CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE CAMPOS
Universidade da Tecnologia e do Trabalho

Ministério da Educação
Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

PARÁBOLA: UM ESTUDO ALÉM DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

KEILLA LOPES CASTILHO
LUANA SIQUEIRA SÁ

CAMPOS DOS GOYTACAZES / RJ
2007

KEILLA LOPES CASTILHO
LUANA SIQUEIRA SÁ

PARÁBOLA: UM ESTUDO ALÉM DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Monografia apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Campos como requisito para a conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Márcia Valéria Azevedo de Almeida Ribeiro – Mestre em Educação Matemática / USU / RJ.

CAMPOS DOS GOYTACAZES / RJ
2007

C352p Castilho, Keilla Lopes.
Parábola: um estudo além da função quadrática. / Keilla Lopes Castilho, Luana Siqueira Sá. Campos dos Goytacazes, RJ: [s.n.], 2007.
87 f.: il.

Orientadora: Márcia Valéria Azevedo de Almeida Ribeiro.

Bibliografia: f. 57-60
Monografia (Licenciatura em Matemática). Centro Federal de Educação Tecnológica de Campos

1.Geometria analítica – Estudo e ensino. 2.Matemática -Estudo e ensino. I. Sá, Luana Siqueira. II. Ribeiro, Márcia Valéria Azevedo de, orient. III. Título.

CDD – 516.3

Os conceitos expressos neste trabalho são de responsabilidade das autoras Keilla Lopes Castilho e Luana Siqueira Sá.

KEILLA LOPES CASTILHO
LUANA SIQUEIRA SÁ

PARÁBOLA: UM ESTUDO ALÉM DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Monografia apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Campos – Universidade do Trabalho e Tecnologia como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovada em 17 de abril de 2007

Banca Avaliadora:

Prof.ªMs. Márcia Valéria Azevedo de Almeida Ribeiro (orientadora)
Mestre em Educação Matemática / USU / RJ
Centro Federal de Educação Tecnológica de Campos / RJ

Prof.ª Ms. Gilmara Teixeira Barcelos
Mestre em Ciências da Engenharia / UENF / RJ
Centro Federal de Educação Tecnológica de Campos / RJ

Prof.ª Ms. Mônica Souto da Silva Dias
Mestre em Educação Matemática / USU / RJ
Faculdade de Filosofia de Campos / RJ

AGRADECIMENTOS

Agradecemos primeiramente a Deus, o nosso Criador, por ter nos dado vida, saúde e disposição para a realização desse trabalho monográfico;

Agradecemos a *Márcia Valéria*, por ter aceitado ser nossa orientadora e estar sempre conosco na composição do trabalho, nos ensinando, incentivando e apoiando;

Às nossas famílias pela paciência, dedicação, incentivo e apoio dados durante toda a trajetória do curso;

Ao amigo e companheiro *Victor Jachelli* pela compreensão, apoio e incentivo em todos os momentos;

À amiga Fernanda pelo apoio e ensino na confecção do *Abstrat*;

Ao grupo de alunos que participou da pesquisa. Sem eles, não poderíamos concretizar este trabalho;

A todos professores dessa Instituição que, direta ou indiretamente, estiveram nos apoiando e ensinando a beleza da Matemática durante todo o percurso na faculdade;

Aos nossos colegas de turma que estavam sempre preocupados e dispostos a ajudar no projeto, em especial, ao nosso amigo *Flávio de Freitas Afonso* pelas palavras de ânimo nos momentos difíceis e pela contribuição na elaboração da atividade, utilizando o recurso tecnológico.

A todos que de alguma forma contribuíram na concretização do sonho da graduação, bem como da elaboração do trabalho monográfico.

Nosso muito obrigado!

RESUMO

CASTILHO, Keilla Lopes; SÁ, Luana Siqueira. *Parábola: um estudo além da função quadrática*. Campos do Goytacazes, RJ. Centro Federal de Educação Tecnológica de Campos, 2007. Monografia (Licenciatura em Matemática).

Palavras chaves: parábola, cônica, aplicação.

O presente trabalho tem como proposta o estudo da Parábola não somente como o gráfico de uma função quadrática, mas como uma cônica que possui importantes características e aplicações. Tal proposta deve-se ao fato de acreditarmos que as cônicas constituem um tema interessante e enriquecedor, mas que infelizmente muitas vezes, é pouco valorizado nos currículos escolares. O objetivo do trabalho é, através da Geometria Analítica, fazer uma abordagem das propriedades métrica e refletora da parábola e suas importantes aplicações. A postura adotada nesta monografia, a partir de atividades criteriosamente elaboradas, teve como finalidade despertar o interesse do aluno e proporcionar uma oportunidade de enriquecer seus conhecimentos. As atividades preparadas foram aplicadas no primeiro semestre de 2006 para um grupo de cinco alunos que estavam cursando um pré-vestibular na Cidade de Campos dos Goytacazes.

ABSTRACT

CASTILHO, Keilla Lopes; SÁ, Luana Siqueira. *Parábola: um estudo além da função quadrática*. Campos do Goytacazes, RJ. Centro Federal de Educação Tecnológica de Campos, 2007. Monografia (Licenciatura em Matemática).

Key words: parable, conic, application.

The objective of the present paper is to study the parable not only as a graphic of a quadratic function, but also as conic that has important characteristics and applications. This subject was chosen due to our belief that the studying the conics will be interesting and enriching, although it sometimes is not valued in the curriculums of the schools. This paper's aim is – through Analytic Geometry – to develop an approach to the metrical and the reflective proprieties of the Parable and its important applications. The methodology adopted in this paper, from carefully elaborated activities, intended to awake students interest and to give them opportunity to enrich their knowledge. The activities were applied in the first semester of 2006 to a group five students that were attending to a pré-vestibular in the city of Campos dos Goytacazes.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Educação vem sendo motivo de preocupação e discussão tanto a nível mundial quanto nacional.

A transformação e inovação da humanidade estão diretamente relacionadas à necessidade de proporcionar ao ser humano uma educação de qualidade integrada a questões políticas, sociais e culturais, pois o homem necessita da educação e do conhecimento para o seu desenvolvimento como cidadão.

> Educação passa a ser o espaço e o indicador crucial de qualidade, porque representa a estratégia básica de formação humana, educação não será, em hipótese nenhuma, apenas ensino, treinamento, instrução, mas especificamente formação, aprender a aprender, saber pensar, para poder melhor intervir, inovar.(DEMO, 1994, p. 20)

Apesar de tantos congressos, discussões e movimentos voltados para a educação, o que se tem percebido é uma educação ainda com falhas, mais preocupada com o cumprimento do currículo do que com a formação do homem enquanto cidadão.

No Brasil, muitas vezes, as falhas na educação são apontadas como as principais causas dos problemas que a sociedade vem enfrentando. (SAVIANI, 2000) No entanto, a educação não pode ser vista apenas como a causa ou o motivo das crises do país, ela deve ser vista como uma solução, ela precisa ser valorizada e incentivada para formar cidadãos conscientes, capazes de investir na sabedoria, de inovar e de raciocinar buscando soluções plausíveis frente aos problemas.

Entretanto, de acordo com Saviani (2000), apenas ter a educação como a base das soluções para as questões nacionais é uma atitude ingênua, pois o processo educacional possui falhas e que são raramente resolvidas e, conseqüentemente, vão sendo agravadas.

Será que os problemas educacionais encontram-se no profissional da educação, no desinteresse dos alunos, na falta de apoio governamental ou na forma de ensino? Perguntas como essas nem sempre possuem respostas imediatas. Acreditamos na necessidade de buscar estratégias de ensino, em que os professores procurem novas perspectivas na educação e os alunos, por sua vez, sejam motivados a buscar o conhecimento, preparando-se para a vida.

Segundo Delors (2001), a melhoria na qualidade da educação consiste em aprimorar a formação, as condições de trabalho e o conhecimento dos professores, pois se eles estiverem motivados, com competências e conhecimentos requeridos, ensinarão com maior prazer, desenvoltura e propondo inovações na vida profissional e acadêmica do educando.

Nesse sentido, o professor tem um papel muito importante na vida do aluno, sendo ele o mediador entre o saber e o aprendiz propiciando que esse venha a desenvolver o conhecimento de forma crítica, selecionando as informações necessárias para a sua existência, obtendo discernimento entre o certo e o errado e, principalmente, compreendendo o que se aprendeu, pois de acordo com Hernandez (1998, p.25) “se não se compreende o que se aprende, não há uma boa aprendizagem”.

A Educação como um todo abrange diversas áreas do conhecimento, dentre as quais podemos destacar a Matemática como forte aliada para a formação do cidadão. Tão importante quanto ela é o papel do professor de Matemática que, de acordo com D’Ambrósio (1996), tem a incumbência de ajudar o aluno a apreciar o conhecimento da ciência e da tecnologia em estudo, pondo em destaque sua própria cidadania e seus princípios éticos.

D’Ambrósio (1996) afirma ainda que cada um de nós pode aprender Matemática, porém sem perder o conhecimento de si próprio e sem colocar obstáculos entre os indivíduos.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, “o aluno deve perceber a Matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de idéias que permite modelar a realidade e interpretá-la.” (BRASIL, 2002, p.253)

Muitos temas matemáticos apresentam aplicações interessantes e motivadoras, no entanto, na maioria das vezes estes não são enfatizados como deveriam, deixando uma lacuna no currículo de Matemática que pode ocasionar prejuízos no decorrer dos estudos. Dentre os diversos conteúdos matemáticos, podemos citar como exemplo as secções cônicas que possuem um amplo leque de aplicações.

Dessa forma, pensamos como tema para a nossa monografia o estudo da Parábola enfocando suas propriedades métrica e refletora e suas aplicações no cotidiano.

O objetivo desse trabalho consistiu em explorar as propriedades métrica e refletora da Parábola e suas aplicações sob o aspecto da Geometria Analítica, possibilitando mostrar ao estudante que a Parábola não é apenas o gráfico de uma função quadrática, mas sim uma cônica com propriedades específicas e diversas aplicações.

Para tanto, foram elaboradas atividades voltadas para a construção da Parábola utilizando lápis e papel bem como, através da Tecnologia de Informação e Comunicação (TIC), usando o *software* Wingeon como um recurso metodológico auxiliar.

O Wingeon é um *software* gratuito que pode ser obtido através de *download* disponível no sítio da *Internet*. [1] Ele trabalha com lugares geométricos, em especial, na área de Geometria Analítica, possui uma interface de fácil acesso e botões de ferramenta simples de manusear.

Para que a utilização do computador possa ser uma ferramenta auxiliar no campo de aprendizagem do aluno é necessário que o professor esteja familiarizado com o *software* educacional o qual pretende utilizar além de ter conhecimento sobre os potenciais educacionais do computador.

> É necessário o professor recontextualizar aquilo que aprendeu no seu contexto de trabalho. Essa recontextualização implica integrar diferentes ferramentas computacionais e os conteúdos disciplinares, possibilitando colocar em prática os fundamentos teóricos e recriar dinâmicas que permitam lidar, ao mesmo tempo, com as inovações oferecidas pela tecnologia, suas intenções educacionais e os compromissos do sistema de ensino. (VALENTE, 2003, p.22)

[1] Disponível em http://math.exeter.edu/rparris/wingeom.html

Além das atividades de construção da parábola, foram elaboradas questões propondo desenvolvimento de equações da parábola, definição da propriedade refletora e métrica e exercícios de aplicação.

Durante os encontros, pôde-se realizar uma experiência com a finalidade de visualizar a propriedade refletora enfocando as aplicações da mesma no cotidiano, além disso, foram expostas transparências com algumas aplicações da propriedade refletora.

As atividades dessa monografia foram aplicadas para um grupo de estudantes de um pré-vestibular da cidade de Campos dos Goytacazes.

Esta monografia está estruturada em três capítulos da seguinte maneira: no capítulo I, relatamos um pouco da história das cônicas; no capítulo II, tratamos da propriedade refletora e suas aplicações e, no capítulo III detalhamos todas as atividades desenvolvidas.

Capítulo I

1.1 – Um pouco de história

Na História da Matemática grandes nomes se destacaram no estudo das cônicas dentre os quais vale ressaltar Euclides (330 – 290 a.C.), Menaechmus (380 – 320 a.C.) e Apolônio de Perga (262 – 190 a.C).

Segundo pesquisas, foi o astrônomo e geômetra da Academia de Platão nascido em Alopeconnesus, na Ásia Menor, Menaechmus, discípulo de Aristóteles (384 – 322 a. C.), quem deu início ao estudo dos diferentes tipos de secções planas de um cone circular, por volta de 350 a.C. Ao estudar o problema de Delos da duplicação do cubo (construir com régua e compasso a aresta de um cubo cujo volume seja o dobro do volume do cubo cuja aresta a é dada), Menaechmus observou que sua solução seria encontrada através de curvas denominadas cônicas, pois eram obtidas a partir de cortes (seccionamentos) em superfícies cônicas, dependendo dos diferentes ângulos formados entre a geratriz e o eixo do cone.

Cem anos após o estudo de Menaechmus sobre a solução da duplicação do cubo, Apolônio foi o primeiro geômetra que provou que as três cônicas podem ser obtidas através de um único cone, não necessariamente reto, apenas variando a inclinação do plano de secção. Posteriormente substituiu o cone de uma folha por um de duas folhas, sendo assim o primeiro a perceber a existência dos dois ramos de uma hipérbole.

A nomenclatura hoje usada para as cônicas foi introduzida por Apolônio, utilizando palavras já usadas pelos pitagóricos. Por exemplo, ele designou parábola (indicando colocar ao lado ou comparação) que corresponde a igual, para a cônica obtida pela secção paralela à geratriz da superfície cônica.

Apolônio nasceu em Perga, na Panfília da Ásia Menor e viveu em Alexandria nos fins do século III a.C. Foi astrônomo e um grande matemático. Ficou conhecido como “O Grande Geômetra”, por aprofundar os estudos das cônicas.

“O Grande Geômetra” redigiu um tratado denominado As Cônicas, considerado sua obra-prima, que era constituído por oito livros, sendo que o último se perdeu. Dos sete que chegaram aos nossos dias, os quatro primeiros existem na língua original, o grego, e os últimos três possuem tradução em árabe. Além disso, todos os sete foram traduzidos para o latim por Edmund Halley em 1710.

As razões que levaram Apolônio a estudar e escrever sobre as cônicas encontram-se no prefácio geral da obra, onde ele diz que:

> ... levei a cabo a investigação deste assunto a pedido de Neucrates o geômetra, quando ele veio a Alexandria e ficou comigo, e, quando tinha trabalhado os oito livros, dei-lhos de imediato, apressadamente, porque ele estava de partida; não foi possível portanto revê-los. Escrevi tudo conforme me ia ocorrendo, adiando a revisão até ao fim. (HEATH,p.129 apud AS CÔNICAS)

Foi Apolônio quem, pela primeira vez, expôs muitas propriedades sobre as cônicas, entre elas, a igualdade e a semelhança de cônicas.

1.2 – Por que os nomes elipse, hipérbole e parábola?

Os termos elipse, hipérbole e parábola para as cônicas foram utilizados por Apolônio de Perga e, provavelmente, são oriundos de terminologias pitagóricas relacionadas com áreas. (SILVA, 1985)

A palavra parábola vem do grego παραβθλη e significa igualdade, comparação. (VENTURI, 2003)

Sem perda de generalização, consideremos uma parábola no sistema cartesiano ortogonal, com eixo de simetria sobre o eixo x, vértice na origem e concavidade voltada para a direita. A equação dessa parábola é $y^2 = 4px$, sendo p a distância do vértice V ao foco F da parábola e também a distância do vértice V à diretriz δ. Chamemos de ℓ o comprimento do *latus rectum* da parábola (segmento perpendicular ao eixo da parábola e que passa pelo foco). Podemos observar através da figura 1 que, sendo A e B extremidades do *latus rectum* e também pontos da parábola, temos que d(A,δ) = d(A,F) = 2p e d(B,δ) = d(B,F) = 2p, sendo assim o comprimento do *latus rectum* é igual a 4p. Dessa forma, podemos escrever a equação $y^2 = 4px$ da seguinte maneira: $y^2 = \ell x$.

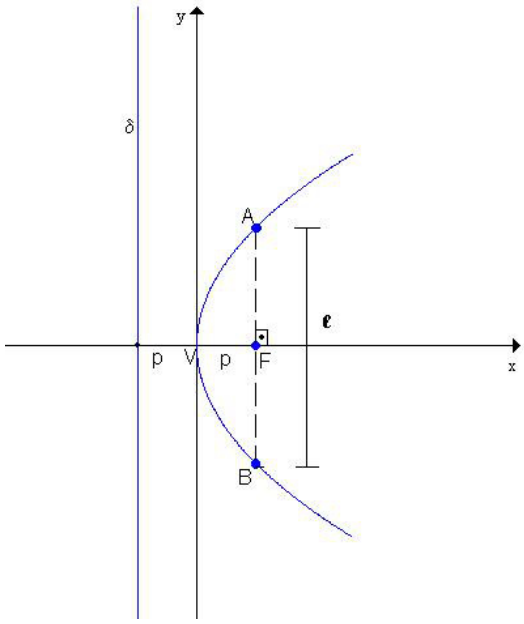


Figura 1 - Latus rectum da parábola

De acordo com a equação $y^2 = \ell x$ temos que o termo parábola significa comparação, igualdade, pois dado qualquer ponto P(x,y) da parábola, a área do quadrado de lado y será sempre igual à área do retângulo de dimensões ℓ e x.

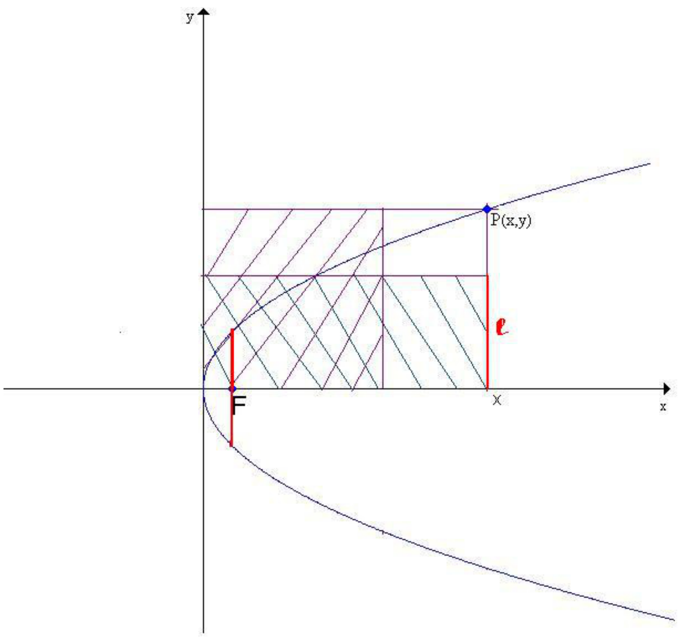


Figura 2 - Propriedade da parábola

“A parábola tem a propriedade que para qualquer ponto sobre ela o quadrado sobre a ordenada é igual ao retângulo sobre a abscissa x e o parâmetro ℓ.”
(BOYER, 2001, p.108)

O termo elipse vem do grego ελλειψιζ e significa falta, omissão. (VENTURI, 2003)

Consideremos uma elipse no sistema de eixos ortogonais com um de seus vértices na origem, centro em O’ = (a,0), eixo maior de medida 2a contido no semi-eixo positivo $\overrightarrow{OX}$ e eixo menor de comprimento 2b paralelo ao eixo $\overrightarrow{OY}$. A equação dessa elipse é $\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

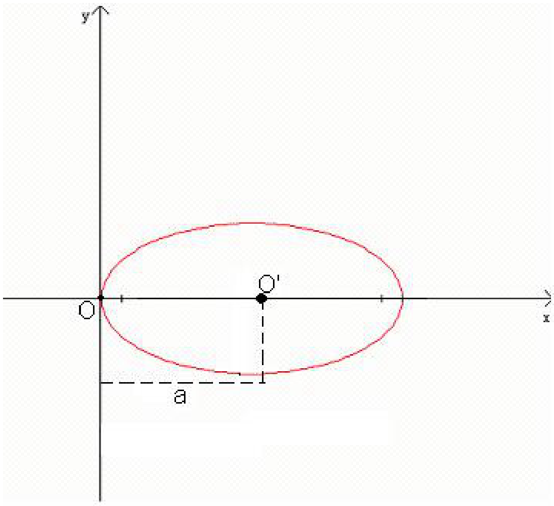


Figura 3 - Gráfico de uma elipse

Desenvolvendo a equação $\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ temos:

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2-2xa+a^2}{a^2}$$

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2-x^2+2xa-a^2}{a^2}$$

$$y^2=\frac{2b^2x}{a}-\frac{x^2b^2}{a^2}$$

Sabendo que o comprimento do *latus rectum* da elipse (corda que passa por um foco e é perpendicular ao eixo maior da elipse) é igual a $\frac{2b^2}{a}$ (apêndice III), logo, $y^2 = \ell x - \frac{x^2b^2}{a^2}$, o que mostra que $y^2 < \ell x$.

Sendo assim, dado um ponto P(x,y) qualquer na elipse a área do quadrado de lado y é menor do que a área do retângulo de dimensões ℓ e x. Portanto, a cônica elipse é nomeada de tal modo por exprimir falta.

A palavra hipérbole vem do grego υπερβολη e significa excesso, exagero. (VENTURI, 2003)

Consideremos uma hipérbole construída no sistema de eixos ortogonais, com um dos vértices na origem, centro em O' = (-a,0), eixo transverso de comprimento 2a, sobre o eixo x e eixo conjugado medindo 2b paralelo ao eixo y. A equação dessa hipérbole é $\frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

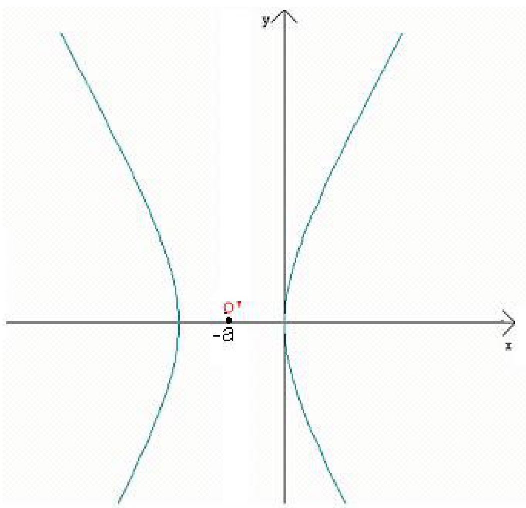


Figura 4 - Gráfico de uma hipérbole

Ao desenvolver a equação anterior, temos:

$$\frac{x^2+2xa+a^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{2x}{a}+1-1$$
$$y^2=\frac{x^2b^2}{a^2}+\frac{2b^2x}{a}$$

Tal como na elipse, na hipérbole, o comprimento do *latus rectum* é $\ell=\frac{2b^2}{a}$,

assim $y^2=\ell x+\frac{x^2b^2}{a^2}$, o que mostra que $y^2>\ell x$.

Dessa forma, dado um ponto qualquer P(x,y) na hipérbole, o quadrado de lado y terá área maior do que a do retângulo de dimensões ℓ e x. Portanto, a cônica hipérbole é nomeada de tal modo por exprimir excesso.

Os termos elipse, hipérbole e parábola são utilizados na língua portuguesa como figuras de linguagem.

A elipse é uma figura de linguagem que "ocorre quando há ocultamento de um termo, que fica subentendido pelo contexto e que é facilmente identificado." (PASCHOALIN, 1989 p. 365).

Ex.: À direita da estrada, sol, à esquerda chuva, e nosso carro deslizava entre um e outro. (omissão da forma verbal estava: estava o sol, estava a chuva) (PASCHOALIN, 1989 p. 365).

A hipérbole é a "figura que através do exagero procura tornar mais expressiva uma idéia".(PASCHOALIN, 1989 p. 363).

Por exemplo: Ele possuía um mar de sonhos.

O termo parábola é utilizado como comparação, em geral, usando uma história para transmitir valores morais. Por exemplo, nos textos bíblicos dos evangelhos, Jesus sempre ensinava por meio de parábolas, ou seja, em linguagem figurada com ocorrências comuns, vestia a verdade de um caráter penetrante transmitindo grandes ensinamentos.

Capítulo II

2.1 - Propriedade refletora da parábola

Em 1668, Isaac Newton construiu seu primeiro telescópio de reflexão no qual a concentração da luz, em vez de ser feita com uma lente, era obtida pela reflexão num espelho parabólico e exibiu essa experiência à academia Royal Society no ano de 1671. Este telescópio é utilizado até hoje nos observatórios profissionais. Por que parabólico?

"Se uma fonte de luz é colocada no foco de uma parábola os raios oriundos desta fonte e incidentes sobre a parábola serão refletidos segundo retas paralelas ao eixo de parábola".(LEHMANN, 1982, p.145).

Segundo Lehmann (1982), se um refletor parabólico é colocado de maneira que seu eixo seja paralelo aos raios de uma fonte luminosa, tais raios incidentes sobre o refletor serão refletidos de maneira que todos eles passarão pelo foco.

Quando os raios de luz incidem em um ponto de uma superfície parabólica, eles são refletidos segundo um plano tangente à superfície nesse ponto, conforme a conhecida lei da Física: "o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão".

Consideremos numa parábola de foco F e diretriz δ, um ponto P qualquer, e também, uma reta t, bissetriz do ângulo $F\hat{P}R$. A reta que passa por P e R é perpendicular à reta diretriz δ e R é projeção ortogonal de P sobre a reta δ, conforme a figura abaixo.

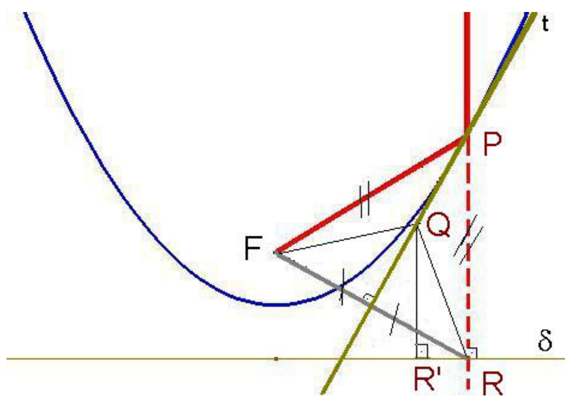


Figura 5 - Reta t tangente à parábola em P

A seguir demonstraremos que a reta t é tangente à parábola em P. Pela propriedade métrica da parábola $med(\overline{PF}) = med(\overline{PR})$, portanto o triângulo FPR é isósceles, e a reta t, bissetriz do ângulo $F\hat{P}R$, é também mediatriz do segmento FR.

Seja Q, um ponto qualquer da reta t, distinto de P. Se R' é a projeção de Q sobre δ, temos:

$med(\overline{QF}) = med(\overline{QR})$ (I)

$med(\overline{QR}) > med(\overline{QR'})$ (II)

De (I) e (II), temos que $med(\overline{QF}) > med(\overline{QR'})$, portanto Q é exterior à parábola, ou seja, o ponto P da reta t pertence à parábola e os demais pontos da reta t são exteriores, logo t é tangente à parábola em P.

Sendo a tangente à parábola em P bissetriz do ângulo $F\hat{P}R$, a $med(F\hat{P}H) = med(H\hat{P}R)$. O ângulo $H\hat{P}R$ e o ângulo $M\hat{P}N$ (ver figura 6) possuem a mesma medida, pois são opostos pelo vértice. Portanto, $med(F\hat{P}H) = med(M\hat{P}N)$.

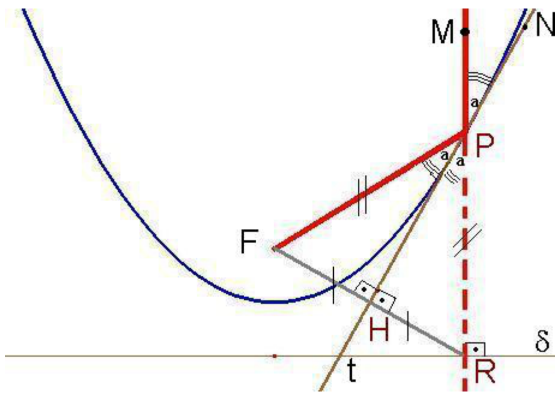


Figura 6 - Propriedade refletora

Por isso, todo sinal recebido paralelamente ao eixo da parábola é direcionado para o foco e todo sinal que sai do foco da parábola é refletido paralelamente ao eixo.

Tal fato ocorre de acordo com a famosa lei da reflexão: “o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão” que utiliza o Princípio de Fermat, enunciado da seguinte maneira: “O tempo gasto pela luz para ir de um ponto qualquer A até outro ponto qualquer B é o menor possível.” (BARSA, 1987,v7 p.317).

Consideremos um raio de luz partindo do ponto A para o ponto B, passando por P localizado sobre um espelho plano, conforme a figura a seguir.

Vamos provar a lei da reflexão mostrando que o caminho APB é mais curto quando $\alpha = \beta$.

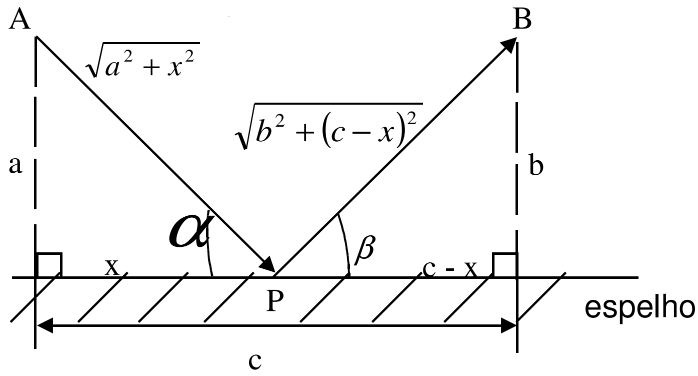


Figura 7 - Esquema do raio incidente e do raio refletido

Chamaremos a soma das distâncias de A até P e de P até B de L.

O ponto P pode ocupar diversas posições no espelho, e estas ficam definidas pelo valor de x, sendo assim, conforme mostra a figura 7, L será igual a $\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c - x)^2}$, sendo a a distância do ponto A ao espelho, e b a distância do ponto B até o espelho. Desta forma temos a função:

$$L(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c - x)^2}$$

Queremos que L seja mínimo, sendo assim:

$$\frac{dL}{dx} = \frac{1}{2}\left(a^2 + x^2\right)^{-\frac{1}{2}}.2x + \frac{1}{2}\left(b^2 + (c - x)^2\right)^{-\frac{1}{2}}.(2x - 2c)$$

$$\frac{dL}{dx} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{x - c}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}$$

Fazendo a derivada de segunda ordem de L, encontramos:

$$\frac{d^2L}{dx^2} = \frac{a^2}{\left(a^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{b^2}{\left[b^2 + (c - x)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Como podemos observar $\frac{d^2L}{dx^2} > 0$ para qualquer valor de x, sendo assim, L será mínimo quando $\frac{dL}{dx} = 0$, ou seja:

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}} \qquad (\text{I})$$

A partir da figura 7, podemos dizer que:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \text{ e } \cos\beta = \frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}} \qquad (\text{II})$$

Logo, de (I) e (II), temos que $\cos\alpha = \cos\beta$ e sendo α e β ângulos agudos temos que $\alpha = \beta$ como queríamos demonstrar.

2.2 – Aplicações da propriedade refletora da parábola

O princípio que Newton utilizou para construir o telescópio de reflexão (Figura 9), também é utilizado nas antenas parabólicas, onde o receptor de sinais é posicionado exatamente no foco da parábola. Os satélites emitem ondas magnéticas, que chegando paralelas ao eixo da parábola, serão refletidas para o foco da parábola onde está localizado o receptor de sinais que transmite com precisão as imagens para o televisor (Figura 8).

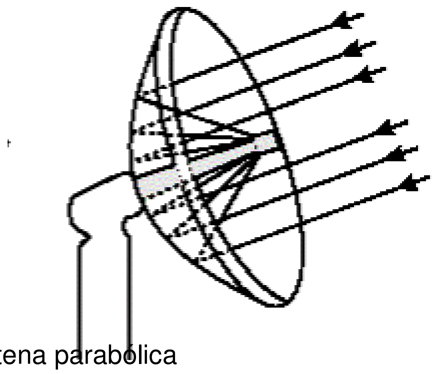


Figura 8 - Antena parabólica
Fonte:
http://mat.ufmg.vilabol.uol.com.br/parabola.html

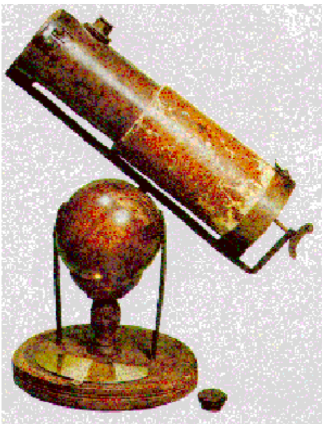


Figura 9 - Telescópio de Newton
Fonte:
http://astro.if.ufrgs.br/telesc/node2.htm

Essa propriedade, além de ser aplicada em antenas parabólicas, é também empregada em fogões solares (Figura 10 e 11) que têm a mesma estrutura da antena, sendo que sua superfície é coberta com um material refletor como alumínio polido ou o Mylar (tipo de plástico auto-adesivo). Os raios solares emitidos paralelamente ao eixo da parábola são refletidos para o foco, onde fica a base do fogão com o alimento a ser aquecido. Esse tipo de fogão solar consegue atingir até 393° C.

Figura 10 - Forno solar numa comunidade rural

Fonte: http://mat.ufmg.vilabol.uol.com.br/parabola.html

Figura 11 - Forno solar

Fonte: http://www.aondevamos.eng.br/textos/texto03.htm

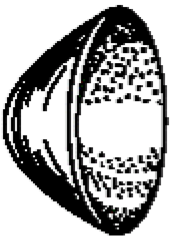


Figura 12 - Farol de um automóvel

Fonte: http://mat.ufmg.vilabol.uol.com.br/parabola.html

Em faróis de automóveis (Figura 12), lanternas e holofotes a fonte luminosa é posicionada no foco e os raios luminosos incidem na superfície espelhada e são refletidos paralelamente ao eixo da parábola.

A arquitetura e a engenharia também exploram a forma parabólica em notáveis construções, como podemos observar a seguir:

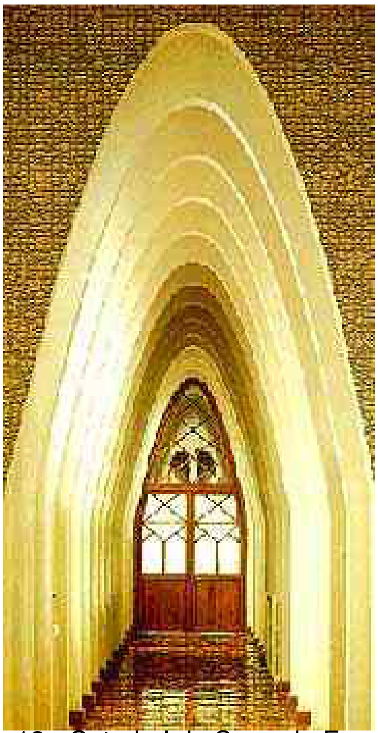


Figura 13 - Catedral da Sagrada Família em Barcelona

Fonte: http://www.velho.lis.ulusiada.pt/html/mestrados/matematica/trabalhos/grupo02/favorite.htm

Figura 14 - Catedral de São Paulo em Londres

Fonte: http://www.mat.uel.br/geometrica/php/pdf/artigos/PA-21-TC.pdf

A propriedade refletora também pode ser utilizada em auditórios, teatros e igrejas, proporcionando boas condições de acústica. Como exemplo, temos a Catedral de São Paulo em Londres (Figura 14).

As antenas parabólicas, os fogões solares e os faróis de automóveis citados, bem como o teto mostrado na figura 14, têm a forma de um parabolóide de revolução, gerado a partir da rotação de uma parábola em torno do seu eixo de simetria, cujos cortes contendo esse eixo são parábolas.

Vale ressaltar que a propriedade refletora se aplica também para ondas sonoras e eletromagnéticas.

Capítulo III

3.1 - Desenvolvimento

As atividades dessa monografia (ANEXO I) foram aplicadas no primeiro semestre do ano de 2006 para um grupo de cinco vestibulandos, dos quais apenas dois ainda estavam cursando o 3.º Ano do Ensino Médio.

Optamos por este grupo de alunos devido ao fato do conteúdo a ser trabalhado exigir alguns conhecimentos adquiridos nas séries anteriores.

Para a aplicação das atividades foram necessários cinco encontros com duração de duas horas cada um.

Inicialmente, as atividades foram voltadas para a construção da parábola, utilizando lápis e papel, bem como através de Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC), usando o *software* Wingeon, que agilizou e auxiliou a percepção dos alunos sobre o que estava sendo trabalhado.

As atividades subseqüentes exploraram as equações da parábola a partir da propriedade métrica e também o estudo da propriedade refletora da parábola e suas importantes aplicações no cotidiano.

Finalizando, os alunos tiveram a oportunidade de resolver exercícios de aplicação, utilizando os conhecimentos adquiridos nas atividades anteriores.

Durante a realização das atividades, os alunos estavam sempre em grupo, o que possibilitava a troca de experiências e facilitava o desenvolvimento do estudo.

Apesar dos alunos estarem em grupo, os seus registros escritos eram feitos individualmente a partir de discussões entre eles.

3.1.1 – PRIMEIRO ENCONTRO

No primeiro encontro, os alunos foram questionados se conheciam alguma cônica. Percebemos que eles ficaram surpresos e todos responderam que nunca tinham ouvido falar nesse termo.

Sendo assim, perguntamos se eles conheciam parábola. Eles nos relataram que conheciam parábola como gráfico de uma função quadrática.

Falamos para o grupo de alunos que a parábola é uma cônica, pois pode ser obtida através de um corte em uma superfície cônica.

Para que os alunos pudessem visualizar o que estava sendo explanado, utilizamos um cone circular reto de acrílico que apresentava vários cortes (figura 15), permitindo visualizar não só a parábola, mas também a circunferência, a elipse e a hipérbole.

Dessa forma, comentamos que, quando o corte é perpendicular ao eixo do cone, a curva obtida é a circunferência. Para obter a elipse, devemos inclinar o plano de corte de modo que este corte todas as geratrizes do cone. A parábola pode ser obtida fazendo um corte de modo que o plano seja paralelo a uma geratriz do cone.

Conforme dito anteriormente, as explicações dadas eram facilitadas a partir da visualização e manuseio do material concreto, cuja fotografia se encontra na figura 15.

Figura 15 - Cone de acrílico com as cônicas

Finalmente, falamos da hipérbole, uma curva de dois ramos, que é obtida através de um corte em um cone de duas folhas, quando o plano “cortante” secciona as duas folhas do cone, não necessariamente sendo paralelo ao eixo do cone.

Na figura 16 temos uma fotografia do material utilizado, que representa um caso particular, em que o plano de corte é paralelo ao eixo do cone.

Figura 16 – Fotografia do cone de duas folhas

Comentamos que cada curva pode ser obtida dependendo de como o ângulo de inclinação do plano “cortante” com o eixo do cone e o ângulo formado pelo eixo e uma geratriz do cone estão relacionados (Apêndice I).

Sendo assim, as curvas citadas recebem o nome de cônicas, pois podem ser obtidas por meio de seccionamentos em uma superfície cônica.

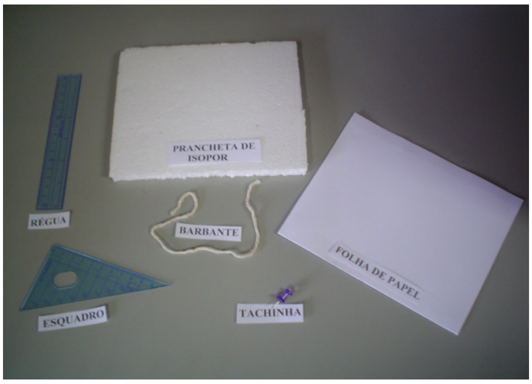
Ainda no primeiro encontro foi desenvolvida a atividade I, com o objetivo de traçar uma parábola utilizando, como recurso metodológico, lápis e papel.

O quadro 1 apresenta a atividade I que foi aplicada.

Quadro 1 – Atividade I

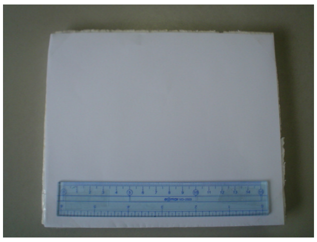
ATIVIDADE I

1- Material necessário:

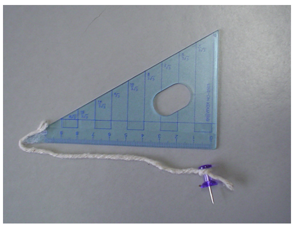


2- Procedimentos:

2.1- Sobre a folha de papel fixada na prancheta de isopor, prenda a régua conforme mostra a fotografia abaixo;

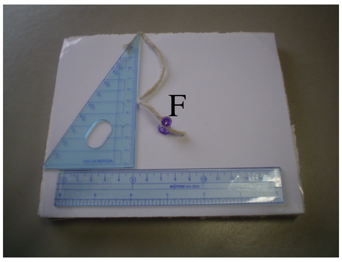


2.2- Amarre a tachinha em uma das extremidades do barbante e prenda a outra ponta do barbante na extremidade de um dos catetos do esquadro, que corresponde a um ângulo agudo, de modo que o barbante fique com comprimento igual à medida do cateto escolhido;

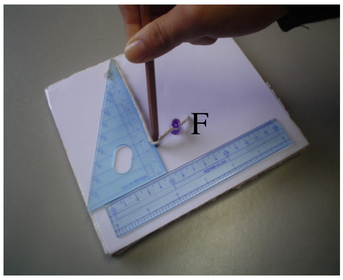


.

2.3- Apóie o outro cateto do esquadro sobre a régua presa na prancheta de isopor e fixe a tachinha em um ponto F, conforme mostra a foto abaixo;



2.4- Deslize o esquadro sobre a régua, mantendo com um lápis ou caneta, o barbante bem esticado e encostado no cateto.



Com estes procedimentos você desenhará uma curva que recebe o nome de parábola.

Ao traçar a parábola, o que você observou em relação a cada ponto da curva

Para a realização desta atividade os alunos estavam dispostos em grupo, o que facilitou a troca de idéias e a interação entre eles. Os alunos se mostraram muito interessados. A figura 17 mostra os alunos desenvolvendo a atividade I.

Figura 17 – Alunos realizando a Atividade I

Ao traçarem a parábola, alguns alunos comentaram a falta de um referencial cartesiano, pois estavam acostumados a traçar parábolas como gráficos da função quadrática no plano xoy.

A figura 18 mostra um dos alunos traçando a parábola.

Figura 18 – Aluno traçando a parábola

A construção da parábola, utilizando o material e os procedimentos sugeridos na atividade I, propiciou que os alunos fizessem observações em relação a cada ponto da curva, levando-os à dedução da propriedade métrica da parábola.

Observamos que ao expressar seus pensamentos, os alunos apresentavam maior desenvoltura na linguagem oral do que na escrita.

Após o traçado da parábola, perguntamos aos alunos o que eles observaram em relação a cada ponto da curva. Eles retomaram o traçado, discutiram entre si e chegaram à conclusão de que escolhido qualquer ponto P na parábola, a distância de P ao ponto F é igual à distância entre P e a borda da régua.

Comentamos com os alunos que o ponto F, onde foi fixada a tachinha, recebe o nome de foco da parábola e a reta traçada sobre a borda da régua é denominada reta diretriz.

A partir daí foi possível conceituar parábola como o conjunto de pontos de um plano que são eqüidistantes de uma reta dada e de um ponto fixo não pertencente à reta.

A estratégia metodológica utilizada, partindo da construção da parábola para chegar à propriedade métrica, fez com que os alunos assimilassem, de forma natural, o conceito de parábola.

Ao comentarmos sobre a propriedade métrica da parábola, um aluno percebeu que a razão entre a distância de um ponto qualquer da parábola ao foco e a distância desse ponto qualquer à reta diretriz é igual a um. Os outros alunos ouviram o que foi dito e, após análise do traçado, concordaram com a afirmação.

Tendo como base o comentário anterior, foi possível falar para os alunos que a razão observada recebe o nome de excentricidade, sendo assim, a parábola é a cônica que possui excentricidade um.

Outro aluno fez o seguinte comentário, a partir do traçado:

"Um lado da curva é correspondente ao outro lado, o que fiz de um lado aconteceu do outro lado".

Esse comentário nos chamou atenção. Percebemos que, mesmo intuitivamente, a noção de simetria estava presente nela.

Sendo assim, sugerimos que os alunos, a partir de dobras na folha de papel, com a curva traçada por eles, explorassem a simetria da parábola, como mostra a figura 19.

Figura 19 - Fotografia dos alunos realizando a atividade de simetria

Os alunos perceberam que a parábola é uma curva simétrica, possuindo apenas um eixo de simetria.

Um aluno falou:

“Se eu colocar um espelho sobre o eixo de simetria uma parte da parábola coincide com a outra”.

Através dos comentários e do que eles observaram com o traçado, foi possível concluir que o eixo de simetria da parábola é uma reta que contém o foco e é perpendicular à reta diretriz.

Pedimos que eles observassem, a partir do traçado, se o eixo de simetria intersecta a parábola. Eles afirmaram que havia um único ponto comum. Ressaltamos que este ponto de intersecção recebe o nome de vértice da parábola e que a distância do foco à reta diretriz denomina-se parâmetro da parábola.

Para finalizar a aula, cada aluno recebeu uma folha de papel contendo uma reta e um ponto fora dela. Propositadamente as distâncias entre o ponto e a reta não eram iguais em todas as folhas recebidas pelos alunos.

Foi pedido aos mesmos que esboçassem uma parábola, utilizando a propriedade métrica.

Após o esboço da parábola, cada aluno pôde comparar o seu traçado com o do colega e observar que quanto mais distante o ponto (foco) estiver da reta, maior será a “abertura” da parábola.

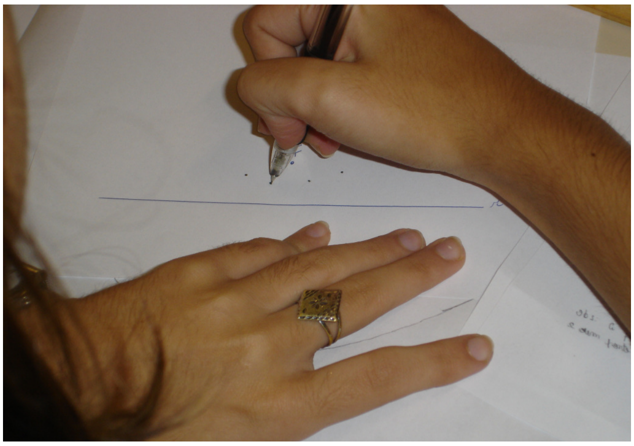


Figura 20 – Fotografia de um aluno esboçando uma parábola

3.1.2 – SEGUNDO ENCONTRO

Neste encontro, foram realizadas as atividades II e III, utilizando o *software* Wingeon.

A seguir apresentamos a primeira atividade desenvolvida:

Quadro 2 – Atividade II

Atividade II

1 – Clique no menu **janela** e selecione a opção **2-dim**;

2 – Selecione no menu **Ponto** a opção **Coordenada**. A seguir digite 3 para o valor de x e 1 para o valor de y e clique em marcar. Dessa forma será marcado o ponto A (3,1);

3 – Usando o mesmo procedimento do item anterior, marque o ponto B (-3,1) e depois clique em **fechar**;

4 – No menu **Reta/Retas...** digite AB e clique **OK** (com este procedimento será traçada a reta AB). A reta AB é a diretriz da parábola;

5 – Em **Ponto/Ponto aleatório** selecione **sobre o segmento... .** Clique **OK** na janela que aparece. Utilizando esses passos, o programa irá marcar um ponto sobre a reta AB, distinto dos já marcados;

6 – Conforme item 2, marque o ponto D (0,3). O ponto D é o foco da parábola;

7 – Clique em **Botões/segmentos** e trace com a ajuda do mouse o segmento CD;

8 – Selecione em **Reta/Perpendiculares** a opção **Mediatriz**, digite CD na janela que se abre e clique **OK**. Sendo assim será traçada a reta mediatriz de $\overline{CD}$;

9 – Construa uma reta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ passando pelo ponto C. (Selecione **Geral** em **Reta/Perpendiculares.** Digite AB para perpendicular e C para o ponto, clique em **desenhar** e em seguida **fechar**);

10 – Em **Ponto/Interseção** selecione **Reta-Reta...** e digite para reta: CG e EF. Clique em **marcar** e a seguir **fechar**. Com este procedimento aparecerá o ponto H, interseção de $\overleftrightarrow{CG}$ e $\overleftrightarrow{EF}$;

11 – Conforme o item 7, construa $\overline{DH}$;

12 – Selecione o menu **Medidas,** digite CH e tecle *enter.* Digite também DH e tecle *enter*. Assim, nesta janela, aparecerão as medidas dos segmentos pedidos. Fechando essa janela, as medidas estarão disponíveis na tela;

13 – Clique em **Anim/Traço temporário** e na caixa de texto que se abrirá digite H. Clique **OK**;

14 – Na opção **botões** selecione **arrastar vértices** e com o mouse movimente o ponto C;

15 – Ao movimentar o ponto C, o que você observa em relação às medidas de $\overline{CH}$ e $\overline{DH}$?

Os pontos que aparecem na tela quando o ponto C é movimentado descrevem uma parábola.

Através da atividade II os alunos puderam construir uma parábola e visualizar a sua propriedade métrica, utilizando o recurso computacional.

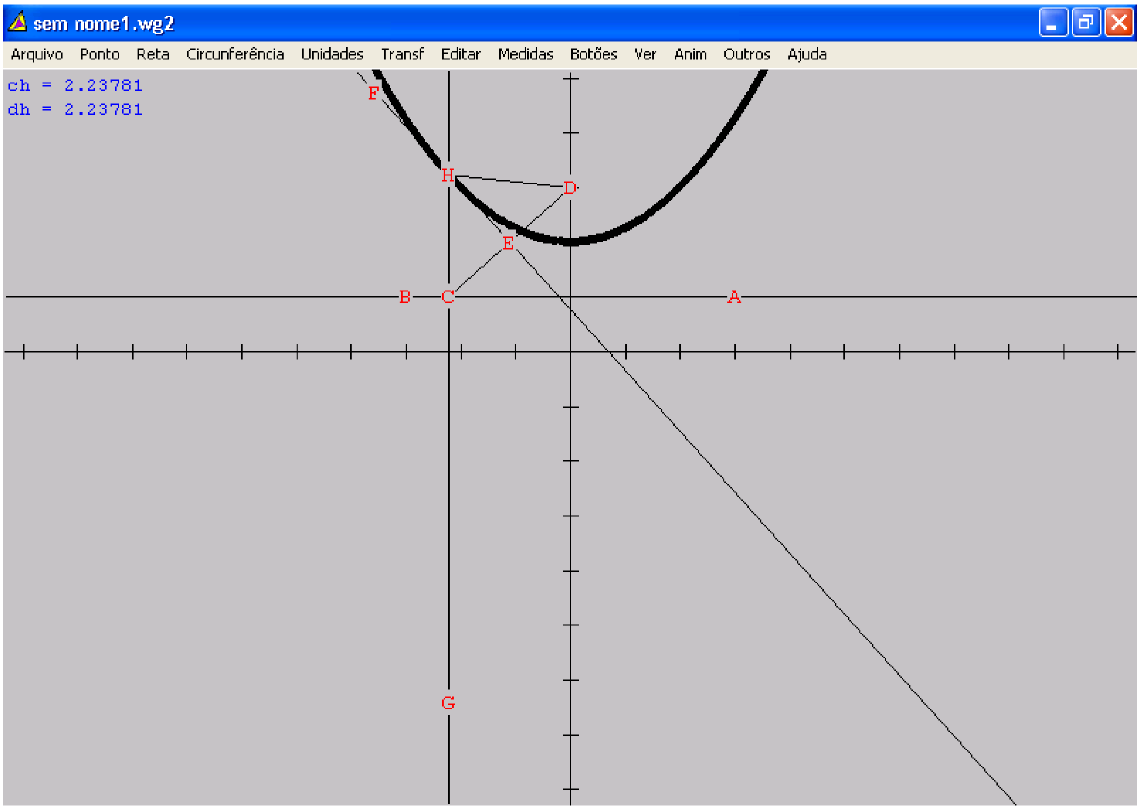


Figura 21 – Traçado da parábola

Ao movimentar o ponto C, pé da reta perpendicular à reta AB, o ponto H se deslocava ao longo da curva e as medidas dos segmentos CH e DH eram vistas no canto esquerdo superior da tela do computador. (Figura 21).

Sendo assim, os alunos puderam notar que para cada posição assumida pelo ponto H, a medida do segmento CH era igual à do segmento DH, isto é, o ponto H permanecia sempre eqüidistante da reta AB (reta diretriz) e do ponto D (foco).

Eles ainda perceberam que os triângulos CHD formados a partir do deslocamento do ponto C eram sempre isósceles, pois med($\overline{CH}$) = med($\overline{DH}$).

Após a realização da atividade II, os alunos desenvolveram a atividade III (Quadro 3).

Quadro 3 – Atividade III

Atividade III	
1 - No *software* Wingeon marque dois pontos A e B, clicando o botão direito do mouse; 2 - Trace a reta AB; 3 -Marque um ponto C não pertencente à reta AB, conforme o item 1; 4 - Em **Unidades/Cônicas com 3 pontos...** digite AB para a reta diretriz, C para o foco e selecione a opção excentricidade 1, escolha uma cor para a parábola que será desenhada, clique em **desenhar** e **fechar**;	5 - Trace o eixo de simetria da parábola, construindo uma reta perpendicular à reta AB, passando pelo ponto C; 6 - No menu **Botões** selecione **Arrastar vértices** e movimente o foco da parábola, afastando-o e aproximando-o da reta diretriz AB; 7 - O que você percebeu ao movimentar o foco da parábola?

Com essa atividade os alunos tiveram a oportunidade de visualizar o comportamento da parábola ao movimentar o ponto C correspondente ao foco.

A figura 22 mostra uma parábola traçada a partir desta atividade.

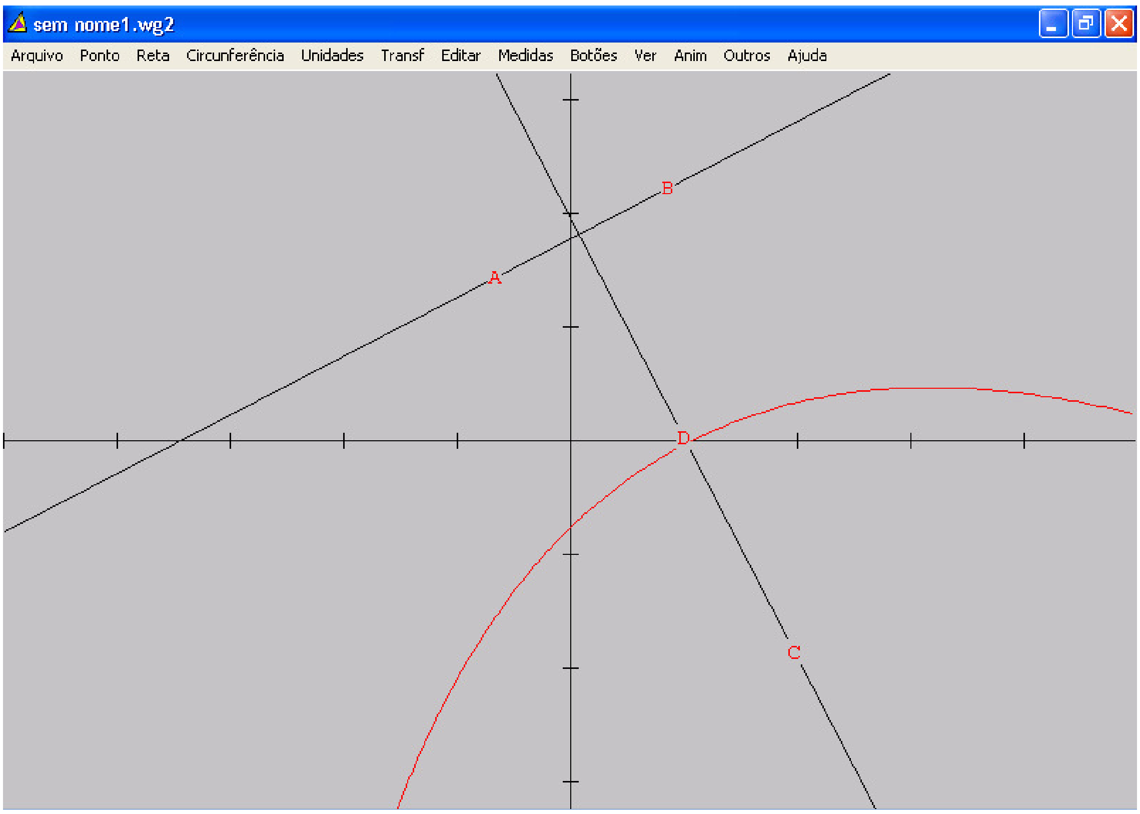


Figura 22 – Atividade III

Os alunos observaram que à medida que o foco se afastava ou se aproximava da reta diretriz, a abertura da parábola se alterava.

A seguir temos a resposta dada por um aluno para a pergunta feita no item 7 desta atividade.

> Quando o foco da parábola aproxima-se da diretriz a parábola se fecha e ao afastá-lo a parábola se abre

O grupo de alunos possuía uma noção básica de informática e apenas dois deles haviam tido contato com um *software* matemático que foi o *winplot*. No entanto, não demonstraram dificuldades durante a utilização do *software* Wingeon, visto que este possui comandos de fácil manuseio.

À medida que as atividades desse encontro se desenvolviam os comandos do Wingeon, necessários para a realização do trabalho, iam sendo apresentados.

O Wingeon é um programa gratuito e está disponível para *download* no endereço <http://math.exeter.edu/rparris/wingeom.html>.

3.1.3 – TERCEIRO ENCONTRO

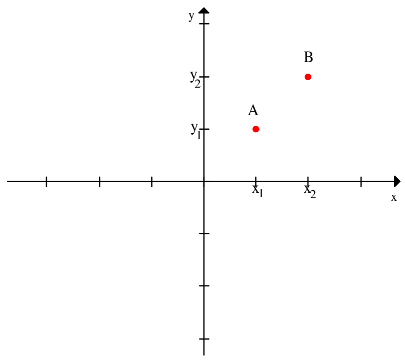
Neste encontro, iniciamos a atividade IV. Para desenvolver esta atividade foi necessário trabalhar alguns pré-requisitos, como distância entre dois pontos e distância entre um ponto e uma reta no plano, conforme a seguir:

Quadro 4 – Pré-requisitos

Pré-requisitos

1 – Distância entre dois pontos no IR².

Sejam os pontos A(x_1, y_1) e B(x_2, y_2) representados abaixo:



Exemplo:

Calcule a distância entre os pontos A(2,-5) e B(8,3).

2 – Distância entre um ponto e uma reta no IR².

Sejam o ponto $P(x_0, y_0)$ e a reta $r: ax + by + c = 0$.

A distância entre o ponto P e a reta r é

dada por: $d_{p,r} = \left| \dfrac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$

Exemplos:

1- Calcule a distância de P(1,2) à reta r: 3x – 4y – 5 = 0.

2- Encontre a distância de P(2,3) à reta r: y = – 2.

Deduzimos, com os alunos, como encontrar a distância entre dois pontos no IR², utilizando o teorema de Pitágoras, porém a fórmula para encontrar a distância entre um ponto e uma reta foi fornecida sem demonstração.

Os exemplos dados possibilitaram a fixação dos pré-requisitos que foram de grande valia, pois os alunos, com exceção de um, não tinham conhecimento do que foi abordado.

A quarta atividade foi voltada para a dedução das equações das parábolas com vértice na origem e eixo de simetria sobre os eixos coordenados.

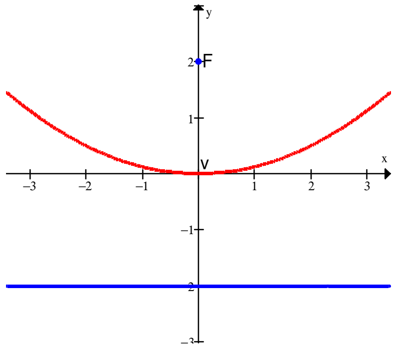
Utilizando a propriedade métrica e o que foi visto como pré-requisito, os alunos chegaram às equações das parábolas representadas na questão inicial da atividade IV (Quadro 5)

Quadro 5 – Atividade IV

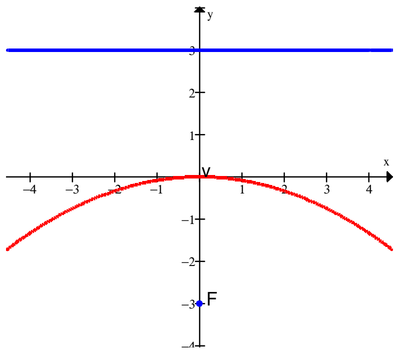
Atividade IV

1 – Encontre a equação das parábolas representadas abaixo:

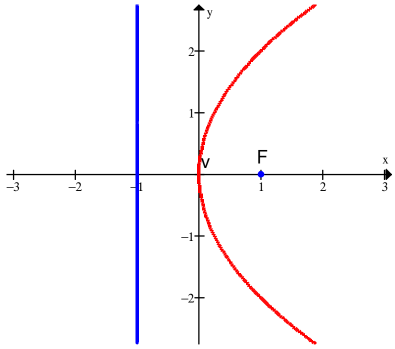
a)



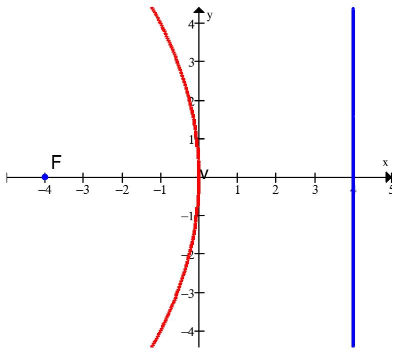
b)



c)



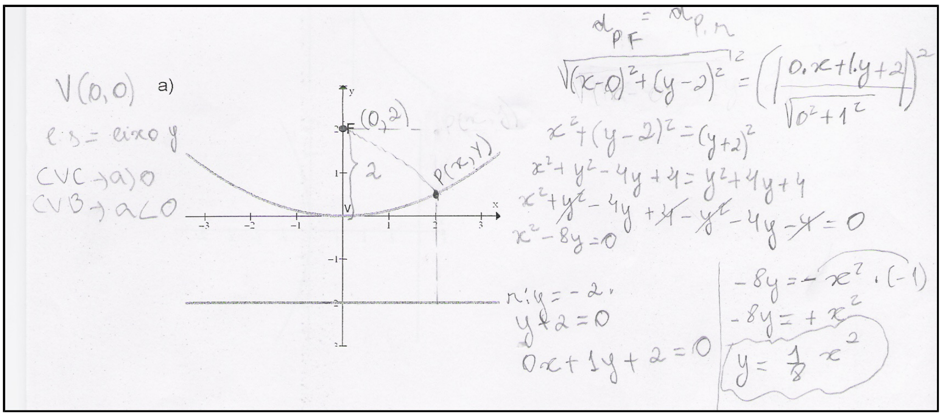
d)



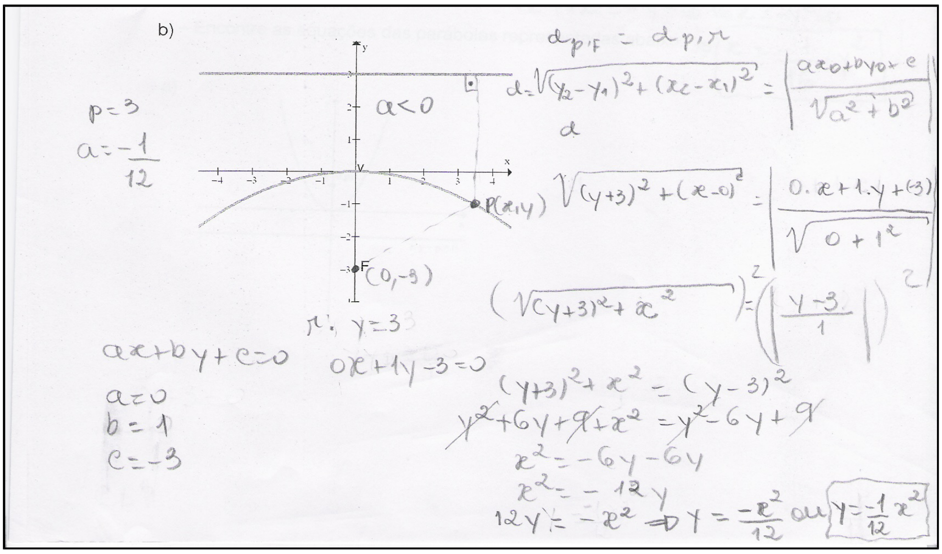
O item a foi explicado por nós, como exemplo inicial. Os demais itens foram resolvidos pelos alunos, que nos solicitavam auxílio sempre que necessário.

Após as resoluções, os alunos chegaram a equações do tipo $y = ax^2$ e $x = ay^2$ com $a > 0$ ou $a < 0$, como podemos observar a seguir, nas resoluções apresentadas pelos alunos.

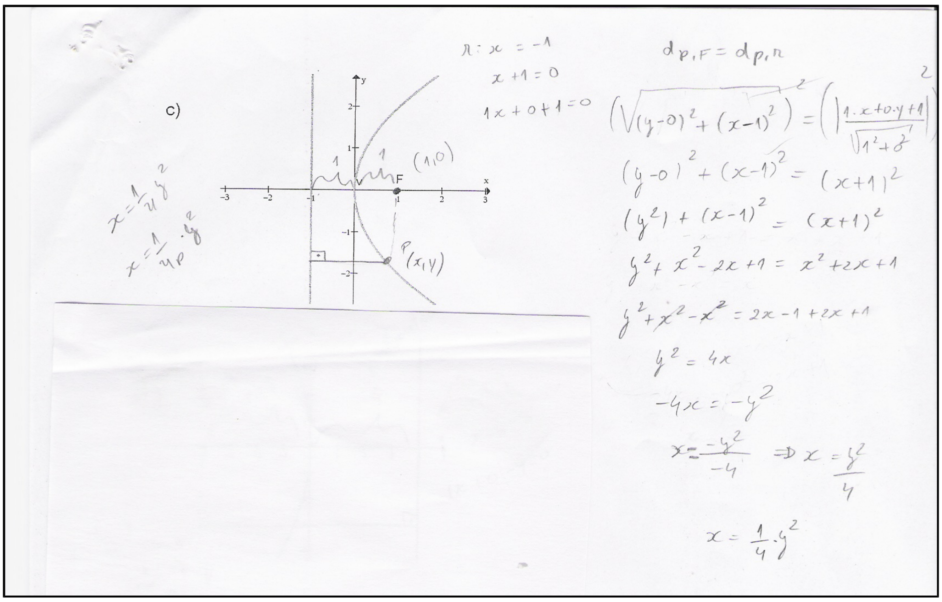
Item a:



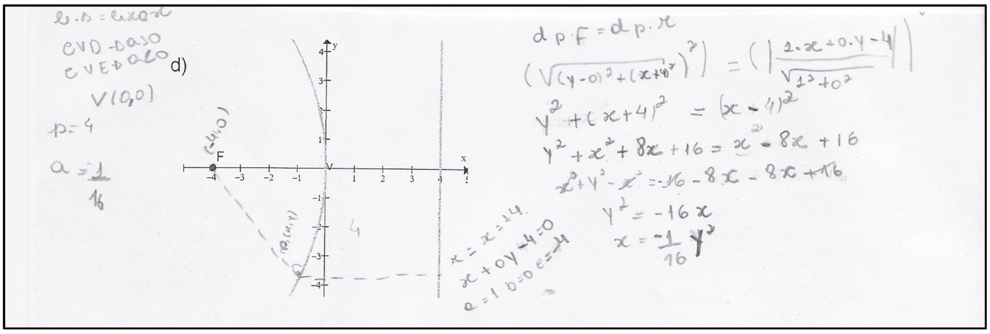
Item b:



Item c:



Item d:



Ao chegar às respostas dos itens a e b, os alunos perceberam que as equações encontradas eram familiares, pois tinham sido vistas por eles quando estudaram a função Quadrática, porém nos itens c e d, eles perceberam que as equações apresentavam y^2 ao invés de x^2 como nas anteriores.

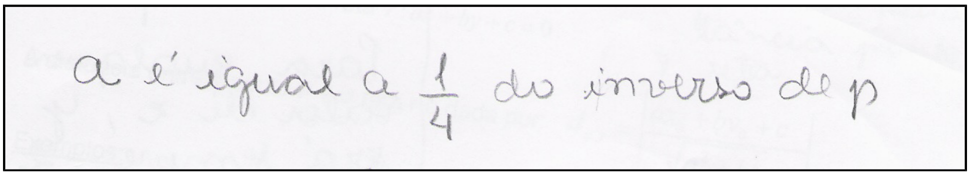
Pedimos aos alunos que comparassem, em cada item, a medida nomeada por *p* que correspondia à distância do foco ao vértice da parábola ou à distância do vértice à reta diretriz, com o valor do coeficiente *a* encontrado nas equações do tipo $y = ax^2$ ou $x = ay^2$.

A partir de análises e discussões, os alunos fizeram alguns comentários, dentre os quais destacamos:

" O valor de *a* é $\frac{1}{4}$ de *p* ".

Sem explicitar que esse raciocínio estava incorreto, pedimos aos alunos que o analisassem melhor. Eles retornaram aos itens, substituíram os valores de *p* e perceberam que $\frac{1}{4}$ de *p* não resultava em *a*.

Sendo assim, continuaram interagindo na busca de uma relação correta e um aluno fez o seguinte registro, a partir da observação dos itens a e c:



Explorando essa idéia, foi possível concluir que o valor de *a* é igual a $\frac{1}{4p}$ (itens a e c) ou $-\frac{1}{4p}$ (itens b e d).

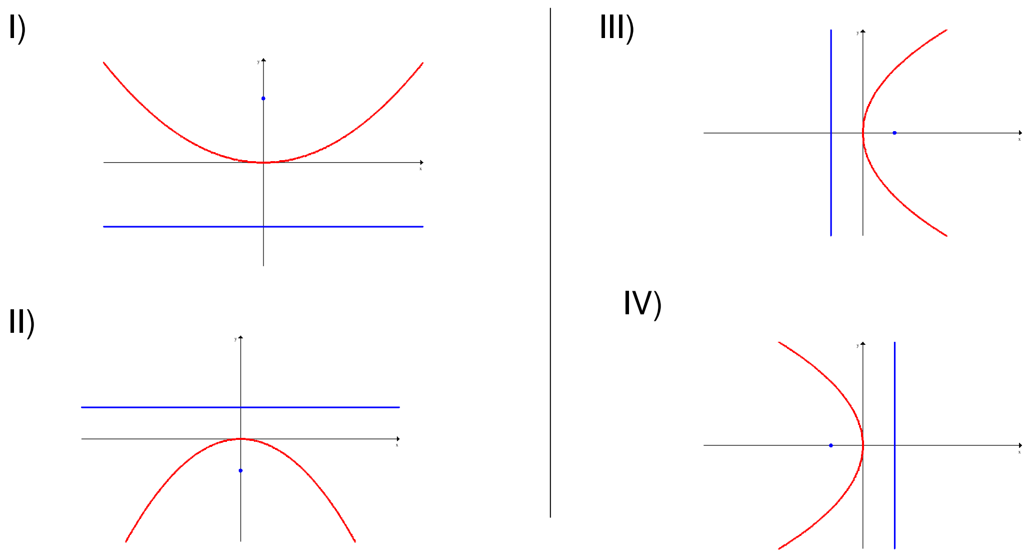
A segunda parte da atividade IV foi realizada no quarto encontro.

3.1.4 – QUARTO ENCONTRO

Iniciamos esse encontro realizando a segunda etapa da atividade IV (Quadro 6).

Quadro 6 - Generalizando

Generalizando...



Essa etapa da atividade IV teve como objetivo a generalização das equações das parábolas com vértice na origem e eixo de simetria sobre os eixos coordenados. Os alunos tiveram a oportunidade de formalizar o que foi observado por eles no encontro anterior.

Sabendo que *p* é a distância entre o foco e o vértice da parábola e também a distância entre o vértice e a reta diretriz, considerou-se, no item I, F(0, *p*) como o foco da parábola e a equação da reta diretriz sendo r: y = – *p*. Utilizando a propriedade métrica da parábola, foi encontrada a equação $4py = x^2$ ou $y = \frac{1}{4p}x^2$.

Na equação $y = \frac{1}{4p}x^2$, fazendo $\frac{1}{4p} = a$ obtivemos $y = ax^2$, $a > 0$. Vale ressaltar que $a > 0$, pois como *p* é distância, o seu valor será sempre positivo.

Os demais itens foram resolvidos de maneira análoga, sendo possível chegar aos seguintes resultados:

No item II, foi encontrada a equação – $4py = x^2$ ou $y = -\frac{1}{4p}x^2$. Substituindo $-\frac{1}{4p}$ por a na equação $y = -\frac{1}{4p}x^2$, obtivemos $y = ax^2$, $a < 0$. Sendo p um número positivo, então para este caso, $a = -\frac{1}{4p}$ é um número negativo.

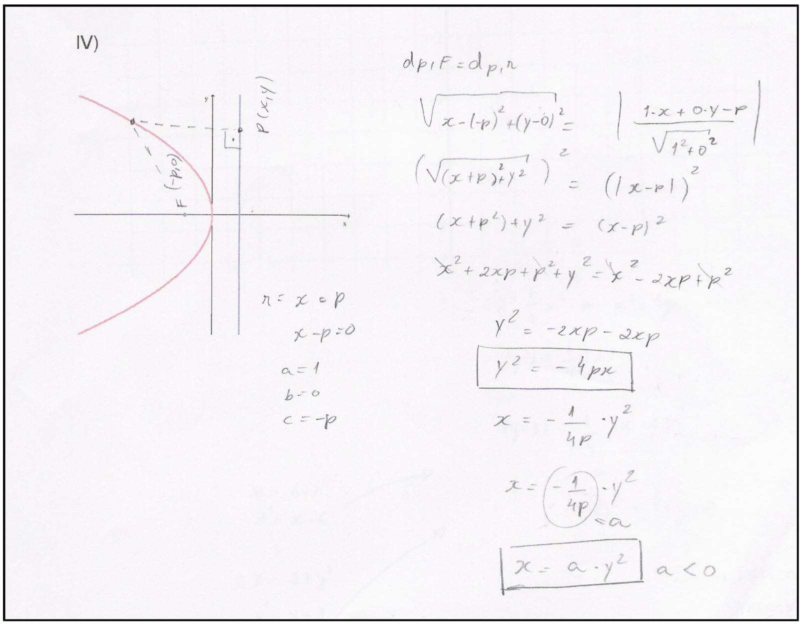
No item III, foi encontrada a equação $4px = y^2$ ou $x = \frac{1}{4p}y^2$. Substituindo $\frac{1}{4p}$ por a na equação $x = \frac{1}{4p}y^2$, obtivemos $x = ay^2$, $a > 0$.

No item IV, foi encontrada a equação $-4px = y^2$ ou $x = -\frac{1}{4p}y^2$. Substituindo $-\frac{1}{4p}$ por a na equação $x = -\frac{1}{4p}y^2$, obtivemos $x = ay^2$, $a < 0$.

Analisando as equações encontradas em cada item, foi possível perceber que, tendo a parábola de vértice V(0, 0) e concavidade voltada para cima ou para baixo, sua equação será do tipo $y = ax^2$ e, sendo o vértice V(0, 0) e a concavidade voltada para a direita ou para a esquerda, a equação será do tipo $x = ay^2$.

Também foi observado, pelos alunos, que quando as parábolas têm concavidade voltada para cima ou para a direita, o valor de *a* é positivo e quando elas apresentam concavidade voltada para baixo ou para a esquerda, *a* assume valor negativo.

A seguir temos a resolução dada por um aluno para o item IV.

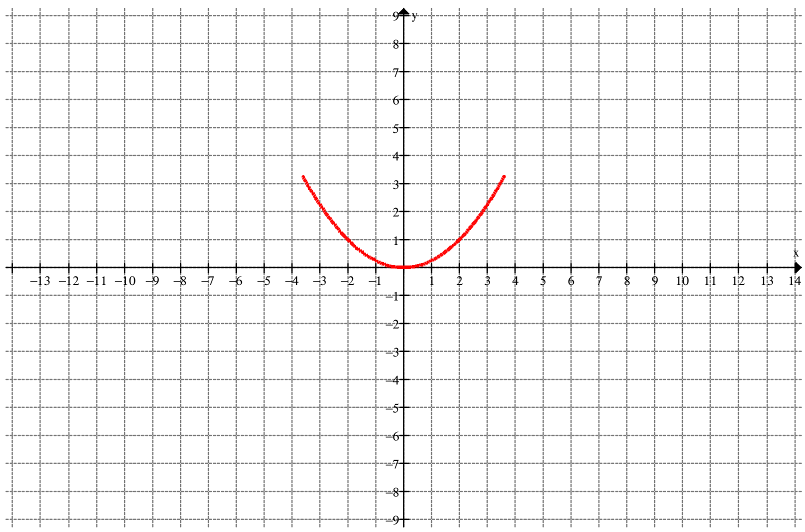


Além da última etapa da atividade IV, trabalhamos nesse encontro a atividade V intitulada “Translação”.

Para introduzir a atividade V, os alunos receberam uma folha com o gráfico da equação $y = \frac{1}{4}x^2$ ou $x^2 = 4y$ (Quadro 7).

Quadro 7 – Atividade de Translação

$$y = \frac{1}{4}x^2 \quad \text{ou} \quad x^2 = 4y$$



Pedimos aos alunos que, utilizando o papel vegetal, decalcassem a parábola e a movesse de modo que ela passasse a ter vértice no ponto (6,3), conservando o eixo de simetria paralelo ao eixo y.

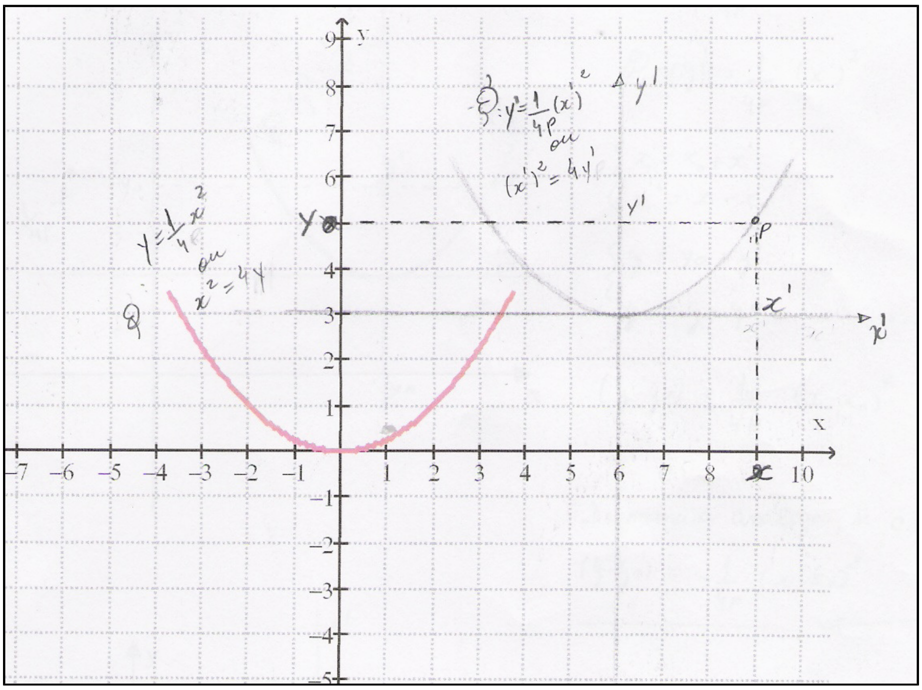
Falamos para os alunos que ao deslocarem a parábola, estavam fazendo uma translação[2].

Após o deslocamento da parábola, transladamos também os eixos coordenados e fizemos, junto com os alunos, a dedução da equação da parábola de vértice V(6, 3).

Para isso, consideramos os eixos x' e y' como sendo as translações dos eixos x e y, respectivamente. Em seguida, escolhemos um ponto P qualquer na nova parábola e consideramos P(x,y), tendo como referencial os eixos x e y , mas se o referencial for os eixos x' e y', o ponto será P(x',y') e a parábola assumirá a equação

$y' = \frac{1}{4}(x')^2$ ou $(x')^2 = 4y'$.

A seguir podemos observar a atividade de um aluno com o registro do que foi dito anteriormente.



A partir da translação, obtivemos as seguintes relações:

[2] "A translação determinada pelo vetor v é a transformação $T_v : \Pi \to \Pi$ que leva cada ponto A do plano Π no ponto $A' = A + v$ desse plano. A translação transforma toda reta em outra paralela e por ser uma isometria, transforma qualquer figura em outra congruente." (WAGNER, 2000, p. 71)

$$\begin{cases} x = 6 + x' \\ y = 3 + y' \end{cases} \quad \text{ou seja} \quad x' = x - 6 \quad \text{e} \quad y' = y - 3.$$

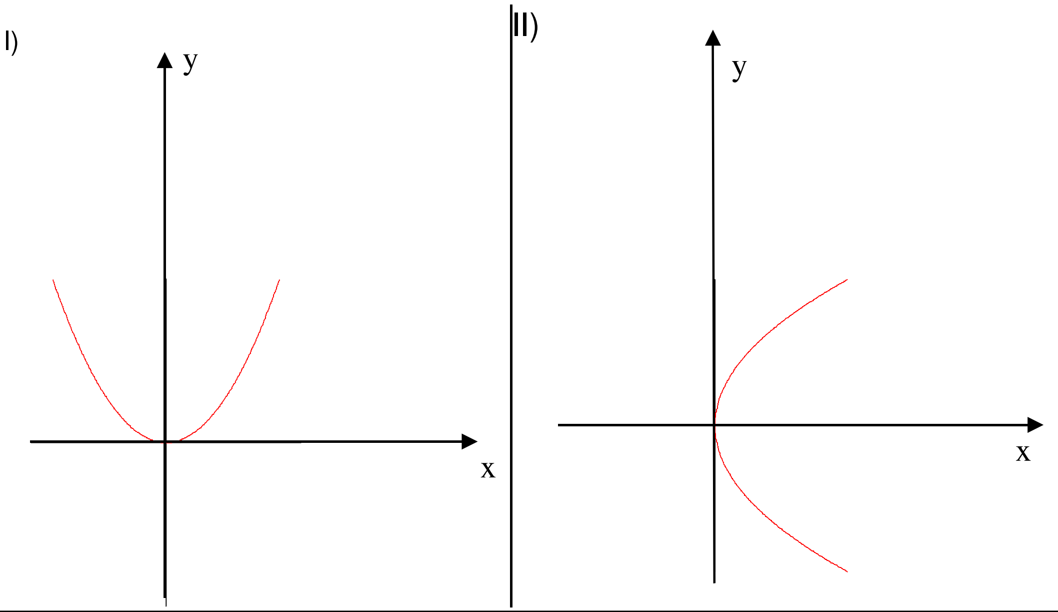
Substituindo x' = x – 6 e y' = y – 3 na equação $(x')^2 = 4y'$ foi possível escrever $(x-6)^2 = 4(y-3)$. Esta equação representa a parábola com vértice V(6, 3), eixo de simetria paralelo ao eixo y e concavidade voltada para cima.

Este trabalho introdutório facilitou o desenvolvimento da atividade V (Quadro 8).

Quadro 8 – Atividade V

ATIVIDADE V

TRANSLAÇÃO



Nesta atividade, foram feitas translações de parábolas cujas equações eram do tipo $x^2 = 4py$ e $y^2 = 4px$.

No item **I**, foi pedido que os alunos fizessem um deslocamento na parábola representada, de modo que essa passasse a ter vértice em um ponto (x_0, y_0), conservando o eixo de simetria paralelo ao eixo y.

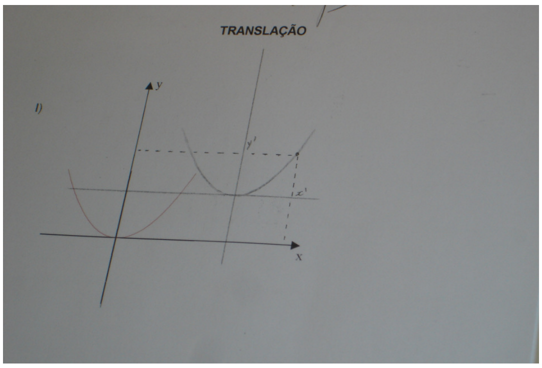


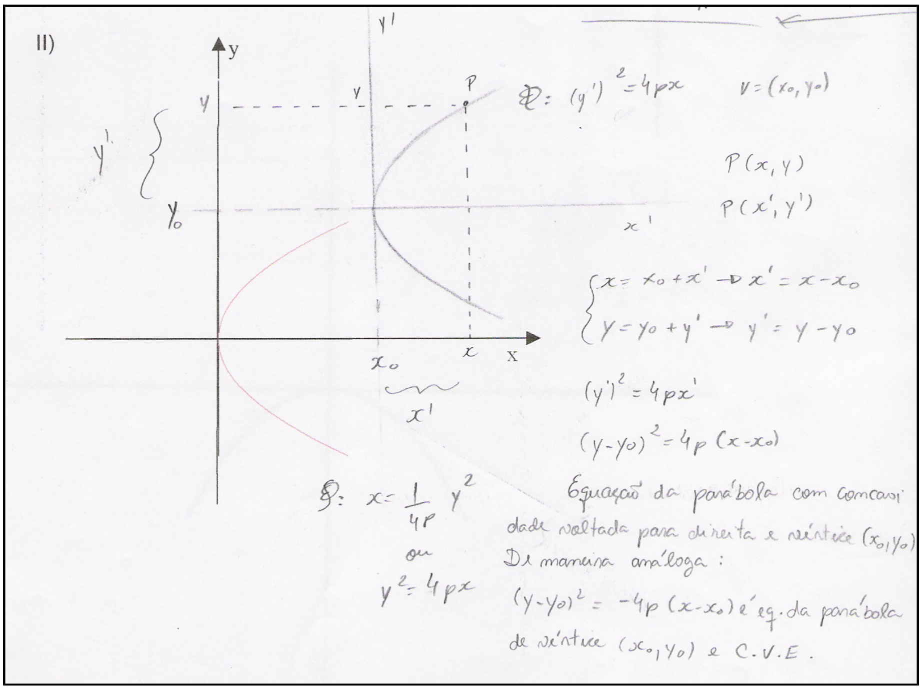
Figura 23 – Imagem da translação feita por um aluno.

Conforme fizemos na atividade introdutória, deduzimos que a equação da parábola com vértice $V(x_0,y_0)$, eixo de simetria paralelo ao eixo y e concavidade voltada para cima é do tipo $(x-x_0)^2 = 4p(y-y_0)$.

De forma análoga, deduziu-se no item II que a equação da parábola com vértice $V(x_0,y_0)$, eixo de simetria paralelo ao eixo x e concavidade voltada para a direita é $(y-y_0)^2 = 4p(x-x_0)$.

Falamos aos alunos que, utilizando o mesmo procedimento, podemos chegar a $(x-x_0)^2 = -4p(y-y_0)$, que representa a equação da parábola com vértice $V(x_0,y_0)$, eixo de simetria paralelo ao eixo y e concavidade voltada para baixo e também a equação $(y-y_0)^2 = -4p(x-x_0)$, que representa a equação da parábola com vértice $V(x_0,y_0)$, eixo de simetria paralelo ao eixo x e concavidade voltada para a esquerda.

A seguir, temos o desenvolvimento do item II, realizado por um aluno:



No próximo encontro foram desenvolvidas as equações das parábolas transladadas neste encontro.

3.1.5 – QUINTO ENCONTRO

O quinto encontro iniciou-se com uma breve revisão do que foi visto na atividade V.

Fizemos com os alunos o desenvolvimento da equação $(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$, chegando a $y = ax^2 + bx + c$, $a > 0$ (equação familiar para os alunos devido ao estudo da função Quadrática no Ensino Médio) e também da equação $(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$, obtendo $x = ay^2 + by + c$, $a > 0$.

A seguir apresentamos o desenvolvimento de $(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$:

$$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$$

$$x^2 - 2x x_0 + x_0^2 = 4py - 4py_0$$

$$x^2 = 4py - 4py_0 + 2x x_0 - x_0^2$$

$$-4py = -4py_0 + 2x x_0 - x_0^2 - x^2$$

$$y = \frac{-4py_0}{-4p} + \frac{2x x_0}{-4p} - \frac{x_0^2}{-4p} - \frac{x^2}{-4p}$$

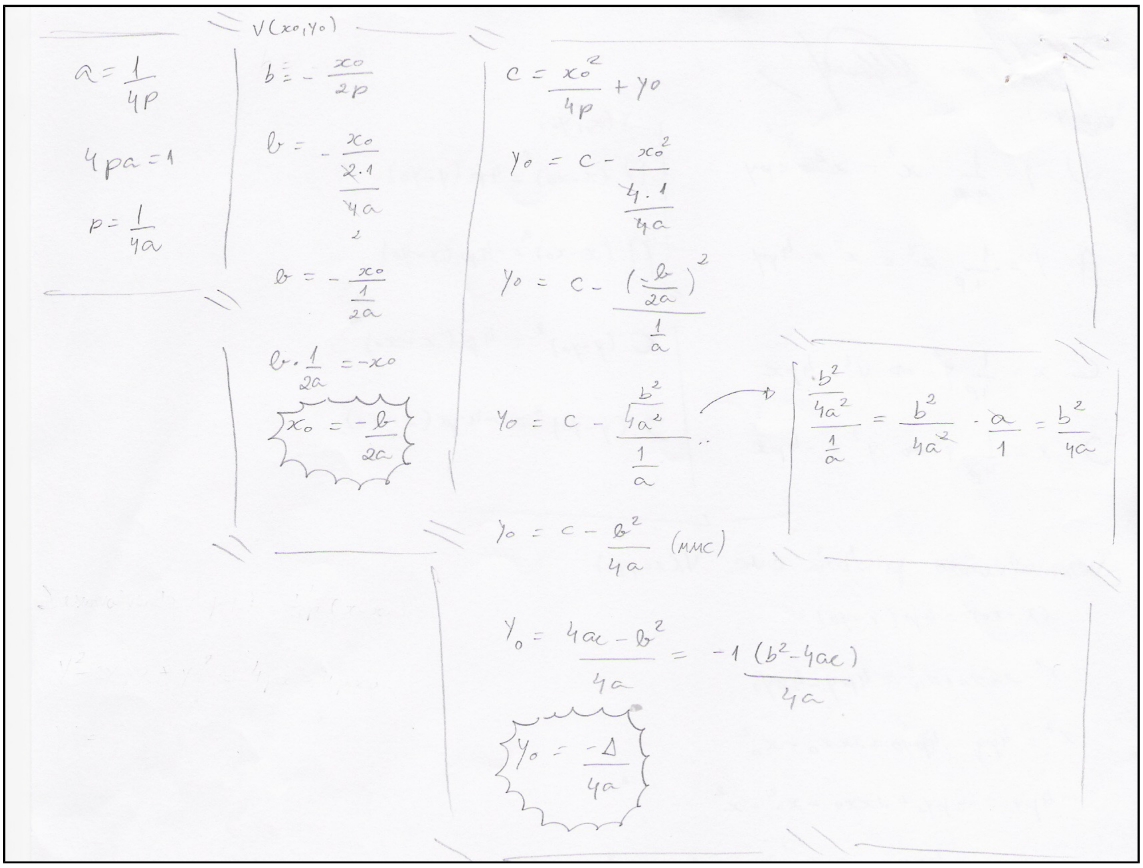
$$y = y_0 - \frac{x x_0}{2p} + \frac{x_0^2}{4p} + \frac{1}{4p}x^2$$

$$y = \frac{1}{4p}x^2 - \frac{x_0}{2p}x + \frac{x_0^2}{4p} + y_0$$

Fazendo $a = \frac{1}{4p}$, $b = \frac{x_0}{2p}$ e $c = \frac{x_0^2}{4p} + y_0$, temos:

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a > 0$$

A partir do desenvolvimento anterior, foi possível deduzir que a equação $y = ax^2 + bx + c$ representa parábolas com abscissa e ordenada do vértice, respectivamente, $x_o = -\dfrac{b}{2a}$ e $y_o = -\dfrac{\Delta}{4a}$, sendo $\Delta = b^2 - 4ac$, conforme podemos observar a seguir.



As fórmulas encontradas para abscissa e ordenada do vértice eram familiares aos alunos, visto que essas tinham sido abordadas em seus estudos anteriores.

A seguir temos o desenvolvimento da equação $(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$:

Desenvolvendo $(y-y_0)^2 = 4p(x-x_0)$

$$y^2 - 2yy_0 + y_0^2 = 4px - 4px_0$$

$$4px = y^2 - 2yy_0 + y_0^2 + 4px_0$$

$$x = \frac{y^2}{4p} - \frac{2yy_0}{4p} + \frac{y_0^2}{4p} + \frac{4px_0}{4p}$$

$$x = \frac{1}{4p}y^2 - \frac{y_0 y}{2p} + \frac{y_0^2}{4p} + x_0$$

Fazendo $a = \frac{1}{4p}$, $b = \frac{-y_0}{2p}$ e $c = \frac{y_0^2}{4p} + x_0$, temos.

$$x = ay^2 + by + c,\ a > 0$$

$$a = \frac{1}{4p}$$

$$b = \frac{-y_0}{2p}$$

$$b = -2.\frac{1}{4p}y_0$$

$$b = -2.a y_0$$

$$2ay_0 = -b$$

$$y_0 = \frac{-b}{2a}$$

$$c = \frac{y_0^2}{4p} + x^2$$

$$c = \frac{1}{4p}y_0^2 + x_0$$

$$c = a \cdot y_0^2 + x_0$$

$$c = a \cdot \left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + x_0$$

$$c = a \cdot \frac{b^2}{4a^2} + x_0$$

$$c - \frac{b^2}{4a} = x_0$$

$$x_0 = \frac{c}{1} - \frac{b^2}{4a}$$

$$x_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$x_0 = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

$$x_0 = \frac{-\Delta}{4a}$$

O desenvolvimento anterior permitiu deduzir a equação $x = ay^2 + by + c$, e que esta representa parábolas com ordenada e abscissa do vértice, respectivamente, $y_o = -\frac{b}{2a}$ e $x_o = -\frac{\Delta}{4a}$, sendo $\Delta = b^2 - 4ac$.

Os alunos acharam interessante que a fórmula usada por eles para abscissa e ordenada do vértice das parábolas que representam a função quadrática se aplicam, neste caso, para a ordenada e abscissa do vértice, respectivamente.

Falamos para o grupo de alunos que de forma análoga, o desenvolvimento de $(x - x_0)^2 = -4p(y - y_0)$ irá resultar na equação $y = ax^2 + bx + c$, com $a < 0$, pois $a = -\frac{1}{4p}$, sendo $x_o = -\frac{b}{2a}$ e $y_o = -\frac{\Delta}{4a}$, $\Delta = b^2 - 4ac$ e que desenvolvendo

$(y-y_0)^2 = -4p(x-x_0)$ obteremos x = ay² + by + c, com a < 0, pois a = $-\frac{1}{4p}$, sendo

$y_o = -\frac{b}{2a}$ e $x_o = -\frac{\Delta}{4a}$, $\Delta = b^2 - 4ac$. Estes desenvolvimentos ficaram a cargo dos alunos.

Foi possível concluir que, quando a parábola apresenta eixo de simetria paralelo ao eixo y, ela pode ter concavidade voltada para cima (a > 0) ou para baixo (a < 0) e o vértice é o ponto $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ e, quando apresenta eixo de simetria paralelo ao eixo x, ela pode ter concavidade voltada para à direita (a > 0) ou para à esquerda (a < 0) e o vértice é $V = \left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$.

Diante disso, um aluno fez o seguinte comentário:

"Quando eu tinha que encontrar o vértice ia direto na fórmula, mas agora preciso ver a posição da parábola".

Nesse encontro, também apresentamos a propriedade refletora da parábola e suas aplicações. Para tanto, foi feita uma experiência utilizando uma prancha de madeira com uma tira espelhada encurvada, acompanhando o traçado de uma parábola (Figura 24).

Ao colocarmos no foco da parábola uma fonte luminosa voltada para a tira espelhada, os alunos puderam observar que os raios luminosos que incidiam nessa tira espelhada eram refletidos paralelamente ao eixo de simetria da parábola.

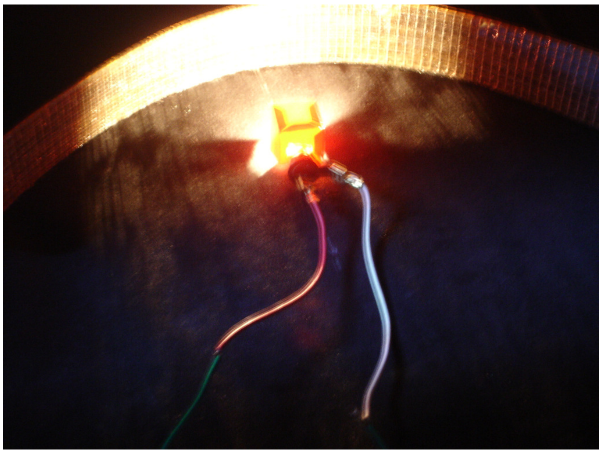


Figura 24 – Material elaborado para a experiência

Em seguida, emitimos raios paralelos ao eixo de simetria da parábola. Dessa vez foi possível observar que esses convergiam para o foco da parábola.

Figura 25 - Experiência

Essa experiência despertou o interesse dos alunos e tornou possível a observação da propriedade refletora da parábola.

Falamos para os alunos que, quando os raios de luz incidem em um ponto de uma superfície parabólica, estes são refletidos segundo um plano tangente à superfície nesse ponto, sendo o ângulo de incidência igual ao ângulo de reflexão, sendo assim, todo sinal recebido paralelamente ao eixo da parábola é refletido para o foco e todo sinal que sai do foco é refletido paralelamente ao eixo da parábola (Capítulo II).

Comentamos que a propriedade refletora da parábola apresenta muitas aplicações, dentre elas destacamos: antenas parabólicas, telescópios, fornos solares, holofotes e faróis de automóveis.

Também apresentamos para os alunos a foto da catedral de São Paulo, em Londres, cujo teto é um parabolóide de revolução, exemplificando que a propriedade refletora da parábola se aplica também para ondas sonoras. Falamos para os alunos que um parabolóide de revolução é uma superfície gerada a partir da rotação de uma parábola em torno do seu eixo de simetria.

As aplicações citadas, bem como algumas curiosidades, foram apresentadas para os alunos por meio de transparências que se encontram no apêndice II.

Os alunos se mostraram motivados e demonstraram que em seus estudos anteriores nenhuma abordagem deste tipo tinha sido feita.

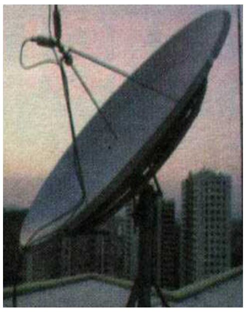
Consideramos que as cônicas são um tópico interessante e enriquecedor e, particularmente, a parábola apresenta aplicações em nosso dia-a-dia que podem servir para despertar o interesse do aluno e motivar o seu estudo.

Após o estudo desenvolvido sobre a parábola, os alunos tiveram a oportunidade de resolver alguns exercícios de aplicação (Quadro 9), utilizando os conhecimentos adquiridos nas atividades anteriores.

Quadro 9 - Exercícios

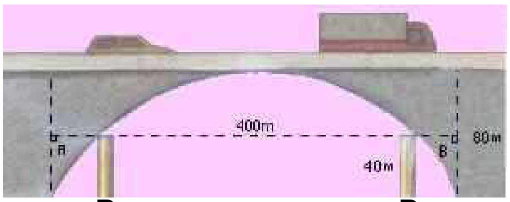
Exercícios

1 – Uma antena parabólica é projetada com 2,80m de abertura e 45cm de profundidade. O técnico que irá instalar a antena colocará o receptor de sinais no foco. Sendo assim, a que distância do vértice ficará o receptor?



Fonte: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm15/paginic.htm

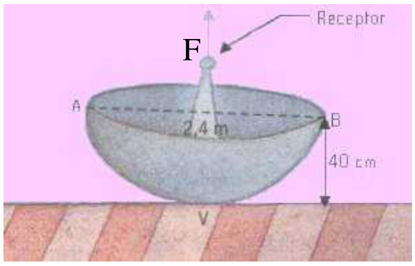
2 – O arco de uma ponte tem a forma de uma parábola, conforme observa-se abaixo. De acordo com os dados indicados na figura, determine a distância entre os pilares P_1 e P_2.



P_1 P_2

Fonte:adaptada de http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm27/

3 – Para aquecer a água, pode-se usar um coletor solar, com a forma de um parabolóide de revolução. A água circula numa conduta que passa pelo foco, onde está o receptor. De acordo com os dados fornecidos na figura abaixo, determine a distância do foco F ao vértice V.



F

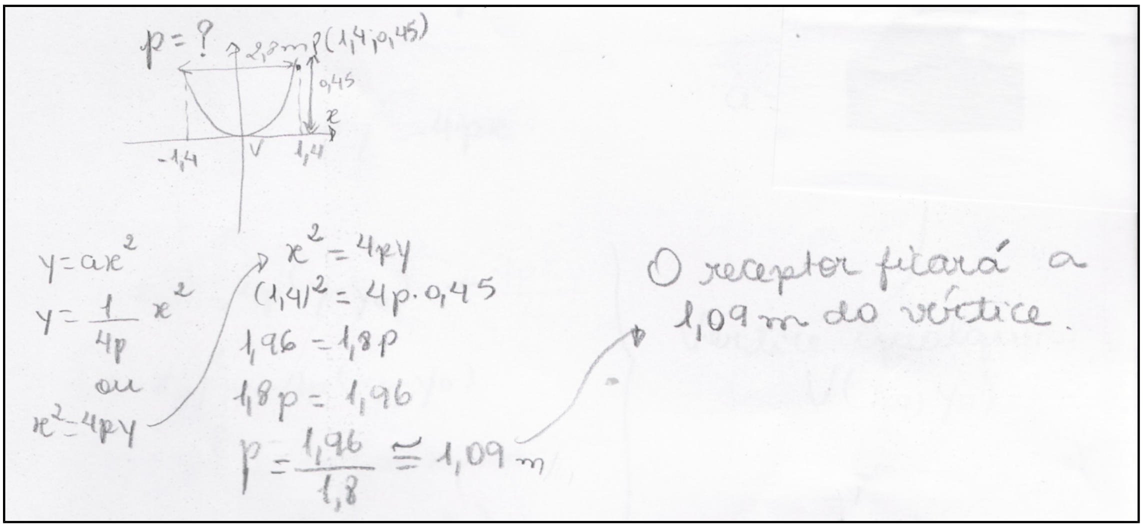
Fonte: adaptada de http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm27/

4 - (UFMG 00) A secção transversal de um túnel tem a forma de um arco de parábola, com 10m de largura na base e altura máxima de 6m, que ocorre acima do ponto médio da base. De cada lado, é reservado 1,5m para passagem de pedestres, e o restante é dividido em duas pistas para veículos. As autoridades só permitem que um veículo passe por esse túnel caso tenha uma altura de, no máximo, 30cm a menos que a altura mínima do túnel sobre as pistas para veículos. Calcule a altura máxima que um veículo pode ter para que sua passagem pelo túnel seja permitida.

Assim como nas outras atividades, os alunos estavam dispostos em grupo, o que facilitava a interação e a troca de experiências entre eles e, quando necessário, nos solicitavam esclarecimentos.

Ao ler o primeiro exercício, os alunos entenderam que precisavam encontrar o valor de *p* (distância do vértice ao receptor), porém tiveram dúvidas em relação ao que deveria ser feito. Discutiram entre si e nos solicitaram ajuda. Sugerimos, então, que localizassem de forma conveniente a parábola mencionada, num sistema de eixos coordenados, para que sua equação fosse encontrada e assim chegassem ao que foi pedido.

A seguir apresentamos a resolução dada por um aluno para a primeira questão:



Percebemos que, a cada exercício, os alunos progrediam, demonstrando desenvoltura na resolução das questões e chegando às respostas esperadas.

CONCLUSÃO

Muitos educadores afirmam que é possível fazer ligação entre muitos conteúdos escolares e o cotidiano, para tanto, buscamos trabalhar um tema em que essa ligação está muito presente.

Através desse trabalho, percebemos que as cônicas constituem um tema pouco visto no Ensino Médio e, em se tratando de um tópico relevante e enriquecedor para o currículo, enfocamos particularmente o estudo da cônica parábola, que apresenta aplicações interessantes e motivadoras.

O estudo realizado nesta monografia possibilitou que os alunos percebessem que a parábola não é somente uma curva que representa uma função quadrática, mas uma cônica que possui características específicas e aplicações importantes no nosso dia-a-dia.

A primeira atividade aplicada para a construção da parábola, utilizando barbante, tachinha, esquadro e régua, fez com que os alunos percebessem a propriedade dos pontos desta cônica, assimilando de forma natural o conceito de parábola.

A propriedade métrica observada através da primeira atividade, também pôde ser visualizada por meio do *software* Wingeon*,* que desempenhou um papel auxiliar na construção dos conceitos envolvidos.

Continuando o estudo, foi possível chegar às equações das parábolas, localizando-as em um sistema de eixos ortogonais e fazendo translações. A partir daí estabelecemos relações entre o que estava sendo trabalhado e o que já tinha sido estudado pelos alunos em anos anteriores sobre a função quadrática, mostrando assim que é possível integrar diversas partes da Matemática.

Os alunos visualizaram a propriedade refletora da parábola, a partir de uma experiência realizada com material concreto. Através da observação dessa propriedade, foi possível comentar sobre algumas das suas diversas e importantes aplicações em antenas parabólicas, radiotelescópios, refletores, fornos solares, etc. Eles ficaram muito interessados com as aplicações apresentadas, pois não tinham conhecimento delas.

Finalizando, os alunos tiveram a oportunidade de fazer exercícios de aplicação envolvendo os conceitos tratados nesse estudo.

Durante a aplicação das atividades, os alunos se mostraram bastante interessados, dialogando com seus colegas e compartilhando as experiências vivenciadas, tornando a sala de aula um ambiente propício para uma aprendizagem participativa e dinâmica.

As atividades apresentadas e a utilização do material criteriosamente escolhido desempenharam um papel fundamental no desenvolvimento da percepção e visualização, levando o aluno a refletir, generalizar e construir o conhecimento.

Percebemos que a cada atividade os alunos apresentavam progressos significativos, assimilando os novos conhecimentos e incorporando-os aos já adquiridos.

Constatamos a surpresa dos alunos diante de um tema que deveria ter sido visto e, no entanto, passou desapercebido em sua trajetória no Nível Médio.

As aplicações, bem como as propriedades da parábola, despertaram no grupo de alunos o interesse em aprender mais sobre as outras cônicas.

A partir do exposto, consideramos que o objetivo inicial deste trabalho foi atingido satisfatoriamente.

BIBLIOGRAFIA

AFONSO, Flávio de Freitas. *Projeto: Tecnologias de Informação e Comunicação no processo de ensino e aprendizagem de matemática*. Centro Federal de Educação Tecnológica de Campos. Campos dos Goytacazes. 2005.

ANTENA PARABÓLICA. Disponível em: http://www.celta-telecomunicacoes.com.br/catalog/images/2005.jpg. Última consulta em 03 maio 2007.

APLICAÇÕES DE CONCORDÂNCIA, TANGÊNCIA E CURVAS CÔNICAS NA ARQUITETURA. Disponível em: <http://www.mat.uel.br/geometrica/php/pdf/artigos/PA-21-TC.pdf>. Última consulta em 31 mar. 2006

APLICAÇÕES DAS CÔNICAS**.** Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm15/paginic.htm>. Última consulta em 23 dez. 2005

APOLÔNIO. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/hfe/momentos/museu/matematica.htm>. Última consulta em 18 ago. 2005

AS CÔNICAS**.** Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/apolonio/conicas.htm. Última consulta em 18 jan. 2006

AS CÔNICAS. Disponível em: http://www.matematica.br/historia/conicas.html. Última consulta em 22 out. 2006.

AS CÔNICAS. Disponível em: http://www.velho.lis.ulusiada.pt/html/mestrados/matematica/trabalhos/grupo02/favorite.htm. Última consulta em 31 de mar. 2006.

BOULOS, Paulo e CAMARGO, Ivan de. *Introdução à geometria analítica no espaço*. São Paulo: Makron Books, 1997.

BOULOS, Paulo; CAMARGO, Ivan de. *Geometria Analítica*. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

BOYER, Carlos B. *História da Matemática.* São Paulo: Editora Edgard Blucher LTDA, 2001.

BRASIL, MEC, SEMTEC (2002) *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio.* Brasília: 1v.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Educação Matemática: Da Teoria à Prática*. Campinas, SP: Papirus, 1996.

DELORS, Jacques. *Educação: um tesouro a descobrir.* São Paulo: Cortez; Brasília, DF: MEC: Unesco, 2001.

DEMO, Pedro. *Educação e Qualidade*. Campinas, SP: Papirus, 1994.

EDWARDS, C. H. Júnior; PENNEY, Davids E. *Cálculo com Geometria Analítica*. Rio de Janeiro: Prentice – Hall do Brasil, 1997.

ESTUDO SOBRE AS PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DAS CÔNICAS E SUAS APLICAÇÕES. Disponível em: http://www.famat.ufu.br/revista/revistaabril2005/artigos/ArtigoPatriciaLucia.pdf. Última consulta em 26 mar. 2006

GLENN, Albert Jacques Van Amson. (et al.). *Ensino Médio*. São Paulo: Anglo, 2002.

GONÇALVES, Zózimo Menna. *Geometria analítica plana: tratamento vetorial*. Rio de Janeiro: LTC Editora S/A, 1978.

GRANDE Enciclopédia Barsa. 3 ed. – v 7. São Paulo: Barsa Planeta Internacional Ltda, 1987.

GRANDE Enciclopédia Barsa. 3 ed. – v 11. São Paulo: Barsa Planeta Internacional Ltda, 1987.

HERNANDEZ, Fernando. *Transgressão e mudança na educação: os projetos de trabalho*. Porto Alegre: Artmed, 1998.

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA. Disponível em: http://www.saopauloescolas.com.br/historia_da_matematica.htm. Última consulta em 15 jan. 2006

IEZZI, Gelson, (et al.). *Matemática: Ciência e Aplicações. Ensino Médio.* São Paulo: Atual, 2004.

LEHMANN, Charles H. *Geometria Analítica.* Rio de Janeiro: Globo, 1982.

LIMA, Elon Lages. *Meu professor de matemática e outras histórias*. Rio de Janeiro: SBM, 2004.

LINDQUIST, Mary Montgomery. SHULTE, Albert P. (orgs). *Aprendendo e Ensinando Geometria*. São Paulo: Atual, 1994.

MACHADO, Antônio dos Santos. *Álgebra Linear e Geometria Analítica.* São Paulo: Atual, 1982.

MENAECHMUS. Disponível em: http://www.sobiografias.hpg.ig.com.br/Menaecmu.html. Última consulta em 22 jan. 2006

O FOGÃO SOLAR NA ATIVIDADE DA VIDA HUMANA**.** Disponível em: http://www.aondevamos.eng.br/textos/texto03.htm. Última consulta em 31 mar. 2006.

PASCHOALIN, Maria Aparecida. *Gramática – Teoria e Exercícios*. São Paulo: FTD, 1989.

PEREIRA, Aldinéa Siqueira de Souza. (et. al). *Projeto de Laboratório: Parábola em Foco*. Faculdade de Filosofia de Campos. Campos dos Goytacazes. 2000.

POR QUE AS ANTENAS SÃO PARABÓLICAS. Disponível em: http://mat.ufmg.vilabol.uol.com.br/parabola.html. Última consulta em 02 abr. 2006.

REFRATOR OU REFLETOR. Disponível em: **http://astro.if.ufrgs.br/telesc/node2.htm**. Última consulta em 13 de abr. 2006.

RIBEIRO, Márcia Valéria Azevedo de Almeida. *Uma abordagem para o ensino da elipse no curso de Licenciatura em Matemática*. Dissertação de Mestrado. Universidade Santa Úrsula. Rio de Janeiro, 1998.

SAVIANI, Dermeval. *Educação Brasileira – Estrutura e sistema*. Campinas, SP: Autores Associados, 2000.

SILVA, Geni Schulz da. Por que elipse, parábola e hipérbole. REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. Sociedade Brasileira de Matemática. 1985, n 7,p.43 .

SIMMONS, George F. *Cálculo com Geometria Analítica*. São Paulo: Makron Books, 1987.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco. DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira. *Matemática – Ensino Médio*. São Paulo: Saraiva, 2003.

SWOKOWSKI, Earl William. *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo: Makron Books, 1994.

UMA CURTA HISTORIA DAS CÔNICAS E SUA RELAÇÃO COM A GEOMETRIA PROJETIVA. Disponível em:
http://piu.unemat.br/faciex/professores/nelo/arquivos/curta_historia_das_conicas.pdf
Última consulta em 26 ago. 2005.

VALENTE, José Armando (org). *Formação de educadores para o uso da informática na escola*. Campinas, SP: UNICAMP / NIED, 2003.

VENTURI, Jacir J. *Cônicas e Quádricas*. Curitiba: Unificado, 2003.

WAGNER, Eduardo. Por que as antenas são parabólicas. REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. Sociedade Brasileira de Matemática. 1997, n.33.

WAGNER, Eduardo. *Construções Geométricas*. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2000.

WINGEON. Disponível em:
http://math.exeter.edu/rparris/wingeom.html. Última consulta em 01 de jun. 2006.

APÊNDICES

APÊNDICE I

Obtendo as secções cônicas parábola, elipse e hipérbole através de cortes em um cone circular reto.

Obtendo as secções cônicas parábola, elipse e hipérbole através de cortes em um cone circular reto.

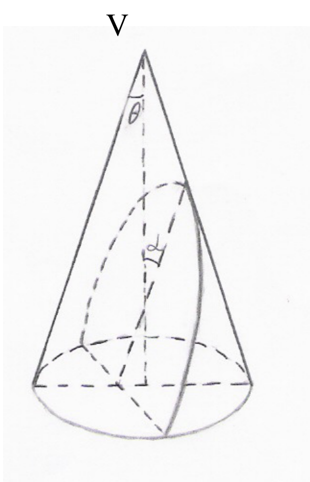
A obtenção de cada uma das cônicas depende de relações entre o ângulo α formado entre o plano de corte e o eixo de um cone circular reto e o ângulo θ formado pelo eixo e uma geratriz do cone.

Segundo o teorema de Dandelin Quetelet: "*a secção de um cone por um plano que não passa pelo vértice é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja razão das distâncias a um ponto fixo e uma reta fixa de um mesmo plano é constante*". (GONÇALVES, 1978 apud RIBEIRO, 1998, p. 71).

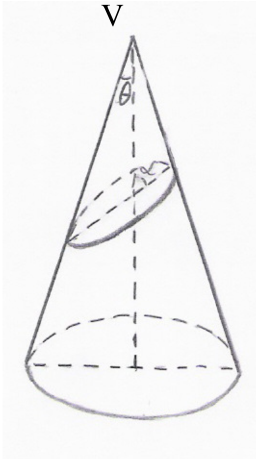
O ponto fixo recebe o nome de foco, a reta fixa é a diretriz e a razão é a excentricidade.

Alguns livros de Geometria Analítica, que se encontram nas referências bibliográficas deste trabalho, demonstram que a razão citada no Teorema de Dandelin Quetelet é a constante $\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}$, denominada excentricidade. Dessa forma:

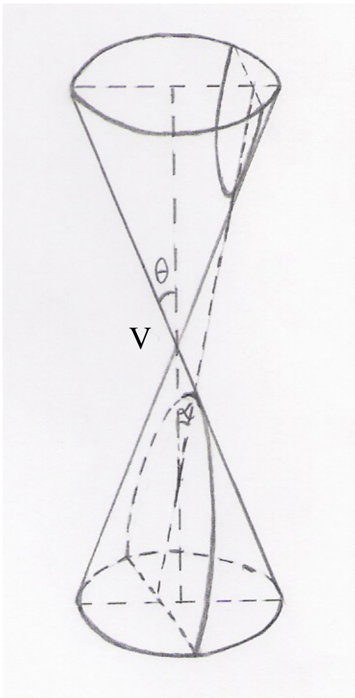
Se $\alpha = \theta$ (plano de corte paralelo à uma geratriz do cone), temos que $\cos\alpha = \cos\theta$, logo $\frac{\cos\alpha}{\cos\theta} = 1$, ou seja, temos uma cônica cuja excentricidade é igual a 1. Essa cônica é chamada de parábola.



Se $\alpha > \theta$, temos que $\cos\alpha < \cos\theta$, logo $\frac{\cos\alpha}{\cos\theta} < 1$, a cônica determinada é uma elipse.



Se $\alpha < \theta$, temos que $\cos\alpha > \cos\theta$, logo $\frac{\cos\alpha}{\cos\theta} > 1$,a cônica gerada é uma hipérbole.



Vale lembrar que o plano de corte nos casos anteriores não passa pelo vértice V do cone e ainda que $0^0 < \theta < 90^0$ e $0^0 \leq \alpha < 90^0$, sendo assim, a excentricidade será sempre positiva.

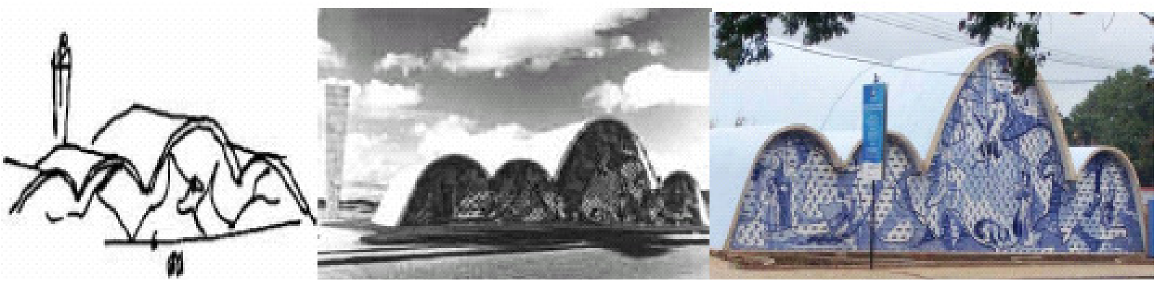
APÊNDICE II

Transparências utilizadas no quinto encontro

Algumas aplicações da parábola:

- <u>Engenharia e Arquitetura</u>

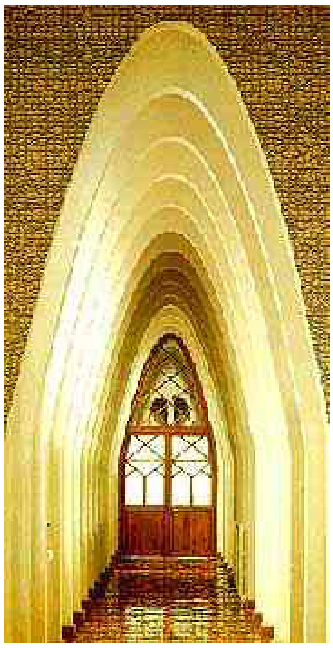
Oscar Niemeyer em seus projetos utilizava as cônicas. Abaixo temos uma de suas obras que apresenta em seu traçado formas que se assemelham a arcos de parábola.



Conjunto da Pampulha. Igreja de São Francisco – Belo Horizonte, 1940.
Fonte: http://www.mat.uel.br/geometrica/php/pdf/artigos/PA-21-TC.pdf

Fonte: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm15/paginic.htm

A propriedade refletora da parábola está presente em auditórios, teatros e igrejas, proporcionando boas condições de acústica. Como exemplo, temos a Catedral de São Paulo em Londres, cujo teto possui a forma de um parabolóide de revolução, e as “torres parabólicas” da catedral da Sagrada Família em Barcelona.

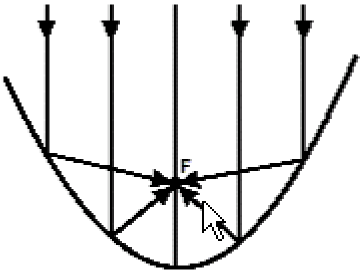


Fonte: http://www.velho.lis.ulusiada.pt/html/mestrados/matematica/trabalhos/grupo02/favorite.htm

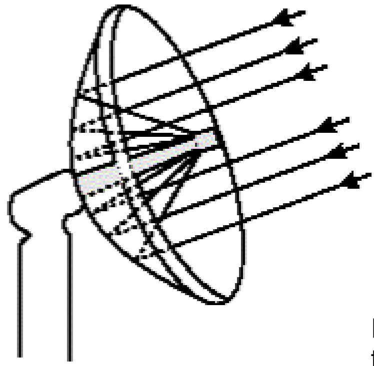
Propriedade Refletora

- Todo o raio que incide paralelamente ao eixo de simetria da parábola reflete passando pelo foco.

Ex: Antenas parabólicas, fornos solares, telescópios e microfones de campo de futebol.



(espelho parabólico)



(antena parabólica)

Fonte: http://www.celta-telecomunicacoes.com.br/catalog/images/2005.jpg

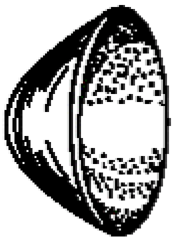
Fonte: http://mat.ufmg.vilabol.uol.com.br/parabola.html

Fonte: http://mat.ufmg.vilabol.uol.com.br/parabola.html

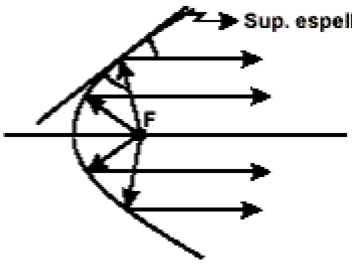
Fonte: http://mat.ufmg.vilabol.uol.com.br/parabola.html

- Todo o raio que sai do foco reflete-se paralelamente ao eixo de simetria da parábola.

Ex: Faróis de navegação e de automóveis, lanternas e holofotes.



Farol de um automóvel

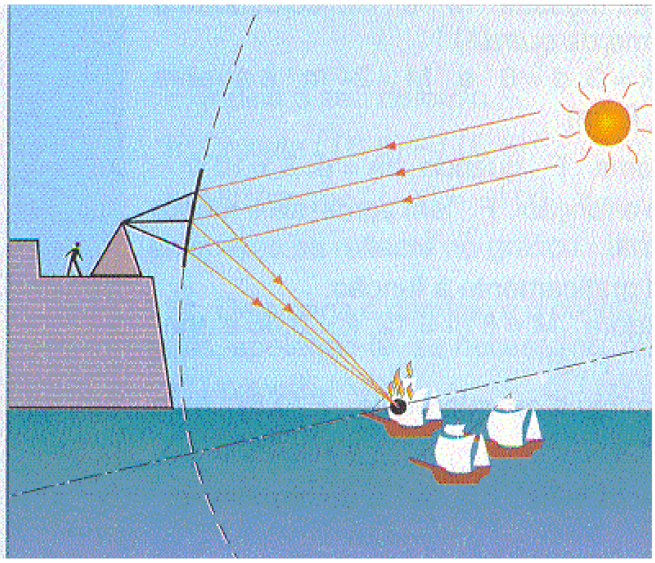


Secção de um farol

Fonte: http://mat.ufmg.vilabol.uol.com.br/parabola.html

Curiosidade

Conta-se a história que Arquimedes, conhecedor da propriedade refletora da parábola, utilizou espelhos parabólicos posicionados de forma que seus inimigos ficassem no foco e o Sol paralelo ao eixo de simetria dos espelhos. Assim, ele conseguiu incendiar as naves romanas que cercavam Siracusa.



Fonte: http://www.velho.lis.ulusiada.pt/html/mestrados/matematica/trabalhos/grupo02/favorite.htm

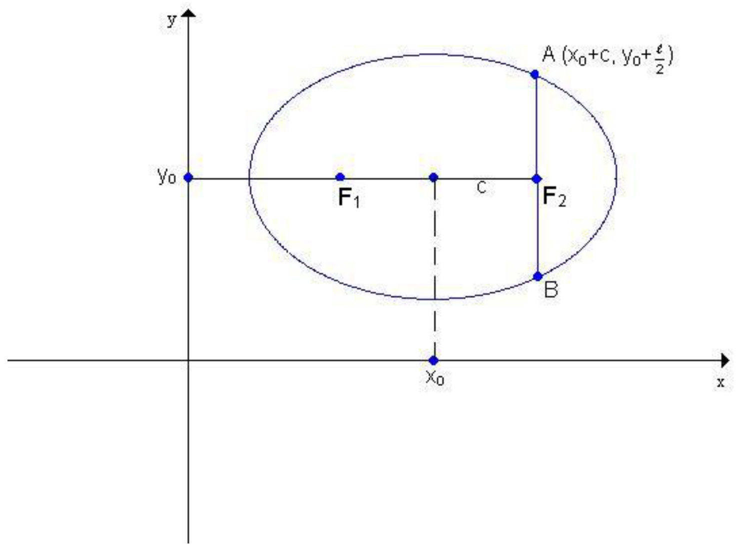
APÊNDICE III

Latus rectum da elipse

Latus rectum da elipse

Latus rectum da elipse é uma corda que passa por um foco e é perpendicular ao eixo maior da elipse.

Consideremos uma elipse de centro $C(x_0,y_0)$, eixo maior de medida 2a, paralelo ao eixo x e eixo menor de medida 2b, paralelo ao eixo y. Seja 2c a distância focal.



Obedecendo às condições acima, a elipse terá equação $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$. Sejam A e B as extremidades de um *latus rectum* da elipse, relativo ao foco F_2 e ℓ o seu comprimento. Sendo assim, o ponto A terá coordenadas $(x_0+c,\ y_0+\frac{\ell}{2})$.

Como A pertence à elipse, temos:

$$\frac{(x_0 + c - x_0)^2}{a^2} + \frac{\left(y_0 + \frac{\ell}{2} - y_0\right)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{\frac{\ell^2}{4}}{b^2} = 1$$

$$c^2b^2 + \frac{a^2\ell^2}{4} = a^2b^2$$

$$\frac{a^2\ell^2}{4} = a^2b^2 - c^2b^2$$

$$\frac{a^2\ell^2}{4} = b^2(a^2 - c^2)$$

Na elipse temos que $a^2 = b^2 + c^2$, sendo assim $a^2 - c^2 = b^2$, logo

$$\frac{a^2\ell^2}{4} = b^2b^2$$

$$\ell^2 = \frac{4b^4}{a^2}$$

$$\ell = \frac{2b^2}{a}$$

Caso considerássemos o *latus rectum* relativo ao foco F_1 também encontraríamos $\ell = \frac{2b^2}{a}$.

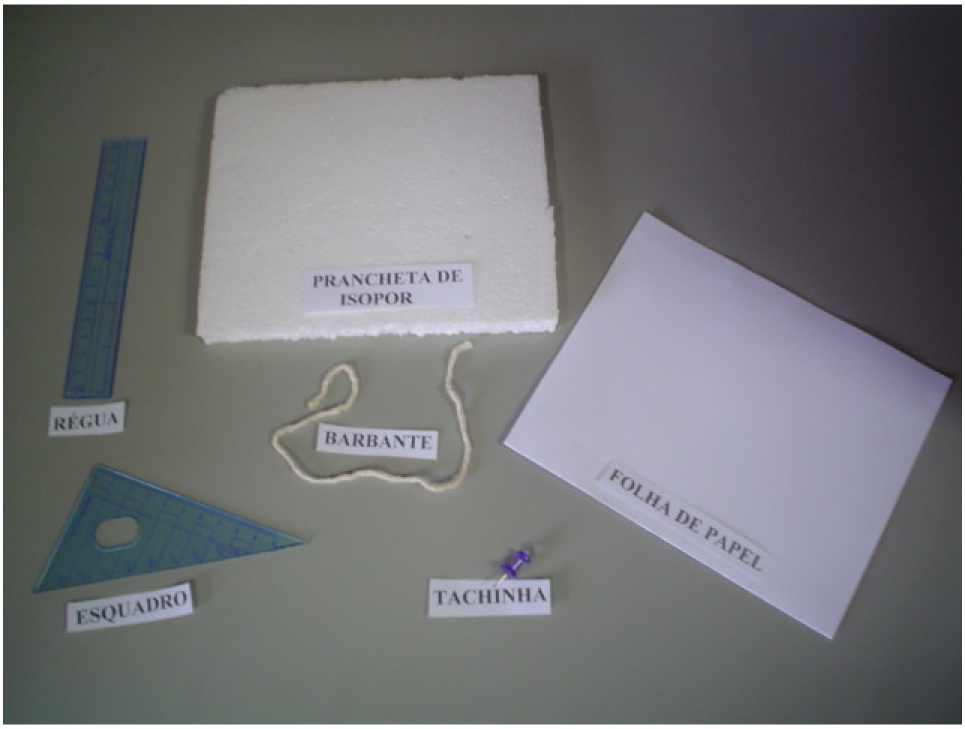
De forma análoga, chega-se à conclusão de que cada *latus rectum* de uma hipérbole (corda que contém um foco e é perpendicular ao segmento focal), cujo eixo transverso mede 2a e o eixo conjugado 2b, terá comprimento também igual a $\frac{2b^2}{a}$.

ANEXO

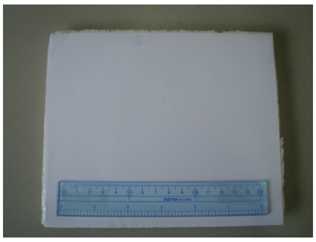
ANEXO I
Atividades aplicadas

Atividade I

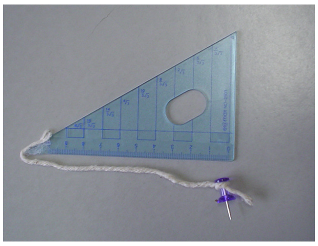
1- Material necessário:



2- Procedimentos:

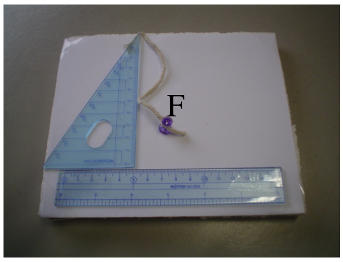


2.1- Sobre a folha de papel fixada na prancheta de isopor, prenda a régua conforme mostra a fotografia ao lado.

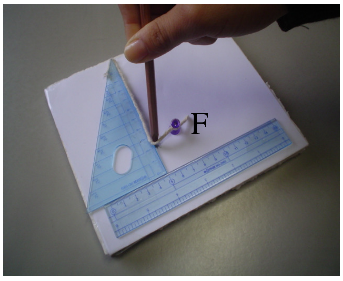


2.2- Amarre a tachinha em uma das extremidades do barbante e prenda a outra ponta do barbante na extremidade de um dos catetos do esquadro, que corresponde a um ângulo agudo, de modo que o barbante fique com comprimento igual à medida do cateto escolhido.

2.3- Apóie o outro cateto do esquadro sobre a régua presa na prancheta de isopor e fixe a tachinha em um ponto F, conforme mostra a foto ao lado.



2.4- Deslize o esquadro sobre a régua, mantendo com um lápis ou caneta, o barbante bem esticado e encostado no cateto.



Com estes procedimentos você desenhará uma curva que recebe o nome de parábola.

Ao traçar a parábola, o que você observou em relação a cada ponto da curva?

Aluno: ____

Atividade II

Traçado da Parábola utilizando o *Software* Wingeon.

1 – Clique no menu **janela** e selecione a opção **2-dim.**

2 – Selecione no menu **Ponto** a opção **Coordenada**. A seguir digite 3 para o valor de x e 1 para o valor de y e clique em marcar. Dessa forma será marcado o ponto A (3,1).

3 – Usando o mesmo procedimento do item anterior, marque o ponto B (-3,1) e depois clique em **fechar**.

4 – No menu **Reta/Retas...** digite AB e clique **OK** (com este procedimento será traçada a reta AB). A reta AB é a diretriz da parábola.

5 – Em **Ponto/Ponto aleatório** selecione **sobre o segmento... .** Clique **OK** na janela que aparece. Utilizando esses passos o programa irá marcar um ponto sobre a reta AB, distinto dos já marcados.

6 – Conforme item 2, marque o ponto D (0,3). O ponto D é o foco da parábola.

7 – Clique em **Botões/segmentos** e trace com a ajuda do mouse o segmento CD.

8 – Selecione em **Reta/Perpendiculares** a opção **Mediatriz**, digite CD na janela que se abre e clique **OK**. Sendo assim será traçada a reta mediatriz de $\overline{CD}$.

9 – Construa uma reta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ passando pelo ponto C. (Selecione **Geral** em **Reta/Perpendiculares.** Digite AB para perpendicular e C para o ponto, clique em **desenhar** e em seguida **fechar**).

10 – Em **Ponto/Interseção** selecione **Reta-Reta...** e digite para reta: CG e EF. Clique em **marcar** e a seguir **fechar**. Com este procedimento aparecerá o ponto H, interseção de $\overleftrightarrow{CG}$ e $\overleftrightarrow{EF}$.

11 – Conforme o item 7, construa $\overline{DH}$.

12 – Selecione o menu **Medidas,** digite CH e tecle *enter.* Digite também DH e tecle *enter*. Assim, nesta janela, aparecerão as medidas dos segmentos pedidos. Fechando essa janela, as medidas estarão disponíveis na tela.

13 – Clique em **Anim/Traço temporário** e na caixa de texto que se abrirá digite H. Clique **OK.**

14 – Na opção **botões** selecione **arrastar vértices** e com o mouse movimente o ponto C.

15 – Ao movimentar o ponto C, o que você observa em relação as medidas de $\overline{CH}$ e $\overline{DH}$?

Os pontos que aparecem na tela quando o ponto C é movimentado descrevem uma parábola.

Aluno: ____

Atividade III

1 – No *software* Wingeon marque dois pontos A e B, clicando o botão direito do mouse.

2 – Trace a reta AB.

3 – Marque um ponto C não pertencente à reta AB, conforme o item 1.

4 – Em **Unidades/Cônicas com 3 pontos...** digite AB para a reta diretriz, C para o foco e selecione a opção excentricidade 1, escolha uma cor para a parábola que será desenhada, clique em **desenhar** e **fechar**.

5 – Trace o eixo de simetria da parábola, construindo uma reta perpendicular à reta AB, passando pelo ponto C.

6 – No menu **Botões** selecione **Arrastar vértices** e movimente o foco da parábola, afastando-o e aproximando-o da reta diretriz AB.

7 - O que você percebeu ao movimentar o foco da parábola?

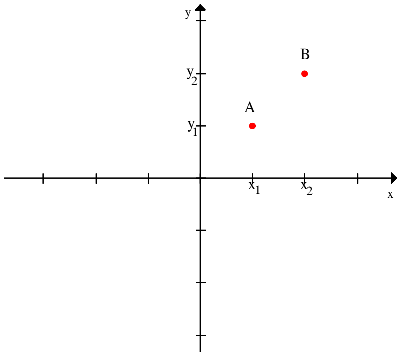
Aluno: ____

Pré-requisitos

Aluno: ____

1 – <u>Distância entre dois pontos no IR².</u>

Sejam os pontos A(x_1, y_1) e B(x_2, y_2) representados abaixo:



<u>Exemplo:</u>

Calcule a distância entre os pontos A(2,-5) e B(8,3).

2 – <u>Distância entre um ponto e uma reta no IR².</u>

Sejam o ponto $P(x_0, y_0)$ e a reta $r: ax + by + c = 0$.

A distância entre o ponto P e a reta r é dada por: $d_{p,r} = \left| \dfrac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$

<u>Exemplos:</u>

3-Calcule a distância de P(1,2) à reta r: 3x – 4y – 5 = 0.

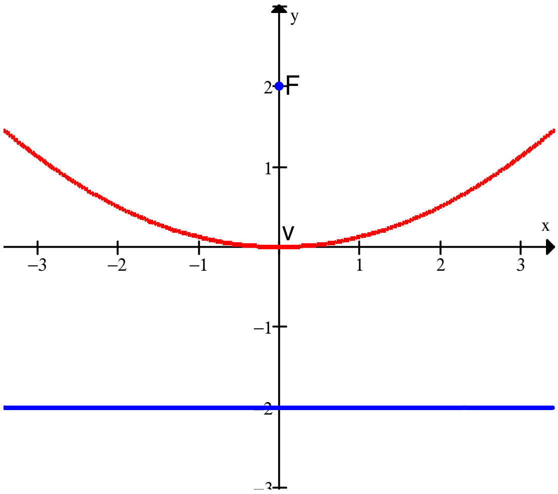
4-Encontre a distância de P(2,3) à reta r: y = – 2.

Atividade IV

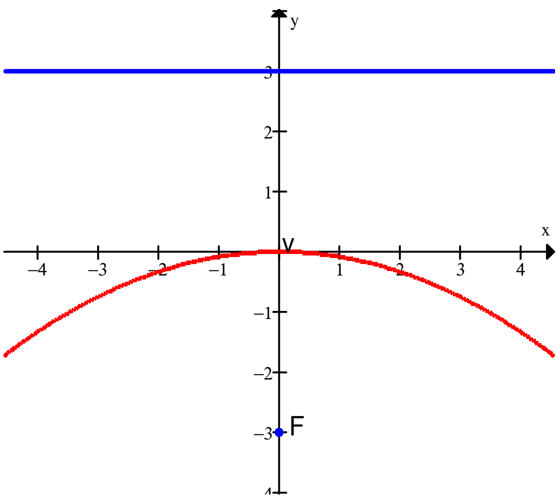
Aluno: ____

1 – Encontre a equação das parábolas representadas abaixo:

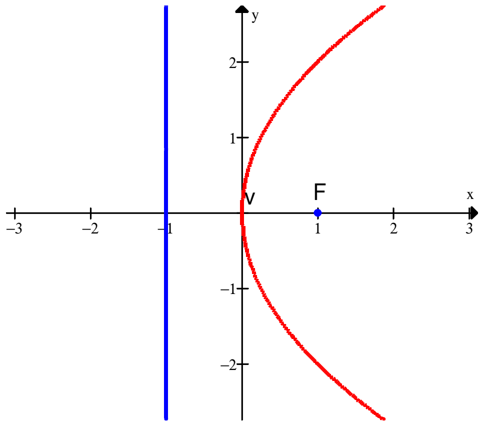
a)



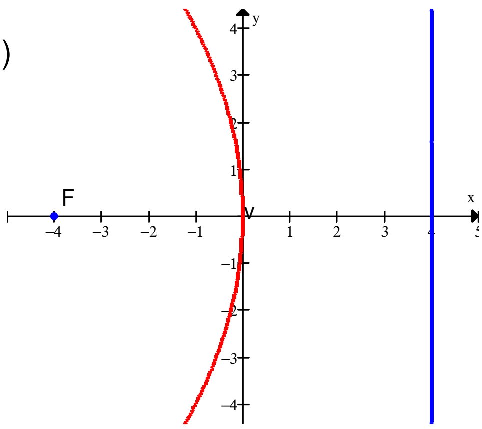
b)



c)

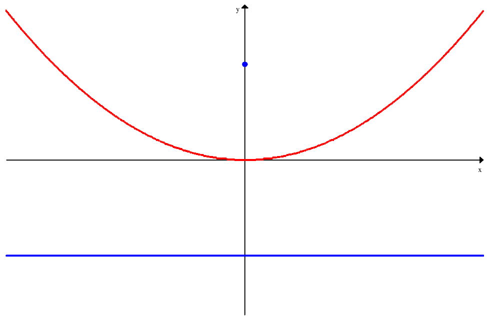


d)

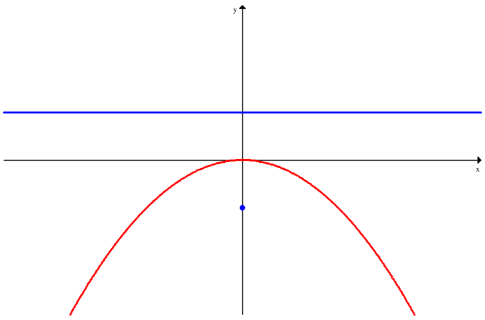


Generalizando...

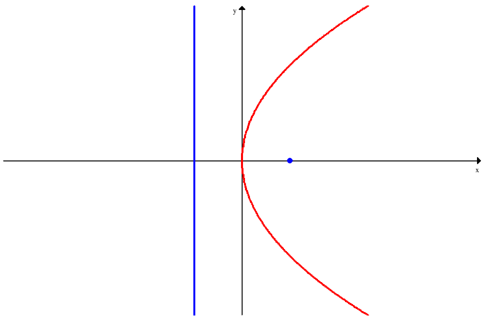
I)



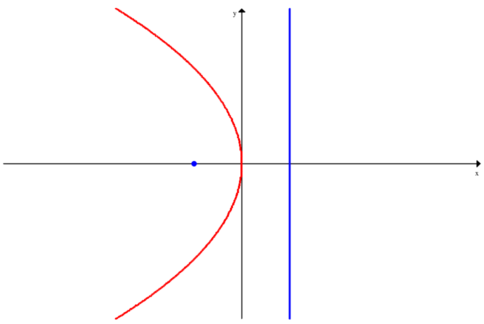
II)



III)



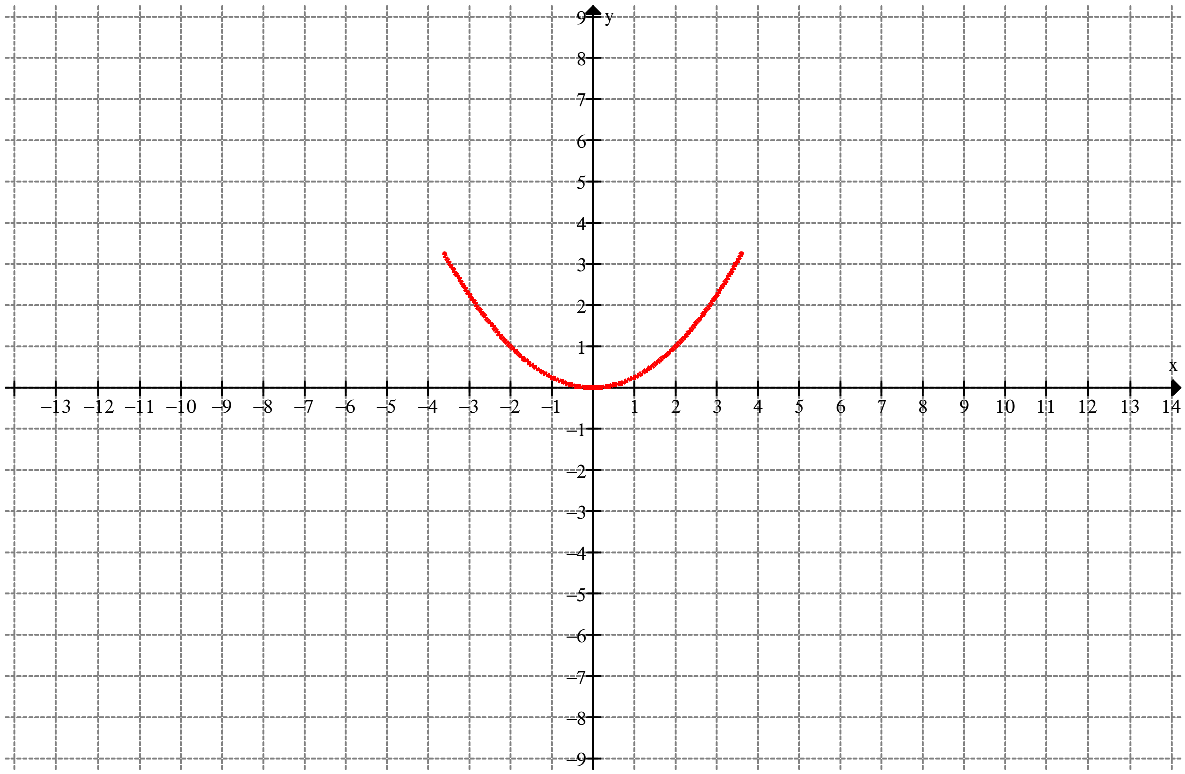
IV)



Atividade V

Aluno: ____

$y = \frac{1}{4}x^2$ ou $x^2 = 4y$

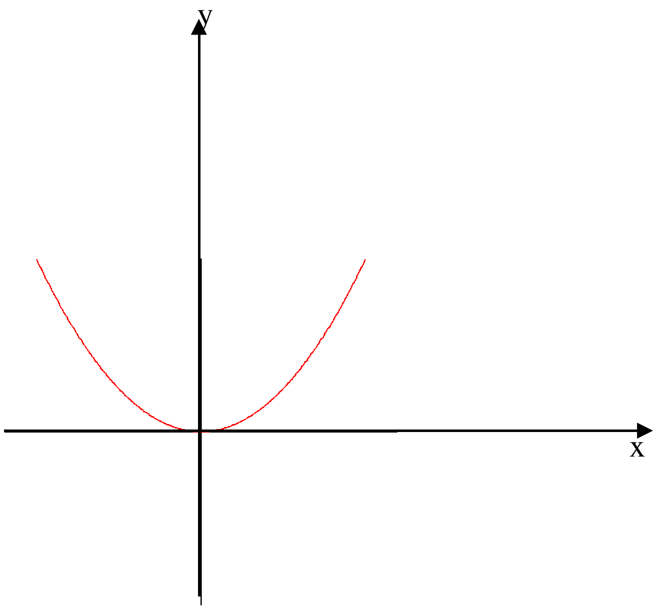


Atividade V

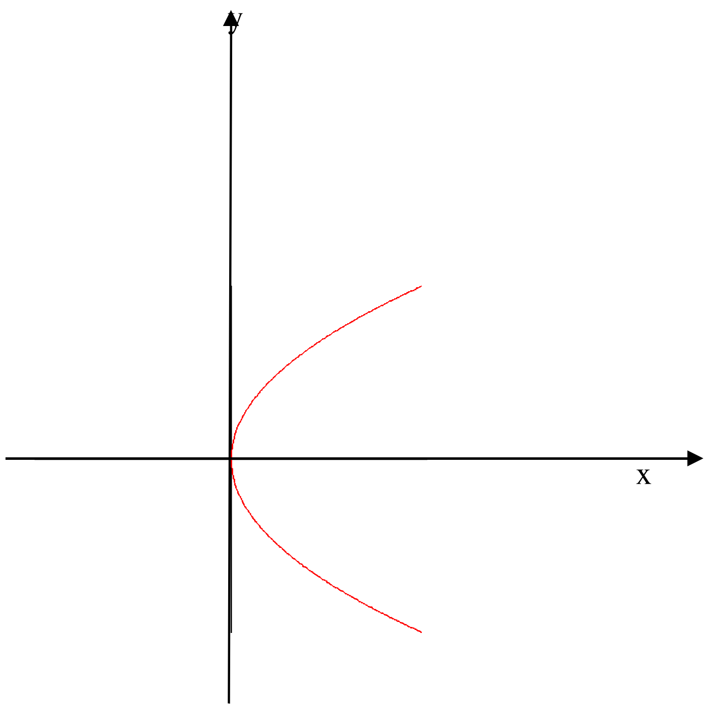
Aluno: ____

TRANSLAÇÃO

I)



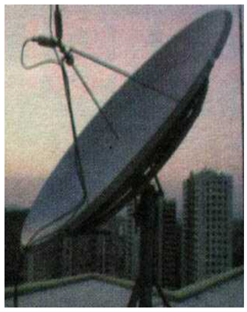
II)



Exercícios

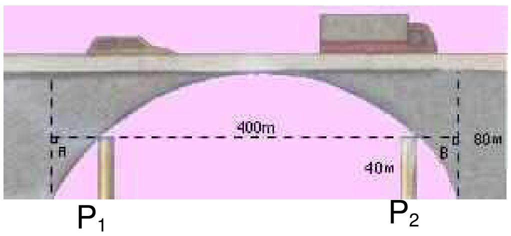
Aluno:____

1 – Uma antena parabólica é projetada com 2,80m de abertura e 45cm de profundidade. O técnico que irá instalar a antena colocará o receptor de sinais no foco. Sendo assim, a que distância do vértice ficará o receptor?



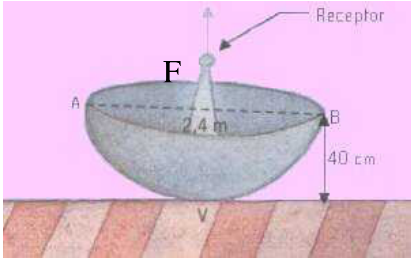
Fonte: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm15/paginic.htm

2 – O arco de uma ponte tem a forma de uma parábola, conforme a figura ao lado. De acordo com os dados indicados na figura, determine a distância entre os pilares P_1 e P_2.



Fonte:adaptada de http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm27/

3 – Para aquecer a água, pode-se usar um coletor solar, com a forma de um parabolóide de revolução. A água circula numa conduta que passa pelo foco, onde está o receptor. De acordo com os dados fornecidos na figura ao lado, determine a distância do foco F ao vértice V.



Fonte:adaptada de http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm27/

4 - (UFMG 00) A secção transversal de um túnel tem a forma de um arco de parábola, com 10m de largura na base e altura máxima de 6m, que ocorre acima do ponto médio da base. De cada lado, é reservado 1,5m para passagem de pedestres, e o restante é dividido em duas pistas para veículos. As autoridades só permitem que um veículo passe por esse túnel caso tenha uma altura de, no máximo, 30cm a menos que a altura mínima do túnel sobre as pistas para veículos. Calcule a altura máxima que um veículo pode ter para que sua passagem pelo túnel seja permitida.