CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE CAMPOS
Universidade da Tecnologia e do Trabalho
Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JULIANA SANTOS BARCELLOS CHAGAS

ENSINO-APRENDIZAGEM DE NÚMEROS INTEIROS NEGATIVOS:
Uma perspectiva histórico-cultural

Campos dos Goytacazes/RJ
2007

JULIANA SANTOS BARCELLOS CHAGAS

ENSINO-APRENDIZAGEM DE NÚMEROS INTEIROS NEGATIVOS: UMA PERSPECTIVA HISTÓRICO-CULTURAL

Campos Dos Goytacazes/RJ

2007

Monografia apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Campos como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof.ª Mestra Vera Lucia Fazoli da Cunha Freitas Viana

JULIANA SANTOS BARCELLOS CHAGAS

ENSINO-APRENDIZAGEM DE NÚMEROS INTEIROS NEGATIVOS:
UMA PERSPECTIVA HISTÓRICO-CULTURAL

Aprovada em 27 de fevereiro de 2007.

Monografia apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Campos como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Banca examinadora:

....

Prof.ª Vera Lucia Fazoli da Cunha Freitas Viana (orientadora)
Mestre em Educação Matemática / USU / RJ
Centro Federal de Educação Tecnológica de Campos

....

Prof. Salvador Tavares
Mestre em Educação Matemática / USU / RJ
Centro Federal de Educação Tecnológica de Campos

....

Prof.ª Mônica Souto da Silva Dias
Mestre em Educação Matemática / USU / RJ
Faculdade de Filosofia de Campos

AGRADECIMENTOS

À professora Vera Fazoli, por ter aceitado me orientar e pelo excelente trabalho e profissionalismo demonstrados durante todo o curso e nesta orientação.

A Leonardo Bernardo Campaneli da Silva, grande amigo, pelas sugestões e correções extremamente importantes para a conclusão deste trabalho.

À professora Mônica Souto, pelas sugestões e auxílio com textos no início do trabalho.

Ao professor Leandro Bessa Cardoso, por ter ajudado no contato com a escola em que foram aplicadas as Atividades.

À Luana Siqueira Sá, minha amiga, pela amizade e companheirismo durante a graduação, pelas sugestões nas Atividades e por ter me acompanhado na aplicação delas. Sua competência profissional e disposição em ajudar são louváveis.

A Marcio Alves de Souza e Michael Valadares, pelo excelente trabalho de ilustração das Atividades.

À professora Solange dos Santos Nieto, pela prontidão em enviar uma cópia da sua dissertação, mesmo sem me conhecer. Ela foi muito útil.

A todos os professores do Curso de Licenciatura em Matemática do CEFET Campos, por todo aprendizado proporcionado durante esses anos. Em especial à professora Gilmara Barcelos, por todo incentivo, pela competência distinta e pelo profissionalismo, que me inspiram em minha prática docente.

Aos colegas de turma, pelo privilégio de estudarmos juntos. Em especial meu amigo Flávio Afonso, por todas as palavras de apoio, pela admirável seriedade com que desempenha suas funções e pela notável aptidão para pesquisa.

À Cristina Barreto Tavares, pela presença tão importante e especial na minha vida desde meu primeiro ano no CEFET Campos. Obrigada pelos conselhos, correções, orações e pelo exemplo de vida.

À Georgina Brito, amiga muito amada, por todas as palavras de benção, por acreditar tanto no meu potencial e zelar por mim como uma mãe.

Aos irmãos e amigos da Igreja Evangélica Jehová-Shammah, pela amizade, cuidado, incentivo e paciência em me ouvir falar tanto em Matemática. Em especial aos amigos Rebeca Marques, Hellen Mesquita, Hermes José Ferreira Neto, Juliana Vasconcelos, Christiane Sinflório, Jeová Xavier, Penha Gonçalves e a todos da PEM 4, PEM 8 e equipe Yhaweh Rohi.

À minha amada família, por todo amor e investimento durante todos esses anos.

A Jesus Cristo, em quem estão escondidos todos os tesouros da sabedoria e do conhecimento, por me amar tanto e por me conduzir até aqui.

À minha mãe, meu referencial, ao meu pai amado e ao meu irmão Leandro, essencial.

RESUMO

Ensinar Matemática tem sido um desafio para professores ao longo dos séculos. Entender os aspectos envolvidos nesta tarefa é mister para responder devidamente este desafio. Diante disto, o presente trabalho objetivou compreender o processo de ensino-aprendizagem dos Números Inteiros Negativos por meio da análise de alguns aspectos relacionados a este processo: o desenvolvimento histórico do conceito dos números negativos, o modo como os livros didáticos abordam o conteúdo e a postura de professores ao ensiná-lo. A partir de uma perspectiva histórico-cultural da produção do conhecimento foi feita revisão bibliográfica, análise de livros didáticos e uma pesquisa com professores. Também propomos uma abordagem para o ensino de Números Inteiros Negativos. Os resultados mostraram que há deficiências relacionadas às operações matemáticas, bem como na atribuição de significado para os objetos matemáticos e na compreensão e interpretação de problemas matemáticos. E os livros didáticos e as posturas dos professores podem beneficiar a manutenção dessas deficiências. Este estudo concluiu que é preciso repensar a maneira de ensinar Números Inteiros Negativos, valorizando aspectos práticos e histórico-culturais de maneira a favorecer a aprendizagem dos discentes.

Palavras-chave: Ensino-aprendizagem. Números Inteiros Negativos. Perspectiva histórico-cultural.

ABSTRACT

Teaching Mathematics has being a challenge for teacher along centuries. Understanding the aspects involved in this task is necessary to answer properly this challenge. Therefore, the present work aimed to understand the teach-learn process through the analyse of some aspects related to this process: the historical development of the concept of Negative Whole Numbers, the way didactic books approach the subject and the teachers' posture on teaching them. From historical-cultural perspective of knowledge production, bibliographic review, analyses of didactic books and a research with teachers were done. We also propose an approach to the teaching of Negative Whole Numbers. Results show the deficiencies in Mathematics operations, as well in an attribution of meaning to the Mathematics objects and in the comprehension and interpretation of Mathematics problems. And the didactic books with teachers' posture can contribute to the perpetuation of these deficiencies. This study concluded that it is necessary to rethink the ways of teaching Negative Whole Numbers, in order to attribute a value on the practical and historical-cultural aspects and, with it, help the students learning.

Key-words: Teach-learn. Negative Whole Numbers. Historical-cultural perspective.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Há muito tempo o ensino de Matemática é uma preocupação de vários setores da sociedade. Não apenas a discussão sobre os conteúdos que deveriam fazer parte do currículo dos diferentes níveis de ensino, mas também o modo de se ensinar tais conteúdos. As diferentes épocas e sociedades exigiram diferentes formas de ensino: desde uma Matemática para elevação do espírito na Grécia Clássica; até uma Matemática suficientemente precisa e formal, base do pensamento científico a partir do século XVII, com o advento da Ciência Moderna.

As inúmeras pesquisas em Educação Matemática são reflexos das exigências apresentadas não apenas à disciplina Matemática, mas ao sistema educacional como um todo. E para poder responder e atender a estes anseios, as pesquisas desenvolvidas devem estar focalizadas e comprometidas com os problemas reais e agudos da sociedade, da escola, da ciência. Felizmente, como disse Darcy Ribeiro (1984), o saber acumulado dá de sobra para iniciar uma ação transformadora da educação popular; sabendo que ela deve ser iluminada por uma consciência aguda de si mesma que só a análise crítica e a pesquisa científica podem proporcionar.

Por isso o presente trabalho preocupa-se em, a partir de um tópico da Matemática do Ensino Fundamental – Números Inteiros Negativos –, identificar os métodos empregados no ensino deste conteúdo e os possíveis obstáculos à sua compreensão.

A escolha dos Números Inteiros Negativos foi justificada com o avanço da pesquisa bibliográfica. A dificuldade histórica dos matemáticos ocidentais para aceitá-los sinaliza ser este um terreno "tortuoso". Os números negativos são freqüentemente lembrados quando o assunto abordado são "tópicos difíceis" dentro do ensino de Matemática, como comentado por Lins (2004), Igliori (2000) e Lima (2000).

Devido à relevância do assunto, alguns questionamentos foram feitos para discutir, contemplando uma perspectiva histórica, sobre o processo de ensino-aprendizagem de Números Inteiros Negativos, a saber:

- Como ocorreu o desenvolvimento do conceito de números negativos na História? Quais as resistências ao seu estabelecimento?
- Quais as principais dificuldades dos alunos no aprendizado de Números Inteiros Negativos?
- Qual a contribuição dos métodos usados por professores e livros didáticos na geração e ampliação ou minimização dessas dificuldades?

Como esse é um assunto amplo, foram feitos recortes para atacar o problema. Assim, em cada capítulo, é dada uma visão geral dos vários pontos.

O primeiro capítulo aborda alguns aspectos considerados centrais no processo de ensino-aprendizagem (de Matemática).

No segundo capítulo encontra-se o desenvolvimento histórico do conceito de números negativos. Houve a preocupação de mostrar os fatos relevantes para este desenvolvimento dentro do contexto sócio-cultural da época.

O terceiro capítulo é dedicado à análise de livros didáticos da 6.ª série do Ensino Fundamental a partir da década de 80 do século XX, também levando em conta o contexto histórico da publicação.

No quarto capítulo, são apresentados os resultados da pesquisa realizada com professores de Matemática da 6ª série do Ensino Fundamental.

O quinto capítulo relata a elaboração e a aplicação da atividade proposta sobre Números Inteiros Negativos, assim como os resultados.

CAPÍTULO 1: ENSINO, APRENDIZAGEM E MATEMÁTICA

Reconhecendo a importância para o ensino da Matemática da compreensão dos fatores relacionados ao processo de ensino-aprendizagem, o presente capítulo aborda, em linhas gerais, aspectos considerados relevantes para esta compreensão.

Falar em ensino-aprendizagem evoca a existência de um *sujeito* que participa deste processo e de um *objeto* a ser apreendido e aprendido – neste caso a Matemática.

Esse sujeito – o homem, presente no mundo e com o mundo – existe no tempo. Esta existência não é passiva, ao contrário "está dentro. Está fora. Herda. Incorpora. Modifica. Emerge dele. Banha-se nele. Temporaliza-se" (Freire, 1985, p.41). Na medida que emerge do tempo, as relações do homem com o mundo vão adquirindo mais sentido: ao herdar experiências, criar e recriar, integrar-se às condições de seu contexto, responder a seus desafios, objetivar-se a si mesmo, discernir e transcender, lança-se num domínio que lhe é exclusivo – o da História e o da Cultura.

Por esse processo o seu mundo torna-se dinâmico e ele, o homem, humano. Passa a dominar sobre a realidade, fazer cultura, participar de sua época histórica com suas aspirações, anseios, valores, formas de ser, de comportar-se. Isto requer uma permanente postura crítica ante a realidade. Para Paulo Freire (1985), este é o único modo do homem realizar sua vocação natural de integrar-se, superando a simples atitude de ajustamento e acomodação. Esta postura crítica está no que Freire (2001) chama de *leitura do mundo*. Ele afirma que "a leitura do mundo precede a leitura da palavra, daí que a posterior leitura desta não possa prescindir da continuidade da leitura daquele" (p.11).

Ou seja, a escolarização não pode privar o homem da sua criticidade e criatividade, ao contrário, deve favorecê-las. Além disso, ao afirmar que a leitura do mundo é anterior à leitura da palavra, Paulo Freire mostra que a aprendizagem não começa na escola, antes, é anterior a ela.

A aprendizagem escolar nunca parte do zero, ela tem uma *pré-história*. A Aritmética é um exemplo dado por Vigotsky (1998) para isto. Muito antes de ir à escola, a criança adquire certa experiência referente à quantidade e encontra várias operações de divisão e adição, complexas e simples, tendo uma *pré-escola de aritmética*. Desta forma, a aprendizagem escolar sempre é precedida de uma etapa definida de desenvolvimento obtida pela criança antes de entrar para a escola, quer dizer, obtida desde os seus primeiros dias de vida.

Vigotsky estabelece que para a concreta relação entre o desenvolvimento e a capacidade potencial de aprendizagem ser estabelecida, pelo menos dois níveis de desenvolvimento de uma criança devem ser determinados: o *desenvolvimento efetivo* e a *zona de desenvolvimento potencial*. O primeiro diz respeito ao desenvolvimento das funções psicointelectuais da criança resultante de um processo específico de desenvolvimento já realizado. O segundo está relacionado com aquilo que a criança é capaz de fazer com o auxílio dos adultos. Esta zona de desenvolvimento potencial permite determinar a dinâmica do desenvolvimento da criança e os resultados do processo de maturação. Este fato afeta a concepção pedagógica pois segundo Vigotsky,

> um ensino orientado até uma etapa de desenvolvimento já realizado é ineficaz do ponto de vista do desenvolvimento geral da criança, não é capaz de dirigir o processo de desenvolvimento, mas vai atrás dele. A teoria do âmbito de desenvolvimento potencial origina uma fórmula que contradiz exatamente a orientação tradicional: *o único bom ensino é aquele que se antecipa ao desenvolvimento*.(p.114)

A aprendizagem gera, incita e ativa na criança um grupo de processos internos de desenvolvimento no campo das inter-relações com outros, que ao prosseguirem, são absorvidos pelo processo interno de desenvolvimento e transformados em aquisições internas da criança. Portanto, ela não é em si mesma desenvolvimento; mas, a devida organização da aprendizagem, conduz ao desenvolvimento mental. Além disso, a aprendizagem na criança é um momento intrinsecamente indispensável no desenvolvimento de características humanas não-naturais, mas formadas historicamente.

Esse processo de aprendizagem é contínuo e baseado nas várias experiências incorporadas à história do indivíduo. O reconhecimento disto afeta grandemente o conceito de escola e em particular o ensino de Matemática.

Segundo D’Ambrosio (1993), ao longo da História têm ocorrido grandes controvérsias filosóficas e epistemológicas em torno da Matemática. O próprio conceito de verdade associado à Matemática tem influências notáveis na educação. Por isto, o ensino desta disciplina – especialmente por suas relações com outras áreas do conhecimento e por suas implicações políticas, sociais e econômicas – demanda considerações específicas de cognição, de organização do conhecimento e de política (formas de explicitação, de entendimento e de manejo da realidade).

A sociedade está impregnada de Matemática. Atividades envolvendo alguma forma de Matemática são encontradas no dia-a-dia de todos os povos e culturas. Sua universalidade, a qual atravessa diferenças culturais e representa o único elo absolutamente intercultural, observada por D'Ambrosio, a confirma como um produto cultural.

Radford (1997) argumenta que o conhecimento matemático não é simplesmente concomitante com seu ambiente cultural, mas a configuração e o conteúdo estão profundamente impregnados da cultura na qual este conhecimento é desenvolvido e está sujeito. Assim, a visão cultural da Matemática determina a organização da investigação científica, os tipos de argumentos que serão socialmente aceitos, as evidências e as explicações que serão validadas. Esta concepção determina não apenas a função social do conhecimento matemático mas também – em um nível mais abstrato – a concepção dos próprios objetos matemáticos.

O conhecimento é uma produção social e o ensino deve preservar seu caráter criativo. Referindo-se à leitura, Paulo Freire diz:

> O fato de necessitar da ajuda do educador, como ocorre em qualquer relação pedagógica, não significa dever a ajuda do educador anular a sua [do educando] criatividade e a sua responsabilidade na construção de sua linguagem escrita e na leitura desta linguagem. (2001, p.19)

Isso é aplicável a todas as disciplinas, inclusive a Matemática. E assim como o conhecimento matemático foi sendo criado e recriado ao longo dos séculos, esse dinâmico processo não pode estar fora da sala de aula. Os alunos precisam ver o conhecimento matemático com naturalidade, não como algo fora deles, mas como uma condição de estar no mundo. Isto significa democratizar a possibilidade da naturalidade da Matemática, o que para Freire, em entrevista a D'Ambrosio (2000), é cidadania. Pois para ele, somos *corpos conscientes matematizados*, e existe uma forma matemática de estar no mundo que deve ser mostrada ao aluno. E, ao viabilizar a convivência com a Matemática, inúmeras questões, até então sem solução por falta de um mínimo de competência sobre a matéria, são solucionadas.

No entanto, o que encontramos são duas Matemáticas que se opõem. Lins (2004) as chama de *Matemática acadêmica* (oficial, da escola, formal, do matemático) e *Matemática da rua*. E existe entre elas um estranhamento, de tal forma que uma ignora e desautoriza a outra.

A Matemática do matemático – e da escola – é o resultado de um esforço histórico de por significado a significantes. Ela é *internalista*, ou seja, na definição de um objeto seu, não cabe discutir se esta definição tem correspondência adequada a algo fora da própria

Matemática. Os seus objetos têm uma natureza *simbólica*: são conhecidos em suas propriedades, não no que eles são. Ela *não depende* (em seus próprios termos) *de nada que exista no mundo físico*, logo, não pode ser natural para os cidadãos ordinários.

Lins (1999) reconhece que o que está na rua e o que está na escola são legitimamente diferentes para diferentes modos de produção de significado, e a escola nega os significados da rua, por considerá-los versões imperfeitas dos (verdadeiros) significados matemáticos. Do mesmo modo, os significados da escola nunca chegam a ser legitimados na rua. Por exemplo:

> Na rua o número negativo não pode nunca se realizar plenamente, na escola ele deve se realizar naturalmente. Na Matemática do matemático $(-1)\times(-1)=1$, e assim também na da escola, mas na rua isto não é nada, a não ser um rabisco num papel ou numa lousa, um vestígio, uma pegada de um monstro que se deixou escapar. (LINS, 2004, p.115)

Lins levanta a questão da utilidade: servir para alguma coisa para alguém. Isto implica em que ao trazer para a escola algo "da rua", não basta atribuir-lhe os significados da escola, pois estes serão rapidamente esquecidos. Ele precisa sair melhor, "mais bonito". A Matemática escolar tem que ajudar o aluno a compreender melhor o seu mundo e a transformá-lo, melhorá-lo.

O ponto de partida da prática educativa, segundo Freire, argumentando com D'Ambrosio (2000), deve ser a compreensão que o educando tem do mundo (ou esteja tendo) e não a compreensão que o educador e o seu sistema de conhecimento têm do mundo.

CAPÍTULO 2: DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DO CONCEITO DE NÚMERO NEGATIVO

A lenta e rica conceituação dos números negativos é um valioso exemplo de processo de desenvolvimento conceitual na Matemática. Parte de noções empíricas atreladas às experiências da vida cotidiana, passando por mais de 1500 anos de esforços de matemáticos para entenderem e legitimarem – alguns refutarem – este importante conceito.

A História da Matemática alcançou, no século XX, um *status* de importância no ensino da Matemática. Não apenas como um recurso motivador, mas também na análise do conhecimento matemático, visando à compreensão de processos de construção do conhecimento. Nos anos 70 foi introduzida na Matemática, por Brousseau, a noção de obstáculo epistemológico. Segundo ele, este tipo de obstáculo está relacionado à má adaptação de um saber e é um meio de explicar alguns erros repetitivos e não eventuais, de alguns estudantes, quando são ensinados alguns tópicos de Matemática.

Segundo Igliori (2000), "um obstáculo de origem epistemológica é verdadeiramente constitutivo do conhecimento, é aquele do qual não se pode escapar e que se pode em princípio encontrar na história do conceito" (p.97). E a fundamentação para este obstáculo está na sua aparição e resistência na história de determinado conceito, assim como a identificação de concepções análogas entre os alunos.

Para Radford (1997), os obstáculos epistemológicos não podem resistir aos efeitos da cultura e, portanto, são obstáculos culturais. E a análise histórico-espistemológica pode fornecer informações interessantes sobre o desenvolvimento do conhecimento matemático dentro e através de diferentes culturas.

Schubring (2000), ao final de sua análise das discussões em torno dos números negativos na França e na Alemanha, conclui que a escolha (coletiva) por uma ou outra epistemologia, dentro de uma cultura, destaca as condições sociais e é suscetível a mudanças e a rupturas. Esta epistemologia, escolhida com o conhecimento das demais possibilidades, não pode ser desqualificada e rotulada como obstáculo.

Por isso, neste capítulo, o desenvolvimento, as dificuldades e as resistências encontradas no estabelecimento da teoria dos números inteiros relativos ao longo da história são apresentados, levando-se em consideração as diferentes culturas e épocas. Não houve preocupação em classificar estas dificuldades ou compará-las às dificuldades dos alunos atuais com os números negativos. Mas mostrar como a produção de conhecimento e a maneira como se lida com ele pode variar não apenas em função do tempo, da época, mas de acordo com as necessidades de uma sociedade.

No Oriente Antigo, a Matemática surgiu como uma ciência prática com o objetivo de facilitar o cálculo do calendário, a administração de colheitas, a organização das obras públicas e a cobrança de impostos. E apesar dos negócios e dos comércios a que estas sociedades antigas estavam entregues, a sua base econômica era agrícola e estava centralizada nas aldeias. A ênfase inicial foi dada à aritmética prática e à medição. Não são encontradas tentativas de demonstração, nem argumentações, apenas "receitas" de como resolver alguns problemas.

Vestígios dos números negativos são encontrados através de dois escritos chineses datados de 300 a.C., aproximadamente: Chou Pei Suang Ching e Chiu Chiang Suan Shu (*Nove Capítulos da Arte Matemática)*. Nele são encontrados problemas matemáticos, cálculos, equações e modos de mensuração. De acordo com Struik (1992), o último texto consiste principalmente em problemas com regras gerais para sua solução. Alguns de seus cálculos aritméticos conduziam a sistemas de equações lineares, por exemplo, o sistema escrito na forma de matriz dos coeficientes. Nestas matrizes são encontrados os primeiros registros de números negativos.

Segundo Schubring (2000), os matemáticos chineses empregavam as quantidades negativas como forma intermediária no cálculo para resolução de problemas, embora essas quantidades não fossem admitidas como soluções.

Nieto (1994) menciona que a numeração chinesa conservou-se essencialmente decimal, com dois sistemas de notação convivendo juntos. Além disto, o conceito de número negativo já estava consolidado na China pelo uso de barras coloridas para efetuar cálculos.

Lizcano, citado por Radford (1997), diz que o emprego de barras nos cálculos chineses (importado de práticas não-matemáticas) incorporava às suas manipulações matemáticas alguns pressupostos e possibilidades operacionais muito diferentes daquelas que transpõem os segmentos alfanuméricos e numéricos da Matemática grega. O sentido das barras pretas representando números negativos no quadro de calcular permitia aos chineses ter algo considerado um absurdo para a *episteme* grega. E a localização física das barras coloridas neste quadro – algo intimamente ligado à disposição espacial e à configuração estrutural da linguagem chinesa – era carregada de significados retirados da cultura. Assim, o furo (wu), ou zero chinês, era a forma de autorizar, com todos os seus direitos para os chineses, uma regra análoga para os princípios gregos de identidade e não contradição.

A origem da regra de sinais é comumente atribuída a Diofantes de Alexandria (século III d.C.). Ele não fez referência alguma aos números negativos isolados, mas, em seu Livro I de Aritmética, mencionou o produto de duas diferenças. A regra $(-)\times(-)=(+)$ é dada como um procedimento transitório até que se obtenha uma resultado "aceitável", isto é, positivo (apud Glaeser, 1985, p.47, 49). Não há demonstração.

Radford (1997) afirma que o declínio do racionalismo grego e o surgimento do neoplatonismo criaram uma fratura no pensamento clássico que tornou possível pensar não apenas sob uma nova perspectiva, mas sobre coisas até então impensadas, como por exemplo, repensar o significado de mônada[1] ou "1" e perceber um certo "negativismo" dos números, como é encontrado na Aritmética de Diofantes.

Segundo Glaeser (1985), embora os matemáticos da época evitassem empregar os números negativos, a prática do cálculo forçou sua introdução como intermediários aos cálculos.

Na Índia, Brahmagupta (século VII d.C.) contribui para a Álgebra ao apresentar soluções gerais para equações quadráticas, inclusive envolvendo raiz negativa. Uma característica dos seus trabalhos era a parte aritmético-algébrica – característico das equações indeterminadas –, que segundo Struik (1992), indica alguma afinidade com Diofantes. Bhaskara, no século XII, chamava os números positivos de "propriedades" ou "bens" e os números negativos de "dívidas". Ele não considerava os números negativos absolutos.

Para Glaeser (1985), as obras indianas da época eram apenas coletâneas de sentenças, atreladas a exemplos de aplicação numérica, pois não havia preocupação em justificar a regra de sinais.

Entre os árabes as quantidades negativas não eram aceitas e, por isso, os matemáticos escolhiam na Álgebra indeterminada as constantes que lhes assegurassem soluções positivas. Mesmo assim, conheciam as regras dos números com sinal.

Segundo Struik (1992), na Europa ocidental da Idade Média, durante os primeiros séculos do feudalismo, houve pouco interesse pela Matemática. A economia monetária foi substituída pela troca de gêneros e por mercados locais. Os aristocratas, donos de terras, ganharam importância com o declínio do comércio e os senhores feudais tornaram-se o poder dominante. As cidades deram lugar aos feudos. A sociedade era extensivamente agrícola.

Ao expandirem, a aldeias tornaram-se burgos, que cresceram como unidades independentes e cujo estilo de vida negava o ócio baseado na escravidão. Após inúmeros conflitos entre os habitantes das cidades medievais e os senhores feudais nos século XII ao

[1] unidade

XIV, os habitantes destas cidades venceram. Esta vitória provocou a expansão do comércio e o desenvolvimento gradual da tecnologia. As cidades começaram a estabelecer relações comerciais com o Oriente, algumas de forma pacífica e outras com violência. A troca de saberes seguiu ou, algumas vezes, precedeu os mercadores e os soldados.

Leonardo de Pisa, também conhecido como Fibonnacci, era um mercador ocidental. Em seu livro *Liber Abaci*, de 1202, ele reúne informações aritméticas e algébricas coletadas em suas viagens ao Oriente (apud Struik, 1992, p.138).

Segundo SCHUBRING (2000, p.54, 55), neste livro Fibonnacci considerava a possibilidade de uma solução negativa, no entanto a tinha como inválida. Desta forma, ele admitia apenas os problemas nos quais era possível interpretar os valores negativos como algo positivo.

O crescimento das cidades mercantis, sob influência direta do comércio, da navegação, da astronomia e da agrimensura, favoreceu o desenvolvimento da Matemática. Os moradores destas cidades estavam interessados na contagem, na aritmética e na computação.

Com a invenção da imprensa, começaram a ser publicados livros para o ensino de aritmética prática e para aplicações comerciais.

Um manuscrito datado de 1430, aproximadamente, é o primeiro texto conhecido no qual um resultado negativo é aceito sem ressalvas. É a resolução de um problema através de um sistema de cinco equações lineares; tendo para uma das variáveis, a primeira solução negativa ($-10\frac{3}{4}$) (apud Schubring, 2000, p.55).

Em NIETO (1994, p.34) é encontrada referência a Michael Stifel (1487-1567), que em *Arithmética Íntegra*, explica, por meio de uma regra especial, quando usar + e -. No entanto, ele não admitia números negativos como raízes de uma equação e os chamava de *numeri absurdi*.

STRUIK (1992, p.147) afirma que Cardano, em *Ars magna*, de 1545, considerou os números negativos, chamando-os "fictícios".

Não apenas a imprensa, mas a invenção das armas de fogo, a construção de moinhos de vento e de canais e a construção de barcos para a navegação evidenciaram o valor da técnica. As máquinas conduziram à mecânica teórica e ao estudo científico do movimento e da mudança em geral.

Simon Stevin (1540-1620) tratou abundantemente dos números negativos utilizados como artifício de cálculo e aperfeiçoou seu emprego propondo que ao invés de se dizer, por exemplo, “diminua 3”, dizer “acrescente -3”. Mas, ao interpretar as raízes negativas de uma equação afirmava que estas são raízes positivas da transformada em –x (apud Glaeser, 1985, p.53).

Albert Girard (1590-1633) enunciou as relações entre raízes e coeficientes, admitindo raízes negativas e imaginárias. Ele compreendia que os números negativos estão orientados em sentido opostos aos positivos e que indicam, geometricamente, um retrocesso, enquanto os números positivos, um avanço (apud Nieto, 1994, p. 35).

A renovação de toda a Matemática ocorreu num ambiente intelectual no qual os pensadores gradualmente abandonavam a visão aristotélica da natureza, que, para Struik (1992), era completamente inadequada “num mundo onde a medição, os cálculos, a engenharia e a quantidade, em geral, com suas relações causais, tornavam-se cada vez mais importante” (p.162).

Um importante estímulo para essa renovação gradual, segundo Struik (1992), foi a publicação de *La Géométrie* em 1637, de René Descartes (1596-1685). Esta publicação pôs todo o campo da geometria clássica no domínio de ação dos algebristas. Glaeser (1985) observa que Descartes considerava separadamente duas semi-retas opostas – e não um eixo sobre o qual a abscissa de um ponto varia de $-\infty$ a $+\infty$ –, entendendo que a semi-reta negativa deveria se dirigir em sentido contrário à positiva. Ele utilizou o artifício da mudança de origem das abscissas para obter equações com todas as raízes positivas. Neste livro, Descartes apresenta uma regra para determinar o número de raízes positivas e negativas (por ele chamadas de raízes verdadeiras e falsas).

A atividade de matemáticos nesse período foi estendida a muitos campos, com o aprofundamento de assuntos clássicos e criação de novos temas de pesquisa. Um exemplo foram os estudos de Pierre de Fermat (1601-1665) sobre Diofantes. Além disso, ele, junto com Pascal, foram os fundadores da teoria matemática das probabilidades. Fermat ainda propôs um método para, em alguns casos, obter, de raízes “falsas” em uma equação diofantina, uma solução aceitável (apud Struik, 1992, p.172, 173).

Segundo Glaeser (1985), até o século XVIII, não havia muitas oportunidades de utilizar os números negativos na vida cotidiana. Apesar das contas dos comerciantes, a prática das partidas dobradas em contabilidade opunham-se radicalmente a créditos e débitos (combinando-os apenas no fim das páginas dos livros de registro). Além disto, não havia escalas termométricas. Os primeiros fabricantes de termômetros escalonavam os instrumentos de acordo com temperatura da fusão da manteiga. Somente em 1730, os primeiros termômetros científicos foram produzidos por Réaumur, que propôs sua escala de temperaturas.

Nesse século, a produção em Matemática estava concentrada no Cálculo e nas aplicações à Mecânica. Para Struik (1992), o matemático mais produtivo do século XVIII foi Léonard Euler.

De acordo com Schubring (2000, p.55), Euler contribui notavelmente em todos os campos da Matemática. E, em seu manual de Álgebra, datado de 1766, ele forneceu um modelo de admissão de um estatuto para os números negativos. A subtração não está restrita ao caso em que o subtraendo é menor que o minuendo. Além disto, afirmou que os números negativos são menores que zero e conceituou os números inteiros. Euler também definiu as quatro operações sobre esses números. Ele interpretava as quantidades como bens ou dívidas.

Para Glaeser (1985), Euler "tropeça" ao tentar justificar a regra de sinais. Ele divide a argumentação em três partes:

> 1. A multiplicação de uma dívida por um número positivo não apresenta qualquer dificuldade: três dívidas de a escudos fazem uma dívida de 3a escudos. Logo $\underline{b} \times (-\underline{a}) = -\underline{ab}$. (...)
> 2. Por comutatividade, Euler deduz daí que $(-\underline{a}) \times \underline{b} = -\underline{ab}$. (...)
> 3. Resta determinar o que é (grifo nosso) o produto (-a) por (-b).
>
> _ É claro, diz Euler, que o valor absoluto é ab. Trata-se portanto de decidir entre +ab e –ab. Como $(-\underline{a}) \times \underline{b}$ já vale –ab, a única possibilidade restante é de que $(-\underline{a}) \times (-\underline{b}) = +\underline{ab}$. (!!!) (1985,p.65)

Na visão de Glaeser, Euler não ultrapassou o nível da vulgarização.

Na França, na segunda metade do século XVIII, os números negativos conservavam um estatuto um pouco ambíguo. O artigo *Negativo*, que d'Alembert (1717-1783) escreveu para a Enciclopédia de Diderot, revela isto.

D'Alembert criticou o fato da teoria das quantidades negativas não estar totalmente esclarecida. Censurava os autores de manuais por considerarem as quantidades negativas ora como abaixo do nada, ora como expressão de dívidas. Para ele as quantidades negativas deveriam ser assumidas como falsas posições a serem traduzidas para quantidades positivas. Ao mesmo tempo, apresenta na Enciclopédia uma aceitação das quantidades negativas, em que estas, juntamente com as positivas, servem de noções fundamentais à Álgebra (apud Schubring, 2000, p.56).

Na obra de Condillac, *La Langue des Calcus*, um grande esforço para estabelecer uma teoria dos números negativos. Ao realizar a passagem das quantidades/grandezas ao número, Condillac desenvolveu uma teoria genética do nascimento do conceito de número. Neste contexto, ele analisou os números negativos como uma extensão da noção de subtração, redefinida por ele como uma extensão da adição (apud Schubring, 2000, p.57).

Nos séculos XVII e XVIII a Geometria foi mantida à margem de outros ramos da Matemática. Nos últimos anos do século XVIII houve alguns sintomas de reavivamento da Geometria pura, mas foi principalmente no início do século XIX que a Álgebra foi posta em segundo plano e a Geometria adquiriu status fundamental, na atribuição de significado imediato aos símbolos matemáticos. O primeiro a transmitir esta nova concepção à Matemática foi Lazare Carnot, inicialmente em 1801, depois sob uma forma mais desenvolvida em 1803.

Para ele, quantidade negativa isolada era um ser de razão, que, ao aparecer nos cálculos, não passava de simples forma algébrica. E a Geometria de posição era o meio de suplantar a noção de quantidades positivas e negativas, totalmente rejeitada por ele. Ele substituiu esta noção pela noção de quantidades diretas e inversas (apud Schubring, 2000, p.61).

Carnot (1753-1823) era considerado, em seu tempo, um dos maiores matemáticos franceses e gozou, por muito tempo, de imenso prestígio. Por isto, na França, raros foram os que contestaram sua visão sobre as quantidades negativas.

De acordo com Glaeser (1985), a grande contribuição de Carnot, no que concerne aos números negativos, não se encontra nas respostas dadas às questões levantadas; mas em suas "inquietantes interrogações" que influenciaram os Moebius e os Chasles a elaborarem a Geometria orientada e a utilizarem um único eixo para representar toda a reta $\mathbb{R}$, sem necessitarem recorrer "a raciocínios isolados sobre semi-retas opostas" (p.82).

Em 1821, Augustin Cauchy (1789-1857) publicou seu *Cours d'Analyse*, destinado à Escola Politécnica. Glaeser (1985) observa que, a princípio, Cauchy "faz uma nítida distinção entre números (reais positivos) e as quantidades (números relativos). Apresenta estes últimos de maneira unificada" (p.96).

E para justificar as propriedades aditivas dos números relativos, Cauchy assume os números positivos como indicadores de aumento e os negativos indicando diminuição. Mas abandona os modelos concretos e as metáforas ao abordar de forma dogmática a multiplicação.

Segundo Schubring (2000), ao contrário da França, a Alemanha não conheceu rejeição ao estatuto matemático dos números negativos, pelo menos até 1820. Em vez disto, desde a metade do século XVIII, era estabelecido um quadro teórico para justificar as operações algébricas com todos os inteiros – a "doutrina das quantidades opostas".

A.G. Kästner (1719-1800), professor de matemática na Universidade de Göttingen, em suas obras desenvolve o conceito de quantidades opostas como sendo "quantidades da mesma espécie que podem ser consideradas na condição de que uma diminui a outra" (SCHBRING, 2000, p.37). Com respeito às relações entre as quantidades, ele explica que a quantidade negante pode exceder a afirmativa, e que este "negativo" que sobra é uma quantidade real.

Glaeser (1985) mostra que essa exposição foi retomada pelo filósofo Emmanuel Kant em 1763 em "Ensaio para introduzir em filosofia o conceito de grandeza negativa". A análise é conduzida ali tendo em vista esclarecer a noção de existência. Após declarar que duas coisas são opostas entre si, quando a introdução de uma suprime a outra, Kant estabelece a distinção entre a posição lógica (que esbarra no princípio da contradição) e a posição real de modo que dois predicados de um sujeito são opostos, mas não contraditórios. A conseqüência disto, de acordo com Schubring (2000), é a distinção entre o nada absoluto (ou concepção filosófica) e o nada relativo (como o zero matemático), e a aceitação das quantidades que são "menos que nada".

P.J. Hecker, professor de Matemática na Universidade de Rostock, foi o primeiro a realizar uma verdadeira revisão dos elementos da aritmética, demonstrando que as operações matemáticas mudam de significado quando se passa das operações com números positivos às operações com inteiros, e que é necessário redefinir estas operações e estendê-las, para que sejam aplicáveis a todos os inteiros. Hecker foi também o primeiro a descobrir as diferenças entre as operações com números e as operações com grandezas e as operações mistas (apud Schubring, 2000, p.76).

Em 1867, Herman Hankel (1839-1873) publicou *Teoria dos sistemas dos números complexos*, superando finalmente todas as barreiras referentes à teoria dos números. Glaeser (1985) destaca que, em seu trabalho, Hankel abandonou o ponto de vista "concreto" para assumir o ponto de vista "formal". Não buscou na natureza exemplos práticos que explicassem os números, pois estes não eram mais descobertos, porém inventados e imaginados.

> A perturbação introduzida por Hankel inscreve-se na ruptura de uma ideologia que impregnava o pensamento matemático até o fim do século XIX.
>
> Essa ideologia referia-se ao que se pensava inconscientemente sobre as relações mantidas pela Matemática com a realidade física.

> Lembremo-nos de que os conceitos matemáticos têm sua origem remota na vida prática. Mas, um salto epistemológico decisivo foi efetuado na Antiguidade, quando se proclamou que os objetos matemáticos devem ser convenientemente idealizados para inserir-se num discurso hipotético-dedutivo: uma reta não é um bastão; o número π é coisa muito diferente da medida de um barbante enrolado num cilindro! (GLAESER, 1985,p.108)

CAPÍTULO 3: ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

Tendo em vista a identificação de causas geradoras de dificuldades no aprendizado de números negativos, a análise de livros didáticos é parte fundamental nesta pesquisa.

Foram selecionados livros de Matemática da 6.ª série do Ensino Fundamental a partir da década de 80 devido às importantes mudanças ocorridas no ensino de Matemática desde então.

Os aspectos a serem levantados são: as representações dos números negativos, as operações, a(s) justificativa(s) para a regra de sinais, as aplicações e se há uma abordagem histórica.

A grande expansão da educação a partir do final do século XIX, que se manifestou mais intensamente na metade do século XX, levou à universalização do ensino da Matemática: o ensino de, praticamente, uma mesma Matemática para todos.

No Brasil, essa Matemática estava presente na ênfase à profissionalização e em paralelo, na preocupação com a produção. A mudança do perfil do consumidor tornou essencial o movimento "Matemática para todos".

A complexidade da sociedade no pós-guerra e dos meios de produção exigiram uma outra Matemática nas escolas. Alguns educadores matemáticos começaram a aceitar a motivação como um fator de grande importância na aprendizagem, conseqüentemente entender como o indivíduo aprende tornou-se fundamental. Integrar o aluno no pensar e no fazer moderno exigiam outra experiência.

Na década de 60, surgiu o movimento chamado de Matemática Moderna, inserido numa política de modernização econômica. A Matemática, juntamente com a área de Ciências, era considerada uma via de acesso privilegiada para o pensamento científico e tecnológico.

Sua propagação foi rápida – veiculada principalmente pelos livros didáticos – e acabou por entrar nos currículos escolares com a finalidade de substituir os cálculos pelas idéias.

A Matemática Moderna estava apoiada no estruturalismo piagetinano e na corrente formalista na Matemática, através dos trabalhos do grupo Bourbaki. Paralelo a isto, no Brasil, em 1961, foi criada a 1ª Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, nº 4024/61. A tramitação do projeto desta lei de âmbito nacional que regulamentou o sistema educativo, durou 13 anos. Ela estabelecia três níveis consecutivos: primário, secundário e colegial.

E em 1971 a lei de reforma do ensino primário e secundário, lei 5692/71, estabelecia que todo ensino do 2º grau deveria ser profissionalizante como forma de atender à necessidade do mercado de trabalho. Além disto, trouxe algumas idéias da Escola Nova. No entanto, ela era centralizadora e delimitou a ação da escola, retirando sua autonomia e a dos professores na forma de decisão do processo educativo.

Nos anos 70, os profissionais envolvidos com o ensino de Matemática começaram a perceber que muitas das mudanças introduzidas pela Matemática Moderna não trouxeram os resultados esperados. Oposição a Piaget era levantada e a busca das influências sociais e culturais na elaboração do conhecimento estava em plena ascensão. Críticas foram feitas à Matemática Moderna devido a sua excessiva formalização e ao tratamento axiomático, que deixavam de lado os processos mais intuitivos.

> Se puede decir que los inconvenientes surgidos con la introducción de la llamada "matemática moderna" superaron con mucho las cuestionables ventajas que se había pensado conseguir como el rigor en la fundamentación, la comprensión de las estructuras matemáticas, la modernidad y el acercamiento a la matemática contemporánea. (GUZMÁN, s d)

Os anos 70 e 80 foram marcados pelas discussões, por parte da comunidade matemática internacional, sobre a validade dessa Matemática e pela busca intensa de formas mais adequadas para lidar com os novos desafios do ensino de Matemática.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental de Matemática (1998) fazem referência ao documento publicado, em 1980, pelo o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), dos Estados Unidos, que apresentava recomendações para o ensino de Matemática, como por exemplo o foco na resolução de problemas e a “compreensão da relevância de aspectos sociais, antropológicos, lingüísticos, além dos cognitivos, na aprendizagem de Matemática” (p.20).

As idéias propagadas nesse documento foram discutidas e influenciaram reformas em todo o mundo – inclusive no Brasil – no período de 1980/1995. Alguns pontos comuns nas diversas propostas elaboradas:

- direcionamento do ensino fundamental para a aquisição de competências básicas necessárias ao cidadão e não apenas voltadas para a preparação de estudos posteriores;

> - importância do desempenho de um papel ativo do aluno na construção do seu conhecimento; ênfase na resolução de problemas, na exploração da Matemática a partir de problemas vividos no cotidiano e encontrados nas várias disciplinas;
> - importância de trabalhar com amplo espectro de conteúdos, incluindo já no ensino fundamental, por exemplo, elementos de estatística, probabilidade e combinatória para atender à demanda social que indica a necessidade de abordar esses assuntos;
> - necessidade de levar os alunos a compreender a importância do uso da tecnologia e a acompanhar sua permanente renovação.
>
> (Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental de Matemática, 1998, p.20)

Tendências no ensino de Matemática que tomaram espaço desde então: o caráter sócio-cultural do conhecimento matemático e sua dimensão política, a História da Matemática como elemento motivador e até mesmo fonte para compreensão da origem das idéias matemáticas, o uso da tecnologia (calculadoras e computadores) no ensino de Matemática, além das pesquisas em cognição.

Aprovada em 1996, a nova Lei de Diretrizes e Bases da Educação (Lei 9394/96) garante toda a Educação Básica, ao contrário da anterior que garantia apenas a Educação Infantil e o Ensino Fundamental. Ela estabelece novos paradigmas para a educação: criatividade, flexibilidade, organização em grupo, liderança, etc. Para tanto, defende a contextualização e interdisciplinaridade. Pauta-se na formação para a cidadania e para o mundo do trabalho.

Em 1997, nos Parâmetros Curriculares Nacionais, verifica-se o esforço na fundamentação de propostas inovadoras. Eles estão apoiados em normas legais e procuram cooperar na busca de respostas a problemas identificados no ensino, tendo em vista uma transformação deste ensino que atenda às demandas da sociedade. E nos PCN's do terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental parte dos objetivos da Matemática para o terceiro ciclo (5.ª e 6.ª séries) são:

> .Do pensamento numérico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:
>
> - ampliar e construir novos significados para os números – naturais, inteiros e racionais – a partir de sua utilização no contexto social e da análise de alguns problemas históricos que motivaram sua construção;

> ▪ resolver situações-problema envolvendo números naturais, inteiros, racionais e a partir delas ampliar e construir novos significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação;
> ▪ identificar, interpretar e utilizar diferentes representações dos números naturais, racionais e inteiros, indicadas por diferentes notações, vinculando-as aos contextos matemáticos e não-matemáticos;
> ▪ selecionar e utilizar procedimentos de cálculo (exato ou aproximado, mental ou escrito) em função da situação-problema proposta. (1998,p.64)

OS LIVROS DIDÁTICOS

Os livros didáticos selecionados para análise estão apresentados em ordem cronológica de publicação.

Década de 80

- **Matemática – livro do professor,** Orlando Zambuzzi, 1980.

O livro do professor difere do livro dos alunos por apresentar, no início de cada capítulo os objetivos.

São dedicados nove capítulos para o estudo do conjunto dos números inteiros. Ele inicia o primeiro capítulo com exemplos numéricos de adição em $\mathbb{N}$, sendo o último $2-5=x$. A partir dele, propõe a ampliação do conjunto dos números naturais. São apresentados exemplos (ilustrados) envolvendo débito, altitude e temperatura, nos quais aparecem números negativos. Prossegue com a representação geométrica, que é utilizada para explicar valor absoluto e realizar adições, indicando os sentidos positivo e negativo com setas orientadas $(\rightarrow, \leftarrow)$.

Para explicar a subtração, utiliza expressões algébricas:

$$(+5,+2) \xrightarrow{-} x$$
$$(+5)-(+2)=x$$

concluindo que se $x+2=5,$ logo $x=+3$. Então:

$$(+5)-(+2)=+3$$
$$(+5)+(-2)=+3$$
$$(+5)-\underbrace{(+2)=(+5)+(-2)}_{\text{simétricos}}$$

E afirma que a para efetuar a subtração entre 2 números relativos, adiciona-se o primeiro ao simétrico do segundo.

No entanto, afirmações como $(+5)-(+2)=5-2$ *e* $(+5)-(+2)=(+5)+(-2)$ sem explicação devida não são de fácil e claro entendimento para os alunos, uma vez que utiliza de maneira implícita a multiplicação de números inteiros, não vista até este momento.

Na multiplicação, o livro não justifica a regra de sinais, apresenta alguns exemplos numéricos e enuncia a regra.

O livro do professor traz uma observação em azul: "A justificação da regra de sinais não foi dada, pois é dispensável ao nível de alunos da 6.ª série do 1º grau".

Será mesmo dispensável? Após o período de grande rigor e formalismo da Matemática Moderna, vemos aqui a despreocupação em validar a operação, reduzindo o conhecimento a técnicas e "receitas".

Não justifica a regra de sinais para a divisão, valida a regra mostrando que esta é operação inversa da multiplicação.

Todos os exercícios são do tipo "Efetue", "Complete", "Verdadeiro ou falso". Não há problemas, exercícios contextualizados ou referência histórica.

- **Matemática**, Edwaldo Bianchini, 1984.

O capítulo inicia com exemplos de subtração. Naqueles em que o resultado é um valor negativo coloca um sinal de interrogação $(5-8=?)$, para então introduzir a noção de número negativo e definir o conjunto $\mathbb{Z}$.

Em seguida traz algumas "situações práticas": exemplos envolvendo temperatura, altitude e conta corrente.

Ao apresentar a reta numérica define ponto como "a imagem geométrica do número" e o número como a "abscissa do ponto correspondente". Utiliza a reta numérica para definir números opostos ou simétricos e comparar valores.

Introduz as operações explicando o caminhar para a esquerda (-) e para a direita (+), partindo de qualquer valor (mostra na reta). Dá exemplos de adição na reta e então enuncia a regra de sinais. Sendo a subtração a operação inversa da adição, enuncia o cálculo da diferença.

Na multiplicação $(+\times+, +\times-)$ o autor justifica definindo a operação como adição de parcelas iguais e emprega a definição de oposto para justificar a multiplicação $(-\times-, -\times+)$. Sabendo que a divisão é a operação inversa da multiplicação apresenta a regra de sinais para a divisão. O livro chama a atenção para a inexistência da divisão por zero.

O livro traz uma quantidade extensa de exercícios, todos do tipo "Complete" e "Resolva" e não há nenhuma referência histórica.

- **Construindo a Matemática**, Oscar Guelli e Luciano Lima, 1987.

O capítulo dedicado ao conjunto dos números inteiros é iniciado com um comentário histórico sobre a criação e sobre o uso feito por comerciantes dos sinais positivo e negativo. Propõe dois exercícios, ilustrados, no contexto do comércio citado anteriormente. Em seguida apresenta um exemplo de quantidade de vinho em tonéis, indicando as operações com números relativos.

Após esta introdução, outro comentário histórico é feito. Neste, os autores comentam sobre a "entrada" dos sinais na Matemática, sobre seus usos e o que eles podem representar. Situações envolvendo números negativos são apresentadas: movimentação financeira, número de passageiros subindo e descendo do ônibus, saldo de gols e temperatura da vacina testada por pesquisadores. A fim de expandir o conjunto dos números naturais, dá o exemplo do pastor que conta o número de ovelhas do rebanho. A falta de ovelhas no rebanho indica "quantidade" negativa. E, a partir dele, compara $\mathbb{N}\ e\ \mathbb{Z}$. Segue com exercícios do tipo "verdadeiro ou falso".

Ao apresentar a reta numérica, cita número sucessor, antecessor e números consecutivos e compara valores. E, para definir número oposto, utiliza o exemplo do número de ovelhas no rebanho, entre outros, e a reta numérica.

A reta é também utilizada para efetuar adições. Nela, assumindo-a como uma estrada com dois carros partindo da origem em sentidos opostos, traz o conceito de valor absoluto (ou módulo).

A operação de adição é explicada por meio de exemplos e então enunciada a regra de sinais. Na subtração, recorre ao conceito de número oposto. Justifica a multiplicação de números positivos e/ou de um número positivo por um negativo como sendo soma de parcelas iguais. Na multiplicação de números negativos e/ou de um número negativo por um positivo, recorre ao exemplo de uma caixa d'água com uma torneira e com uma abertura por onde a água sai, trabalhando a noção de tempo passado e tempo futuro. A divisão é explicada como operação inversa da multiplicação e, portanto, é validada pela mesma regra de sinais. Os exercícios relacionados às operações são todos do tipo "Calcule".

Ao final, usando a noção de operação inversa, introduz a resolução de equações do tipo: $x-4=7, -3x=-15$.

Nesse último livro, observa-se a introdução de uma tendência no ensino da Matemática que até então não fazia parte dos livros didáticos, a abordagem histórica.

Nos três livros a reta numérica é utilizada para realizar adições. De fato, esta representação favorece a compreensão da operação, pois permite explorar o aspecto visual que as outras representações não permitem. Interessante notar que no livro de Bianchini houve a preocupação de definir o que é a representação geométrica de um número e não apenas mostrá-la.

As aplicações aparecem nos três livros em exemplos, mas apenas no último livro exercícios contextualizados são propostos.

Década de 90

- **Apostila Positivo**, Sociedade Educacional Positivo,1997.

O capítulo intitulado *Conceituação e representação geométrica dos números inteiros* inicia com dois exemplos, envolvendo temperatura positiva e negativa e saldo bancário. Em seguida cita outras situações em que os sinais positivo e negativo são utilizados (saldo de gols, lucros e prejuízos, altitudes) e o que representam em cada uma delas. A partir do conjunto dos números naturais define o conjunto dos números inteiros e afirma que para cada número natural **n** diferente de 0, são considerados dois outros números: **+n e –n**. Destaca ainda que o número 0 não é negativo nem positivo.

Em seguida, representa geometricamente os números inteiros na reta numérica, indicando que a representação geométrica de um dado número +n ou -n é o ponto que dista n unidades da origem (zero) à direita ou à esquerda.

Após uma lista de exercícios, é definido módulo de um número inteiro, é feita sua interpretação geométrica e então apresentado o conceito de números opostos. Utilizando também a reta numérica são feitas comparações de números inteiros.

A adição de números inteiros é explicada a partir de exemplos de saldos (ter e dever). Expressões contendo parênteses são explicadas separadamente, bem como o significado deles e como eliminá-los. Desta explicação é apresentada a subtração e o modo de transformar diferença em soma.

A multiplicação de número positivo por negativo é justificada como adição de parcelas iguais, para a multiplicação de número negativo por positivo é utilizado o conceito de oposto, bem como na multiplicação de 2 números negativos. Ao final um quadro com regra de sinais é mostrado. A divisão de números inteiros é justificada como operação inversa da multiplicação.

Os exercícios do livro são no formato “Verdadeiro ou falso”, “Efetue”, “Complete”. Não há exercícios no formato de problemas e não é feita abordagem histórica.

- **Matemática em Movimento**, Adilson Logen, 1999.

O capítulo que trata do conjunto $\mathbb{Z}$ inicia com a história dos números positivos e negativos. Ele apresenta situações práticas nas quais os números negativos são utilizados: índice da bolsa de valores, saldo bancário, saldo de gols, altitude e temperatura.

Usa a simetria entre figuras geométricas para falar de números simétricos e depois marca tais números na reta numérica. Compara números inteiros lançando mão de exemplos (saldo bancário, altitude, temperatura).

Com o exemplo de uma caixa d’água com duas torneiras e dois ralos explica a adição de inteiros relativos e depois utiliza a reta para realizar a operação.

Para explicar a subtração dá como exemplo a diferença de altitudes, introduz a idéia de oposto para então chegar à conclusão sobre como efetuar a operação. E afirma que a subtração entre dois números inteiros é efetuada pela adição do primeiro ao oposto do segundo.

Justifica a regra de sinais para a multiplicação considerando esta como adição de parcelas iguais e cita a propriedade comutativa. A regra para divisão é justificada assumindo a divisão como operação inversa da multiplicação.

O modo como este livro justifica a multiplicação é deficiente porque não é válida para multiplicação de números negativos e nem de número negativo por número positivo.

Nesses livros há uma ênfase na produção de significado para os números inteiros por meio de situações contextualizadas, com um número maior de exemplos e aplicações, inclusive para explicar as operações (em especial em **Matemática em Movimento**); como uma adequação aos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Século XXI

- **Coleção Big Mat,** Roberto Matsubara e Arivaldo Zaniratto, 2002.

O livro introduz o conteúdo fazendo um apanhado histórico. Em seguida faz analogias com conta bancária, temperatura, falta d’água e tabela de idade-massa-altura. Representa os números na reta numérica e compara inteiros relativos.

Para explicar a adição usa a noção de saldo positivo e negativo (com alguns exercícios contextualizados), por exemplo:

$(+5)+(-3)=+2$ lê-se: a um saldo positivo 5, adicionar uma dívida de 3, ou, estava devendo 3 paguei com 5.

Nesse exemplo, os autores utilizam a propriedade comutativa. Para explicar a subtração usam a idéia de retirar a dívida (-(-)).

À noção de saldo positivo e negativo acrescentam a noção de tempo passado (negativo) e tempo futuro (positivo) para explicar a multiplicação. A divisão é apresentada como operação inversa da multiplicação.

O uso indiscriminado dessa forma de contextualização pode ser prejudicial, pois o aluno acaba tendo dificuldade de distanciar-se do sentido “concreto” dos entes numéricos para avançar para as operações formais.

- **Matemática para todos,** Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis, 2002.

O capítulo 6, intitulado *Números negativos e contabilidade*, inicia apresentando os números negativos na escala do termômetro e, através dela, fala de números simétricos, comparando-os. Cita a aplicação de números negativos na indicação de medidas que dependem de um ponto de referência, exemplificando com latitude. Em seguida mostra seu uso em cálculos de contabilidade.

Em cada exemplo esclarece o que os números negativos estão indicando.

O livro traz em seguida uma seção chamada *Conversando sobre o texto*, com perguntas referentes ao texto anterior.

O livro apresenta exercícios e problemas contextualizados e ilustrados.

Explica a adição de números com sinais iguais com um exemplo envolvendo lucro e prejuízo; da mesma forma explica a subtração de números com sinais. Faz isto sem explicitar a regra de sinais. Depois é sugerido um jogo chamado *AÇÃO*, que envolve a noção de perda e ganho.

Ao abordar as expressões algébricas, explicita a idéia de números opostos: “subtrair é o mesmo que somar o oposto”.

O capítulo encerra com uso de calculadora no cálculo de expressões numéricas.

O livro retorna ao tema Números Negativos no capítulo 10, que inicia com um comentário histórico da necessidade do uso de números negativos nos séculos XVIII e XIX no estudo das forças.

A multiplicação é feita na reta numérica e o sinal negativo indica troca de sentido. A partir disto, sugere a regra de sinais para a multiplicação. A divisão é apresentada como operação inversa da multiplicação.

O livro não define o conjunto dos números inteiros.

O capítulo traz alguns exercícios envolvendo o uso de calculadora e uma seção extra sobre a história dos números negativos.

A reta numérica é menos utilizada nesses livros didáticos, ainda que implícita nos exemplos com termômetros e latitude. Destaque para **Matemática para todos**, único livro, dentre todos os analisados, a explicar a multiplicação de números inteiros na reta numérica. Além disso, todos os livros analisados apresentam a divisão de números inteiros como operação inversa da multiplicação para justificar a regra de sinais nesta operação.

É dado maior destaque para a aplicação do conteúdo e para a produção de significado nesses dois últimos livros do que nos das décadas anteriores, com um número maior de exemplos e exercícios de aplicação em lugar de exemplos aritméticos e exercícios no formato "Efetue" ou "Verdadeiro ou falso". Não há uma preocupação tão grande em enunciar as regras de sinais, mas de tornar compreensíveis as operações, além da presença da história dos números negativos. Esta postura evidencia as mudanças ocorridas nas ênfases no ensino de Matemática neste período.

CAPÍTULO 4: PESQUISA COM PROFESSORES

O presente capítulo apresenta o resultado de uma pesquisa realizada com professores de Matemática da 6.ª série do Ensino Fundamental. Nele são identificados, através das decisões e ações destes professores ao abordarem números inteiros negativos em sala de aula, aspectos importantes e críticos no processo de ensino-aprendizagem deste conteúdo.

O objetivo da pesquisa era delinear o perfil do professor da 6.ª série, identificar os modos como o conteúdo Números Inteiros Negativos é abordado em sala de aula e diagnosticar dificuldades no processo de ensino-aprendizagem.

A princípio, a proposta era traçar o perfil do professor da 6.ª série da cidade de Campos dos Goytacazes, mas alguns fatores não permitiram a execução de um trabalho mais amplo. Dentre eles destacam-se a indisposição de alguns professores em responder o questionário e o impedimento por parte de escolas de que seus professores participassem da pesquisa.

A pesquisa foi realizada com dezoito professores da 6.ª série do Ensino Fundamental de doze escolas das redes pública (municipal e estadual) e particular da cidade de Campos dos Goytacazes – RJ.

O questionário (Anexo 1) aberto e semi-estruturado, que consta de 19 questões, foi aplicado de forma individual, sem a orientação da pesquisadora.

Os resultados estatísticos podem ser vistos no Anexo 2.

As primeiras 4 questões estão relacionadas à rede de ensino em que atua o professor, ao tempo de magistério, ao tempo que leciona na 6.ª série e as demais séries que leciona além desta. Segue a análise dos dados.

O grupo é diversificado no que diz respeito ao tempo de magistério, tendo 50% mais de dez anos de experiência em sala de aula, no entanto, mais de 60% têm até cinco anos de trabalho com a 6.ª série (Anexo 1).

Apenas um professor não atua em outras séries. Dos demais, a maioria atua no Ensino Fundamental.

A quinta e a sexta questões dizem respeito ao livro didático adotado e a sua utilização em sala de aula. As justificativas dadas pelos professores para sua utilização ou não foram:

Prof[1] – *Utilizo outros livros didáticos para apresentar conteúdos que estão no planejamento mas que não constam no livro didático adotado e também para diversificar as atividades.*

Prof[3] – *Gosto de trabalhar com outros livros para dar conteúdos variados.*

Prof[5] – *Procuro utilizar sempre o livro didático pois é o material que o aluno tem em mãos. Com isso há um melhor aproveitamento do tempo de aula.*

Prof[6] – *O trabalho realizado é totalmente baseado no livro didático, complementando com apostilas e livros paradidáticos.*

Prof[7] – *Para alternar um pouco a aula eu nem sempre inicio um conteúdo usando o livro, sempre utilizo para exercícios.*

Prof[8] – *Como fixação dos conteúdos dados.*

Prof[9] – *Serve como referencial para o trabalho didático e é bem completo.*

Prof[10] – *Gosto de diversificar com outros livros e materiais didáticos.*

Prof[11] – *Porque não me prendo ao livro adotado.*

Prof[12] – *Sim, utilizo sempre, mas utilizo outros livros que tenham exercícios interessantes.*

Prof[13] – *Utilizo a parte teórica e os exercícios de fixação.*

Prof[14] – *Utilizo sempre, apesar de buscar exercícios em livros de outros autores também.*

Prof[16] – *Não dá tempo.*

Prof[17] – *Tem apostila.*

Prof[18] – *O livro é suficiente.*

Os demais professores não justificaram a resposta.

As respostas indicam que para uma parcela significativa do grupo, o livro didático é o referencial para o trabalho em sala de aula e outros livros são aproveitados principalmente na seleção de exercícios.

Quanto à abordagem dos números negativos em sala de aula (questão 7), o item apontado pelo maior número de professores como facílimo foi a história dos números negativos. A representação dos números negativos é considerada pela maioria dos professores como muito fácil, enquanto as propriedades foram apontadas como muito difíceis. Os itens apontados como apresentando maior grau de dificuldade são a regra de sinais e as propriedades, dois pontos cruciais que estão relacionados às operações com números negativos. Estes pontos também são considerados de muita dificuldade para os alunos.

Na questão 8 era pedido que os professores ordenassem, por grau de dificuldade, as operações com números inteiros negativos e comentassem os itens pontuados como mais fáceis e mais difíceis. Os comentários foram:

Prof[1] – *Nos exemplos práticos envolvendo saldos, créditos e débitos, os alunos demonstram uma certa facilidade na adição, porém, quando aprendem a regra dos sinais para a multiplicação e divisão eles passam a querer usá-las também nas adições e subtrações, o que não é correto.*

Prof^{2} – *Os alunos compreendem o jogo de ganhar e perder, ou ter ou dever. Já na divisão eles confundem a regra de sinais e têm dificuldade de associar que fração é divisão.*

Prof^{3} – *Fácil = multiplica-se, coloca o resultado, depois é só ver a regrinha dos sinais. Difícil* [muito difícil] = *a troca dos sinais (-4) - (+2).*

Prof^{4} – *Subtração* [difícil] – *há uma pequena confusão quanto à subtração quando os alunos fazem uma subtração com números negativos. Ex: 3-(-2).*

Prof^{5} – *Os alunos relacionam números negativos à idéia de débito e com isso resolvem com facilidade a adição e a multiplicação. Com relação à multiplicação e divisão eles não apresentam dificuldades.*

Prof^{6} – *A adição é mais facilmente assimilada devido à utilização da idéia de "posse" e "dívida". Já na divisão e multiplicação, utilizar essas idéias com resultados claros fica mais difícil.*

Prof^{7} – *A adição algébrica é de difícil compreensão dos alunos.*

Prof^{8} – *Obs: O que não foi pontuado ficou notado como o mais difícil na aprendizagem* [multiplicação e divisão].

Prof^{10} – *A adição mais fácil porque não necessita de troca de sinais e a multiplicação e a divisão mais difícil porque confundem a regra com a regra anterior.*

Prof^{11} – *Adição – não é necessário a troca de sinais. Multiplicação e divisão – confundem com a regra já estudada.*

Prof^{14} – *Entendem com facilidade a adição, multiplicação e divisão e têm dificuldades na subtração, as regras de sinais.*

Prof^{18} – *Os alunos erram muito as duas últimas operações, porque confundem os sinais.*

Os demais professores não comentaram a questão.

Dentre as operações, a divisão foi considerada pela maioria dos professores como a operação mais difícil, seguida da subtração.

Na subtração, a dificuldade salientada refere-se à "troca de sinais", ou seja, em operações como $3-(-2)$. Os alunos não compreendem com facilidade que subtrair -2 de 3 equivale a somar 2 a 3. A dificuldade inicial deve-se em parte ao costume dos alunos com as operações em $\mathbb{N}$ e exemplos como esse geram uma ruptura nos conceitos trazidos até então. A permanência desta dificuldade está possivelmente relacionada à má compreensão de números opostos e a forma como o professor justifica a regra de sinais.

Os comentários indicam que a dificuldade dos alunos com a divisão e a multiplicação está atrelada ao que Igliori (2000), citando Artigue, chama de *processos produtores de obstáculos em Matemática*, nesse caso, a fixação sobre uma contextualização ou uma modelização familiares. O uso excessivo de exemplos de posse e dívida nas operações de adição e subtração, como ressaltou o Prof^{6}, não favorece o esclarecimento nas operações de multiplicação e divisão. Glaeser (1985) também faz alusão a essa questão. Ele indica seis obstáculos que aparecem na constituição dos números negativos, dentre eles o desejo de um modelo unificador, que é "*a intenção de fazer funcionar um 'bom' modelo aditivo [da perda e do ganho], igualmente válido para ilustrar o campo multiplicativo, em que esse modelo é inoperante"* (p.40). Cita também a *estagnação no estágio das operações concretas*. O uso demasiado e indiscriminado de contextualizações traz dificuldade para o aluno distanciar-se do sentido "concreto" atribuído aos seres numéricos, não avançando do estágio das operações concretas para o das operações formais.

Mais a frente, fazendo alusão a Cauchy, Glaeser salienta a confusão entre os sinais (+ ou -) operatórios e predicativos, em que os operatórios designam uma ação (aumentar, diminuir) e os predicativos qualificam um estado (positivo, negativo). A metáfora (utilizada por Cauchy e por muitos professores): positivo = aumento, negativo = diminuição, que facilita a compreensão das propriedades aditivas, é um obstáculo à compreensão da multiplicação.

Na questão 9, relacionada às propriedades, o grupo de professores considerou as propriedades do elemento neutro e do cancelamento como as mais fáceis. A comutativa e a associativa foram consideradas mais difíceis.

Possivelmente, um dos erros recorrentes dos alunos é tentar verificar essas duas propriedades na subtração e na divisão.

Dentre as representações listadas na questão 10 para os números inteiros negativos, a reta numérica é a forma de representação mais utilizada em sala de aula. A justificativa para tal fato são os vários aspectos que podem ser nela explorados. Também foi observado que os professores não lançam mão de nenhuma outra forma de representação, além das citadas na questão.

Na questão seguinte, era pedido que ordenassem, por grau de utilização em sala de aula, as aplicações dos números inteiros negativos. Como fora notado desde a questão 8, as aplicações envolvendo ganho e perda – extrato bancário e saldo de gols – são as mais encontradas nas aulas sobre números negativos. Seguidas de aplicações que envolvem temperatura e dos jogos, recurso cada vez mais adotado como estratégia de ensino.

Para Kimura (2005) os jogos educativos são um auxílio no processo de ensino-aprendizagem (da Matemática), pois além de serem prazerosos, desafiadores e provocarem a curiosidade dos alunos, propiciam o seu engajamento na construção dos conceitos matemáticos.

As aplicações não citadas na questão e listadas por dois professores são: gráfico de barras e situações-problema.

Quanto aos recursos que os professores utilizam no preparo de suas aulas (questão 12), o principal é o livro didático. Por isso a importância da escolha do livro a ser adotado. Alguns professores, como respondido na questão 6, o consideram suficiente.

Interessante notar que apenas um professor utiliza livros de história da Matemática. E, embora na questão 7 todos os professores tenham respondido ser a história da Matemática de fácil abordagem, é possível perceber que apesar da facilidade por eles apontada, ela não está inserida no planejamento das aulas.

É notório também, que para uma parcela significativa (cerca de 39%), a Internet tornou-se um auxílio nesse planejamento.

Revistas, jornais, revistas especializadas, materiais concretos e apostila são os outros recursos citados por alguns professores.

Ao serem questionados sobre as estratégias apresentadas no livro didático para o ensino de números negativos, nove professores responderam que o livro apresenta estratégias variadas e sobre elas comentaram:

Prof[1] – *Situações problemas envolvendo saldo de conta corrente, temperaturas, jogos, lucros e prejuízos de empresas, etc.*

Prof[5] – *O livro relaciona números negativos à idéia de débito e de temperatura. Ele também apresenta alguns jogos didáticos.*

Prof[6] – *Linguagem aplicada ao cotidiano, tabelas e gráficos ilustrativos, jogos e quadrados e pirâmides mágicos e conclusões obtidas com o uso da calculadora.*

Prof[7] – *A história, questões problemas com temperatura, saldo de gols, saldo bancário ...*

Prof[9] – *AÇÃO, que é um "jogo", normalmente em grupo e a contextualização de situações.*

Prof[15] – *Reta e saldo.*

Os outros nove professores responderam que o livro não apresenta diferentes estratégias e as estratégias por eles adotadas são:

Prof[8] – *A estratégia utilizada do cotidiano: família (o que você concorda ou discorda), antônimo/sinônimo, valor da mesada e outros assuntos para despertar o interesse na matemática.*

Prof[10] – *Gosto de diversificar com livros didáticos, paradidáticos, Internet, etc...*

Prof[11] – *Livros, jogos, Internet.*

Prof[12] – *Ensino com materiais concretos (jogos).*

Prof[13] – *Utilizando exemplos do dia-a-dia para que o aluno entenda como utilizar os números negativos sem perceber.*

Prof[14] – *Ensino através de material concreto, através de jogos.*

Os demais professores não responderam.

As respostas dos professores validam as observações das duas questões anteriores. As aplicações mais presentes em sala de aula são de fato as presentes no livro, ou seja, é o livro didático o principal apoio do professor. E, a presença crescente dos jogos como alternativa metodológica. A referência à história dos números negativos por apenas um professor corrobora a conclusão da sua rara presença nas aulas sobre números negativos.

Na questão 14 era pedido que o professor respondesse que outras atividades além das propostas no livro didático ele utilizava. Respostas:

Prof[1] – *Confecção e utilização de jogos.*

Prof[2] – *Jogos, histórias.*

Prof[3] – *As condições didáticas no nosso trabalho são falhas. Xerox é o que nos dá condições de variar os tipos de exercícios de outros livros.*

Prof[4] – *Fatos do cotidiano ajudam a melhorar e entender os conteúdos. Trabalhar com o concreto.*

Prof[5] – *Não costumo utilizar outras propostas além das adotadas no livro.*

Prof[6] – *Jogos de perguntas e baralho, exercícios e textos complementares com curiosidades, livros paradidáticos (leitura e apresentação).*

Prof[7] – *Problemas do dia-a-dia.*

Prof[8] – *Procuro ser criativa, além das pesquisas utilizadas em outras fontes de recursos.*

Prof[9] – *Pesquisa. Mural.*

Prof[10] – *Jogos.*

Prof[11] – *Trabalho com encartes de supermercado, contas de luz, água, telefone, extratos bancários, jogos, etc.*

Prof[12] – *Exercícios de outros livros que tenham a ver com a realidade do aluno.*

Prof[13] – *Exercícios propostos como desafios de vários livros em atividades em grupo.*

Prof[14] – *Faço uma pesquisa em outros autores e aplico aos alunos; os mais práticos e bem formulados.*

Prof[15] – *Só o livro.*

Prof[16] – *Nada.*

Prof[17] – *As da apostila.*

Prof[18] – *Não uso.*

Na análise das respostas dos professores, verificou-se em alguns um empenho na busca de atividades diversificadas, criativas e que despertem o interesse dos alunos, como jogos, pesquisas, leitura e apresentação de paradidáticos e murais. Mas, alguns recorrem a outras fontes apenas na busca de exercícios e outros se limitam ao livro adotado.

Tomando as palavras de Kimura (2000),

> Em relação ao livro didático, o professor precisa entender que se trata de um auxiliar e não um fim, por isso não pode restringir a sua prática a um único livro, carecendo de outras referências para tornar o ensino de números negativos realmente agradável e fácil de ser assimilado. (p.198,199)

E apesar das limitações de recurso de algumas escolas, o professor deve procurar alternativas que favoreçam a aprendizagem dos alunos.

Na questão seguinte, as respostas apresentadas pelo grupo para a forma como justificam a regra de sinais são:

Prof[1] – *Apenas justifico a regra de sinais para a adição e subtração onde considero os números negativos como dívidas, prejuízos, etc, e os positivos como lucros.*

Prof.[2] – *Conto história para ensinar as regras de sinais de* $\times e \div$.

Prof[3] – *Situações problemas do dia-a-dia (as vezes não dos alunos, mas de seus pais, tios, etc.). falo no caso do extrato bancário.*

Prof[4] – *Necessária para viver.*

Prof[5] – *Na adição e na subtração usando a idéia de crédito e débito e na multiplicação e na divisão usando tabela de sinais.*

Prof.[6] – *Com a idéia de "posse" e "dívida", enumerando regras como: "Adicionar uma dívida é igual a subtrair"* $(+\times-=-)$, *"tenho tanto e devo tanto, logo...".*

Prof[7] – *Fazendo uso da idéia de distância para a adição algébrica. Para multiplicação e divisão utilizo o conceito básico das operações.*

Prof[8] – C*ada sinal tem função diferenciada no papel que a matemática exercita.*

Prof[9] – *Adição e subtração: sinais iguais somo e conserva o sinal, ou, positivo, você tem, negativo é o que deve. Multiplicação e divisão: quantidade de termos negativos* $\left\langle \begin{array}{l} par \rightarrow + \\ ímpar \rightarrow - \end{array} \right.$.

Prof[10] – *O negativo como perda, débito, etc, e o positivo como ganho, lucro, etc.*

Prof[11] - *Negativos – perda, débito. Positivos – ganho, lucro.*

Prof[12] – *Através de problemas do dia-a-dia, de acordo com a realidade dos alunos.*

Prof[13] – *Utilizando exemplos como saldo bancário negativo, regras de campeonato com pontos perdidos.*

Prof[14] – *Utilizo com os alunos através de problemas do cotidiano pois assim aplicam a regra de sinal com muito mais facilidade.*

Prof[15] – *Igual o autor.*

Prof[16] – $\begin{array}{l} ++=+ \\ +-=- \end{array}$

Prof[17] – *Sinais iguais dá mais, sinais diferentes dá menos.*

Prof[18] – *Igual ao autor do livro.*

Pelas respostas é possível perceber que a preocupação se concentra em explicar a regra de sinais para a adição e subtração, poucos fizeram referência à multiplicação e à divisão, além da tendência em alguns pela memorização das regras (Prof[16], Prof[9], Prof[17]) sem uma explicação do porquê.

As respostas dos professores sobre sua maior preocupação no ensino dos números negativos foram:

Prof[1] – *Fixar que na multiplicação e na divisão os alunos devem memorizar a regra de sinais, porém nas adições, basta que considerem os negativos como prejuízos e os positivos como lucros.*

Prof[2] – *Fazer com que eles absorvam e compreendam todas as regras de sinais, pois é a base. Têm que ser bem abordados.*

Prof[3] – *Que os alunos achem que só precisam aprender nesta série e que não precisarão mais saber durante toda a sua vida (seu dia-a-dia).*

Prof[4] – *Passar para uma série avançada sem dominar o conteúdo.*

Prof[5] – *Que os alunos assimilem que a diferença entre números negativos e positivos vai além da diferença de sinais, para isso é importante o ensino através da reta numérica.*

Prof[6] – *Que os alunos se prendam a regras prontas e não se acostumem a raciocinar com lógica, o que dificulta muito em se tratando da resolução de problemas.*

Prof[7] – *Fazer com que os alunos percebam, compreendam a importância, fazendo os alunos procurarem no dia-a-dia situações em que os números são utilizados.*

Prof[8] – *Que eles saibam diferenciar a função na situação abordada para a conclusão da resposta.*

Prof[9] – *As operações, que quando dadas separadamente são fáceis, mas nas expressões já complicam o aluno.*

Prof[10] – *Que os alunos entendam como é feito o mecanismo de perda e ganho.*

Prof[11] – *Que saibam utilizá-lo no cotidiano.*

Prof[12] – *Entender as regras de sinais, a sua utilidade no cotidiano.*

Prof[13] – *Saber operá-los e utilizar suas propriedades.*

Prof[14] – *A dificuldade dos alunos com as regras de sinais e sua aplicação no dia-a-dia.*

Prof[15] – *Dar o conteúdo.*

Prof[16] – *Tudo.*

Prof[17] – *As operações.*

Prof[18] – *Que os alunos saibam operar.*

Para grande parte do grupo, a preocupação está ligada à aplicação do conteúdo no dia-a-dia do aluno, alguns tendendo para a memorização de regras e outros para a não memorização.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), as atividades propostas para o ensino de números inteiros negativos não podem se ater às relacionadas a situações concretas, pois estas nem sempre são suficientes para explicar os significados das noções envolvidas. Ao mesmo tempo, um tratamento exclusivamente formal tende a reduzir o estudo a um formalismo vazio, que leva a equívocos e é facilmente esquecido. Dessa forma, situações que permitam aos alunos reconhecer aspectos formais do conteúdo a partir de experiências práticas devem ser propostas.

Na questão 17 era perguntado ao professor se ele considerava importante a abordagem histórica para o ensino de números negativos e era pedido que justificasse a resposta. Os professores escreveram:

Prof[1] – *Sim, pois observo que os alunos se interessam pela origem dos conteúdos apresentados.*

Prof[2] – *Claro. Eles têm que compreender como surgiu e para que eles eram usados, para ser usado também no seu cotidiano.*

Prof[3] – *Sim. Pois tudo o que existe tem um fundamento.*

Prof[4] – *Com certeza. As crianças são acostumadas desde pequenas com histórias. Nada melhor do que dar continuidade a isso.*

Prof[5] – *Sim, para que o aluno entenda a partir de que necessidade os números negativos surgiram.*

Prof[6] – *Acho muito importante e estimulante para que os alunos entendam a origem e a lógica da matemática, entendam a necessidade e o sentido da utilização dos mesmos.*

Prof[7] – *Interessante, porém não essencial. Importante é notarem que os números negativos representam dívida, temperaturas muito baixas ...*

Prof[8] – *Poderia ser uma ilustração para introdução do conteúdo, para despertar o interesse naqueles que não adotam a matemática.*

Prof[9] – *Sim, para que os alunos percebam que tudo surgiu gradativamente e que há sempre estudiosos e pesquisadores buscando facilitar o nosso trabalho.*

Prof[10] – *Sim porque ajuda o aluno a entender a necessidade dos números.*

Prof[11] – *Sim. Porque tomam consciência da necessidade de aprendê-lo.*

Prof[12] – *Sim. Incentiva os alunos. A parte histórica ajuda a entender melhor o conteúdo a ser estudado.*

Prof[13] – *Sim, porque vai implicitamente justificar sua utilização e sua importância.*

Prof[14] – *Sim, pois ajuda incentivando o aluno na busca do conhecimento.*

Prof[15] – *Sim.*

Prof[16] – *Não sei.*

Prof[17] – *Não sei a história.*

Prof[18] – *Não, não altera seu ensino.*

A abordagem histórica é vista por grande parte dos professores como um recurso motivador para as aulas de Matemática, pois pode despertar o interesse dos alunos pelo conteúdo, além de fazê-los compreender a origem dos conceitos e seus usos no passado.

Para Corrêa (2006), a história da Matemática dentro da sala de aula é mais do que um elemento motivador para os alunos, ela é parte da Matemática e tão importante quanto o conteúdo ensinado. Segundo ela, "professores de matemática devem sempre estar preparados para ensinar a matemática e sua história pois é necessário mostrar para os alunos que cada conteúdo que está sendo ensinado tem um significado na história da humanidade" (CORRÊA, 2006, p.6).

Para Radford (1997) o conhecimento está profundamente enraizado e moldado pelo contexto sócio-cutural. A análise histórico-epistemológica da Matemática pode prover-nos informações sobre o desenvolvimento do conhecimento matemático dentro de uma cultura e através de diferentes culturas. E é preciso entender as negociações e as concepções culturais que estão por trás de conceitos. A maneira como uma antiga idéia era produzida pode nos ajudar a descobrir velhos significados que, através de um trabalho didático de adaptação, podem ser remodelados e se tornarem compatíveis com o contexto atual das aulas de Matemática.

A opinião dos participantes da pesquisa sobre a capacidade do aluno ler e entender, por si mesmo, o conteúdo dos números negativo no livro didático e sobre este método foi:

Prof[1] – *Não, pois percebo que este conteúdo não é assimilado com facilidade por eles, mesmo com a orientação do professor.*

Prof[2] – *Talvez, às vezes temos alunos autodidatas natos.*

Prof[3] – *Não. Porque o aluno ainda está muito preso ao direcionamento que, para ele, só o professor pode ensiná-lo.*

Prof[4] – *Não, muito complexo.*

Prof[5] – *Sim, o aluno é capaz de entender por si mesmo. Já utilizei este método e a maioria das conclusões que eles tiraram estava correta.*

Prof[7] – *Nunca utilizei este método, mas acredito que um aluno interessado e com uma boa base possa entender sozinho qualquer conteúdo matemático, desde que utilize um bom material.*

Prof[8] – *Nem todo conteúdo seria capaz de compreender. Acredito que as operações precisam de uma ajuda.*

Prof[9] – *Não. Porque a matemática é bom ser explicada para que o aluno descubra caminhos para chegar à resposta.*

Prof[9] – *Ele lê e entende o que está contextualizado: saldo bancário, temperatura, etc; o restante ele precisa de explicação do professor.*

Prof[10] – *Não, porque eles sentem dificuldade no entendimento e aprendizagem.*

Prof[11] – *Não, porque são muitas as dificuldades.*

Prof[12] – *Sim. Porém com a ajuda do professor fica mais fácil para o aluno.*

Prof[13] – *Não. O aluno depende sim da explicação do professor para que entenda principalmente a reta numérica.*

Prof[14] – *Sim, porém o professor pode ajudar muito ao entendimento com mais facilidade.*

Prof[15] – não respondeu

Prof[16] – Não.

Prof[17] – *Não*

Prof[18] – *Não. Eles quase não sabem interpretar.*

Mais da metade dos professores não considera possível que um aluno possa ler e entender o conteúdo. Para alguns a razão é a dificuldade intrínseca ao conteúdo, outros destacam a dificuldade dos alunos para interpretar e outros a dependência que eles têm do professor. Parte disso se deve talvez a dinâmica de aulas de Matemática, com pouco trabalho de investigação e pesquisa e nas quais o aluno tem uma postura passiva no processo de ensino e aprendizagem.

Dos que responderam sim, alguns vêem essa possibilidade apenas para alunos com habilidades especiais, por ser um conteúdo difícil. Um professor comentou a importância do material utilizado para o sucesso da aprendizagem, além da base que o aluno deveria ter. O professor que respondeu já ter utilizado esse recurso indicou ser ele válido no ensino de números negativos.

A última questão perguntava sobre a importância do aluno saber ler diferentes formas de representação para os números negativos. As respostas foram:

Prof[2] – *Sim. Porque os números negativos têm diferentes formas de serem interpretados na vida.*

Prof[3] – *Sim, para poder entender que os números negativos fazem parte de seu dia-a-dia.*

Prof[4] – *Nenhum conteúdo é limitado, existem vários métodos de aprendizado.*

Prof[5] – *Sim, para que ele saiba resolver diferentes questões envolvendo números negativos.*

Prof[6] – *Sim, isso é importante para que o aluno entenda o significado de um número negativo; é essencial que ele tenha esse conceito para que possa efetuar cálculos e resolver problemas conscientemente, sem seguir "receitas".*

Prof[7] – *Com certeza, para facilitar a aprendizagem e a compreensão.*

Prof[8] – *Sim. Serve como segurança própria nos conhecimentos adquiridos no cotidiano.*

Prof[10] – *Sim, porque os alunos precisam aplicar o conhecimento de sala de aula na vida cotidiano.*

Prof[11] – *Sim, porque facilita a utilização no dia-a-dia.*

Prof[12] – *Sim. Pois faz parte da nossa realidade.*

Prof[13] – *Sim, porque começa a incentivar o aluno a ter outras visões e não se deter somente ao que o professor passa em sala de aula.*

Prof[14] – *Sim, novas formas de pensar nunca são demais para que possa ajudá-lo no seu cotidiano.*

Prof[16] – *Sim.*

Prof[17] – *Acho que sim.*

Prof[18] – *Sim, para a vida.*

Os demais professores não responderam.

Todos os professores foram unânimes em considerar importante para o aprendizado do aluno a leitura de várias formas de representação dos números negativos.

Segundo Damm (2000), toda comunicação em Matemática é estabelecida com base em representações do objeto estudado e, para que haja de fato aprendizado, é necessário o sujeito da aprendizagem saber ver o objeto estudado em suas várias representações, fazendo conversão de uma para a outra e explorando aspectos significativos e específicos de cada uma.

CAPÍTULO 5: AS ATIVIDADES

Este capítulo aborda a aplicação de 4 atividades sobre números inteiros negativos e os resultados obtidos.

As atividades propostas foram realizadas com alunos da 5.ª e da 6.ª séries do Ensino Fundamental de Educação de Jovens e Adultos (EJA) de uma escola na cidade de Campos dos Goytacazes no mês de novembro de 2006.

A razão da escolha por trabalhar com essas duas séries foi verificar a validade das atividades com alunos que já viram o conteúdo Números Inteiros Negativos, como uma forma de fixá-lo, e com alunos que ainda não o viram, como um meio de introduzi-los no assunto.

A princípio as atividades foram elaboradas para serem aplicadas em turmas regulares de 5.ª e 6.ª séries. No entanto, o não comparecimento dos alunos convidados para participar dos trabalhos levou à busca de um novo grupo. Então, optou-se por turmas do EJA. Algumas atividades sofreram modificações, visando atender a este novo público.

Os encontros, totalizando três para cada série, ocorreram no horário de aula dos alunos. Em todos eles cada aluno recebeu uma cópia da atividade que poderia ser feita individualmente ou com outros colegas.

Os atuais programas de Educação de Jovens e Adultos são marcados pela heterogeneidade da faixa etária dos alunos. Enquanto por muito tempo estes programas foram freqüentados principalmente por adultos analfabetos, particularmente da zona rural, hoje são procurados por um número cada vez maior de jovens que se evadiram da escola. Para Silva (2006), a disciplina Matemática vem contribuindo cada vez mais para aumentar os índices de reprovação e evasão escolar. Encarada como um filtro capaz de selecionar as melhores mentes, a Matemática presente nos currículos escolares ainda prioriza cálculos e técnicas sem relação com o cotidiano e com a cultura da maior parte dos alunos, que dessa forma são reprovados e abandonam a escola. Citando estudos de Fonseca (1999), ele afirma que muitos dos alunos de Educação de Jovens e Adultos buscam encontrar o conhecimento e os conteúdos escolares da mesma forma como são apresentados no ensino regular. Desta forma, aqueles que abandonaram a escola por causa do mau desempenho em Matemática, tendem a evadir novamente ao se depararem com o mesmo formato de apresentação dos conteúdos.

Um dos aspectos a ser considerado nesses programas é o caráter da atualidade, ou seja, a preocupação de associar os conteúdos matemáticos ao presente, não sobrecarregando os alunos com conceitos, fórmulas e técnicas totalmente descontextualizadas de suas vidas.

O objetivo das atividades (Anexo 3) foi que, por meio da leitura e com o mínimo de interferência necessária, os alunos pudessem assimilar aspectos concernentes aos números negativos. Não houve a intenção de esgotar o conteúdo nem tão pouco substituir a explicação de um professor, mas aferir a viabilidade do recurso escrito como ferramenta da qual o professor possa dispor no processo de ensino e aprendizagem. Por isto a preocupação com a contextualização, com atividades em um formato diferente do convencional e com o uso de linguagem simples. Todas elas iniciavam com uma história em quadrinhos e tinham o formato de um passatempo.

- Atividade 1

Seu objetivo foi o reconhecimento dos números negativos e dos vários significados que podem ser atribuídos a eles dependendo da situação-problema em que apareçam. Iniciava com uma história que apresentava três situações envolvendo números inteiros negativos: saldo de gols, falta d'água e o nível de água no reservatório e os gastos de uma família. Seguia com perguntas, para reflexão, sobre desperdício e economia de água e sobre gasto de dinheiro e finalmente as Palavras Cruzadas (Figura 1). Todas as palavras, tiradas do contexto da história, referiam-se aos vários significados que os números negativos podem assumir, dependendo da situação.

PALAVRAS-CRUZADAS

VERTICAL

1. Os moradores da cidade de Babados estão em alerta para uma possível____ d'água.
2. Romerinho terá que _______ o tempo que que fica jogando vídeo-game.
3. O saldo de gols do primeiro time da tabela é o ______ do saldo de gols do Marelin.
4. A _________ de gols sofridos por Marelin é maior que a de gols marcados.
5. Pelas contas do pai, nesse mês, o que ele receberá é ______ do que eles precisam para pagar as contas.

HORIZONTAL

6. Se o pai não tivesse dinheiro suficiente no banco ele ficariam com _______ esse mês.
7. O nível de água nos reservatórios está _______ do normal.
8. O time do Marelin está mal no campeonato por ______ em muitos jogos.
9. O time do Marelin ocupa a última _______ do campeonato.

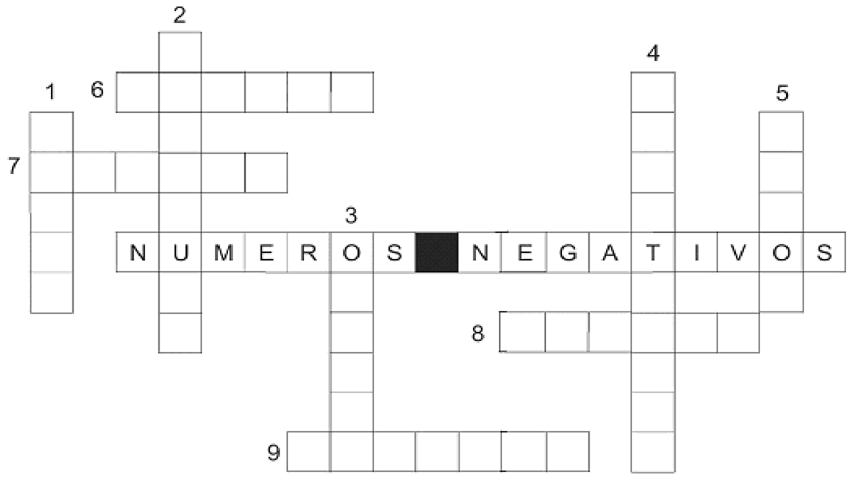


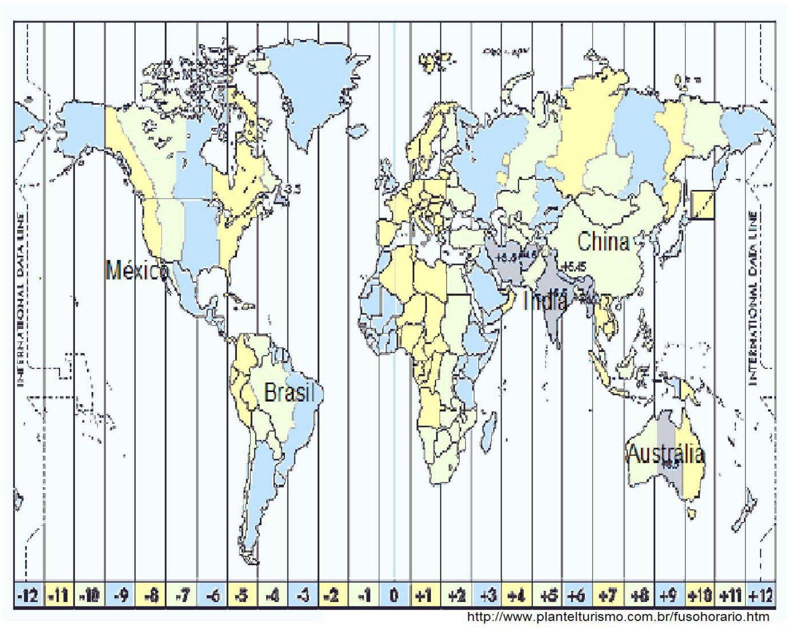
Figura 1 – Palavras cruzadas

- Atividade 2

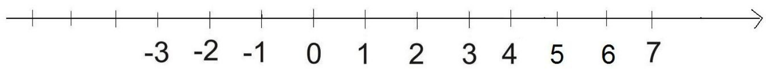
A proposta da segunda atividade era a apresentação da reta numérica, permitindo aos alunos alguma manipulação com os números negativos, identificação de números opostos e do módulo de um número inteiro. A história introdutória abordava o tema “Fuso-horário”. Logo após, era mostrado um mapa-mundi com a indicação dos fusos-horários na parte inferior, seguido de perguntas sobre a diferença de fuso-horário entre algumas regiões do globo e de um comentário, para reflexão, sobre a validade do horário brasileiro de verão. Em seguida havia uma reta numérica e algumas observações referentes à posição dos números na reta, módulo de um número e sobre números opostos. Nesta parte era pedido que os alunos completassem uma frase, relacionada a números inteiros opostos (Figura 2).

Você entendeu o que é o fuso-horário? Vamos olhar o mapa abaixo.
Os números que estão na parte de baixo indicam exatamente a diferença de horário em relação ao Meridiano de Greenwich (fuso 0).

Como lemos na história, a cidade do México está localizada no fuso -6. Quantas horas a menos ela está em relação ao estado do Rio de Janeiro (fuso -3)? E em relação à Coréia, no fuso +9?



Você observou a indicação dos fusos? É semelhante a reta numérica. Vamos dar uma olhada.



O zero é o nosso referencial. Todos os valores à esquerda são negativos e à direita positivos. Quanto mais para a esquerda nos movemos, mais negativo (menor) é o número e, quanto mais para a direita, mais positivo (maior).
Agora responda: Qual a distância de -2 a 0? E de 2 a 0?

O módulo, ou valor absoluto, de um número é justamente a distância deste número ao zero.
A distância de -2 a 0 é _______ a distância de 2 a 0. Por isso dizemos que 2 e -2 são números **opostos.**

oposto de 2 → -2
oposto de -2 → -(-2)=2

Figura 2 – Fuso-horário

- Atividade 3

Esta atividade referia-se às operações de adição e subtração de números inteiros. A história introdutória abordava as leis de trânsito. Após uma explicação das regras de sinais para as duas operações havia o *Jogo dos sete erros matemáticos*. Nele eram apresentados dois desenhos de uma sala de aula com alguns alunos e contas de adição e subtração de inteiros no quadro. Era pedido que os alunos identificassem quais dessas contas estavam erradas (havia 7) e que as corrigissem (Figura 3).

Figura 3 – Jogo dos sete erros matemáticos

- Atividade 4

A atividade estava relacionada às operações de multiplicação e divisão de números inteiros. A história inicial falava sobre perda de “peso” e sobre números de pontos de um time de futebol em um campeonato. Em seguida havia uma explicação da regra de sinais para a multiplicação e divisão e, após, o Quebra-cabeça. Era pedido aos alunos que completassem com as peças dadas. Ele era formado por contas de multiplicação e divisão de números inteiros (Figura 4)

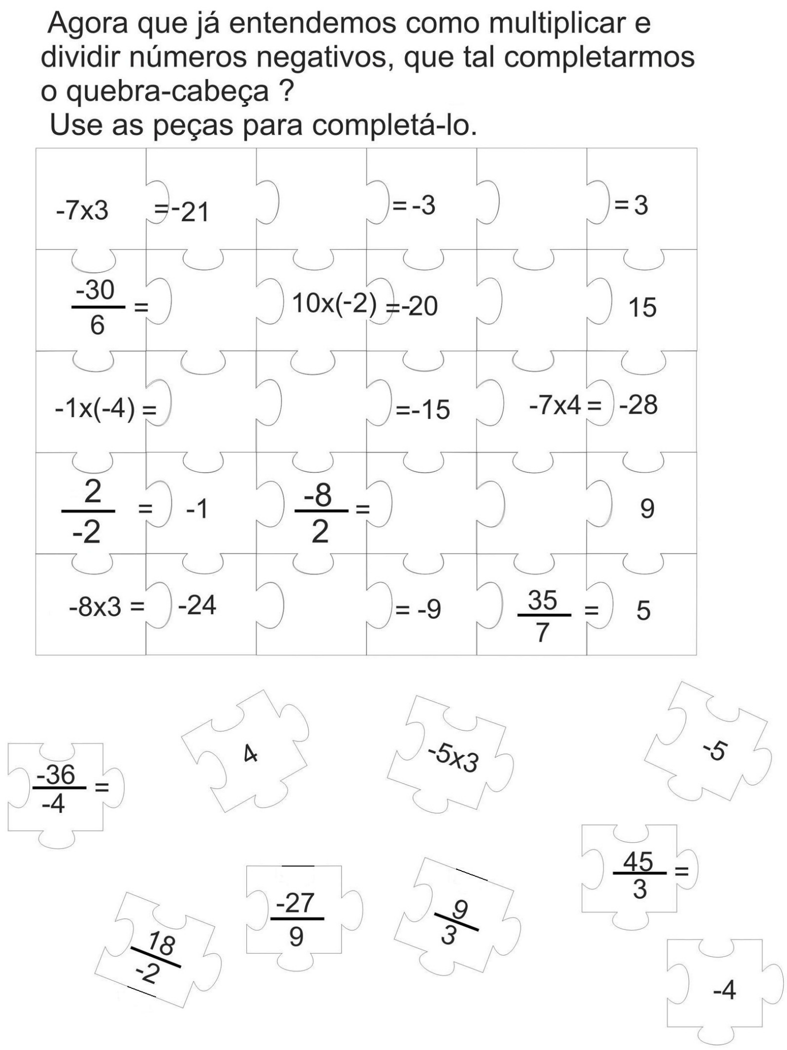


Figura 4 – Quebra-cabeça

As atividades propostas acima foram testadas em campo para averiguação de sua funcionalidade e identificação de possíveis erros/dificuldades, conforme segue abaixo no primeiro, segundo e terceiro encontro.

Primeiro encontro

Para o primeiro encontro, foram propostas as duas primeiras atividades.

Na turma da 6.ª série, treze alunos estavam presentes. Foi lhes dada uma cópia da primeira atividade e espontaneamente alguns se ajuntaram enquanto outros preferiram permanecer sozinhos.

Muitos alunos tiveram dificuldades por pensar que fossem encontrar as palavras que faltavam diretamente no texto. Alguns tentavam encaixar palavras totalmente fora do contexto da frase. Houve dificuldade na leitura e na interpretação do texto. Além disto, alguns alunos tentaram responder sem terem lido a história.

Após terminarem de completar, lendo a parte inferior às palavras cruzadas, eles puderem compreender a proposta da atividade e o que os números negativos representavam naquele contexto.

A atividade, em sua totalidade, foi respondida corretamente por oito alunos. O item de maior dificuldade foi o número 3. Apesar dos alunos saberem o que são números opostos, não atentaram para a tabela dada na história. Foi necessária intervenção da pesquisadora para ajudá-los a compreender do que se tratava.

O item 2 também trouxe dificuldade aos alunos por causa da interpretação. Muitos interpretaram a fala da mãe como uma proibição ao filho de jogar vídeo-game. Foi necessário dialogar com eles de forma a esclarecer a fala da mãe.

Os itens 1 e 7 foram considerados mais fáceis, por estarem diretamente no texto.

Números inteiros negativos não era um conteúdo desconhecido para a turma, mas eles demonstraram não estarem acostumados a manipulá-los em situações problemas e atribuir-lhes sentido.

A segunda atividade foi feita em grupo. Todos responderam corretamente à primeira pergunta (Quantas horas a menos a cidade do México está em relação ao estado do Rio de Janeiro?), já na segunda houve dúvida. Alguns, a princípio, não perceberam como poderiam "andar" da parte negativa para a positiva e fizeram a conta a partir do zero, respondendo 9 h. Após intervenção conseguiram compreender.

Ao serem questionados sobre a distância de -2 a 0, alguns alunos, observando a reta, responderam 3, incluindo o -2 na contagem possivelmente por estarem observando três pontos ($\xrightarrow[-2\quad -1\quad 0]{}$).

Foi possível notar que a turma não leu com atenção a atividade e, onde deveria responder que a distância de -2 a 0 é igual à distância de 0 a 2, escreveu 2, alguns -2. Mas, ao serem questionados verbalmente sobre a questão responderam corretamente.

Na turma da 5.ª série havia doze alunos. A turma estava estudando o conteúdo de frações. Semelhantemente à 6.ª série, eles receberam uma cópia da primeira atividade e espontaneamente se agruparam, e alguns preferiram ficar sozinhos. Alguns não estavam lendo a história antes de resolver as palavras cruzadas e não entenderam o que era para ser feito, com isto se agitaram. Houve dificuldade na leitura e na interpretação do texto e alguns alunos não sabiam ler e escrever direito. Intervenções e esclarecimentos foram necessários.

Muitos entendiam o sentido das frases e das palavras que estavam faltando mas não conseguiam encontrar a palavra que se encaixava adequadamente na atividade proposta. Um aluno comentou: “Nem tudo que a gente pensa dá dentro do quadrinho”. E outros alunos responderam com palavras semelhantes mas que diferiam no tempo verbal, por exemplo, perdeu ao invés de perder. Oito pessoas responderam corretamente toda a atividade. O item que trouxe maior dificuldade foi o terceiro, pois eles ainda não tinham produzido significado para o conceito de oposto. Para que pudessem responder foi necessária intervenção da pesquisadora. O primeiro item foi o que teve o maior número de acertos, seguido do sétimo.

Após todos terminarem, foi feita a leitura coletiva do trecho abaixo das palavras cruzadas e a turma pôde então compreender como reconhecer os números negativos e os vários sentidos que eles podem assumir. Neste ponto, ficou mais clara a proposta do trabalho; pois, até então, apesar da apresentação inicial, os alunos ainda não conseguiam ver o porquê da história e daquele tipo de atividade numa aula de Matemática.

A segunda atividade foi entregue em seguida. Eles não entenderam que deveriam responder às questões relativas à diferença de fuso-horário e portanto não o fizeram. Não estavam muito interessados em ler. Assim como na 6.ª série, a maioria entendeu que a distância de -2 a 0 é 2, mas não percebeu que a questão era o fato desta distância ser igual à distância de 0 a 2. Um aluno escreveu -1.

Por não ter lido com atenção a atividade, grande parte da turma não alcançou todos os objetivos propostos, não assimilando o conceito de números opostos. Na atividade 1, uma das palavras a ser completada era *oposto*. Naquela etapa, para que pudessem responder, chamou-se a atenção dos alunos para a diferença entre os números -4 e 4 – visivelmente, o sinal. Mas, nesse momento, desejava-se que compreendessem o conceito de números opostos, que vai além da diferença de sinal.

Segundo encontro

Para o segundo encontro foi proposta a atividade 3.

Estavam presentes, na turma da 6.ª série, quinze alunos. Alguns tentaram resolver o *Jogo dos sete erros matemáticos* sem ler a história e a explicação e sem prestar atenção no que era pedido, tendo dificuldades para entender o que era para ser feito. Alguns, por falta de atenção, pensaram haver erros nos exemplos dados na parte da explicação. Foram necessários esclarecimentos. Perguntas feitas pelos alunos:

“Sinais iguais soma ou diminui?”

“Sinais diferentes soma ou diminui?”

"Se não tiver sinal na frente é positivo ou negativo?"

"O sinal de mais antes do parêntesis troca o sinal?"

"O sinal de menos antes do parêntesis troca o sinal?"

Alguns alunos demonstraram ter dificuldade em operar com números naturais, como $20-6$. Um aluno escreveu a regra de sinais para a multiplicação no alto da folha. Uma parcela da turma apenas identificou as operações que considerava erradas mas não as corrigiu. E apesar dos desenhos serem semelhantes, diferindo apenas na resolução das operações, grande parte dos alunos não percebeu isto.

A Tabela 1 apresenta o número de alunos que resolveu a Atividade 3 e o tipo de dificuldade encontrada na sua resolução.

Tabela 1: Resultado numérico das respostas dos alunos de 6.ª série dos itens da atividade 3.
A- Alunos que identificaram o erro; B - Alunos que corrigiram devidamente; C - Alunos que não corrigiram devidamente; D - Alunos que não corrigiram; E - Alunos que não identificaram o erro.

Erro	A	B	C	D	E
1.º - $e)-2-8=$ 10	12	3	3	6	3
2.º - $g)-7-(-1)=$ $7+1=$ 8	8	2	5	1	7
3.º - $d)20+(-6)=$ $20+6=$ 26	11	9	2	-	4
4.º - $f)(+19)+(-4)=$ $19+4=$ 23	11	11	-	-	4
5.º - $g)-7-(-1)=$ $7+1=$ 8	4	1	3	-	11
6.º - *-4+9 dá quanto? -5.*	6	5	1	-	9
7.º - $-5-(-1)=6$	6	3	3	-	9

No Quadro, 1 estão as correções válidas e as inválidas dadas pelos alunos em cada erro.

Quadro 1: Correções válidas e inválidas apresentadas pelos alunos da 6.ª série em cada item da atividade 3.

	Erro	Correções válidas	Correções inválidas
1.º -	$e) - 2 - 8 =$ 10	$e) - 2 - 8 =$ -10	$-2-8=6$ e $2+8+9$
2.º -	$g) - 7 - (-1) =$ $7 + 1 =$ 8	$-7-(-1)=$ $-7+1=$ -6	$-7-(-1)=-8$, $-7-(-1)=7+1=-6$ e $-7-4-8$
3.º -	$d) 20 + (-6) =$ $20 + 6 =$ 26	$20+(-6)=$ $20-6=$ 14	$20-6-14=$ e $20+(-6)=-14$ *positivo*
4.º -	$f)(+19) + (-4) =$ $19 + 4 =$ 23	$(+19)+(-4)=19-4=15$, $(+19)+(+4)=23$ e $19+4=23$	-
5.º -	$g) - 7 - (-1) =$ $7 + 1 =$ 8	$7+1=8$	$-7-(+1)=-6$, $-7-(-1)=7+1=8$ e $-7-(-1)=7-1=8$
6.º -	*-4+9 dá quanto?* *-5.*	$-4+9=+5$	$4-9=5$
7.º -	$-5-(-1)=6$	$-5-(-1)=$ $-5+1=$ -4	$5+1=-4$, $-5-(-1)=4$ e $-5-(-1)=-6$

Nenhum aluno encontrou e/ou corrigiu devidamente todos os erros. Através da atividade, muitos alunos demonstraram não ter domínio sobre as operações de adição e subtração de números inteiros, em especial quando há um sinal negativo antes do parêntesis, como no sétimo erro.

Uma das razões para a grande dificuldade com operações nas quais apareciam sinal negativo antes do parêntesis está no fato de não terem compreendido devidamente o conceito de números opostos.

Na turma da 5.ª série havia quinze alunos. A dificuldade inicial foi com a leitura. Eles não entendiam o que estava escrito na explicação da regra de sinais. Alguns pensaram que havia cálculos para serem feitos. Quando começaram a fazer o *Jogo dos sete erros matemáticos,* alguns alunos da turma sentiram dificuldade com o tamanho da letra e foi necessário escrever no quadro para facilitar a leitura e explicar como efetuar adições e subtrações com números inteiros. Para facilitar o entendimento, foi utilizada a noção de ganho e perda.

Na Tabela 2, são apresentados os números de alunos que identificaram e corrigiram os erros.

Tabela 2: Resultado numérico das respostas dos alunos de 5.ª série aos itens da atividade 3.
A - Alunos que identificaram o erro; B - Alunos que corrigiram devidamente; C - Alunos que não corrigiram devidamente; D - Alunos que não corrigiram; E - Alunos que não identificaram o erro

	Erro	A	B	C	D	E
1.º -	$e) -2-8=$ 10	9	6	2	1	6
2.º -	$g) -7-(-1)=$ $7+1=$ 8	11	8	3	-	4
3.º -	$d) 20+(-6)=$ $20+6=$ 26	6	3	3	-	9
4.º -	$f) (+19)+(-4)=$ $19+4=$ 23	6	2	4	-	9
5.º -	$g) -7-(-1)=$ $7+1=$ 8	12	6	6	-	3
6.º -	*-4+9 dá quanto?* *-5.*	6	6	-	-	9
7.º -	$-5-(-1)=6$	8	2	5	1	7

No Quadro 2, são mostradas as respostas dos alunos.

Quadro 2: Correções (válidas e inválidas) apresentadas pelos alunos da 5.ª série em cada item da atividade 3.

	Erro	Correções válidas	Correções inválidas
1.º -	$e) -2-8=$ 10	$e) -2-8=$ -10	-2-8=6 e -2-8=-6
2.º -	$g) -7-(-1)=$ $7+1=$ 8	$-7-(-1)=$ $-7+1=$ -6	-7+1=6
3.º -	$d) 20+(-6)=$ $20+6=$ 26	$20+(-6)=$ $20-6=$ 14	$20+(-6)=20+6=14$ e $20+(-6)=20+6=+26$

4.º -	$f)(+19)+(-4)=$ $19+4=$ 23	$(+19)+(-4)=19-4=15$	$(+19)+\left(-4\right)=19+4=15$ $(+19)+(-4)=19+4=+23$
5.º -	$g)-7-(-1)=$ $7+1=$ 8	$\left(-7-(-1)=-7+1=-6\right)$	$-7-(-1)=-7+1=6$, $-7-(-1)=7+1=6$, $-7-(1)=6$ e $-7-(-1)=7+1=-6$
6.º -	*-4+9 dá quanto?* *-5.*	$-4+9=+5$	-
7.º -	$-5-(-1)=6$	$-5-(-1)=$ $-5+1=$ -4	$-5+1=4$, -5(1-5+1=-6 -5-(-1)=5+1=-4 e -5-(-1)=5-1=4

Nenhum aluno identificou e/ou corrigiu devidamente todos os erros. As correções inválidas ocorreram principalmente nas operações envolvendo números negativos dentro do parêntesis (Quadro 2).

O rendimento da turma foi melhor do que o da 6.ª série. Um número maior de alunos corrigiu devidamente os erros e, nas correções inválidas, percebeu-se, como também na outra turma, falta de atenção ao escrever. Sendo este o primeiro contato formal dos alunos com o conteúdo (pois muitos lidam com ele em situações do dia-a-dia) sem que houvesse uma explicação prévia, o desempenho da turma na atividade foi bom, ainda que muitos não tenham adquirido domínio sobre as operações propostas com números inteiros relativos. Ao utilizarem a noção de ganho e perda, ter e dever, os alunos conseguiram operar com mais facilidade.

Terceiro encontro

Neste encontro, propôs-se a atividade relacionada às operações de multiplicação e divisão de números inteiros.

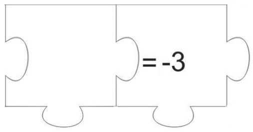
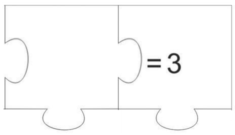
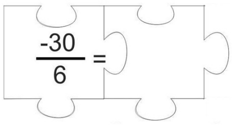
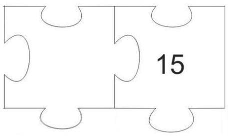
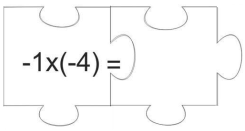
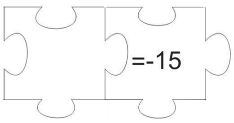
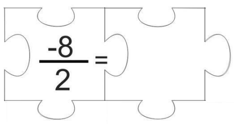
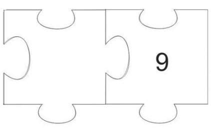
Muitos dos dezesseis alunos presentes da turma de 6.ª série não leram a história e a explicação iniciais, no entanto, completaram o quebra-cabeça com facilidade e em pouco tempo por já saberem resolver essas operações.

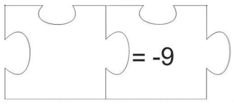
Alguns alunos não entenderam que deveriam completar o quebra-cabeça com as peças dadas na parte inferior e passaram a completá-las com contas que dessem os resultados desejados. Outros pensaram que estava sendo pedido que somassem os números. Estes mal entendidos resultaram da leitura indevida do enunciado.

A pergunta mais freqüente foi: *"Precisa colocar o sinal?"*.

A Tabela 3 mostra o número de alunos que completaram correta ou incorretamente cada parte do quebra-cabeça ou que não completaram e ainda as respostas incorretas apresentadas.

Tabela 3: Resultado numérico e respostas dos alunos de 6.ª série na atividade 4

Peças	Alunos que completaram corretamente	Alunos que não completaram corretamente	Alunos que não completaram	Respostas incorretas apresentadas
	12	4	-	$\frac{9}{3}$ e -5x3
	13	3	-	$27 \div 9$ e -5
	12	4	-	$\frac{36}{-4}$ e 5
	13	3	-	5x3 e -5x3
	10	6	-	$4 \div 1 = 4$ e -4
	10	3	3	5x3 e -4
	11	5	-	$\frac{-18}{2}$ e 4
	8	8	-	$\frac{-36}{4}$, $\frac{36}{4}$, $\frac{18}{-2}$, $\frac{18}{2}$ e $\frac{9}{3}$

	11	5	-	$18 \div 2$, $\frac{-27}{9}$, $\frac{-36}{-4}$, $\frac{36}{4}$ *e* $\frac{36}{-4}$

O quebra-cabeça foi completado corretamente por quatro alunos e um o completou de maneira totalmente incorreta.

Pelas respostas dos alunos, notou-se que eles têm domínio sobre as operações de multiplicação e divisão em $\mathbb{N}$ e a maioria também em $\mathbb{Z}$. Muitos erros encontrados estão relacionados à falta de atenção ao escrever. Em vários casos, os alunos completaram com operações que davam o resultado esperado, mas que não estavam nas opções. Estas respostas são relevantes, pois indicam que o aluno entendeu como operar; no entanto, apontam (como as demais atividades) para uma deficiência na leitura e interpretação de enunciados.

O aluno que não conseguiu fazer nenhuma parte da atividade de maneira correta demonstrou desinteresse pela atividade e por isto completou indevidamente o quebra-cabeça.

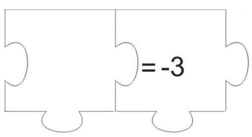
A turma demonstrou ter mais facilidade com essas operações do que com a de adição e subtração.

Os alunos da 5.ª série estavam agitados no início do trabalho. Alguns tentaram completar o quebra-cabeça sem ler a história e não conseguiram. À medida que foram lendo a história, acalmaram-se e se interessaram pela atividade. Havia onze alunos presentes.

Eles não entenderam o exemplo de multiplicação dado (4x(-3)), sendo necessário explicar. Um erro comum entre os alunos era pensar que todo cálculo com número negativo tem resultado negativo, por exemplo $\frac{-36}{-4}$.

A Tabela 4 mostra o resultado da 5.ª série na Atividade 4.

Tabela 4: Resultado numérico e respostas dos alunos de 5.ª série na atividade 4

Peças	Alunos que completaram corretamente	Alunos que não completaram corretamente	Respostas incorretas apresentadas
	4	7	$\frac{27}{1}$, $\frac{21}{3}$, $\frac{21}{7}$ e $\frac{27}{9}$

$= 3$	11	-	-
$\frac{-30}{6} =$	8	3	5, $\frac{45}{3}$ e -36
15	6	5	$\frac{-45}{3}$, 5x3, -3x5 e -5x3
-1x(-4) =	3	8	-4
=-15	4	7	5x3, -5 e $\frac{45}{3}$
$\frac{-8}{2} =$	2	9	$\frac{-36}{-4}$ e 4
9	4	7	$\frac{-36}{4}$, $\frac{36}{4}$, $\frac{3}{3}$ e 4
= -9	7	4	$\frac{18}{2}$ e -27

Os resultados indicam que os alunos conseguiram assimilar em parte as operações de multiplicação e divisão com números inteiros e, apesar de terem tido mais facilidade nesta atividade, o aproveitamento da turma foi maior na atividade anterior.

Assim como na 6.ª série, muitos completaram com operações que tinham como resultado os valores apresentados nas peças, mas não constavam nas opções dadas, além da evidente falta de atenção na escrita.

O desempenho das duas turmas nas atividades indica que a proposta é válida como um recurso do qual professores possam dispor no ensino de números inteiros negativos, tanto para fixação do conteúdo como para apresentação do mesmo; pois, acompanhadas de outras ações do professor favorecem a compreensão dos conceitos e a aplicação prática destes, além da produção de significado para os números inteiros.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Pelos resultados obtidos nas análises feitas, buscamos responder as questões levantadas.

Em primeiro lugar, percebemos, pela análise histórica, que a aceitação dos números negativos foi um processo lento. Muitos os aceitavam como intermediários nos cálculos, mas não como solução de equações, considerando-os números absurdos e por isso os evitavam. Verificamos que na cultura chinesa e hindu não havia preocupação em demonstrar a regra de sinais. Durante algum tempo assim também o foi na cultura européia. A análise histórica também revelou que um dos obstáculos para a compreensão das operações com os números negativos foi a modelização excessiva. Assim, os matemáticos não conseguiam dissociar os números negativos dos exemplos concretos. Só após transporem esta barreira foi possível definir o conjunto dos inteiros relativos com todas as suas propriedades e operações.

A análise de livros didáticos revelou a mudança de postura no ensino de Números Inteiros, impulsionada pelas mudanças que sofreu o ensino da Matemática: da ênfase na regra de sinais, à ênfase na compreensão das operações e na aplicação do conteúdo.

Na pesquisa com professores constatamos entre outras coisas que:

- o livro didático é o principal recurso de que dispõe o professor no preparo de suas aulas;
- existe grande preocupação entre os professores de que os alunos saibam lidar com o conteúdo no seu cotidiano;
- dentre as aplicações, as mais utilizadas pelo professores participantes da pesquisa são as que envolvem ganhos e perdas e,
- apesar de ser considerada de fácil abordagem, a história dos números negativos não faz parte das aulas da maioria desses professores.

As atividades propostas, em formato de passatempo, foram validadas enquanto recurso disponível a professores no ensino de Números Inteiros Negativos.

Todos esses recortes demonstraram que o sucesso ou fracasso do processo de ensino e aprendizagem não é determinado por um único fator. A aprendizagem é um processo dinâmico, criativo e constante; anterior a escolarização. E a forma como o sistema educacional e o professor compreendem a Matemática fundamentam as escolhas pedagógicas que são favoráveis ou não à aprendizagem dela, conseqüentemente ao desenvolvimento do indivíduo.

Este trabalho buscou trazer luz a alguns aspectos admitidos como importantes no ensino e aprendizagem de Matemática, especificamente dos Números Inteiros Negativos. Desejamos que ele possa incitar outras pessoas, especialmente professores, a irem mais longe na procura de respostas aos questionamentos feitos acerca deste conteúdo específico ou de outros e a lançarem-se na procura e elaboração de outras ferramentas de ensino, adequadas a sua realidade.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, J., NETO, S. *Manual para candidatos a motorista e motociclista.* Rio de Janeiro.

BIANCHINI, E. *Matemática 6.ª série*, Moderna, São Paulo, 1984.

BOYER, C.B. *História da Matemática*. Edgard Blucher, São Paulo, 2001.

CORRÊA, R.S.S.*História da equação do segundo grau: uma abordagem para sala de aula*. Monografia. Centro Federal de Educação Tecnológica de Campos, 2006.

D'Ambrosio entrevista Paulo Freire. 2000. Disponível em: http://vello.sites.uol.com.br/entrevista.htm. Última consulta:11/04/06.

D'AMBROSIO, U. *Educação Matemática: Uma visão do estado da arte.* Pro-Posições, vol.4, n.1[10], p.7-15, UNICAMP, São Paulo, 1993.

DAMM, R.F. *Registros de representações*. Educação Matemática: uma introdução. EDUC, São Paulo, p.135-153, 2000.

FERREIRA, G.M.L. *Moderno Atlas Geográfico*. Moderna, São Paulo, 1993.

FREIRE, P. *A importância do ato de ler*. A importância do ato de ler em três artigos que se completam. Cortez, São Paulo, 2001.

____.*Educação como prática da Liberdade.* Paz e Terra, São Paulo, 1985.

Fuso horário. Disponível em: http://www.plantelturismo.com.br/fusohorario.htm. Última consulta: 06/11/2006.

GLAESER, G. *Epistemologia dos números relativos*. BOLETIM/GEPEM. n.17, Rio de Janeiro, 1985.

GUELLI, O., LIMA, L. *Construindo a Matemática – 6.ª série*, Companhia Editora Nacional, São Paulo, 1987.

GUZMÁN, M. *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática*. Sd. Disponível em: http://bve.cibec.inep.gov.br/ac_rap.asp?cat=19&nome=Estatística%20da%20Educação%20Básica. Última consulta: 07/02/2007

IGLIORI, S.B.C. *A noção de 'obstáculo epistemológico' e a Educação Matemática.* Educação Matemática: uma introdução. EDUC, São Paulo, p.89-113, 2000.

IMENES, L.M., LELLIS, M. *Matemática para todos – 6.ª série.* Scipione, São Paulo, 2002.

KIMURA, C.F.K. *O jogo como ferramenta no trabalho com números negativos: um estudo sob a perspectiva da epistemologia genética de Jean Piaget*. *Tese de doutorado*. Pontífica Universidade Católica de São Paulo, 2005. Disponível em:

http://www.pucsp.br/pos/edmat/do/linha_1_dout.html. Última consulta: 18/03/06

LELLIS, M.C., et all. *Números Negativos (Pra que serve Matemática?).* Atual, São Paulo, 1992.

LIMA, E.L. *Meu professor de Matemática e outras histórias.* SBM, Rio de Janeiro, 2000.

LINS, R.C. *Matemática, Monstros, Significados e Educação Matemática.* Educação Matemática: pesquisa em movimento. Cortez, São Paulo, 2004.

____.*Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática.* Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas. UNESP, São Paulo, 1999.

LOGEN, A. *Matemática em Movimento – 6.ª série*. Editora do Brasil, 1999.

MATSUBARA, R., ZANIRATTO, A.A. *Coleção Big Mat – 6.ª série.* IBEP, São Paulo, 2002.

MINISTÉRIO DA SAÚDE. *Evolução da Mortalidade por Violência no Brasil e Regiões*. Disponível em: http://portal.saude.gov.br/portal/svs/visualizar_texto.cfm?idtxt=24448. Última consulta: 20/06/2006.

NIETO, S.S. *Antecipação do ensino dos números inteiros negativos para a quarta série do primeiro grau: um estudo das possibilidades*. Dissertação de mestrado. Universidade Mackenzie, 1994, São Paulo.

PIRES C.C. *Entrevista com Ubiratan D'Ambrósio*. Educação Matemática em Revista. n.7, p. 5-10, 1999.

RADFORD, L. *On psychology, historical epistemology end teaching of mathematics: towards a socio-cultural history of mathematics.*1997. Disponível em: http://laurentian.ca/educ/lradford/PUBLIC.HTML. Última consulta: 18/03/06

RIBEIRO, D. *Nossa escola é uma calamidade*, São Paulo, Salamandra, 1984.

Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais (5.ª a 8.ª séries): Matemática, MEC, Brasília, 1998.

SOCIEDADE EDUCACIONAL POSITIVO. *Ensino Fundamental – 6.ª série, 1.º Bimestre*. 1997.

SCHUBRING, G. *Rupturas no estatuto matemático dos números negativos*. *Tradução de José Carneiro e Rosa Reis.* Boletim GEPEM, n.37, p.51-64, 2000.

____. *Rupturas no estatuto matemático dos números negativos1.* Tradução de José Carneiro e Rosa Reis. Boletim GEPEM, n.38, p.73-93, 2000.

SILVA, A.R. *O livro didático e o discurso do professor no ensino das operações com números inteiros para jovens da Educação de Jovens e Adultos*. Dissertação de mestrado. Pontífica Universidade Católica de São Paulo, 2006. Disponível em: http://www.pucsp.br/pos/edmat/mp/linha_3_prof.html. Última consulta: 01/02/07

STRUIK, D.J. *História Concisa das Matemáticas*. Gradiva, Lisboa, 1992.

VIGOTSKY, L.S., et all. *Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem.* Ícone, São Paulo, 1998.

ZAMBUZZI, O. *Matemática 6.ª série*, Ática, São Paulo, 1980.

ANEXOS

ANEXO 1: Questionário da pesquisa com professores

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE CAMPOS

MEC/SEMTEC GOVERNO FEDERAL

Questionário

Prezado(a) Professor(a)
Este questionário faz parte de um projeto monográfico sobre o processo de ensino e aprendizagem dos números inteiros negativos.

Não é necessário se identificar. Sua contribuição é valiosa na busca de alternativas que removam ou ao menos minimizem os possíveis obstáculos à aprendizagem dos alunos.

Desde já agradeço seu apoio na realização deste trabalho.

1. Você leciona em escola(s):
   ( )particular ( )municipal ( )estadual ( )federal

2. Há quanto tempo? ____________________

3. Há quanto tempo trabalha com a 6.ª série? ____________________

4. Série que atua além da 6.ª série.

( ) 5.ª à 8.ª série
( ) Ensino Médio
( ) Educação de Jovens e Adultos
( ) Ensino Superior

5. Qual o livro didático que a sua escola adota?

Título do livro: ____
Autor(es):____

6. Você utiliza o livro didático adotado?
   ( ) Sempre
   ( ) Às vezes
   ( ) Não
   Justifique a resposta dada à questão 6.

____
____

Nas questões 7 a 9 numere os itens quanto ao grau de dificuldade, começando com 1 para o mais fácil.

7. Quanto à abordagem dos números negativos em sala de aula.
   ( ) história dos números negativos
   ( ) regras de sinais

( ) representação de números negativos
( ) aplicação de números negativos
( ) linguagem
( ) propriedades

8. Quanto ao cálculo com números negativos.
( ) adição
( ) subtração
( ) multiplicação
( ) divisão
Comente sobre o que você pontuou como mais fácil e mais difícil.
____
____

9. Com relação às propriedades
( ) associativa
( ) comutativa
( ) elemento neutro
( ) cancelamento

Nas questões 10 e 11 numere os itens quanto à utilização em sala de aula, começando com 1 para a forma mais utilizada.

10. Com respeito à representação dos números negativos.
( ) enumeração
( ) tabela
( ) reta numérica
( ) outros:_____________________________

11. Quanto à aplicação.
( ) extrato bancário
( ) temperatura
( ) jogos
( ) saldo de gols
( ) fuso-horário
( ) latitude
( ) outros:____________________________

12. Marque os recursos que você utiliza para preparar suas aulas.
( ) apenas o livro didático adotado
( ) outros livros didáticos
( ) livros paradidáticos
( ) livros de história da Matemática
( ) Internet
( ) outros:____________________________________

13. O livro didático apresenta diferentes estratégias para o ensino de números negativos? ( ) Sim ( )Não
Em caso afirmativo diga quais são. Em caso negativo diga quais as estratégias adotadas por você.
____
____

14. Que outras atividades você utiliza além das propostas no livro adotado?
____
____

15. Como você justifica a regra de sinais?

16. Qual a sua maior preocupação no ensino dos números negativos?

17. Você considera a abordagem histórica importante para o ensino de números negativos? Justifique.

18. Na sua opinião o aluno é capaz de ler e entender, por si mesmo, o conteúdo dos números negativos no livro didático? Por quê? Em caso afirmativo, você já utilizou ou utiliza este método no ensino deste conteúdo?

19. Para você é importante que o aluno saiba ler diferentes formas de representação para os números negativos? Por quê?

ANEXO 2: Resultados estatísticos da pesquisa com professores da 6.ª série do Ensino Fundamental

Tabela 1: Quantidade de docente por rede de ensino

Escola	Quantidade
Particular	11
Municipal	3
Estadual	6
Federal	-

Tabela 2: Quantidade de docente por tempo de magistério

Tempo	Quantidade
Até 5 anos	9
10 a 19 anos	4
20 a 30 anos	5

Tabela 3: Quantidade de docente por tempo de atuação na 6.ª série

Tempo	Quantidade
Até 5 anos	12
6 a 10 anos	3
11 a 20 anos	2

Um professor respondeu: "Alguns anos".

Tabela 4: Quantidade de docente por segmento de ensino

Série	Quantidade
5.ª à 8.ª série	17
Ensino Médio	5
Educação de Jovens e Adultos	2
Ensino Superior	-
Não respondeu	1

Tabela 5: Quantidade de docente por livro didático adotado

Título do livro	Autor(es)	Quantidade
Matemática para todos	Imenes e Lellis	6
Matemática	Aglair Dias Santos e Edison da Matta	1
Apostila Positivo	Não informado	1
Matemática	Edwaldo Bianchini	1
Matemática e Realidade	Osvaldo Dolce	1
Praticando Matemática	Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos	4
A conquista da Matemática	Giovanni, Giovanni Jr. e Castrucci	2
Tudo é Matemática	Luiz Roberto Dante	2

Tabela 6: Quantidade de docente por freqüência de utilização do livro didático

Freqüência	Quantidade
Sempre	9

Às vezes	9
Não	-

Tabela 7: Abordagem dos números negativos em sala de aula por grau de dificuldade

Grau de dificuldade	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
História dos números negativos	13	3	2	-	-	-
Regra de sinais	1	1	5	2	4	5
Representação de números negativos	5	8	3	1	1	-
Aplicação de números negativos	1	4	4	3	4	2
Linguagem	4	1	6	5	2	-
Propriedades	-	2	1	2	5	8

Atribuição dos valores: 1 - facílimo; 2 - muito fácil; 3 – fácil; 4 – regular; 5 – difícil; 6 – muito difícil.

Tabela 8: Cálculo com números negativos por grau de dificuldade

Grau de dificuldade	**1**	**2**	**3**	**4**
Adição	12	1	4	1
Subtração	1	7	3	7
Multiplicação	3	4	9	2
Divisão	1	2	5	10

Atribuição dos valores: 1 – fácil; 2 – regular; 3 – difícil; 4 – muito difícil.

Tabela 9: Propriedades das operações com números inteiros por grau de dificuldade

Grau de dificuldade	**1**	**2**	**3**	**4**	**NR**
Associativa	1	1	5	9	2
Comutativa	3	3	7	3	2
Elemento neutro	9	3	2	2	2
Cancelamento	5	6	3	2	2

Atribuição dos valores: 1 – fácil; 2 – regular; 3 – difícil; 4 – muito difícil; NR – não respondeu

Tabela 10: Representação dos números negativos por freqüência de utilização.

Utilização	**1**	**2**	**3**	**4**	**NR**
Enumeração	4	2	5	1	3
Tabela	4	3	6	2	3
Reta numérica	12	4	1	-	1
Outros	-	-	-	-	18

Atribuição dos valores: 1 – sempre; 2 – regularmente; 3 – raramente; 4 – nunca ; NR – não respondeu

Tabela 11: Aplicação dos números negativos por freqüência de utilização.

Utilização	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**NR**
Extrato bancário	10	3	3	1	-	-	-	1
Temperatura	6	3	3	4	1	-	-	1
Jogos	3	7	5	3	-	-	-	-
Saldo de gols	8	2	3	4	1	-	-	-
Fuso-horário	1	1	1	2	7	2	-	4

Latitude	1	1	2	-	4	6	2	2
Outros	-	-	1	-	-	1	-	16

Atribuição dos valores: 1 – sempre; 2 – freqüentemente; 3 – regularmente; 4 – às vezes; 5 – pouco utilizado; 6 – raramente; 7 – nunca; NR – não respondeu

Tabela 12: Quantidade de docente por recurso utilizado para preparar aulas.

Recurso	**Quantidade**
Apenas o livro didático	3
Outros livros didáticos	13
Livros paradidáticos	6
Livros de história da Matemática	1
Internet	7
Outros	5

ANEXO 3: Atividades

Atividade 1 – parte 1

Ilustrações: Márcio Alves de Souza e Michael Valadares

Atividade 1 – parte 2

Você viu? A cidade de babados corre o risco de ficar sem água. O que os moradores podem fazer para evitar o desperdício? Escreva suas sugestões.

Por falar em economia... Você viu as contas da família? Na sua opinião eles gastam muito ou pouco? Que gastos poderiam ser reduzidos?

Se o pai não tivesse dinheiro no banco, o que poderia ser feito para conseguir os R$ 60,00 que estão faltando?

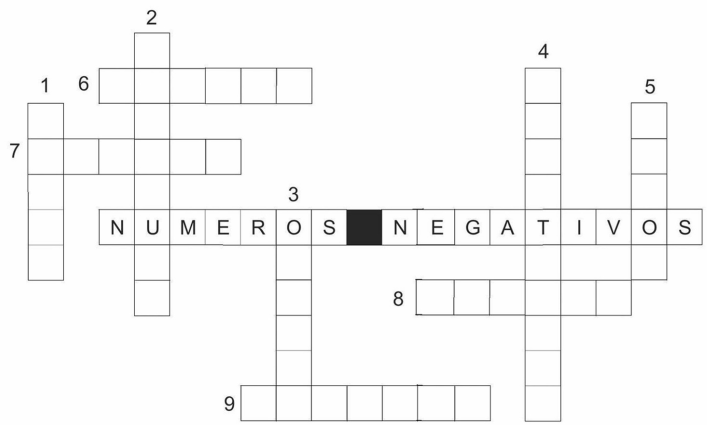
PALAVRAS-CRUZADAS

VERTICAL

1. Os moradores da cidade de Babados estão em alerta para uma possível____ d'água.
2. Romerinho terá que _______ o tempo que que fica jogando vídeo-game.
3. O saldo de gols do primeiro time da tabela é o ______ do saldo de gols do Marelin.
4. A _________ de gols sofridos por Marelin é maior que a de gols marcados.
5. Pelas contas do pai, nesse mês, o que ele receberá é ______ do que eles precisam para pagar as contas.

HORIZONTAL

6. Se o pai não tivesse dinheiro suficiente no banco ele ficariam com _______ esse mês.
7. O nível de água nos reservatórios está _______ do normal.
8. O time do Marelin está mal no campeonato por ______ em muitos jogos.
9. O time do Marelin ocupa a última _______ do campeonato.



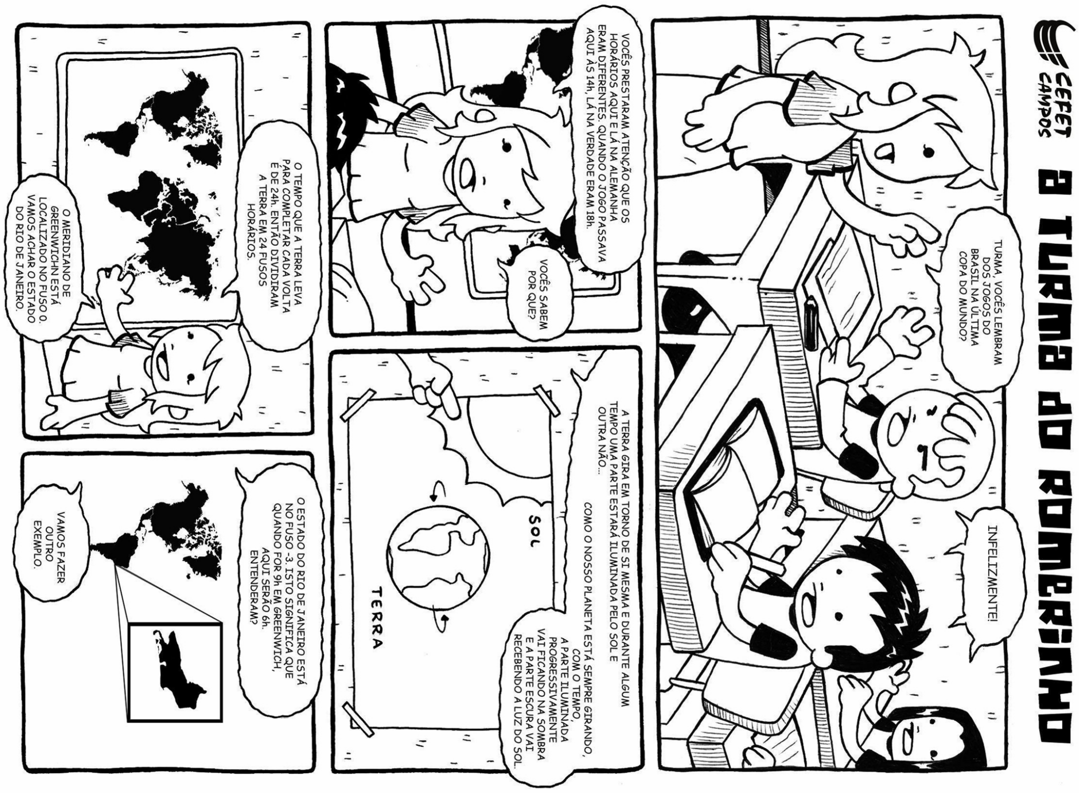
Os números negativos estão presentes em várias situações do dia-a-dia. Eles podem indicar várias coisa, dependendo da situação: falta, perda, dívida, posição (abaixo, à esquerda).

Então, daqui para frente, sempre que encontramos um problema no qual apareça um número negativo, precisamos entender o que ele representa.

Por exemplo, quando o pai fez as contas da família e encontrou um valor negativo (-60), este valor indicava o quê?

As nossas histórias estão só começando. Espero que gostem. Mas atenção aos sinais!

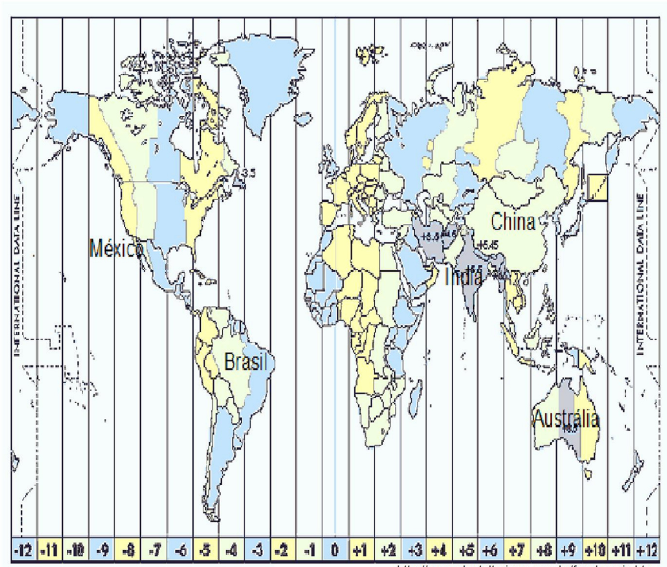
Atividade 2 – parte 1



Atividade 2 – parte 2

Você entendeu o que é o fuso-horário? Vamos olhar o mapa abaixo.
Os números que estão na parte de baixo indicam exatamente a diferença de horário em relação ao Meridiano de Greenwich (fuso 0).

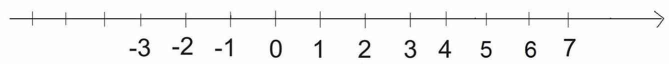
Como lemos na história, a cidade do México está localizada no fuso -6. Quantas horas a menos ela está em relação ao estado do Rio de Janeiro (fuso -3)? E em relação à Coréia, no fuso +9?



http://www.plantelturismo.com.br/fusohorario.htm

Nesta semana começou o horário de verão e adiantamos os relógios em 1 hora.
O propósito do horário de verão é a economia de energia elétrica.
Você considera essa iniciativa importante? Que medidas simples podem ser tomadas para economizar energia elétrica?

Você observou a indicação dos fusos? É semelhante a reta numérica. Vamos dar uma olhada.

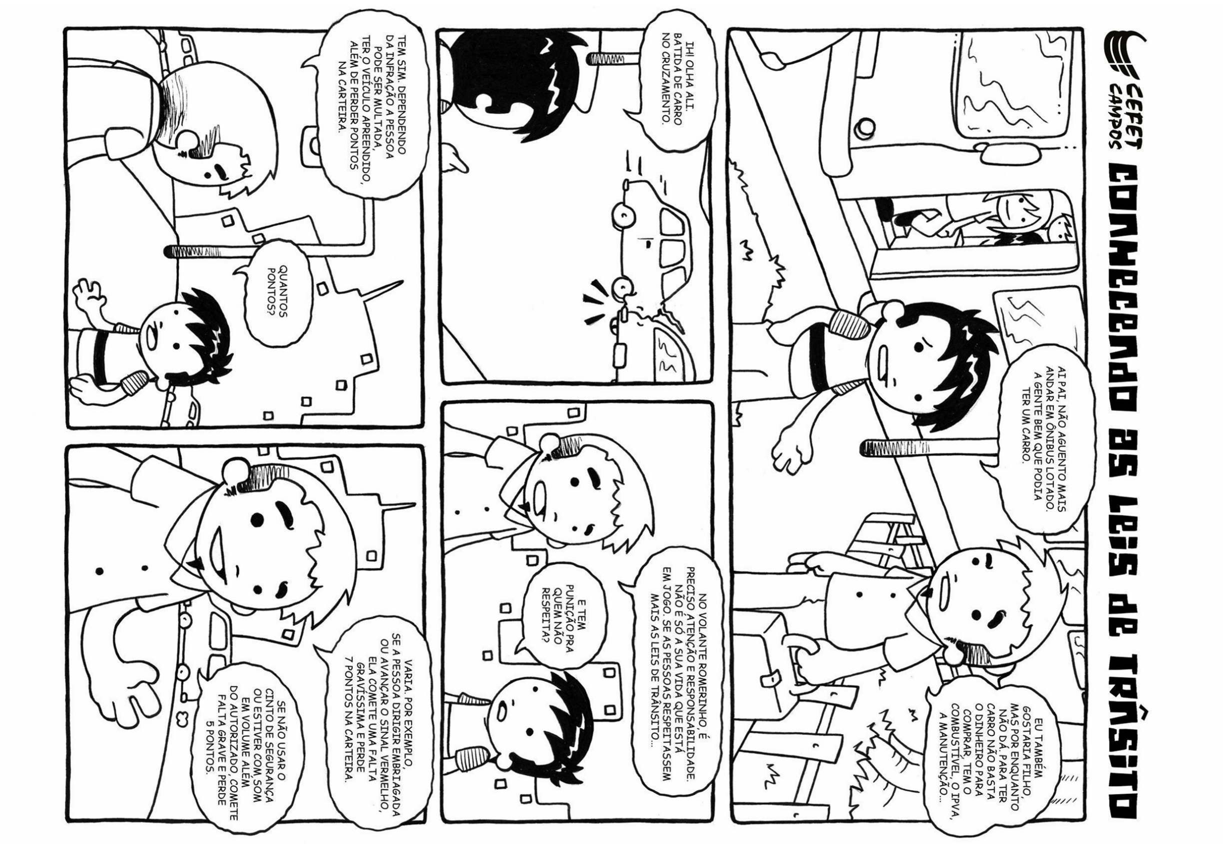


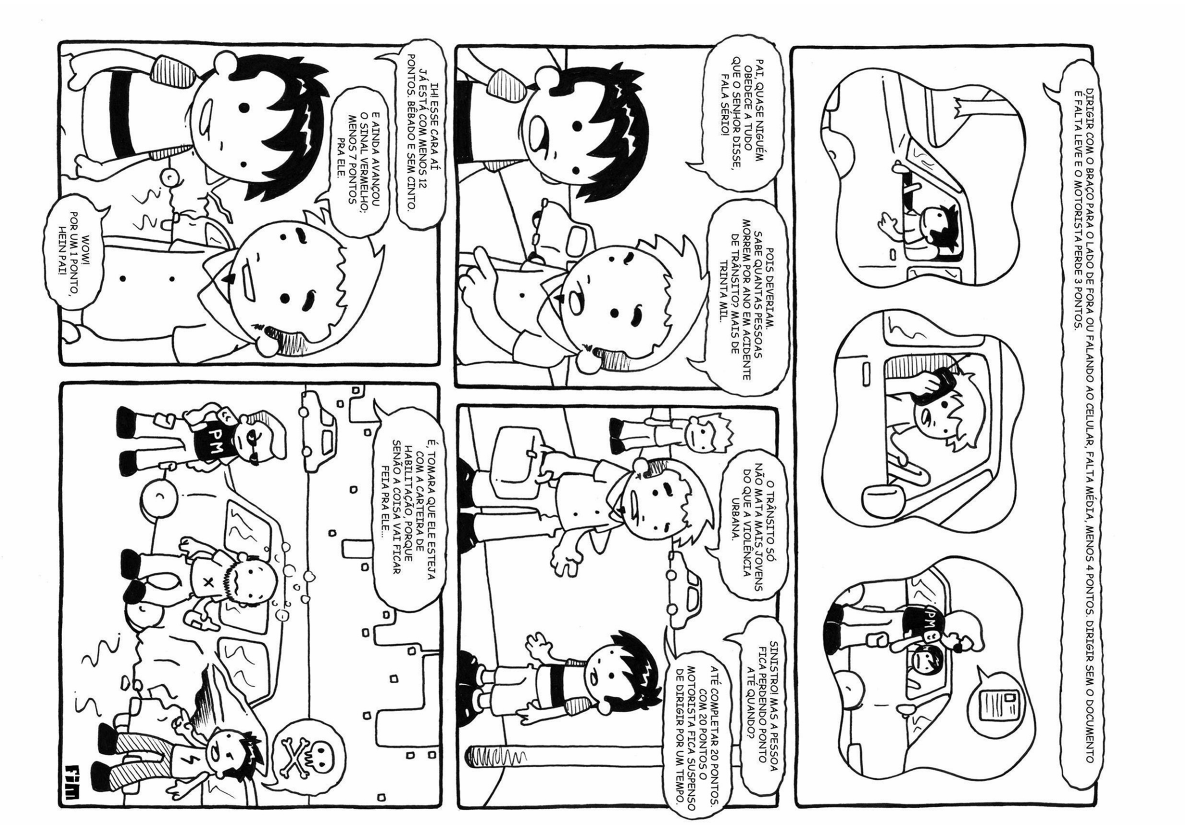
O zero é o nosso referencial. Todos os valores à esquerda são negativos e à direita positivos. Quanto mais para a esquerda nos movemos, mais negativo (menor) é o número e, quanto mais para a direita, mais positivo (maior).
Agora responda: Qual a distância de -2 a 0? E de 2 a 0?

O módulo, ou valor absoluto, de um número é justamente a distância deste número ao zero.
A distância de -2 a 0 é _______ a distância de 2 a 0. Por isso dizemos que 2 e -2 são números **opostos.**

oposto de 2 → -2
oposto de -2 → -(-2)=2

Atividade 3 – parte 1





Atividade 3 – parte 2

Você viu como é importante ter atenção no trânsito?
O rapaz ficou com -7 pontos na carteira por estar embriagado, -7 por ter avançado o sinal vermelho e -5 por estar sem cinto.
Perdeu ao todo 19 pontos. Reparou a conta?

$$-7 + (-7) + (-5) = -7-7-5 = -19.$$

Como ele só perdeu pontos, somamos todas as perdas e repetimos o sinal de menos.
E o que aconteceria se ele estivesse sem a carteira de habilitação?
Perderia ainda mais 3 pontos.
Refazendo as contas:

$$-7-7-5-3= -22.$$

No vigésimo ponto o motorista é suspenso. No primeiro caso, por exemplo, por 1 ponto, isso não aconteceu.

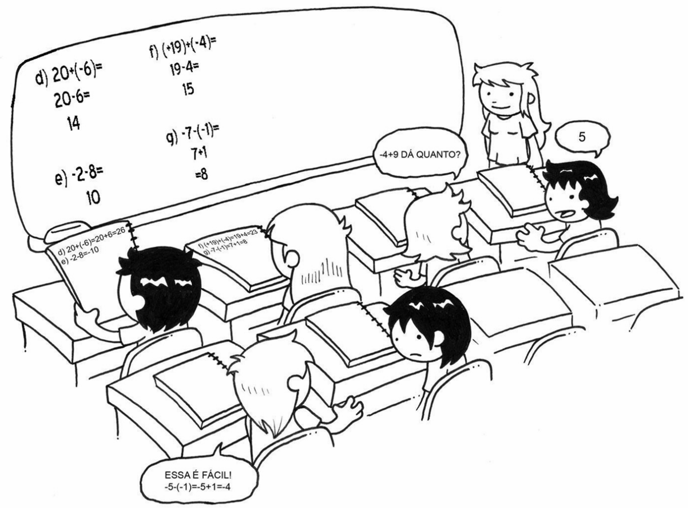
$$20-19 = 1.$$

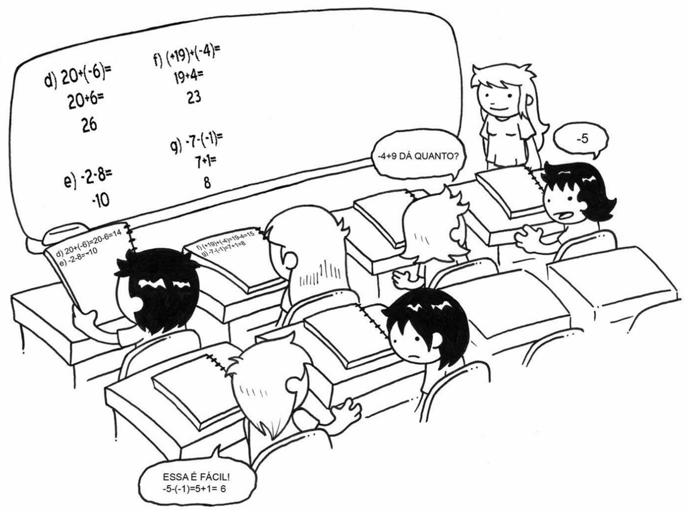
Nesse caso seria:

$$20-22 = -2.$$

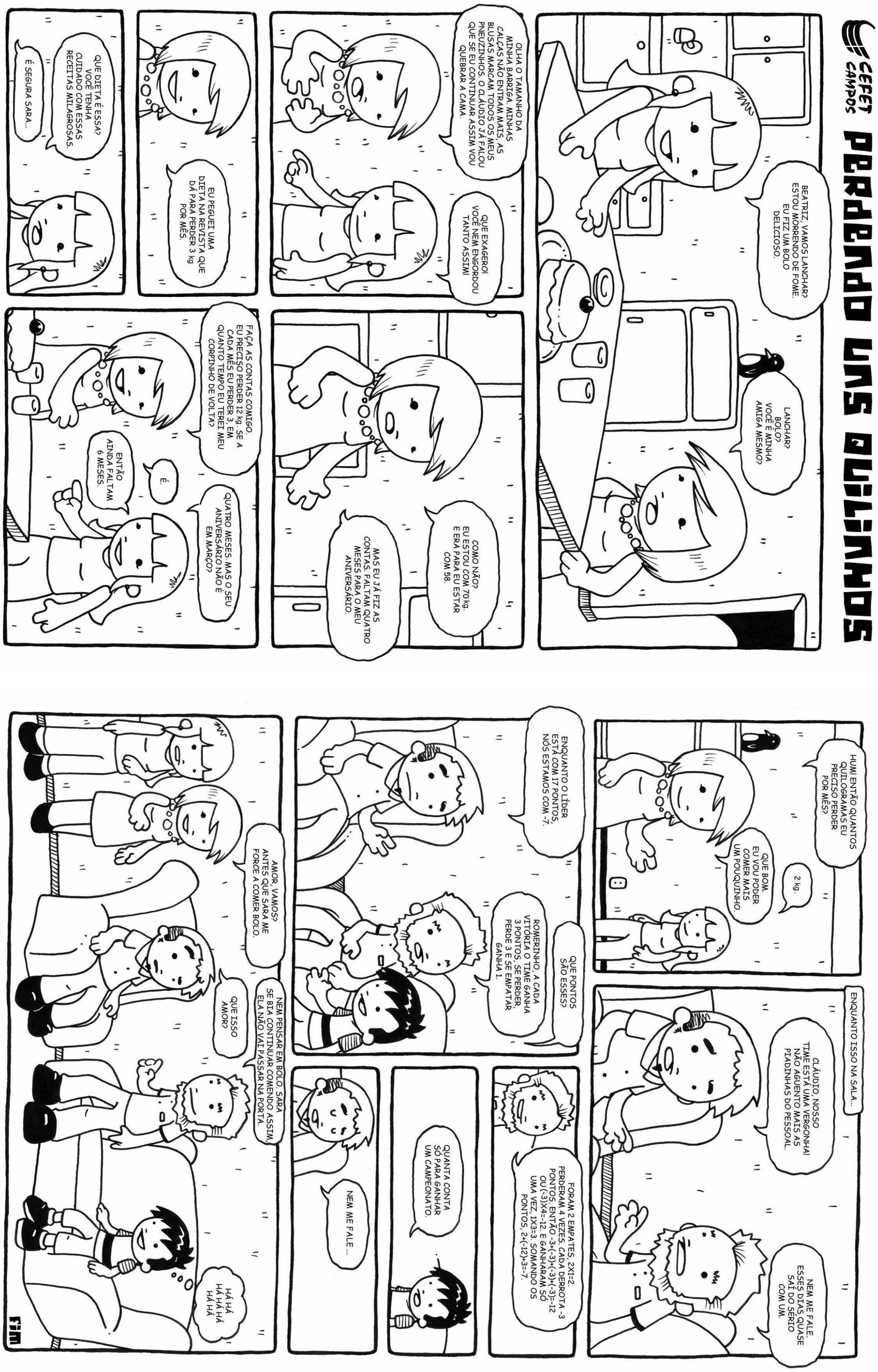
Ele pedeu 2 pontos além do "necessário" para ser suspenso. Pecebeu?
Nas duas contas, como os sinais são diferentes, diminuimos os valores e colocamos o sinal do número de maior módulo.

Agora vamos ver se você é um bom observador. Encontre os sete erros matemáticos na figura e corrija-os abaixo.
E atenção aos sinais!!!





Atividade 4 – parte 1



Atividade 4 – parte 2

$(-3) \times 4 = -3+(-3)+(-3)+(-3) = -12$

Mas, e $4 \times (-3)$?

$-3+3 = 0$

$4x(-3+3) = 4x0$

$4x(-3) + 4x3 = 0$

$4x(-3) = -(4x3)$

$4x(-3) = -12$

E,

$-4x(-3) = -(4x(-3)) = -(-12) = 12.$

Logo, quando multiplicamos dois números inteiros com sinais diferentes, o produto é negativo. Mas,se os sinais forem iguais, o produto é positivo.

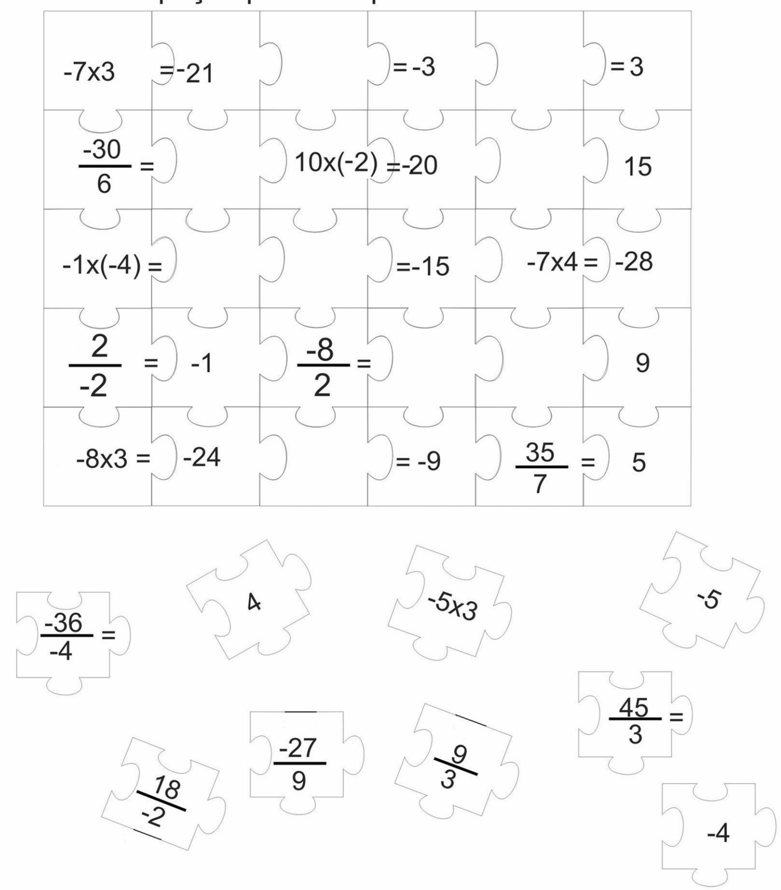
Na divisão a regra de sinais é igual a da multiplicação.

Então $\frac{-12}{6} = -2$, $\frac{12}{-6} = -2$

e $\frac{-12}{-6} = 2.$

Agora que já entendemos como multiplicar e dividir números negativos, que tal completarmos o quebra-cabeça ?

Use as peças para completá-lo.



ANEXO 4: Fotos

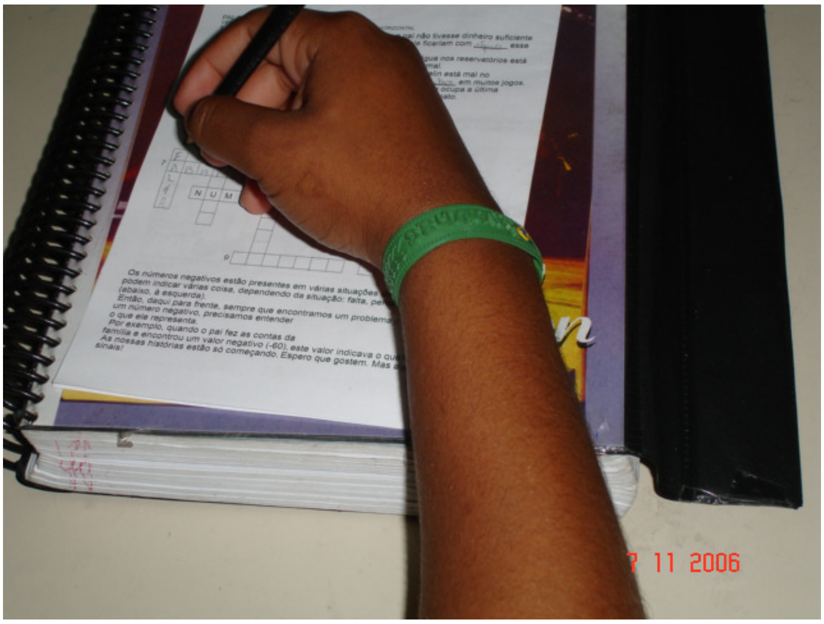


Foto 1: Aluno da 5.ª série respondendo as *Palavras Cruzadas*

Foto 2: Leitura coletiva da parte final da Atividade 1 na turma da 5.ª série

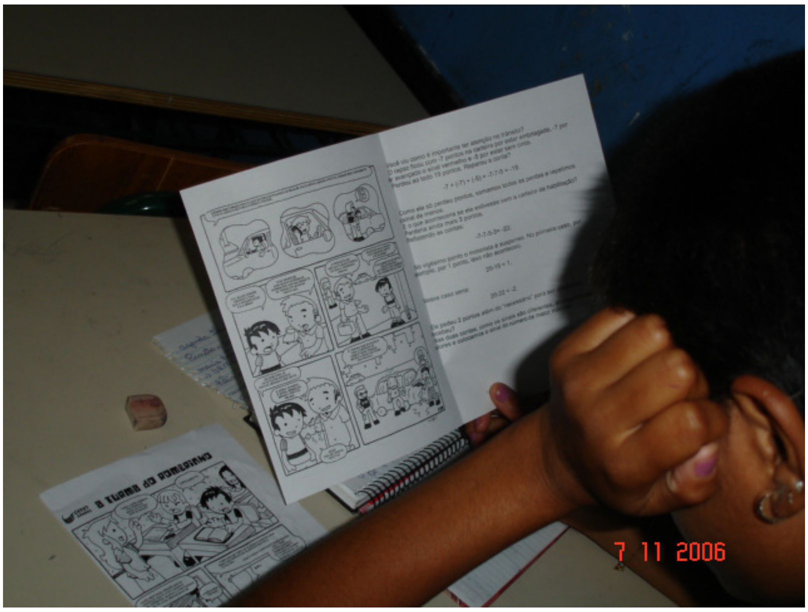


Foto 3: Aluno da 6.ª série lendo a história da Atividade 3

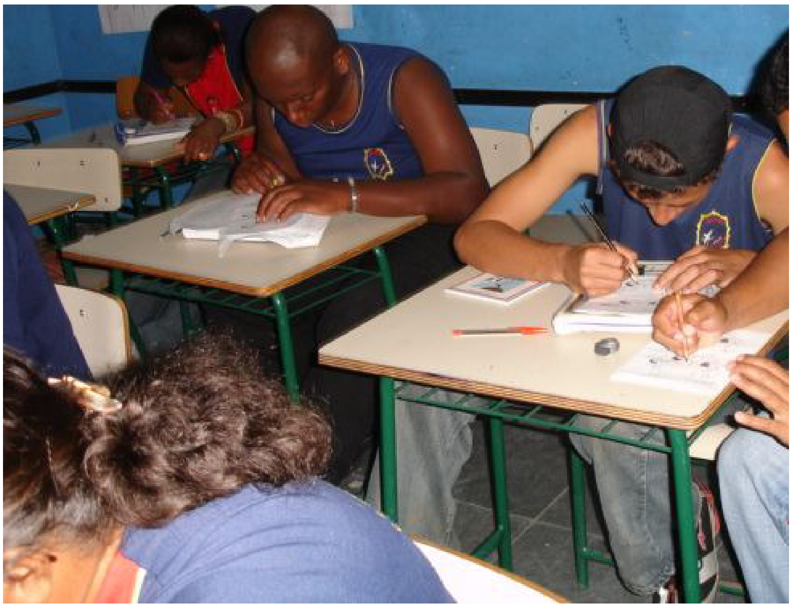


Foto 4: Alunos da 6.ª série resolvendo o *Jogo dos sete erros matemáticos*