas paralelas em ambas Geometrias é: Linhas paralelas são infinitas linhas que no mesmo plano não se intersectam.

Na Geometria Euclidiana, nós podemos usar esta definição para provar o teorema que diz: “linhas paralelas são eqüidistantes em toda sua extensão”.

Quando estudantes são desafiados a provar este teorema, eles freqüentemente queixam-se "Eu posso ver que elas são eqüidistantes - o que você está exigindo que eu faça?".

Isto ocorre porque muitos de nós aprendemos as primeiras idéias sobre linhas paralelas quando ainda somos muito jovens. Nós mostramos as figuras e dizemos "estas são linhas paralelas".

Freqüentemente, usamos imagens mentais de linhas paralelas, de quadrados e de círculos como nossas definições. Isto, em Geometria, é completamente errado. Na linguagem comum, nós começamos com um objeto ou uma idéia. Uma definição não é mais que uma tentativa de descrever com palavras o objeto ou idéia pré-existentes. Por exemplo, um gato é algo que existe no mundo real. Quando nós vemos a palavra "gato" no dicionário, encontramos um monte de palavras que tentam descrever como consciente e precisamente é possível que um gato seja.

Um gato, e todos os objetos na linguagem comum, é a priori sua própria definição. Em Geometria, a definição é primária. Geometria começa com definições de objetos abstratos e invisíveis. As propriedades de um objeto abstrato seguem como conseqüências da definição e são chamadas de "teoremas". Por exemplo, linhas paralelas *não* existem no mundo real. Linhas paralelas são nada mais nada menos que "infinitas linhas no mesmo plano que não se intersectam". Esta distinção é muito difícil de entender e é a origem de muitas confusões sobre provas geométricas.

Um estudo da Geometria Hiperbólica ajuda-nos a escapar de nossas definições pictoriais, oferecendo-nos um mundo no qual as figuras são todas trocadas, mas o exato significado das palavras usadas em cada definição permanece inalterado. A Geometria Hiperbólica ajuda-nos a focar na importância das palavras.

Modernamente, este trabalho fica facilitado porque vários softwares interativos têm sido desenvolvidos e permitem que os estudantes explorem a Geometria. Os computadores oferecem um alto grau de visualização, desenhando rapidamente e medindo figuras geométricas com precisão que, por outro lado, requereriam complexos instrumentos de desenho, perícia técnica e tempo. Esta capacidade de construir gráficos dessas novas ferramentas ajuda os estudantes a explorarem modelos geométricos e teoremas não usuais no currículo escolar.

Usando estes programas de geometria nas escolas atualmente, os estudantes descobrem vários novos teoremas completamente.

Ressalta-se ainda que as ações sugeridas anteriormente para serem realizadas com os estudantes da educação básica devem estar referendadas pela participação dos professores destes alunos que por sua vez deverão ser formados adequadamente.

Como pode ser observado, anteriormente, apenas cerca de 12% das instituições formadoras pesquisadas têm Geometrias Não Euclidianas como componente curricular.

É desejável que as escolas de formação de professores repensem seu currículo de modo que o professor em formação receba suporte necessário para que ao final do seu curso tenha adquirido as habilidades e competências de modo a realizar com eficiência a ruptura do mito.

Encerrando essas reflexões pode-se ainda perguntar: Geometria euclidiana? Geometria hiperbólica? Ou Geometria elíptica?

Talvez a resposta possa ser... Geometrias!

REFERÊNCIAS

AABOE, Asger. *Episódios da história antiga da matemática*. 2 ed., Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2002.

BICUDO, Irineu. *O primeiro livro dos Elementos de Euclides*. Série Textos de História da Matemática. Natal, RGN: SBHMat., 2001.

BLUMENTHAL, Leonerd M.. *Geomatria Axiomatica*. Madrid: Aguilar, 1965.

BONOLA, Roberto. *Non-Euclidian Geometry*. New York: Dover Publication, 1970.

BOYER, Carl Bernjamin. *História da matemática*. Tradução: Elza F. Gomide. São Paula, Universidade de São Paulo, 1074.

COUTINHO, Lázaro. *Convite às Geometrias Não Euclidianas*. Rio de Janeiro: Interciência, 2001.

EVES, Haward. Introdução à história da matemática. Campinas: UNICAMP, 1995.

GUELLI, Oscar. *Matemática*. Série Brasil. São Paulo Ática, 2003.

HILBERT, David et al. *Geometry and the imagination*. New York: American Mathematical Society, 1999.

SCHUBRING, Gert. *Análise histórica de livros de matemática: notas de aula*. Campinas - SP: Autores Associados, 2003.

<www.facos.edu.br> Acesso em 23/06/2005

<www.sle.br> Acesso em 23/06/2005

<www.fsa.br> Acesso em 23/06/2005

<www.fameg.edu.br> Acesso em 23/06/2005

<www.iceb.ufop.br> Acesso em 23/06/2005

<www.puc-rio.br> Acesso em 23/06/2005

<www.ubm.br> Acesso em 23/06/2005

<www.uem.br> Acesso em 23/06/2005

<www.ufac.br> Acesso em 23/06/2005

<www.ufma.br> Acesso em 23/06/2005

<www.ufrn.br> Acesso em 23/06/2005

<www.ufsm.br> Acesso em 23/06/2005

<www.ufrr.br> Acesso em 23/06/2005

<www.ceul.ufms.br> Acesso em 23/06/2005

<www.unama.br> Acesso em 23/06/2005

<www.uniandrade.br> Acesso em 23/06/2005

<www.unibrasil.com.br> Acesso em 23/06/2005

<www.unioeste.br> Acesso em 23/06/2005

<www.dmat.ufpe.br> Acesso em 23/06/2005

<www.univale.br> Acesso em 23/06/2005

<www2.usp.br> Acesso em 23/06/2005

<www.uniube.br> Acesso em 23/06/2005

<www.usc.br> Acesso em 23/06/2005

<www.ufjf.br> Acesso em 23/06/2005

<www.ufpa.br> Acesso em 23/06/2005

<www.mat.ufrgs.br> Acesso em 23/06/2005

<www.uff.br> Acesso em 23/06/2005

<www.ufu.br> Acesso em 23/06/2005

<www.pb.cefetpr.br> Acesso em 23/06/2005

<www.uece.br> Acesso em 23/06/2005

<www.ueg.br> Acesso em 23/06/2005

<www.ufv.br> Acesso em 23/06/2005

<www.ufs.br> Acesso em 23/06/2005

<www.ufsj.edu.br> Acesso em 23/06/2005

<www.ufsc.br> Acesso em 23/06/2005

<www.ucs.br> Acesso em 23/06/2005

<www.ufmt.br> Acesso em 23/06/2005

<www.unicamp.br> Acesso em 23/06/2005

<www.uenf.br> Acesso em 23/06/2005

<www.ffc.br> Acesso em 23/06/2005

<www.ufg.br> Acesso em 23/06/2005

<www.unigran.br> Acesso em 23/06/2005

<www.cefetcampos.br> Acesso em 23/06/2005