



CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE CAMPOS

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense

MEC / SETEC



LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

O ESTUDO DE ISOMETRIAS: VISÃO ARTÍSTICA E MATEMÁTICA

EDIMARA RIBEIRO DA SILVA SOARES
PÂMILA CAMILA ALMEIDA
WILLIANA DA SILVA DE AZEREDO

CAMPOS DOS GOYTACAZES
2008



CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE CAMPOS

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense

MEC / SETEC



EDIMARA RIBEIRO DA SILVA SOARES
PÂMILA CAMILA ALMEIDA
WILLIANA DA SILVA DE AZEREDO

O ESTUDO DE ISOMETRIAS: VISÃO ARTÍSTICA E MATEMÁTICA

Monografia apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Campos, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Prof^ª MSc. Gilmara Teixeira Barcelos

CAMPOS DOS GOYTACAZES/RJ
2008

Dados de Catalogação na Publicação (CIP)

S676e Soares, Edimara Ribeiro da Silva.
O estudo de isometrias: visão artística e matemática
/ Edimara Ribeiro da Silva Soares, Pâmila Camila
Almeida, Williana da Silva de Azeredo. - Campos dos
Goytacazes, RJ : [s.n.], 2008.
151 f. ; il.

Orientadora: Gilmara Teixeira Barcelos.
Monografia (Licenciatura em Matemática). CEFET
Campos. Campos dos Goytacazes, RJ.
Bibliografia: f. 66-68.

1. Geometria – Estudo e ensino. 2. Isometria
(Matemática). 3. Desenho por computador. I. Almeida,
Pâmila Camila . II. Azeredo, Williana da Silva. III.
Barcelos, Gilmara Teixeira, orient. IV. Título.

CDD – 516.007

EDIMARA RIBEIRO DA SILVA SOARES
PÂMILA CAMILA ALMEIDA
WILLIANA DA SILVA DE AZEREDO

O ESTUDO DE ISOMETRIAS: VISÃO ARTÍSTICA E MATEMÁTICA

Monografia apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovada em 26 de agosto de 2008.

Banca Avaliadora:

Prof^a Gilmara Teixeira Barcelos (orientadora)
Mestre em Ciências de Engenharia/UENF/RJ
Centro Federal de Educação Tecnológica de Campos/RJ

Prof^a Mônica Souto da Silva Dias
Mestre em Educação matemática/ USU/RJ
Centro Federal de Educação Tecnológica de Campos/RJ

Prof^a Márcia Valéria Azevedo de Almeida Ribeiro
Mestre em Educação Matemática/USU/RJ
Faculdade de Filosofia de Campos/RJ

AGRADECIMENTOS

Agradecemos a Deus por nos guiar em mais essa etapa das nossas vidas, iluminando nossa trajetória nesse trabalho.

Aos nossos pais, sem os quais nós não teríamos cumprido mais uma etapa da nossa trajetória.

À Gilmara Teixeira Barcelos, pela paciência, dedicação e competência na orientação deste trabalho.

Ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Campos, por fazer parte de nossa história.

A professora de português que, com toda dedicação e competência, fez a revisão ortográfica deste trabalho.

Aos professores da Licenciatura em Matemática.

Aos participantes do teste exploratório das atividades.

Aos alunos que participaram da validação das atividades.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização desta pesquisa.

Dedicamos este trabalho a todos os nossos familiares e amigos que, de forma direta ou indireta, nos deram força e coragem para chegar até aqui.

RESUMO

O trabalho com Isometrias no plano possibilita a construção gradativa de conhecimentos geométricos, pois permite concretizar diversas situações que servem como ponto de partida para a exploração do deslumbrante mundo que é a Geometria. Além da importância do tema no âmbito da Matemática, a utilização de material concreto e recursos computacionais, nas atividades de Isometria, são fontes excepcionalmente ricas para o desenvolvimento do raciocínio e da autonomia do aluno. O objetivo desse trabalho foi verificar como a Arte e o *software* educacional Régua e Compasso, associados às atividades podem contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de Isometrias. Para isso são descritas, neste trabalho, as etapas da pesquisa, são elas: elaboração da apostila de atividades, elaboração dos questionários, teste exploratório das atividades, aplicação das atividades, análise das respostas e avaliação dos questionários. Finalizando, são relatadas as considerações sobre os resultados e as formas de continuidade do estudo. Os resultados alcançados foram satisfatórios, possibilitando formas de continuidade.

Palavras-chave: Isometria, Arte, Geometria Dinâmica.

ABSTRACT

The work with Isometries on plan allows the gradual construction of geometric knowledge, because it enables the achievement of many situations that act as the beginning of the exploration of the dazzling world that Geometry is. Besides the importance of Mathematics on the theme, activities involving Isometries on plan with manipulative materials, computer resources or both, when put into practice in an adequate manner, are exceptionally rich in possibilities for the development of qualitative reasoning and the student's autonomy. The objective of the work was to verify the Arts and the educational software "Ruler and Compass", associated with activities that can contribute to the process of teaching and learning the content of Isometries. In order to do that, the stages of the research are described in this project. They are: the elaboration of materials containing activities, elaboration of questionnaires, exploratory test of the activities, application of the activities, analysis of the answers and the evaluation of the questionnaires. To put an end to it, considerations on the results and the ways of continuing the study are described.

Key-words: Isometry, Arts, Dynamic Geometry.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Borboleta.....	18
Figura 1.2 – Taj Mahal.....	19
Figura 1.3 – Reflexão do Triângulo ABC.....	19
Figura 1.4 – Triângulo Equilátero.....	20
Figura 1.5 – Paralelogramo.....	20
Figura 1.6 – Translação do Triângulo ABC.....	21
Figura 1.7 – Trabalho em Crochê.....	21
Figura 1.8 – Bordado Manual.....	21
Figura 1.9 – Logotipos.....	22
Figura 1.10 – Rotação do Ponto P em Torno do Ponto O.....	22
Figura 1.11 – Flor.....	22
Figura 1.12 – Estrela do Mar.....	23
Figura 1.13 – Polígonos Regulares.....	23
Figura 1.14 – Faixa Decorativa.....	24
Figura 1.15 – Roseta.....	25
Figura 1.16 – Mosaico.....	26
Figura 1.17 – Quadro - Escher.....	26
Figura 1.18 – “Day and Night” Xilogravura de 1938.....	27
Figura 1.19 – “Reptiles” Litografia de 1943.....	27
Figura 1.20 – “High and Low” Litografia de 1947.....	28
Figura 1.21 – Melancolia - Dürer	29
Figura 1.22 – Pintura Egípcia.....	30
Figura 1.23 – Máquinas de Dürer.....	30
Figura 1.24 – Quadro - A Última Ceia.....	30
Figura 1.25 – Monalisa - Da Vinci.....	31

Figura 1.26 – Quadro - Mondrian	32
Figura 1.27 – Interface do <i>Software</i> Régua e Compasso.....	34
Figura 1.28 – Interface do <i>Software</i> GeoGebra.....	35
Figura 1.29 – Tipos de Mosaico.....	35
Figura 1.30 – Mosaico em Três Posições	36
Figura 2.1 – Borboleta com Eixo de Simetria Traçado.....	38
Figura 2.2 – Taj Mahal com Eixo de Simetria Traçado.....	40
Figura 2.3 – Faixa de Uma Atividade.....	42
Figura 2.4 – Kirigames A e B.....	43
Figura 2.5 –Quadro – Odetto Guersoni.....	45
Figura 2.6 – Foto com Participantes Dobrando Figuras.....	47
Figura 2.7– Atividade 2 Resolvida por um Participante.....	48
Figura 2.8 – Retângulo Dobrado pela Diagonal.....	48
Figura 2.9 – Participante Fazendo uma Faixa.....	50
Figura 2.10 – Faixa Correta.....	50
Figura 2.11 – Faixa Incorreta.....	50
Figura 2.12 – Foto dos Alunos Resolvendo as Atividades.....	56
Figura 2.13 – Retângulo Dobrado pela Diagonal.....	56
Figura 2.14 – Quadro – M.C.Escher.....	58
Figura 2.15 – Faixa Elaborada com Kirigamis.....	59
Figura 2.16 – Mosaico Elaborado com Kirigamis.....	59
Figura 2.17 – Papel Dobrado em Quatro Partes Iguais.....	59
Figura 2.18 – Algumas Rosetas Feitas por Alunos.....	60

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 2.1: Nível das Atividades no Teste Exploratório.....	52
Gráfico 2.2: Percentual de Participantes que Conheciam o Tema.....	53
Gráfico 2.3: Possibilidade da Aplicação das Atividades Desenvolvidas.....	54
Gráfico 2.4: Nível das Atividades na Validação.....	61
Gráfico 2.5: Aspectos Presentes nas Atividades Desenvolvidas.....	62

LISTA DE QUADROS

Quadro 1.1: Pormenor de Melancolia.....	29
Quadro 2.1: Atividades.....	38
Quadro 2.2: Atividade 2 - Eixo de Simetria.....	39
Quadro 2.3: Atividade 5 - Eixo de Simetria.....	39
Quadro 2.4: Atividade 1 – Reflexão.....	40
Quadro 2.5: Atividade 6 – Reflexão.....	41
Quadro 2.6: Atividade 6 – Reflexão.....	42
Quadro 2.7: Atividade 7 – Translação.....	43
Quadro 2.8: Atividade 1 – Rotação.....	44
Quadro 2.9: Resoluções da Atividade 6	49
Quadro 2.10: Atividade 3 com Enunciado do Teste Exploratório.....	50
Quadro 2.11: Atividade 3 com Enunciado Modificado.....	50
Quadro 2.12: Resoluções da Atividade 5.....	57
Quadro 2.13: Transparência com Definições de Faixa, Roseta e Mosaico.....	58

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....	7
LISTA DE GRÁFICOS.....	9
LISTA DE QUADROS	10
INTRODUÇÃO	12
1 – ISOMETRIA E ARTE.....	17
1.1 – Isometrias	17
1.1.1 – Reflexão	18
1.1.2 – Translação	20
1.1.3 – Rotação.....	22
1.2 – Arte na Aprendizagem de Isometria.....	23
1.3 – Tecnologias de Informação e Comunicação na Aprendizagem de Isometrias	32
2- RELATO DE EXPERIÊNCIA.....	37
2.1 – Elaboração das Atividades	37
2.2 - Elaboração dos Questionários.....	46
2.3 – Teste Exploratório das Atividades	46
2.4 – Validação das Atividades.....	55
CONSIDERAÇÕES FINAIS	63
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	66
ANEXOS	69
Anexo 1: Apostila “O Estudo de Isometrias: Visão Artística e Matemática” - Utilizada no Teste Exploratório	70
Anexo 2: Arquivos Eletrônicos Referenciados nas Atividades do Teste Exploratório.....	81
Anexo 3: Figuras (Eixo de Simetria, Reflexão, Translação, Rotação).....	91
Anexo 4: Quadros	96
Anexo 5: Definições	101
Anexo 6: Cartaz	106
Anexo 7: Questionário para Teste Exploratório das Atividades	108
Anexo 8: Questionário para Validação das Atividades.....	112
Anexo 9: Apostila “O Estudo de Isometrias: Visão Artística e Matemática” Elaborada para validação das Atividades	115
Anexo 10: Arquivos Eletrônicos Referenciados nas Atividades da Validação..	127
Anexo 11: Apostila de Atividades e Arquivos Eletrônicos Resolvidos por Um Aluno.....	135

INTRODUÇÃO

Com o surgimento das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC), a produção de bens materiais acompanhou a produção de conhecimento, atribuindo à sociedade um caráter dinâmico, modificando as noções de espaço e de tempo (HOFFMANN; FAGUNDES, 2006).

[...] uma parcela crescente da população já não tem como trabalho apenas uma execução repetitiva de tarefas prescritas, mas defronta-se com atividades complexas, nas quais a resolução inventiva de problemas, a coordenação dentro de equipes e a gestão de relações humanas ocupam lugares importantes. A produção, o aprendizado contínuo, a aquisição e a socialização de saberes é parte integrante das novas atividades profissionais (LÉVY, 1999, p.2).

Nesse contexto existe um razoável consenso de que o processo de ensino e aprendizagem de Matemática não pode ser limitado à memorização de regras e técnicas, mas deve enfatizar a construção de conhecimentos e a resolução de problemas, além do domínio dos conceitos básicos historicamente definidos (HOFFMANN; FAGUNDES, 2006).

A opinião pedagógica de Nogueira (2001) sobre construção de conhecimentos e resolução de problemas é que os conteúdos acadêmicos sempre que possível devem ser trabalhados de forma contextualizada, relacionados com o dia-a-dia do aprendiz para que este esteja sendo preparado para a sociedade.

Nogueira complementa afirmando que:

[...] conteúdo trabalhado de forma conceitual parece apenas ser tratado enquanto fim e não como deveria ser, ou seja, enquanto meio. Meio para que o sujeito aprendiz possa desenvolver capacidades, habilidades, gosto pelo processo de aprender, etc (2001, p.19).

Refletindo sobre o aspecto da contextualização e de não trabalhar um conteúdo de forma apenas conceitual, relacionar Arte ao processo ensino e aprendizagem pode ser uma alternativa para suprir tais necessidades, visto que a Arte está presente em tudo o que vemos, ouvimos e sentimos.

Read afirma que:

[...] a arte é uma dessas coisas que, como o ar e o solo, estão por toda nossa volta, mas que raramente nos detemos para considerar. Pois a arte não é apenas algo que encontramos nos museus e nas galerias de arte, ou em antigas cidades como Florença e Roma. A arte seja lá como a definimos, está presente em tudo o que fazemos para satisfazer nossos sentidos (2001, p.16).

Pode se dizer que a Arte está presente na Matemática e a Matemática está presente na Arte, pois ambas encontram-se unidas nos mais variados meios e expressões, como por exemplo: na arquitetura, na natureza, na música, nos quadros entre outros (VIERA; RIBEIRO, 2002).

Segundo Ramos (2002) é necessário que o professor use recursos visuais, destaque especial merece as atividades artísticas (pintar, desenhar, examinar obras de arte), pois despertam emoções que quando positivas estimulam a criatividade. Existem pessoas que processam informações visualmente, precisam ver para aprender, seja por escrito (palavras) ou ilustrado (figuras). Essas pessoas possuem “inteligência Visual/Espacial” (RAMOS, 2002), bem desenvolvida.

Gardner define inteligência como: “[...] capacidade de resolver problemas ou criar produtos que sejam valorizados dentro de um ou mais cenários culturais” (1994, p.x). O referido autor descreve oito tipos de inteligência dentre as quais destacamos as inteligências Lógico-Matemática e Visual/Espacial. Inteligência Lógico-Matemática é ter facilidade de lidar com relações e padrões, gostar de números e problemas, preferir computar, organizar, questionar usar símbolos e descobrir funções (GADNER,1994). Inteligência Visual/Espacial é ter habilidades de lidar com mapas, imagens e modelos, preferir formas e cores, gostar de pintar, modelar, esculpir (GARDNER,1994).

Segundo Gardner (*apud* WEINBERG, 2007, p.14),

[...] a inteligência mais valorizada hoje é a que defino como lógico-matemática. Digo isso com base num fato concreto: a maioria das empresas procura, no mundo inteiro, gente capaz de observar padrões, manipular números e produzir análises objetivas. São pessoas com uma cabeça mais científica. Não estamos falando aqui apenas de matemáticos e engenheiros, mas de um jeito de atuar em diversas profissões.

Diante das possibilidades que a aprendizagem de Matemática relacionada com a Arte pode oferecer tais como: contextualização, desenvolvimento da criatividade e das Inteligências Visual/Espacial e Lógico-Matemática, este trabalho propõe a validação de atividades que possibilitam o estudo de isometrias relacionado à Arte, presente nos quadros, na arquitetura e na natureza. Para o desenvolvimento deste trabalho será necessário um estudo aprofundado sobre isometrias e sobre o *software* Régua e Compasso (ReC).

Este trabalho monográfico está fundamentado nas recomendações dos

Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Este documento propõe algumas metodologias para o estudo de isometrias, conforme descrevemos a seguir.

Uma delas é que o referido conteúdo deve ser trabalhado de maneira que permita o desenvolvimento de conceitos geométricos, adotando o uso de *softwares* para que o conteúdo possa ser trabalhado de forma dinâmica (BRASIL, 1998). Além disso, recomenda-se trabalhar isometrias de maneira que estas sirvam de ferramenta para a aprendizagem de congruência de figuras planas (BRASIL, 1998), buscando também relacionar o conteúdo com a natureza e com as diversas criações do homem, como objetos artísticos, decorativos, artesanais e logomarcas de empresas (BRASIL, 1998).

Nesse contexto o objetivo geral deste trabalho é elaborar e validar atividades sobre isometrias, que possibilitem ao aluno do Ensino Fundamental aliar o conhecimento teórico a situações criadas pelo homem e a elementos presentes na natureza, motivando-o para o aprendizado da Matemática, em particular o estudo de isometrias.

A escolha do tema isometrias foi decorrente do fato desse conteúdo está sendo abordado nos livros didáticos do Ensino Fundamental e também por fundamentar a aprendizagem de outros conteúdos tais como: equações algébricas (BARCO, 2002), transformações gráficas (LIMA, et al., 1997) e congruência de figuras planas (LOPES; NASSER, 1996), além das possibilidades e necessidades já descritas nos parágrafos anteriores.

Para atingir esse objetivo geral, alguns objetivos específicos foram delineados:

- Selecionar figuras que relacionem Arte e isometrias
- Elaborar atividades que possibilitem a aprendizagem de isometrias (translação, reflexão e rotação).
- Aplicar as atividades a alunos do Ensino Fundamental.
- Analisar a resolução das atividades.

Para a elaboração deste trabalho realizamos oito etapas, a saber: i) revisão bibliográfica; ii) seleção de figuras; iii) estudo do tema matemático isometrias; iv) estudo do software Régua e Compasso; vi) elaboração de atividades; vi) elaboração

dos questionários; vii) validação das atividades; viii) análise das respostas das atividades e dos questionários.

Na revisão bibliográfica estudamos as metodologias usadas para o estudo de isometria e opiniões de diversos autores sobre o tema. Para isso utilizamos artigos de revistas, sites da *Internet*, livros de Matemática, livros de Artes.

Paralelamente fizemos uma pesquisa de figuras que possuem relações com o tema, como: quadros, artesanatos, elementos da natureza e elementos da arquitetura. Estas figuras foram utilizadas durante o trabalho, para que os alunos identificassem as isometrias e suas propriedades.

Estudamos as isometrias e como este tema está sendo proposto nos livros didáticos do Ensino Fundamental. Também estudamos o *software* Régua e Compasso buscando conhecer os recursos que seriam úteis para a elaboração das atividades.

Com as informações adquiridas através das pesquisas já descritas, preparamos as atividades que definiram as ações a serem implantadas.

Na etapa seguinte ocorreu a elaboração de dois questionários, contendo perguntas sobre as atividades realizadas no teste exploratório e na validação, e sobre o uso das TIC na aprendizagem Matemática. Procuramos, com estes questionários, verificar se os objetivos foram devidamente alcançados.

Visando diagnosticar possíveis falhas nas atividades, foi realizado o minicurso “O Estudo de Isometrias Visão Artística e Matemática”. Este ocorreu no CEFET Campos e teve como participantes 20 licenciandos em Matemática, alunos com conhecimento em Informática e Informática Educativa, o que serviram para detectar algumas falhas que foram corrigidas.

A validação das atividades ocorreu com alunos do sétimo ano (sexta série) do Ensino Fundamental, que não haviam estudado o tema. Na validação das atividades foi possível observar as atitudes dos participantes na resolução das atividades, bem como as respostas das mesmas. Analisamos as respostas das atividades e do questionário com objetivo de verificar se as atividades realizadas contribuíram para aprendizagem de isometrias.

Esta monografia está estruturada em dois capítulos, além desta introdução e

das considerações finais.

No primeiro capítulo “Isometria e Arte”, fundamentamos teoricamente o trabalho desenvolvido, por meio de uma revisão bibliográfica, em literaturas especializadas. Este capítulo ficou subdividido em 3 seções, dispostas nessa ordem: “Isometria”, “Arte na Aprendizagem de Isometria” e “Tecnologias de Informação e Comunicação na Aprendizagem de Isometrias”. Na primeira destas três seções são apresentadas algumas considerações importantes sobre isometrias. Na segunda seção, é focalizada a relação entre a Arte e o processo de ensino e aprendizagem de isometrias. Na terceira é destacada a importância das Tecnologias de Informação e Comunicação para o processo ensino e aprendizagem de Isometrias.

No segundo capítulo “Relato da Experiência”, são relatadas as ações realizadas e, para tanto, este foi subdividido em quatro seções. Na primeira seção, “Elaboração das Atividades” o objetivo de cada atividade é descrito. Na segunda seção é apresentado o objetivo de cada um dos dois questionários elaborados, bem como a estrutura de cada um deles. Na terceira seção, “Teste Exploratório das Atividades”, são descritos o teste das atividades, realizado com licenciandos em Matemática e a análise dos dados levantados através do questionário e finalizando esta seção são tecidas algumas considerações desse teste. Na quarta seção, “Validação das Atividades” são descritos o processo de resolução das atividades pelos alunos do Ensino Fundamental e a análise dos dados do questionário e finalizando a seção, são apresentadas algumas considerações da validação.

Nas “Considerações Finais” é destacada a relevância deste estudo, é feita uma breve retrospectiva da pesquisa, focalizando os resultados; são relatadas as contribuições e as dificuldades encontradas e, finalmente, são apontadas algumas formas de continuidade do trabalho realizado.

1 – ISOMETRIA E ARTE

Neste capítulo apresenta-se o resumo da revisão bibliográfica referente ao estudo de três isometrias (reflexão, translação e rotação). Ao analisarmos as diferentes metodologias e abordagens usadas por diversos autores, escolhemos as que consideramos ser mais adequadas ao público alvo deste trabalho, alunos do Ensino Fundamental.

1.1 – Isometrias

“A isometria ou simetria é um movimento rígido no plano que aplica um ornamento sobre si mesmo. Isto quer dizer que ao efetuar um movimento em uma figura ou elemento gerador sua forma e seu tamanho não variam” (BIEMBENGUT; HEIN, 2000, p.70).

As isometrias são transformações que preservam distâncias, e possuem as seguintes propriedades: i) a imagem de uma reta por uma isometria é sempre uma reta; ii) uma isometria preserva paralelismo; iii) uma isometria preserva ângulos. Como consequência da definição, a imagem de uma figura F por uma isometria, é uma figura F' congruente a F (WAGNER, 1990).

Além do termo Simetria, encontramos diferentes nomenclaturas para o termo Isometria, tais como: Geometria das Transformações, (CROWE , TOMPSON, 1994) e Transformação Isométrica (CARVALHO, 1992).

As isometrias são utilizadas na composição de objetos artísticos. Os ornamentos, sinônimos de beleza e harmonia, têm desempenhado um papel especial em nossas vidas desde a Antigüidade. Testemunho disso são as obras arquitetônicas, os ornamentos indígenas, o artesanato, os mosaicos, dentre outros (BIEMBENGUT; HEIN, 2000).

Os mosaicos são conhecidos desde os tempos antigos. Estiveram presentes nas civilizações assíria, babilônica, persa, egípcia, grega, chinesa e outras, empregados em padrões que tão raro permaneceram até os dias atuais. Muitos mosaicos encontrados em pisos, tetos e painéis de parede, de templos ou palácios, atestam a íntima relação entre determinados padrões e a arte da decoração (BARBOSA, 1993). O objetivo de alguns artífices era e é encontrar uma simetria

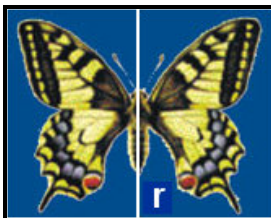
ornamental com o emprego de figuras simples, cuja repetição e interação formem um todo harmonioso e estético (BARBOSA, 1993).

Barbosa (1993), contando um pouco de história, complementa afirmando que: a península Ibérica era habitada por dois povos, os iberos e os celtas. No ano de 712 foi invadida e dominada pelos mouros vindos do norte da África. Durante o período de ocupação os mouros utilizaram nas suas construções, vários padrões de simetria, nunca relativos a seres vivos, em razão de preconceitos religiosos. O mais famoso legado mouro é o palácio de Alhambra, em Granada, cuja construção foi iniciada no século XIII. Além de ter servido como fortaleza, o palácio apresenta arquitetura e decorações artísticas de beleza incomparável. Nesse magnífico palácio, são encontrados em seus painéis decorativos os vários padrões de simetria (BARBOSA, 1993).

Especificamente focalizando o processo de ensino e aprendizagem de isometrias no Ensino Fundamental, definimos nas subseções a seguir, reflexão, translação e rotação, mostrando algumas figuras, como exemplos.

1.1.1 – Reflexão

A reflexão é a isometria que faz uma figura “refletir”, em relação a uma reta (BIEMBENGUT; HEIN, 2000). Para melhor compreensão da definição de reflexão é importante entender o que é eixo de simetria, “O eixo de simetria divide a figura em duas partes que coincidem exatamente por superposição” (LOPES; NASSER, 1996, p.95). Complementando Biembengut e Hein (2000), afirmam que o eixo de simetria pode (Figura 1.1) ou não (Figura 1.2) intersectar a figura.



Fonte: OLIVEIRA, 2000.
Figura 1.1: Borboleta



Fonte: OLIVEIRA, 2000.
Figura 1.2: Taj Mahal.

Segundo Lopes e Nasser (1996, p.102):

Uma figura é a reflexão de outra se:

- (I) a linha que une cada par de pontos correspondentes é perpendicular ao eixo de simetria.
- (II) dois pontos correspondentes estão à mesma distância do eixo de simetria, em lados opostos (LOPES; NASSER, 1996, p.102).

Wagner (1990), afirma que a reflexão é uma isometria, portanto transforma cada figura F em outra F' congruente a F . Entretanto, a reflexão inverte a orientação do plano, como pode ser visto na Figura 1.3, na qual o triângulo ABC foi transformado em $A'B'C'$.

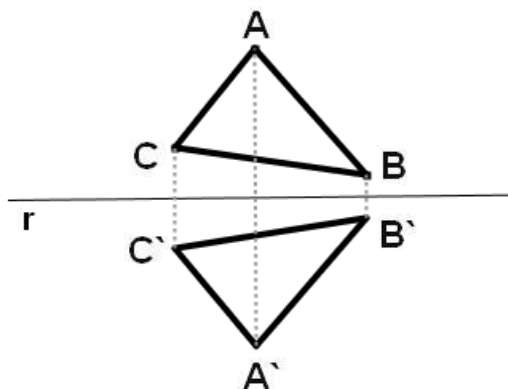


Figura 1.3: Reflexão do Triângulo ABC .

O reflexo de um objeto no espelho é o próprio objeto, porém invertido, como se o espelho fosse o eixo de simetria. Um exemplo pode ser visto nas ambulâncias, nas quais a palavra ambulância é escrita invertida ($AICN\hat{A}JUBMA$) para que possa ser vista, nos retrovisores, da forma não invertida ($AMBUL\hat{A}NCIA$).

Uma figura pode ter vários eixos de simetria, ou nenhum. No segundo caso, dizemos que ela não possui simetria reflexional. Vejamos os dois exemplos a seguir:

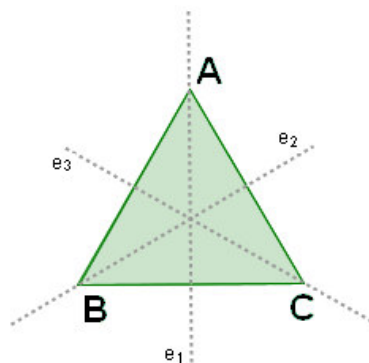


Figura 1.4: Triângulo Equilátero

O triângulo equilátero (Figura 1.4) possui três eixos de simetria: e_1 , e_2 e e_3 . No entanto no paralelogramo (Figura 1.5) não é possível identificar nenhum eixo de simetria, pois ao dobrarmos, por exemplo, o paralelogramo pela reta r , suas partes não coincidem por superposição.

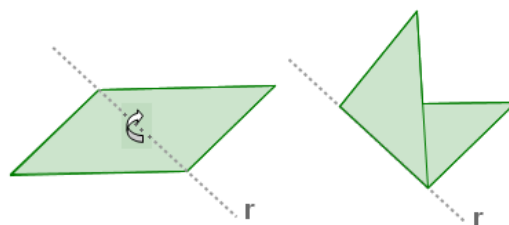


Figura 1.5: Paralelogramo

1.1.2 – Translação

A translação é o movimento que faz uma figura “deslizar” ao longo de uma direção, a uma distância d . (BIEMBENGUT; HEIN, 2000, p.70). De acordo com Lopes e Nasser “Translação é uma transformação em que a figura se desloca paralelamente a uma reta. Isto é, todos os pontos da figura são deslocados numa mesma direção (retilínea), com a mesma distância” (LOPES; NASSER, 1996, p.108).

Uma translação é determinada pela direção, sentido e amplitude do deslocamento (LOPES; NASSER, 1996), podendo essas três grandezas ser representadas por um vetor (MACHADO, 1982). A figura 1.6 mostra a translação determinada pelo vetor v aplicada a um triângulo ABC.

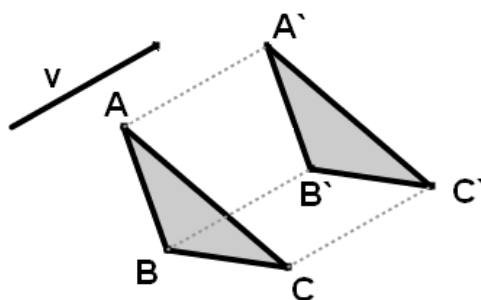
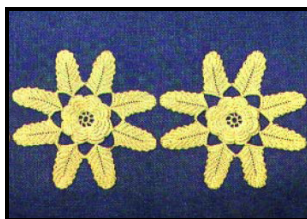


Figura 1.6: Translação do Triângulo ABC.

Exemplos simples de translação podem ser vistos em muitos trabalhos manuais e artesanais, como por exemplo, nas amostras/trabalhos de crochê (Figura 1.7), e nos bordados (Figura 1.8), entre outros. Nestes, os motivos se repetem ao longo do trabalho.



Fonte: RIPPLINGER, 2006.
Figura 1.7: Trabalho em Crochê



Fonte: RIPPLINGER, 2006.
Figura 1.8: Bordado Manual.

Barco (2002) considera que, quando um grupo de dançarinos faz movimentos iguais entre si durante suas apresentações, utilizam o movimento de translação. Segundo este autor, na música, o princípio musical do ritmo é a repetição unidimensional do tempo em intervalos iguais.

1.1.3 – Rotação

A rotação é um movimento que faz uma figura “girar” em torno de um ponto, chamado centro de rotação (BIEMBENGUT; HEIN, 2000, p.70). Nos logotipos/logomarcas (Figura 1.9) podemos observar rotações com giros de 72° , 60° e 120° respectivamente.



Figura 1.9: Logotipos.

Segundo Biembengut e Hein (2000, p.71): “Rotação é um “giro” da figura em torno de um ponto fixo O (ponto que pode ou não pertencer à figura), isto é, para todo ponto P do plano, P' é obtido sobre uma circunferência de centro O e raio OP deslocado de um ângulo β ” (Figura 1.10). Uma rotação pode acontecer em dois sentidos, o sentido positivo é o anti-horário (WAGNER, 1990) e o negativo é o horário.

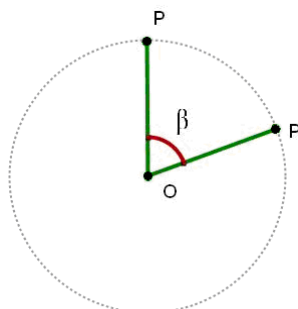


Figura 1.10: Rotação do ponto P em torno do ponto O.

A rotação (aproximada) também se faz presente na natureza, nas flores (Figura 1.11), na estrela do mar (Figura 1.12) entre outros.



Fonte: OLIVEIRA, 2000.

Figura 1.11: Flor.



Fonte: RIPPLINGER, 2006.

Figura 1.12: Estrela do Mar.

A partir da rotação de triângulos isósceles é possível construir polígonos regulares. Tomemos um triângulo isósceles ABC de base \overline{BC} , ângulo \hat{A} medindo α (sendo 360° divisível por α). Ao rotacionarmos α graus o triângulo ABC considerando A o centro de rotação, o segmento AB coincidirá com AC , repetindo esse movimento sucessivamente obteremos polígonos regulares (Figura 1.13).

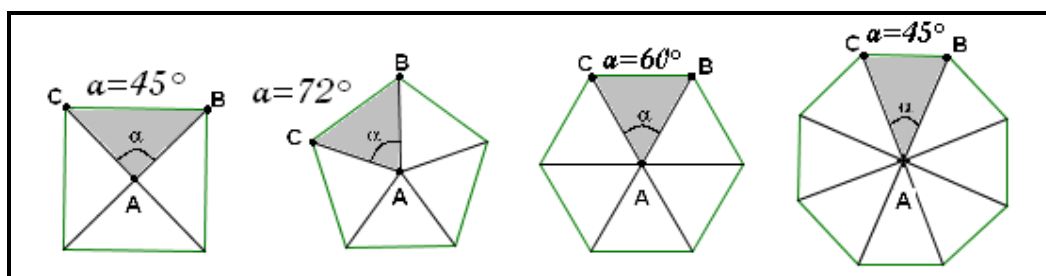


Figura 1.13: Polígonos Regulares.

As isometrias (Reflexão, Rotação e Translação) segundo Lopes e Nasser (1996), podem ser úteis para justificar a congruência de duas figuras, evitando o uso de demonstrações enquanto o aluno ainda não domina o processo dedutivo. Na próxima seção é abordada a presença dessas Isometrias na Arte.

1.2 – Arte na Aprendizagem de Isometria

Existe uma estreita relação entre inteligência e afetividade: a faculdade de raciocinar pode ser diminuída, ou até mesmo destruída, pelo déficit de emoção (MORIM, 2000). Isso porque o Homem não é apenas razão, é também afetividade. Nenhuma formação puramente intelectual dará conta da totalidade do humano (ARANHA, 1996).

Aranha (1996) afirma, ainda, que diferente da ciência e do senso comum, que apreendem o objeto pela razão, a Arte é uma forma de conhecimento que organiza o mundo por meio do sentimento, da intuição e da imaginação.

A idéia de que o pensamento matemático se reduz a seus aspectos lógico-dedutivos é muito difundida, mesmo entre professores de Matemática, porém é incompleta e exclui o que há de mais rico nos processos de invenção e descoberta nesse domínio do conhecimento. A verdade é que o pensamento matemático vai muito além do raciocínio lógico. Em seus aspectos mais criativos, a matemática está ligada muito mais à intuição e à imaginação do que ao raciocínio lógico – dedutivo (ÁVILA, 1995).

Complementando, Cifuentes (2003 *apud* RIPPLINGER, 2006) afirma que há dois tipos de contextualização necessários para a transposição didática¹ dos assuntos a serem desenvolvidos no processo pedagógico, que são:

- a contextualização dos conhecimentos matemáticos no cotidiano do aluno, com a finalidade de apreciá-los a situações ditas concretas;

- a contextualização dos objetos matemáticos num contexto espaço temporal, com a finalidade de apreciá-los esteticamente, ou melhor, de pôr em evidencia suas qualidades estéticas.

Procurando trabalhar com o lado belo, ou seja, o lado estético da Matemática, relacionamos a Arte ao processo de ensino e aprendizagem de isometrias valorizando assim, um outro aspecto da Matemática.

Para este trabalho monográfico selecionamos duas formas de relacionar a Arte ao processo de ensino e aprendizagem de isometria. A primeira diz respeito aos quadros de diversos artistas, a segunda aos ornamentos.

Na Matemática, há três tipos de ornamentos: faixa, roseta, e mosaico (BIEMBENGUT; HEIN, 2000). “A faixa é um ornamento ilimitado, composto entre duas retas paralelas. A simetria fundamental para sua composição é a translação” (BIEMBENGUT; HEIN, 2000, p. 72). A combinação com as demais simetrias permite criar diversos tipos de faixas (Figura 1.14).

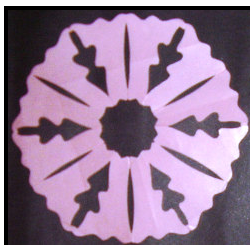


Fonte: OLIVEIRA, 2000.
Figura 1.14: Faixa Decorativa.

¹ Transposição didática é o instrumento através do qual se transforma o conhecimento científico em conhecimento escolar, para que possa ser ensinado pelos professores e aprendido pelos alunos.

Os ornamentos em faixas, ou frisos ou fitas, eram e ainda são freqüentes nas esculturas, nas paredes, nos beirais ou até em colunas. No Brasil no acervo do museu Goeldi, em Belém da Pará, se encontram peças de cerâmica ou de pedra provenientes da cultura Marajó e Santarém, como urnas tangas, vasos, entre outros, nos quais se constata o uso faixas ornamentais pintadas ou esculpidas (BARBOSA, 1993).

Segundo Barbosa (1993) uma faixa também pode ser feita de forma circular, o que é muito usada em pinturas de pratos, pires, xícaras, potes, jarras, entre outros. Esse tipo de faixa, Biembengut e Hein (2000) classificam como roseta (Figura 1.15). “A roseta é um ornamento limitado, em um círculo. A simetria fundamental para sua composição é a rotação” (BIEMBENGUT; HEIN, 2000, p.73,). Entretanto é possível fazer um outro tipo de roseta combinando a *rotação* e a *reflexão* (BIEMBENGUT; HEIN, 2000).

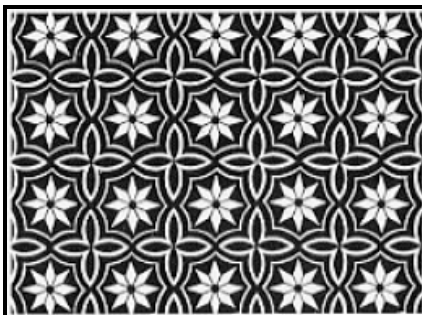


Fonte: OLIVEIRA, 2000.
Figura 1.15: Roseta.

A roseta da figura 1.15 foi construída através da técnica *Kirigami*. Técnica japonesa que consiste em dobrar e recortar papel. Há diferentes maneiras de fazer as dobras no papel, no Anexo 6 encontram-se duas delas.

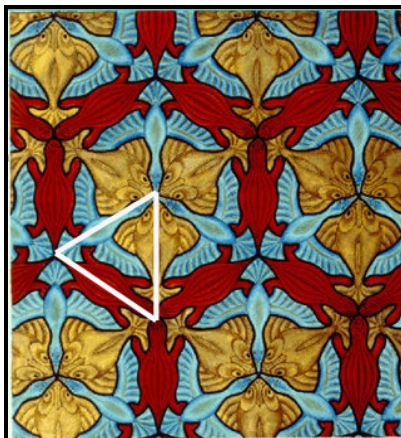
Em uma das atividades deste trabalho monográfico utilizamos esta técnica, que em nossa opinião, foi a mais adequada para que os alunos construíssem com mais facilidade as rosetas, pois o objetivo da atividade é trabalhar a relação entre Arte e Isometria, e não, a construção geométrica da roseta.

Combinando uma ou mais Isometrias é possível obter tipos de mosaicos (Figura 1.16), ornamento que preenche as superfícies sempre sem sobreposição e sem deixar espaços ou lacunas entre as figuras (BARBOSA, 1993).



Fonte: OLIVEIRA, 2000.
Figura 1.16: Mosaico.

Segundo Biembengut e Hein (2000, p.74) “O mosaico é um ornamento no plano. A simetridade fundamental é a translação em duas direções. Para compor um mosaico é necessária uma rede. Existem cinco tipos fundamentais de rede: quadrados, retângulos, paralelogramos, triângulos equiláteros e losangos”. Na figura 1.17 o triângulo destaca a rede que gera o mosaico.



Fonte: OLIVEIRA, 2000.
Figura 1.17: Quadro Escher.

O quadro apresentado na Figura 1.17 é um dos que foi utilizado nas atividades deste trabalho monográfico, os demais constam no Anexo 4.

Segundo Barbosa (1993) o artista Maurits Cornelis Escher (1892- 1972), descobriu os segredos da divisão regular do plano ao fazer cópias detalhadas dos mosaicos mouros do palácio de Alhambra, em Granada, onde esteve por duas vezes.

Este contacto com a arte árabe está na base do interesse e da paixão de Escher pela divisão regular do plano em figuras geométricas que se transfiguram, se

repetem e refletem. Porém, no preenchimento de superfícies, Escher substituiu as figuras abstratas, usadas pelos árabes, por figuras concretas, perceptíveis e existentes na natureza, como pássaros, peixes, pessoas, répteis dentre outros (OLIVEIRA, 2000).

Escher, sem conhecimento matemático prévio, mas através do estudo sistemático e da experimentação, descobriu todos os diferentes grupos de combinações isométricas que deixam um determinado ornamento invariante. A reflexão é brilhantemente utilizada na xilografia “*Day and Night*” (Figura 1.18), uma das gravuras mais emblemáticas da carreira de Escher (OLIVEIRA, 2000).



Fonte: OLIVEIRA, 2000.

Figura 1.18 :“Day and Night” Xilogravura de 1938

Em algumas obras de Escher a divisão regular da superfície aparece misturada a formas tridimensionais, geralmente num ciclo sem fim, onde uma fase se dilui na outra. A litografia “*Reptiles*” (Figura 1.19) é um bom exemplo disso (OLIVEIRA, 2000).



Fonte: OLIVEIRA, 2000.

Figura 1.19: “Reptiles” Litografia de 1943

Uma das principais contribuições das obras deste artista está em sua capacidade de gerar imagens com impressionantes efeitos de ilusões de óptica, com notável qualidade técnica e estética, tudo isto, respeitando as regras geométricas do desenho e da perspectiva (Figura 1.20).

Destacam-se também os trabalhos do artista que exploram o espaço. Escher brincava com o fato de ter que representar o espaço, que é tridimensional, num plano bidimensional, como a folha de papel. Com isto ele criava figuras impossíveis, representações distorcidas, paradoxos (WIKIPÉDIA, s.d).



Fonte: OLIVEIRA, 2000.

Figura 1.20: "High and Low" Litografia de 1947.

Escher foi reconhecido no mundo, pelos seus desenhos de ilusões espaciais, de construções impossíveis, nos quais a geometria se transforma em arte ou a arte em geometria. Escher retrata isso na frase:

“Apesar de não possuir qualquer conhecimento ou treino nas ciências exatas, sinto muitas vezes que tenho mais em comum com os matemáticos do que como os meus colegas artistas” (ESCHER apud OLIVEIRA, 2000).

Consideramos possível elaborar outras atividades que relacionam Arte a outros conteúdos matemáticos, pois durante as pesquisas realizadas para a construção deste trabalho encontramos diferentes propostas nesse sentido.

Fainguelernt e Nunes (2006) afirmam que, Matemática e Arte sempre caminharam juntas, aliando razão e sensibilidade e que podemos observar a

influência mútua de uma sobre a outra desde os primeiros registros históricos que temos de ambas.

Muitos artistas utilizaram elementos matemáticos na confecção de suas obras. Um exemplo famoso é o quadro *Melancolia* do alemão Albrecht Dürer, pintado em 1514 (Figura 1.21), no qual observamos explicitamente a presença de elementos geométricos (poliedros, esferas) e elementos aritméticos (o quadrado mágico de quatro células - Quadro 1.1) (FAINGUELERNT; NUNES, 2006).



Fonte: OLIVEIRA, 2000.

Figura 1.21: Melancolia - Dürer, 1514

Quadro 1.1: Pormenor de Melancolia

	<p>Por exemplo:</p> <p>na 1ª linha: $16 + 3 + 2 + 13 = 34$</p> <p>na 2ª coluna: $3 + 10 + 6 + 15 = 34$</p> <p>E na diagonal: $16 + 10 + 7 + 1 = 34$</p> <p>O quadrado de Dürer tem ainda a particularidade de, por via simbólica, através da asa do anjo, indicar a data em que a gravura foi executada: 1514, o conjunto dos quatro algarismos centrais da última linha.</p>
--	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Figura 1.22: Pormenor de Melancolia

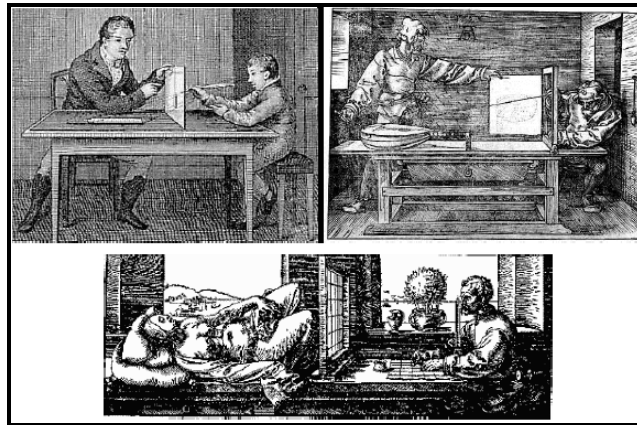
Fonte: OLIVEIRA, 2000.

Uma das mais notáveis influências da Matemática sobre a Arte ocorreu no Renascimento. Até então as gravuras e pinturas eram “bidimensionais”, ou seja, não davam à noção de profundidade (Figura 1.22) (FAINGUELERNT; NUNES, 2006). A partir dessa época, os artistas dominaram a técnica de projetar em uma tela plana figuras e ambientes a três dimensões. Surgia a noção de perspectiva (YOKOYAMA, s.d).



Fonte: YOKOYAMA, s.d.
Figura 1.22: Pintura Egípcia.

A Figura 1.23 apresenta quadros que demonstram as primeiras tentativas de se pintar exatamente aquilo que se observa. Estas “engenhocas” são conhecidas como as máquinas de Dürer (YOKOYAMA, s.d).



Fonte: YOKOYAMA, s.d.
Figura 1.23: Máquinas de Dürer

Leonardo da Vinci, o nome mais conhecido do Renascimento, recorreu aos conceitos de geometria projetiva (centro de projeção, linhas paralelas representadas como linhas convergentes, ponto de fuga) para criar os seus quadros com aspectos tridimensionais, a obra prima «A Última Ceia» é um bom exemplo disso (Figura 1.24). E em seu *Trattato della pittura* começava com a seguinte advertência: “Que ninguém que não seja matemático leia minhas obras” (YOKOYAMA, s.d).



Fonte: OLIVEIRA, 2000
Figura 1.24: A Última Ceia, 1495-1498

Da Vinci fazia suas composições com espírito científico. Ao criar a famosa Monalisa (Figura 1.25) se baseou em uma proporção chamada “seção áurea” ou “divina proporção”, que foi utilizada pelos gregos, em sua arquitetura, e é utilizada até hoje em diversas obras devido à sua estética e harmonia agradáveis (OLIVEIRA, 2000).



Fonte: OLIVEIRA, 2000
Figura 1.25: Monalisa - Da Vinci

Fainguelernt e Nunes (2006) afirmam que o espanhol Pablo Picasso e o francês Georges Braque criaram o Cubismo, movimento artístico cuja proposta centrava-se na liberdade que o artista deveria ter para decompor e recompor a realidade a partir de elementos geométricos. Este movimento provocou grande ruptura da arte moderna, desencadeada pela quebra do paradigma do ponto de vista único. Ele propunha que deveria representar, em uma única tela, várias visões, vários pontos de vista, de um mesmo objeto (FAINGUELERNT; NUNES, 2006).

Outro artista que utilizou fortemente elementos geométricos em sua obra foi o holandês Piet Mondrian, cuja produção foi fortemente influenciada pelo Cubismo. Entretanto suas idéias e seus caminhos vieram a se tornar mais radicais, deixando que as figuras fossem completamente substituídas por simples composições de formas geométricas e algumas cores (FAINGUELERNT; NUNES, 2006).

A partir de 1918, Mondrian deu início a uma série de composições baseadas puramente em uma grade de linhas retas verticais e horizontais desenhadas com precisão, em contornos firmes, delimitando áreas quadradas e retangulares coloridas com as quais ele passou a ser intimamente identificado (Figura 1.26) (OLIVEIRA, 2000).



Fonte: OLIVEIRA, 2000

Figura 1.26: Quadro, Mondrian - 1921

Além destes podemos citar muitos outros artistas como Milton da Costa, Volpi, Ivan Serpa, Miro, Lygia Clark, dentre outros, que fazem Arte com Matemática.

Na próxima seção é destacada a contribuição das tecnologias para o processo de ensino e aprendizagem de Isometrias.

1.3 – Tecnologias de Informação e Comunicação na Aprendizagem de Isometrias

Enquanto a imprensa tornou possíveis novas formas de ler, as quais, sem dúvida, mudaram a cultura da aprendizagem, da mesma forma as TIC estão criando novas formas de distribuir socialmente a informação. Por consequência, a escola, em nossa sociedade, já não é a primeira fonte de conhecimento para os alunos e, às vezes, nem mesmo a principal (POZO, 2004).

Embora as TIC tenham possibilitado que um número cada vez maior de pessoas tenha acesso à informação, essas só se convertem em verdadeiro conhecimento para alguns, aqueles que puderem ter acesso às capacidades que permitem compreender e ordenar essas informações. Afinal a aprendizagem é um processo sempre em construção e em movimento, que ocorre com as características do meio. A maneira como o processo de aprendizagem e suas etapas são desenvolvidos, depende do ambiente no qual está inserido (POZO, 2004).

Segundo Morin (2007), existem alguns problemas notórios para a inserção das TIC na educação:

A escola é uma instituição mais tradicional que inovadora. A cultura escolar tem resistido bravamente às mudanças. Os modelos de ensino focados no professor continuam predominando, apesar dos avanços teóricos em busca de mudanças do foco do ensino para o

de aprendizagem. Tudo isto nos mostra que não será fácil mudar esta cultura escolar tradicional, que as inovações serão mais lentas, que muitas instituições reproduzirão no virtual o modelo centralizador no conteúdo e no professor do ensino presencial.

Nesse contexto, o professor continua sendo importante não como informador nem como repetidor de informações prontas, mas como mediador e organizador de processos. O professor é um pesquisador junto com os alunos e articulador de aprendizagens ativas, um conselheiro de pessoas diferentes, um avaliador dos resultados. O papel dele é mais nobre, menos repetitivo e mais criativo do que na escola tradicional (MORIN, s.d).

Frente às tecnologias, é necessário que o professor incorpore na sua prática pedagógica o uso consciente e crítico desses recursos no processo de ensino e aprendizagem. Não que o recurso tecnológico por si só garanta a efetividade do processo, mas como destacada ferramenta de apoio (RIPPLINGER, 2006).

Ponte (2000, p.76) complementa afirmando que: “[...] sem uma grande disseminação das TIC nos locais onde as pessoas vivem e trabalham, não será nunca possível que estas sejam usadas de modo fluente e natural”.

Os *softwares* educacionais, por exemplo, são fontes excelentes como apoios pedagógicos para o processo ensino e aprendizagem de Geometria. Quando saímos da construção no papel ou no quadro negro, para construções na tela do computador por meio de *softwares* de geometria dinâmica, mudamos de um referencial estático para um referencial dinâmico (RIPPLINGER, 2006).

O *software* Régua e Compasso (ReC) é um software de Geometria Dinâmica, ou seja, sua função é possibilitar o trabalho com construções geométricas que podem ser alteradas movendo um dos pontos básicos permitindo a preservação das propriedades originais (BRAVIANO, R.; RODRIGUES, M., 2002). É um *software* livre que está disponível para *download* em: <<http://www.khemis.hpg.ig.com.br/car/>>. Na figura 1.27 é mostrado a interface da versão 6.4.

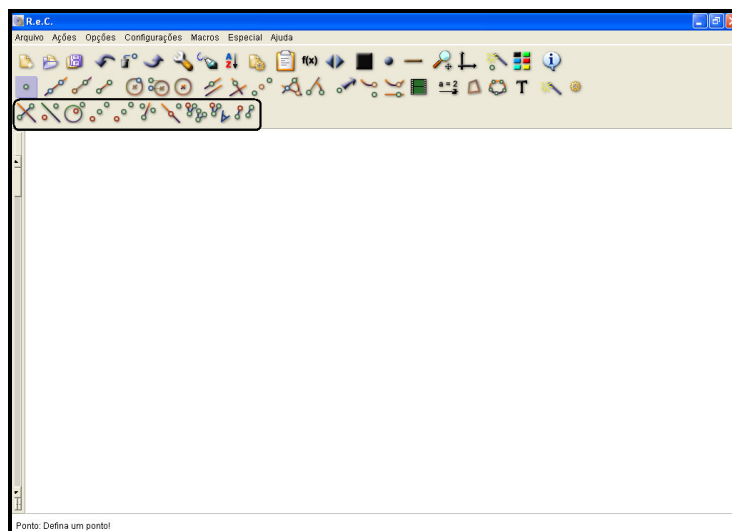


Figura 1.27: Interface do *Software Régua e Compasso*.

Os ícones que estão destacados na figura 1.27 são os que possibilitam o estudo das isometrias. Tais ícones estão disponíveis na interface da versão (6.4) e posteriores, nas anteriores estes recursos estavam disponíveis na ferramenta “macros”.

A vantagem de trabalhar as isometrias utilizando este *software* é que ele possibilita a movimentação e simulação de determinadas situações que não poderiam ser exploradas com lápis e papel. Os recursos do *software* permitem resolver atividades diferenciadas, acelerar o tempo das construções e gerar construções com traçados perfeitos. Além disso, é possível: esconder, pontilhar, engrossar e alterar cores de linhas, realçando elementos do desenho.

Os movimentos preservam as propriedades geométricas usadas na construção dos desenhos, oferecendo inúmeras possibilidades de trabalhar os conceitos da isometria, além de algumas propriedades. A possibilidade de movimento cria, naturalmente, um ambiente de investigação.

A partir do estudo dos recursos oferecidos pelo R.e.C. optamos em usá-los no desenvolvimento deste trabalho, pois Nasser (1991) aponta a visualização como uma forma de guiar os alunos no processo de dedução, descobrindo a existência de regras e questionando sua veracidade.

Além do Régua e Compasso há outros *softwares* que possibilitam trabalhar as isometrias, o GeoGebra é um deles. A Figura 1.28 mostra a interface do GeoGebra e em destaque os ícones que permitem o estudo de reflexão, translação e rotação.

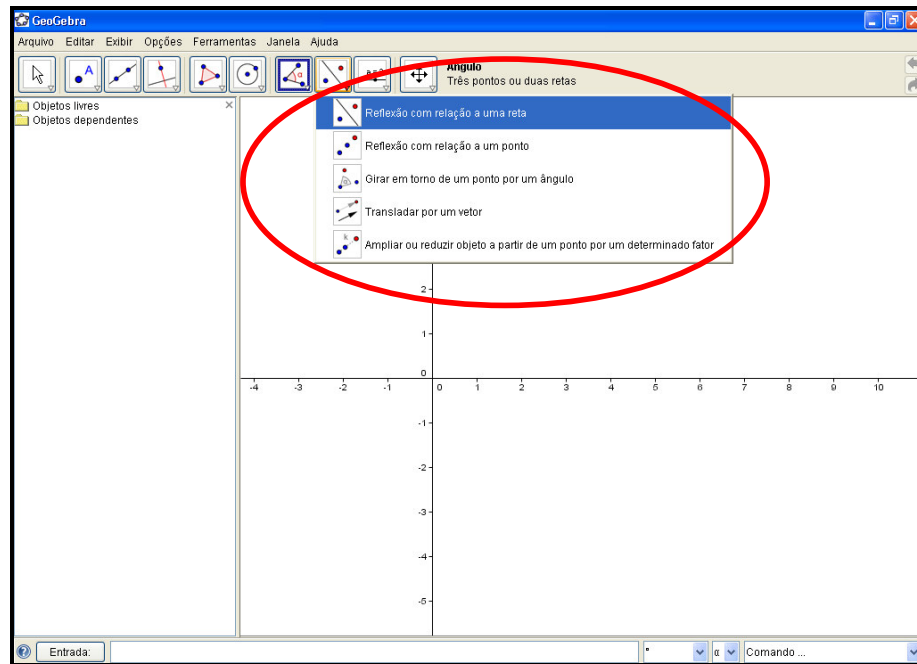
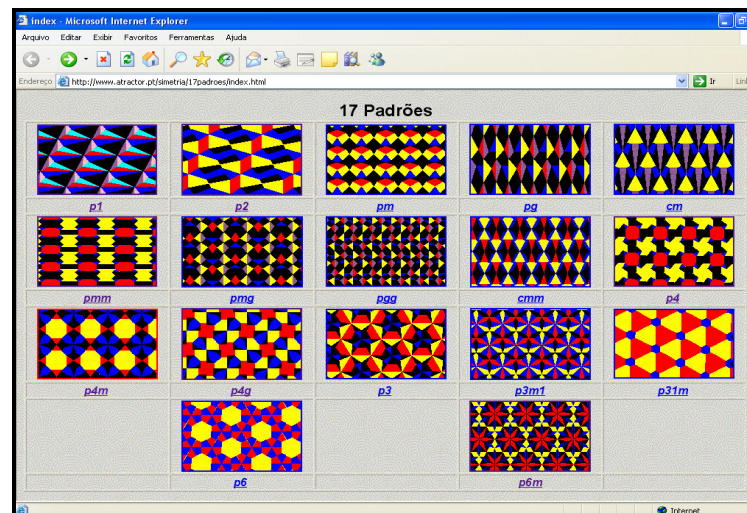


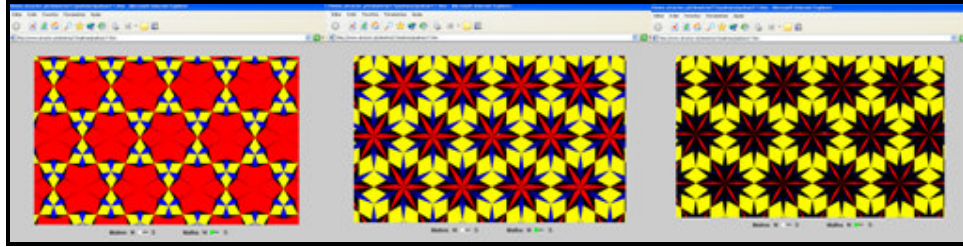
Figura 1.28: Interface do Software GeoGebra.

Além de *softwares* há *sites* que possibilitam o estudo das isometrias. No *site* <<http://www.atractor.pt/simetria.html>> temos a possibilidade de observar figuras se movendo: transladando, refletindo e girando Também podemos observar e movimentar 17 tipos de mosaico (FIGURA 1.29). Para exemplificar, na Figura 1.30 encontra-se um mosaico que foi movimentado três vezes.



Fonte: <<http://www.atractor.pt/simetria/17padroes/index.html>>

Figura 1.29: Tipos de Mosaico.



Fonte: <<http://www.atractor.pt/simetria/17padroes/index.html>.

Figura 1.30: Mosaico em Três Posições

O processo de ensino e aprendizagem inovador será cada vez mais marcado pela preocupação em criar situações de aprendizagens estimulantes, desafiando os alunos a pensar apoiando-se no seu trabalho, por meio da diversificação dos recursos de aprendizagem (PONTE; OLIVEIRA; VARANDAS, 2002).

2- RELATO DE EXPERIÊNCIA

A partir dos objetivos estabelecidos, diversas etapas foram traçadas. Neste capítulo, estão descritas as seguintes etapas da pesquisa: i) elaboração das atividades; ii) elaboração dos questionários; iii) teste exploratório das atividades; iv) validação das atividades; v) análise das respostas dos questionários e da validação das atividades.

2.1 – Elaboração das Atividades

A elaboração das atividades foi iniciada em Julho de 2007, demandou pesquisas em literaturas diversas, em *sites* e em vídeos da TV escola². Além disso, foi realizado um estudo de metodologias utilizadas para abordagem deste conteúdo. Concomitante foi feito um estudo dos recursos que o *software* Régua e compasso (ReC) oferece para o estudo das isometrias.

Todas as atividades foram elaboradas com o objetivo de fazer com que o aluno identifique através de observações, comparações, investigações e construções, as isometrias (reflexão, translação e rotação) e suas propriedades.

Antecedendo a elaboração das atividades selecionamos figuras (Anexo 3) e quadros (Anexo 4) que apresentam isometrias. As figuras selecionadas foram divididas em 4 grupos: 1.º - figuras que possuem eixo de simetria; 2.º - figuras que possibilitam o estudo de reflexão, 3.º - figuras que possibilitam o estudo de translação; 4.º - figuras que possibilitam o estudo de rotação.

As atividades integram o material didático intitulado “O Estudo de Isometrias: Visão Artística e Matemática” (Anexo 1) que está estruturada em cinco partes, com atividades, algumas delas utilizam arquivos eletrônicos³ (Anexo 2) e outras são resolvidas na própria apostila.

Paralelamente, organizamos duas apresentações em *Power Point*, uma com as definições referentes ao conteúdo (Anexo 5), para serem apresentadas entre a

² A **TV Escola** é um canal de televisão brasileiro via satélite por antena parabólica, com o intuito de promover a capacitação e atualização permanente dos professores do Brasil. Criado em setembro de 1995, foi ao ar oficialmente para todo o Brasil em 4 de março de 1996.

³ Estes foram criados no ReC - versão 6.4

resolução das atividades e outra, com os quadros que pertencem à quinta etapa das atividades. Finalizando elaboramos atividades que possibilitam a construção de faixas, rosetas e mosaicos. As atividades estão organizadas em seis etapas, como mostra o Quadro 2.1.

Quadro 2.1: Atividades

ETAPAS	ATIVIDADES	
Eixo de simetria	1º Grupo de figuras	1ª Parte da apostila de atividades
Reflexão	2º Grupo de figuras	2ª Parte da apostila de atividades
Translação	3º Grupo de figuras	3ª Parte da apostila de atividades
Rotação	4º Grupo de figuras	4ª Parte da apostila de atividades
Quadros	Arquivo no <i>Power Point</i>	5ª Parte da apostila de atividades
Elaboração de Ornamentos	Faixas, rosetas (<i>Kirigamis</i>) e mosaicos	

A primeira etapa das atividades tem por objetivo definir eixo de simetria. Esta é iniciada com a distribuição das 3 figuras do primeiro grupo (Anexo 3) e solicita-se aos alunos que observem-nas e em seguida dobrem-nas de forma que duas partes coincidam exatamente por superposição. Também é solicitado que tracem uma reta na linha da dobra (Figura 2.). Finalizada esta atividade defini-se eixo de simetria⁴ (Anexo 5).



Figura 2.1: Borboleta com Eixo de Simetria Traçado

Ainda na primeira etapa são propostas as atividades da primeira parte da apostila. As atividades 1, 2 e 3 dessa parte tem por objetivo reconhecer e traçar o

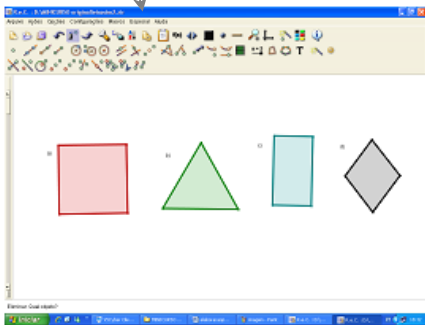
⁴ O eixo de simetria divide a figura em duas partes que coincidem exatamente por superposição (LOPES; NASSER, 1996).

eixo de simetria em letras, polígonos e logotipos (Quadro 2.2), complementando a atividade realizada com as figuras, descrita anteriormente.

Quadro 2.2: Atividade 2 - Eixo de Simetria

2) Abra o arquivo **eixosim2**. Cada um dos polígonos que esta na tela possui mais de um eixo de simetria. Trace todos os eixos de simetria de cada um deles. Salve suas construções e escreva nos itens abaixo o número de eixos de simetria que você traçou em cada polígono. Movimente um vértice de cada polígono e verifique se as construções estão coerentes com o que foi solicitado.

a) quadrado: _____ c) retângulo: _____
 b) triângulo: _____ d) losango: _____

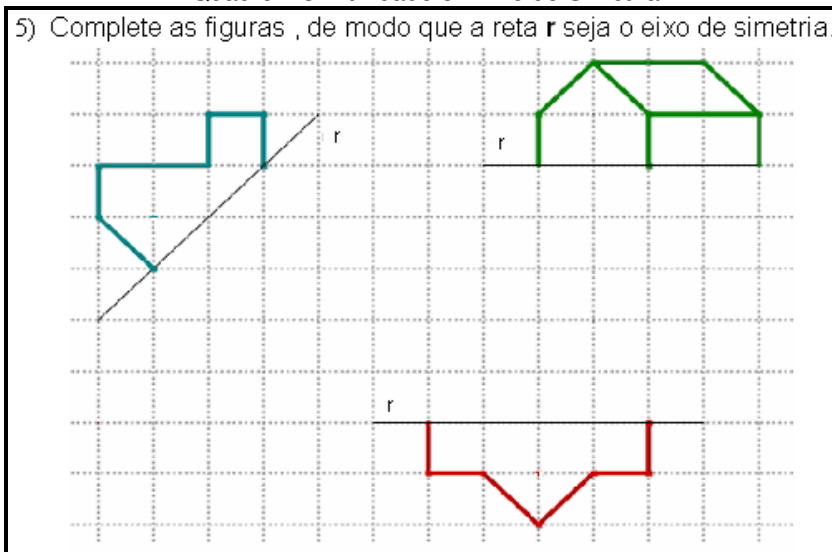


A atividade 4 visa definir pontos correspondentes em uma figura em relação ao eixo de simetria.

O objetivo da atividade 5 (Quadro 2.3) é fazer com que o aluno desenhe a parte simétrica de cada figura em relação a uma reta r , ou seja, visualize com auxílio da malha quadriculada onde estão os pontos correspondentes a partir dos quais é construído a outra parte da figura.

Quadro 2.3: Atividade 5 - Eixo de Simetria

5) Complete as figuras, de modo que a reta r seja o eixo de simetria.



A segunda etapa das atividades tem por objetivo definir reflexão em relação a uma reta e suas propriedades. Esta é iniciada com a distribuição das figuras do segundo grupo (Anexo 3), a seguir solicita-se aos alunos que observem-nas e em seguida dobrem-nas de forma que a figura coincida com sua reflexão. Também é solicitado que na linha da dobra tracem uma reta como mostra a figura 2.2. Finalizada esta atividade defini-se reflexão⁵ em relação a uma reta (Anexo 5).

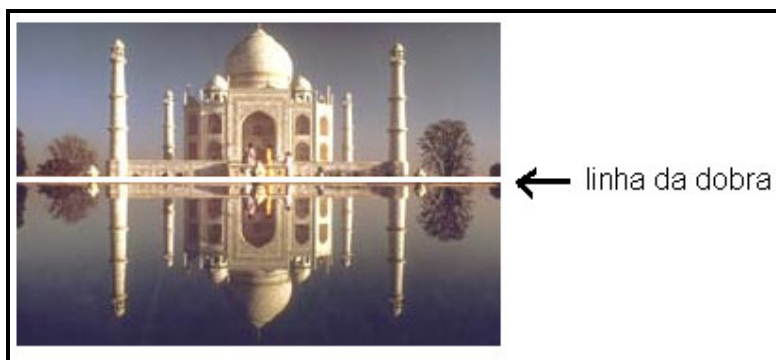


Figura 2.2: Taj Mahal com Eixo de Simetria Traçado

Continuando a segunda etapa, são propostas as atividades da segunda parte da apostila. O objetivo da atividade 1 é verificar se os alunos serão capazes de reconhecer quando uma figura esta refletida em relação a uma reta (Quadro 2.4).

Quadro 2.4: Atividade 1 - Reflexão

1) Observe as figuras e identifique quais delas estão refletidas em relação à reta.

a) b) c)

d) e)

Na atividade 2 é utilizado um arquivo que contém um triângulo e a reflexão deste em relação a uma reta, o objetivo é fazer com que o aluno descreva as

⁵ Uma figura é a reflexão de outra se:

(I) a linha que une cada par de pontos correspondentes é perpendicular ao eixo de simetria.

(II) dois pontos correspondentes estão à mesma distância do eixo de simetria, em lados opostos (LOPES; NASSER, 1996, p.102).

características presentes na construção. Para tanto é solicitado que observem as medidas dos ângulos e dos lados dos triângulos e que movimentem o vértice de um dos triângulos.

A atividade 3 foi elaborada com o objetivo de trabalhar o conceito de distância de um ponto a uma reta⁶ (Anexo 5), pois as atividades 4, 5, 6, 7, 8 e 9 dependem deste pré-requisito.

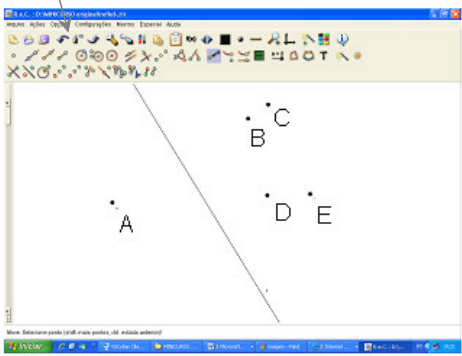
A finalidade das atividades 4 e 5 é fazer com que o aluno por meio de investigações, seja capaz de reconhecer as condições para que um ponto seja a reflexão do outro em relação a uma reta.

As atividades 6 (Quadro 2.5), 7 (Quadro 2.6), 8 e 9 têm por objetivo fazer com que o aluno identifique a imagem de figuras através de uma reflexão.

A atividade 7, por exemplo, pode ser resolvida utilizando a ferramenta compasso (📐) e a ferramenta perpendicular (⊥) ou apenas reflexão em uma linha (↔). Estes recursos possibilitam resoluções diferentes para uma mesma atividade, contribuindo para a aprendizagem do tema.

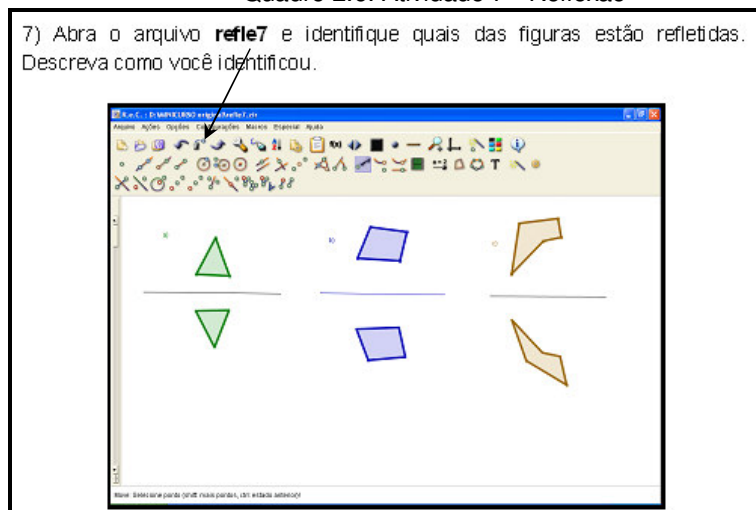
Quadro 2.5: Atividade 6 - Reflexão

6) Abra o arquivo **refle6**. Observe os pontos **B**, **C**, **D** e **E**. Qual deles é reflexão do ponto **A** em relação a reta r ? Descreva como você identificou este ponto.



⁶ Distância entre um ponto e uma reta é a distância entre esse ponto e o pé da perpendicular a reta conduzida pelo ponto (DOLCE; POMPEO, 1993, p.102).

Quadro 2.6: Atividade 7 - Reflexão



O objetivo da terceira etapa das atividades é definir translação e suas propriedades. Esta é iniciada com distribuição das figuras do terceiro grupo (Anexo 3) a seguir solicita-se que os alunos observem-nas e em seguida descrevam-nas. Além disso, é solicitado aos alunos que com o auxílio do carimbo⁷ seja construído, entre as duas retas paralelas, uma faixa análoga às que foram observadas (Figura 2.3).

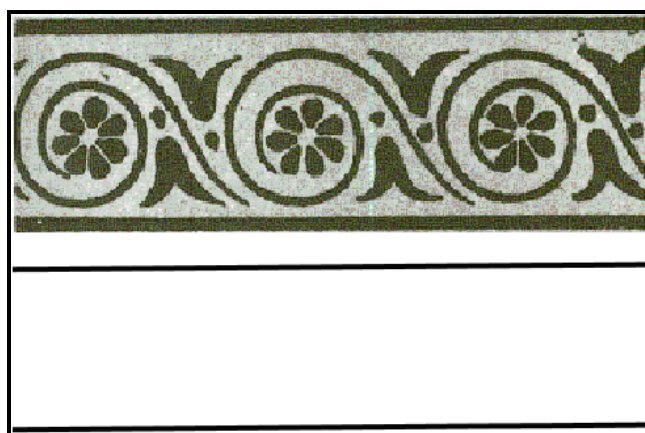


Figura 2.3: Faixa de Uma Atividade

⁷ Cada aluno recebeu um carimbo para construir a faixa.

Visamos com esta atividade analisar as faixas construídas pelos alunos, para verificarmos se eles realmente observaram como uma faixa é construída. Finalizada esta atividade define-se translação⁸ (Anexo 5).

Continuando a terceira etapa, são propostas as atividades da terceira parte da apostila. O objetivo das atividades 1 e 2 é fazer com que o aluno por meio de suas observações, seja capaz de conjecturar as condições para que uma figura seja translação da outra.

Na atividade 3 é utilizado o arquivo que contém o polígono A'B'C'D'E' que é uma translação do polígono ABCDE, a finalidade desta atividade é possibilitar que o aluno verifique na construção as propriedades de translação estudadas na atividade anterior.

As atividades 4, 5, 6, 7 (Quadro 2.7) e 8 têm como objetivo identificar a imagem da figura por meio de uma translação.

Quadro 2.7: Atividade 7 - Translação



A quarta etapa das atividades tem por objetivo definir rotação e suas propriedades. Esta é iniciada com a distribuição das figuras do quarto grupo (Anexo 3), a seguir solicita-se aos alunos que observem-nas e também que sobreponham a figura A⁹ à figura B e girem, observando as posições que a figura A assume em relação à figura B (Figura 2.4). A seguir, explicamos que, como a figura A tem forma de um pentágono regular com um giro de 72° em torno do centro O, ela retorna a posição inicial. Nesse caso diz-se que a figura tem isometria rotacional de 72°. Finalizada esta atividade define-se rotação¹⁰ (Anexo 5).

⁸ Translação é uma transformação em que a figura se desloca paralelamente a uma reta. Isto é, todos os pontos da figura são deslocados numa mesma direção (retilínea), com a mesma distância. (LOPES; NASSER, 1996, p.108).

⁹ A figura A esta “solta” e é congruente a figura B.

¹⁰ Rotação é um “giro” da figura em torno de um ponto fixo O (ponto que pode ou não pertencer a figura), isto é, para todo ponto P do plano, P' é obtido sobre uma circunferência de centro O e raio OP deslocado de um ângulo β (BIEMBENGUT; HEIN, 2000, p.71).

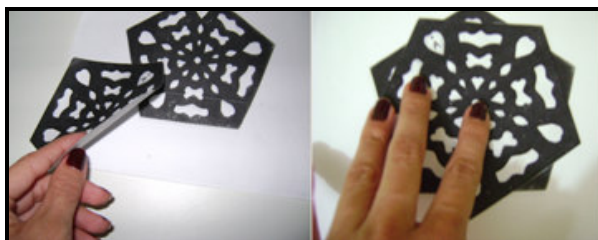



Figura 2.4: Kirigames A e B

Continuando esta etapa, são propostas as atividades da quarta parte da apostila. O objetivo na atividade 1, é identificar o centro de rotação nos logotipos (Quadro 2.8), além de mostrar a existência dessa isometria no cotidiano.

Quadro 2.8: Atividade 1 - Rotação

1) Marque o centro de rotação nos logotipos abaixo, se possuírem.

A atividade 2, foi elaborada com o objetivo de possibilitar que o aluno aprenda a utilizar a ferramenta **rotação**, pois a orientação que o *software* apresenta na parte inferior da tela para a utilização desta não é de fácil entendimento.

O item 2.1 desta atividade tem por objetivo diferenciar a rotação no sentido horário da rotação no anti-horário. Os itens 2.2, 2.3, 2.4, e 2.5 têm por finalidade mostrar as propriedades de rotação que ficam implícitas quando a construção é feita utilizando a ferramenta **rotação 11** ()

A atividade 3 tem dois objetivos, o primeiro é mostrar ao aluno como fazer uma rotação no sentido horário, utilizando os recursos do *software* e o segundo é fazê-lo observar rotações com ângulos diferentes.

A atividade 4 tem como finalidade mostrar que uma rotação pode ser feita em relação a um ponto que pertence a figura.

O objetivo na atividade 5 é construir uma figura com simetria rotacional de 120° . As atividades 6 e 7, visam que por meio de investigações, o aluno seja capaz de reconhecer as condições, para que uma figura seja a rotação da outra em relação a um ponto.

Na quinta etapa é utilizado um arquivo no *Power Point* que contém quadros (Anexo 4) que serão visualizados para resolver a atividade 1 da quinta parte da apostila. O objetivo desta etapa é identificar e contextualizar as três isometrias estudadas. No quadro da Figura 2.5, por exemplo, pode ser identificado as três isometrias estudadas (reflexão, translação e rotação).



Fonte: <<http://www.pinturabrasileira.com/artistas>>
Figura 2.5: Quadro, Odetto Guersoni

A sexta e última etapa das atividades trata da elaboração dos ornamentos¹¹ (faixas, rosetas e mosaicos). Inicia-se esta etapa mostrando as definições e exemplificando cada um dos três ornamentos, para isso preparamos um arquivo no *power point* que contém estas definições e estes exemplos (Anexo 5).

A roseta é o primeiro ornamento a ser trabalhado, para essa atividade é distribuído aos alunos um papel¹² o qual deve ser dobrado e recortado seguindo nossas orientações (orientações referentes ao processo de construção do kirigami ver Anexo 6). Para a construção da faixa e do mosaico são utilizadas essas rosetas. Esta etapa é detalhada na seção 2.4 que trata da validação das atividades.

¹¹ Na Matemática, consideram-se três tipos de ornamentos: faixa, roseta e mosaico (BIEMBENGUT;HEIN, 2000).

¹² Papel lustre fosco com dimensões 15x15, distribuído a todos os alunos pelas autoras deste trabalho.

2.2 - Elaboração dos Questionários

Além da apostila de atividades, elaboramos dois questionários, um para o teste exploratório, realizado com alunos da Licenciatura em Matemática e outro para a validação das atividades, realizado com alunos do Ensino Fundamental. Estes questionários contêm perguntas sobre as atividades realizadas, sobre o uso do *software* ReC na aprendizagem do tema proposto e sobre a importância das TIC na aprendizagem Matemática.

No minicurso realizado como teste exploratório foi aplicado um questionário que tinha como objetivo investigar se as atividades estavam estruturadas de maneira a ajudar no processo de ensino e aprendizagem do tema. Este questionário contém onze perguntas fechadas e uma aberta (Anexo 7).

O segundo questionário foi elaborado para a validação das atividades e tem como objetivo levantar dados, junto ao público alvo (alunos do Ensino Fundamental), sobre as atividades e sobre o uso do ReC no processo de ensino e aprendizagem de Isometrias (Anexo 8).

Este questionário possui nove perguntas fechadas às quais visam complementar os resultados da validação das atividades, pois também questionam sobre as dificuldades e as vantagens encontradas ao se resolver as atividades deste trabalho.

Nos dois questionários existem espaços nas perguntas fechadas, para os participantes comentarem suas respostas. Dessa forma, pretende-se captar melhor a opinião dos participantes diante da questão considerada.

2.3 – Teste Exploratório das Atividades

O teste exploratório mediado pelas autoras desse trabalho monográfico teve como objetivo detectar possíveis falhas nas atividades elaboradas. O teste foi realizado com 20 alunos do curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição pública no dia 26 de Outubro de 2007, com duração de 4 horas, em forma de minicurso.

Os alunos que participaram do teste já haviam utilizado o *software* ReC anteriormente em algumas disciplinas da Licenciatura. No entanto, foi preciso apresentar aos alunos as ferramentas que possibilitam o estudo das isometrias, visto que estas não estavam na interface das versões anteriores à 6.4, que foi a utilizada.

De maneira geral, todas as atividades foram realizadas com facilidade pelos participantes. Porém, observamos que seria necessário reduzir a quantidade de atividades na apostila visto que, não foi possível realizá-las no tempo estabelecido. Para tanto, algumas atividades foram excluídas e em outras diminuimos alguns itens. As atividades excluídas são: atividade 1 da primeira parte; atividades 3 e 7 da segunda parte; atividade 5 da terceira parte; atividade 5 da quarta parte.

Embora tenhamos diminuído algumas atividades, a qualidade da apostila não foi prejudicada, pois os objetivos das atividades que foram retiradas são contemplados nas atividades que permaneceram.

Nas atividades com figuras (Figura 2.6) que possuem eixo de simetria (Anexo 3), os alunos conseguiram por meio de observação e dobra das figuras identificarem o eixo de simetria e assim, iniciar a primeira parte da apostila.



Figura 2.6: Foto com Participantes Dobrando Figuras

Na atividade 2, percebemos que alguns participantes tiveram dificuldade em identificar quantos eixos de simetria possui um retângulo (Figura 2.7). Eles imaginavam que ao dobrar um retângulo pela diagonal os triângulos iriam coincidir por superposição, o que não acontece. Para solucionarmos essa dúvida dobramos um retângulo pela sua diagonal (Figura 2.8). Nos demais polígonos os alunos não demonstraram dificuldades.

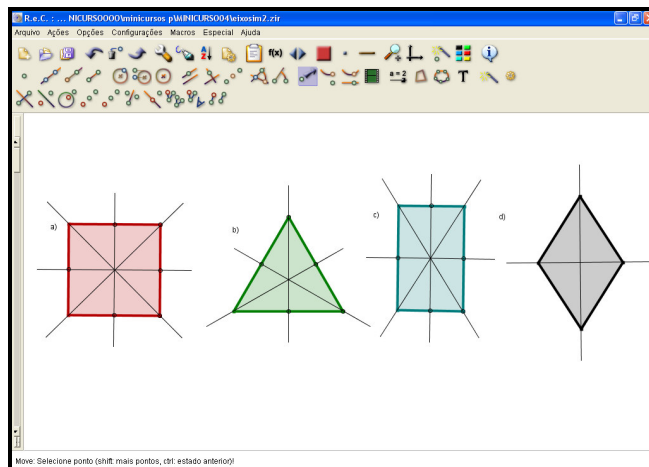


Figura 2.7: Atividade 2 Resolvida por Um Participante

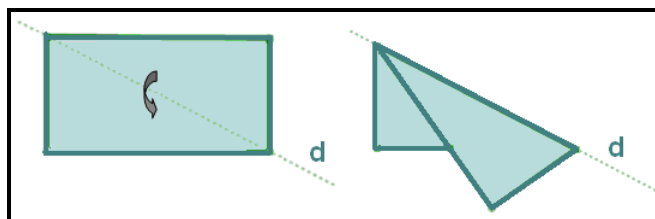


Figura 2.8: Retângulo Dobrado pela Diagonal

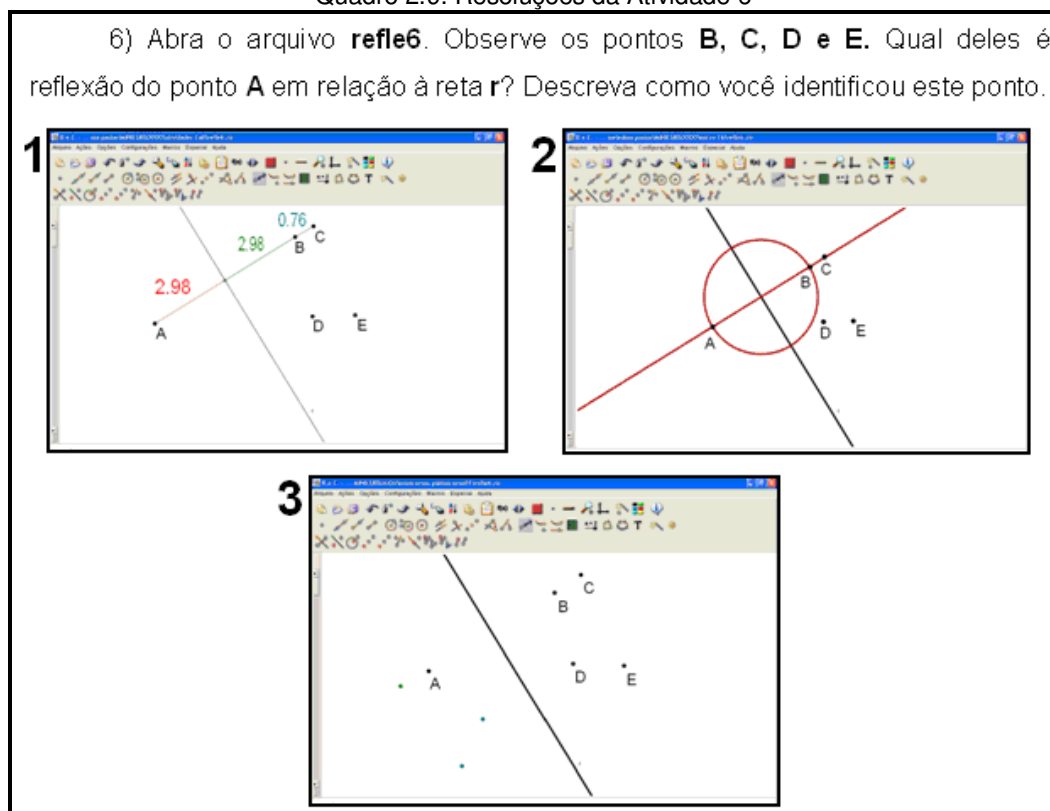
Na atividade 3, os participantes relataram que seria mais fácil visualizar os eixos de simetria, se os logotipos estivessem na própria apostila e não no arquivo eletrônico. A partir da análise desse comentário fizemos a alteração sugerida.


Na segunda etapa, reflexão, os alunos conseguiram identificar por meio das dobras, quando uma figura está refletida.

A atividade 4 foi importante, pois a partir desta foi possível a realização da atividade 5, na qual os alunos escreveram com base na questão anterior as condições necessárias para que um ponto seja reflexão do outro em relação a uma reta.

As atividades, de um modo geral, foram resolvidas de várias maneiras, escolhemos três resoluções da atividade 6 para exemplificarmos (Quadro 2.9). Os alunos tiveram a liberdade de escolher o modo que lhes fosse mais favorável. O objetivo foi alcançado como esperávamos.

Quadro 2.9: Resoluções da Atividade 6



Na primeira resolução o participante traçou uma reta perpendicular à reta dada passando pelos pontos A , B e C em seguida mediu os segmentos. Na segunda resolução o participante traçou uma reta perpendicular à reta dada passando pelos pontos A , B e C em seguida traçou uma circunferência de centro na interseção dessas duas retas passando pelo ponto A . Na terceira resolução o participante utilizou a ferramenta reflexão em uma linha .

Essas resoluções também servem para comprovarmos a vantagem de se utilizar este software educacional, pois as ferramentas do ReC ofereceram diferentes possibilidades para a resolução das atividades.

Nas atividades com as figuras do terceiro grupo (Anexo 3) nosso objetivo foi alcançado de maneira muito satisfatória, percebemos um maior interesse dos participantes nessa atividade principalmente na construção das faixas utilizando carimbos (Figura 2.9).

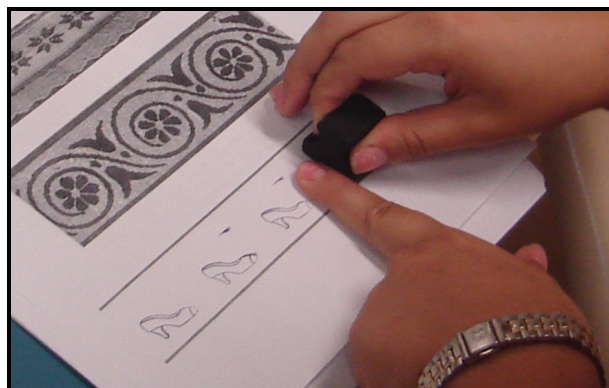


Figura 2.9: Participante Fazendo uma Faixa.

Algumas faixas foram feitas corretamente (Figura 2.10) e outras não (Figura 2.11). Para a correção, relacionamos as faixas construídas com a definição de translação que estava no arquivo no *Power Point*.

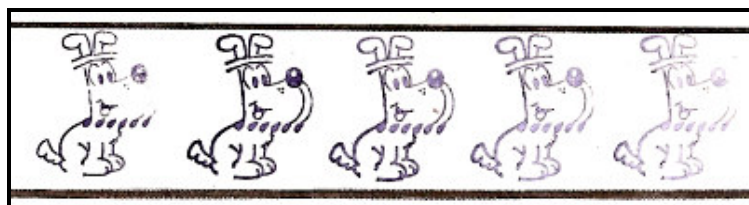


Figura 2.10: Faixa Correta.



Figura 2.11: Faixa Incorreta.

Alguns participantes não conseguiram compreender o enunciado da atividade 3 (Quadro 2.10), então o modificamos para a validação especificando os segmentos que eram para ser traçados (Quadro 2.11).

Quadro 2. 10: Atividade 3 com Enunciado do Teste Exploratório

3) Abra o arquivo **trans3**, observe que o polígono $A'B'C'D'E'$ é uma translação do polígono $ABCDE$. Trace os segmentos cujas extremidades são vértices correspondentes. Utilizando os recursos do *software* responda:

Quadro 2.11: Atividade 3 com Enunciado Modificado

3) Abra o arquivo **trans3**, observe que o polígono $A'B'C'D'E'$ é uma translação do polígono $ABCDE$. Trace os segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$, $\overline{EE'}$. Utilizando os recursos do *software* responda:

As atividades da quarta parte, rotação, foram feitas somente até a quinta atividade, pois o tempo do minicurso se esgotou.

Para que não ficássemos sem testar a quinta parte, referente aos quadros, escolhemos alguns dos participantes do minicurso para responder a atividade e de acordo as respostas complementávamos, se necessário.

Não foi possível testar as atividades da sexta etapa, fato que prejudicou um pouco a aplicação dessas atividades com o público alvo.

A apostila utilizada no teste exploratório foi alterada a partir do que diagnosticamos no teste, a nova versão consta no Anexo 9 e as alterações feitas nas atividades dos arquivos eletrônicos constam no Anexo 10.

Ao final do minicurso os participantes preencheram o questionário avaliando as atividades desenvolvidas. A primeira refere-se aos enunciados das atividades, todos os participantes afirmaram que estavam claros, apesar de alguns participantes não terem compreendido o enunciado da atividade três da terceira parte da apostila, fato já comentado anteriormente.

A pergunta dois, questionava os participantes quanto ao nível das atividades (Gráfico 2.1), a maioria classificou como moderado.

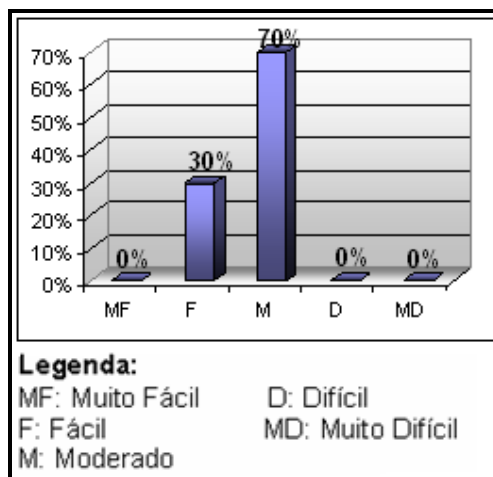


Gráfico 2.1: Nível das Atividades no Teste Exploratório

Destacamos alguns comentários dos participantes que consideraram o nível das atividades como moderado:

“Algumas questões são mais fáceis e outras um pouco mais complicadas, precisando assim da ajuda das orientandas”.
 (Participante1)

“Para nós que somos de Licenciatura em Matemática está bem tranqüilo, mas para alunos do ensino fundamental está um pouco difícil”. (Participante 2).

Questionados, na pergunta 3, se atividades realizadas despertaram interesse sobre o tema em estudo, todos os participantes afirmaram que sim. Diante desta resposta, não houve necessidade de alteração na metodologia utilizada para trabalhar o tema.

Quando questionados (Pergunta 5) se as atividades contribuíram para compreensão do tema em estudo, 100% dos os participantes afirmaram que sim. Destacamos alguns comentários relacionados a esta pergunta:

“O material concreto foi útil para compreensão do tema”. (Participante 3)

“Porque quando o próprio aluno faz as construções utilizando o *software*, a compreensão do tema é bem mais fácil”. (Participante 4)

“As atividades foram bem selecionadas”. (Participante 5)

Para que pudéssemos avaliar melhor a resposta desta pergunta, questionamos também (Pergunta 7), se eles já haviam estudado as Isometrias anteriormente e 60% afirmaram que não haviam estudado (Gráfico 2.2), o que nos deu confiança com relação à resposta. Era importante que soubéssemos isto, pois a compreensão do conteúdo poderia ser pelo fato de já terem estudado o tema anteriormente.

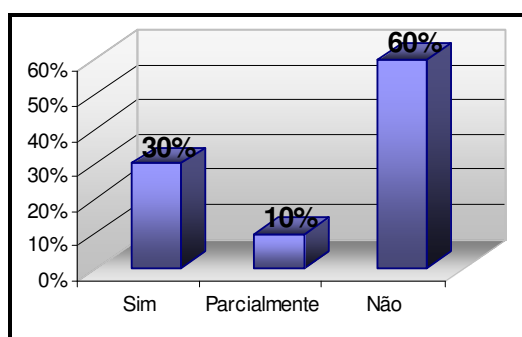


Gráfico 2.2: Percentual de Participantes que Conheciam o Tema

Ainda na pergunta 7, os participantes que responderam sim ou parcialmente complementaram a resposta informando em qual etapa de sua vida escolar havia estudado as Isometrias, 30 % afirmaram ter estudado na Licenciatura e 10% estudaram no sétimo ano do Ensino Fundamental, porém apenas reflexão. Aqui também perguntamos se a metodologia utilizada teria sido a mesma e 100% desses

que já havia estudo, afirmaram que não. Este percentual foi bem significativo, pois demonstra que a metodologia elaborada para este trabalho, era inédita para os participantes.

A pergunta 6 questiona sobre a possibilidade de aplicação das atividades desenvolvidas a alunos do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental (Gráfico 2.3). A maioria respondeu que sim. Os participantes que responderam parcialmente complementaram a resposta comentando que:

“Às vezes poderia ser um pouco mais complicado, por eles não saberem mexer no ReC, mas se tiverem uma boa explicação da utilização do *software*, as atividades são ótimas”. (Participante 1)

“Ao nono ano sim, mas ao sexto ano talvez haja um pouco de dificuldade em relação ao *software* e suas ferramentas, pois (sendo realista) eles não estão muito acostumados ao uso dessas tecnologias”. (Participante 6)

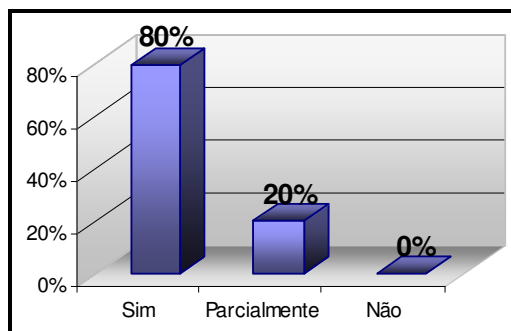


Gráfico 2.3: Possibilidade da Aplicação das Atividades Desenvolvidas.

Para complementarmos a avaliação, questionamos na pergunta 8 se eles já haviam utilizado *softwares* educacionais, ou outro recurso tecnológico em alguma aula de Matemática. Todos responderam que utilizaram como alunos, durante o curso de Licenciatura em Matemática. Os *softwares* mais citados foram: Régua e Compasso, Geogebra, Winplot, Graphmatica, Poly.

Independentemente de quando os participantes aprenderam a utilizar o R.e.C. perguntamos como foi para eles aprender a utilizar o software e 10% consideraram ter sido muito fácil e 90% consideraram que foi fácil. Destacamos alguns comentários:

“É um software bem fácil de manusear e quando é bem utilizado se torna uma ferramenta muito importante para o processo de ensino e aprendizagem”. (Participante 2)

“Pois se trata de um software dinâmico e interessante”. (Participante 7)

“Pois a interface é bem agradável”. (Participante 8)

Ao analisarmos as respostas da pergunta 10, verificamos que 100% dos participantes consideram que o uso do *software* educacional favorece a construção do conhecimento. Justificaram a resposta com os seguintes comentários:

“Porque melhora a visualização e também podemos assim entender o que se viu teoricamente”. (Participante 7)

“Favorece muito, pois dá uma idéia de realidade, além de ficarmos convencidos de que o conceito é geral (a movimentação possibilita isso)”. (Participante 6)

“O aluno vê que o que está no papel é verdade e passa a aprender realmente e não só a decorar”. (Participante 2)

Com relação ao papel do professor (pergunta 11), durante a utilização de softwares educacionais, 20% dos participantes afirmaram ser importante e 80 % dos participantes afirmaram que a presença deste é muito importante. Destacamos alguns comentários justificando a resposta dada:

“O professor é fundamental, pois o software é um auxílio, a explicação do conteúdo e o “por quê” das coisas é com o professor”. (Participante 6)

“Pois o professor atua como mediador para a construção do conhecimento”. (Participante 9)

“Pois ele é quem deve instigar os alunos a questionarem”. (Participante 10)

Os comentários feitos estão de acordo com o que Moram (s.d.) defende, ao afirmar que nesse contexto, o professor é importante como mediador e organizador de processos, articulador de aprendizagens ativas, um avaliador dos resultados.

A última pergunta (pergunta 12) é aberta e questiona sobre a importância do uso das TIC na educação, solicitando inclusive que sejam citadas as possíveis vantagens e desvantagens. Destacamos algumas respostas dessa pergunta consideradas notórias:

“O uso de Tecnologias desperta muita curiosidade o que pode tirar a atenção do objetivo do trabalho, isso seria uma desvantagem, mas que é muito pequena comparada com as inúmeras vantagens do uso da tecnologia. O conceito fica muito mais claro e real. É mais difícil esquecer os conteúdos quando utilizamos tecnologia, do que quando utilizamos somente livros”. (Participante 6)

“Quando o professor ministra uma aula usando alguma tecnologia, essa tecnologia abre a mente dos alunos diferente de uma aula tradicional, as tecnologias motivam mais o aluno a aprender”.
“Desvantagem – há alunos que não têm acesso às tecnologias em casa, impossibilitando que eles, fora da sala de aula, estude da mesma maneira.” (Participante 2)

O teste exploratório permitiu verificar que as atividades estavam coerentes com os objetivos pré-estabelecidos. Na próxima seção é descrita a validação das atividades, com os alunos do Ensino Fundamental.

2.4 – Validação das Atividades

A validação das atividades ocorreu numa Instituição Pública Estadual do Distrito de Travessão, Município de Campos dos Goytacazes/RJ, em uma turma do sétimo ano do Ensino Fundamental. Foram necessários dois encontros, cada um com três tempos de aula, com duração de cinquenta minutos cada tempo. Vale ressaltar que todos os encontros foram realizados no laboratório de Informática, no qual foi utilizado o *software* Régua e Compasso (ReC).

O primeiro encontro foi suficiente para a realização da primeira, segunda e terceira etapa das atividades. Neste encontro de 3 tempos de aula, compareceram 9 alunos, os quais demonstraram interesse pelo tema em estudo e participaram efetivamente nas atividades.

Como os alunos não sabiam utilizar o ReC, inicialmente mostramos como utilizar algumas ferramentas e no decorrer das resoluções das atividades, quando fazia-se necessário, explicávamos a utilização de outras ferramentas.

Os alunos utilizaram o ReC com a mesma facilidade dos participantes do teste exploratório, fato que nos surpreendeu, visto que, os participante do teste já haviam utilizado o ReC, anteriormente.

Após o término de cada uma das etapas das atividades (Figura 2.12) realizávamos as correções, solicitávamos que os alunos abrissem os arquivos com as atividades resolvidas, para que pudéssemos comentar as respostas e corrigi-las quando necessário.



Figura 2.12: Foto dos Alunos Resolvendo as Atividades

Na resolução das atividades da primeira, segunda e terceira etapas, os alunos se comportaram de maneira semelhante aos participantes do teste. Até algumas dúvidas foram as mesmas, como por exemplo, na atividade 2 (atividade sobre reflexão) eles também imaginaram que ao dobrar um retângulo pela diagonal os triângulos iriam coincidir por superposição (Figura 2.13).

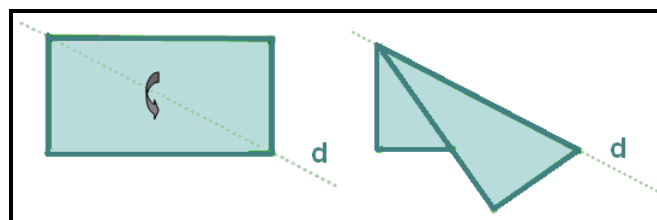
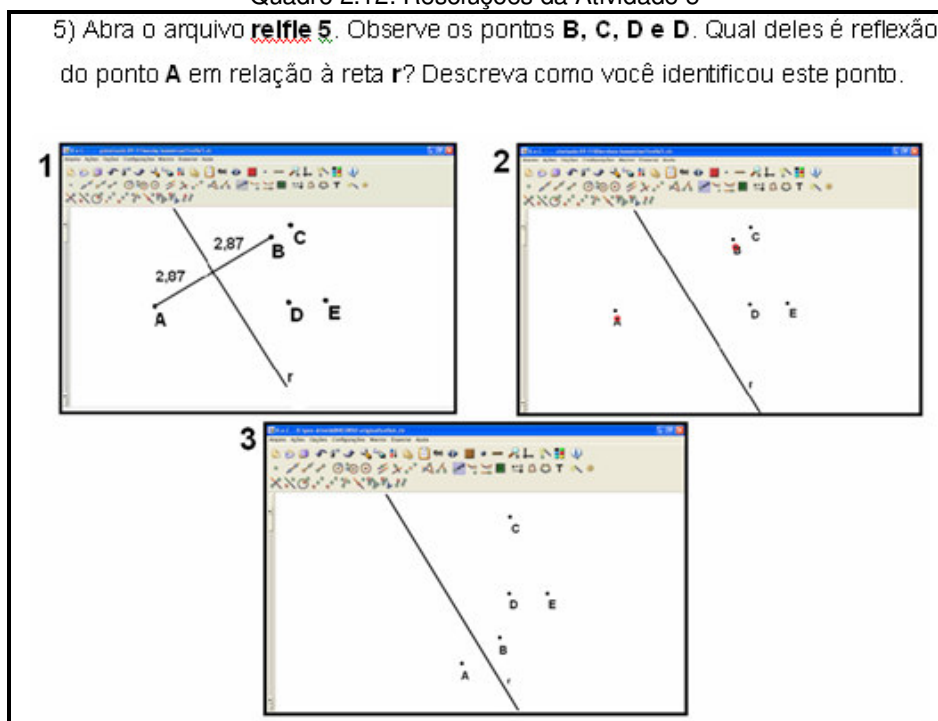



Figura 2.13: Retângulo Dobrado pela Diagonal

Assim como no teste exploratório, as atividades de um modo geral foram resolvidas por caminhos diferentes, para exemplificarmos, selecionamos três respostas dadas à atividade 5 (Quadro 2.12).

Quadro 2.12: Resoluções da Atividade 5



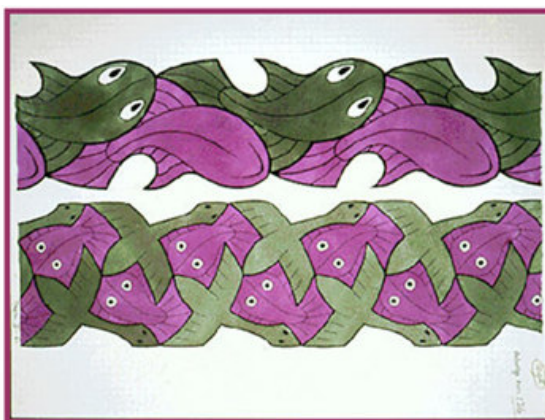
Na primeira resolução o aluno traçou uma reta perpendicular à reta dada passando pelos pontos A, B e C em seguida mediu os segmentos (mesmo método utilizado por um participante do minicurso). Na segunda resolução o aluno na utilizou a ferramenta reflexão em relação uma linha (), só que ao invés de clicar no ponto, clicou no nome do ponto. Na terceira resolução o aluno já havia percebido que quando movemos um objeto no ReC, todos os elementos relacionados a ele por construção também se movem, então para saber qual ponto seria a reflexão do ponto A utilizou apenas a ferramenta mover ponto.

No Anexo 11 encontra-se uma apostila resolvida por um aluno e também as respectivas soluções nos arquivos eletrônicos.

A realização da quarta, quinta e sexta etapa da atividades ocorreu no segundo encontro. Neste participaram 20 alunos, dentre estes os mesmos nove que compareceram ao primeiro encontro. Como tínhamos 11 alunos a mais para não prejudicar a análise da validação das atividades, organizamos duplas compostas por um aluno que compareceu ao primeiro encontro e outro que compareceu somente no segundo encontro.

Nas atividades da quinta etapa (atividades com os quadros), percebemos que os alunos estavam conseguindo identificar as isometrias nos quadros, porém

estavam trocando os nomes. Por exemplo, sobre o quadro apresentado na figura 2.14 um aluno afirmou que: “foi utilizado reflexão” sendo assim, pedimos que ele observasse e respondesse novamente, sua resposta foi: “ é reflexão sim, aconteceu aqui igual na atividade com carimbo” respondemos a ele que a atividade com carimbo era de translação e o aluno disse “é isso aí eu troquei o nome” .



Fonte: OLIVEIRA, 2000
Figura 2.14: Quadro, M.C.Escher

Consideramos que isso tenha ocorrido pelo fato de termos trabalhado, até este momento, as isometrias separadamente. Então, após a dúvida, antes de apresentarmos o próximo quadro, revisamos o nome das isometrias (reflexão, translação e rotação).

Antes de iniciarmos a sexta etapa de atividades (elaboração de ornamentos) explicamos com auxílio de transparências a definição de cada um dos três ornamentos.

Quadro 2.13: Transparência com Definições de Faixa, Roseta e Mosaico.

Na Matemática, consideramos três tipos de ornamentos: faixa, roseta e mosaico (BEMBENGT,SALETT, 2000).

➤ A faixa é um ornamento ilimitado, composto entre duas retas paralelas. A simetria fundamental para sua composição é a translação (BEMBENGT,SALETT, 2000).



Figura 5: Faixa

➤ A roseta é um ornamento limitado, composto em um círculo. A simetria fundamental para sua composição é a rotação (BEMBENGT,SALETT, 2000).



Figura 6: Roseta

➤ O mosaico é um ornamento ilimitado no plano. A simetria fundamental é a translação em duas direções. Para compor um mosaico é necessária uma rede. Existem cinco tipos fundamentais de rede: quadrados, retângulos, paralelogramos, triângulos equiláteros e losângulo (BEMBENGT,SALETT, 2000).



Figura 7: Mosaico

Escolhemos iniciar com as rosetas, pois com elas construiríamos a faixa (Figura 2.15) e posteriormente o mosaico (Figura 2.16). Porém, os alunos tiveram dificuldade em realizar a dobradura no papel, isso impossibilitou que as rosetas

ficassem iguais impedindo que as utilizássemos para construir as faixas e os mosaicos.

Com as rosetas que puderam ser aproveitadas nós elaboramos a faixa e o mosaico como exemplo do que pretendíamos que os alunos fizessem, caso as rosetas ficassem todas iguais.



Figura 2.15: Faixa Elaborada com Kirigamis



Figura 2.16: Mosaico Elaborado com Kirigamis

Para solucionar o problema da construção das rosetas, escolhemos uma dobradura mais fácil, que consistia em primeiramente, dobrar o papel (em forma de quadrado) pela diagonal e depois dobrar o triângulo obtido pela sua altura (Figura 2.17).

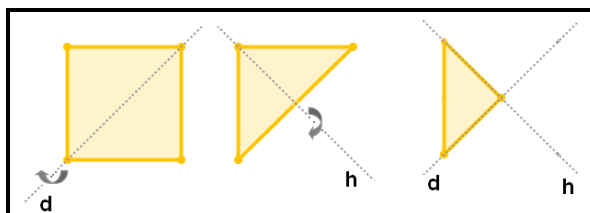


Figura 2.17: Papel Dobrado em Quatro Partes Iguais

Com esse novo método obtivemos ótimos resultados, como podem ser vistos na Figura 2.18. Vale ressaltar que neste momento pedimos aos alunos que fizessem mais uma roseta utilizando a nova dobradura e alguns fizeram mais de uma sem que pedíssemos. Este fato foi positivo, pois de modo geral é muito difícil os alunos realizarem atividades, sem que sejam solicitados.



Figura 2.18: Algumas Rosetas Feitas por Alunos

Finalizando as atividades, revisamos o conceito de reflexão e rotação nas rosetas elaboradas pelos alunos. A reflexão, foi abordada pedindo que os alunos identificassem alguns eixos de simetria das rosetas e a rotação, foi contemplada ao solicitarmos que os alunos identificassem o “elemento gerador”, o centro de rotação (e se este pertencia ou não a roseta) e também qual o ângulo da rotação da roseta.

Para complementar a análise da validação das atividades, analisamos os questionários preenchidos pelos nove alunos que compareceram aos dois encontros. O Gráfico 2.4 mostra como os alunos classificaram o nível das atividades.

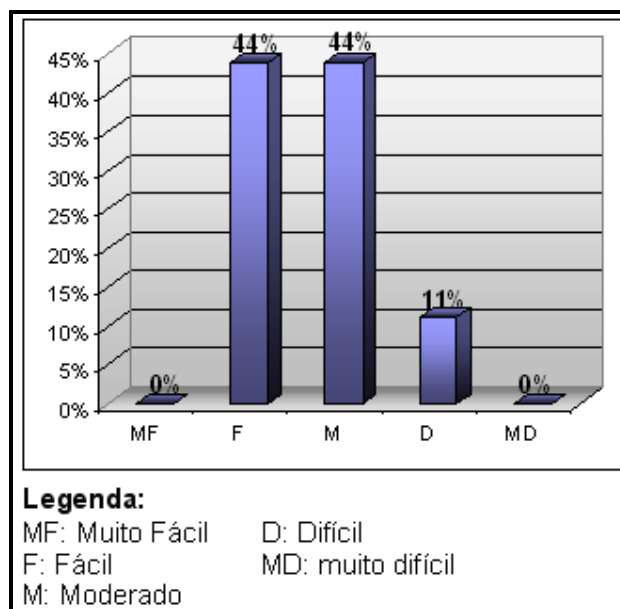


Gráfico 2.4: Nível das Atividades na Validação

Interpretamos tais índices positivamente, visto que os alunos nunca haviam estudado o tema Isometrias, além de nunca terem utilizado TIC na construção de conhecimentos (estas informações foram obtidas nas repostas da pergunta 5 e da pergunta 6).

Quando questionados na pergunta 2, se as atividades despertaram interesse sobre o tema em estudo, 77% alunos afirmaram que sim e 22% parcialmente (nesta pergunta não pedimos que eles justificassem a resposta), atribuímos este índice a uso de recursos didáticos variados (dobraduras, o software e as atividades).

Na pergunta 3, solicitamos aos alunos que assinalassem os aspectos presentes nas atividades desenvolvidas (Gráfico 2.5).

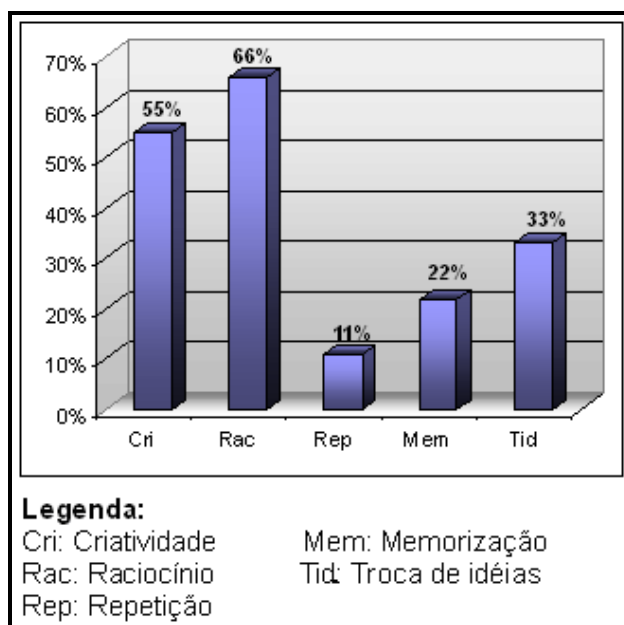


Gráfico 2.5: Aspectos Presentes nas Atividades Desenvolvidas

Observamos que os aspectos mais assinalados foram raciocínio e criatividade, estes índices reforçam o que Ramos (2002) relata ao dizer que é necessário que o professor use recursos visuais como, por exemplo, desenhar e examinar obras de arte, pois despertam emoções que quando positivas estimulam a criatividade. Considerando os aspectos menos assinalados, repetição e memorização, pode-se observar que esses índices estão de acordo com o que Hoffmann e Fagundes (2006) defendem que, o processo de ensino e aprendizagem

de Matemática não pode ser limitado à memorização de regras e técnicas, mas deve enfatizar a construção de conhecimentos e a resolução de problemas.

Questionados na pergunta 7, sobre como foi aprender a utilizar o R.e.C. um aluno afirmou ter sido muito fácil e oito afirmaram ter sido moderado. Embora a maioria tenha considerado moderado, todos afirmaram (pergunta 4) que as atividades contribuíram para a compreensão do tema em estudo. Estes índices foram bem significativos, pois demonstram que apesar dos alunos terem sentido um pouco de dificuldade em algum momento do trabalho, essa dificuldade não prejudicou a aprendizagem do tema.

Quanto ao papel do professor durante a utilização do software educacional, 33% alunos consideraram ser importante e 66% consideraram ser muito importante, Estas considerações estão de acordo com o que Belfort (2002) defende ao afirmar que uma ferramenta didática não deve ser considerada sem o intermédio do professor.

Na última pergunta (pergunta 9), questionamos se foi interessante estudar Matemática relacionada a Arte, todos afirmaram que sim. Esta resposta foi muito significativa, pois demonstra que a metodologia utilizada neste trabalho, contribuiu de forma positiva, para que pudéssemos atingir o principal objetivo (elaborar e validar atividades, sobre Isometrias, que possibilitassem ao aluno de Ensino Fundamental aliar o conhecimento teórico a situações cotidianas, motivando-o para o aprendizado da Matemática, em particular o estudo de isometrias).

O teste de validação foi bastante útil. O assunto era inédito para o grupo de alunos e, além disso, não havia, por parte deles, experiência prévia de utilização de *softwares* educacionais (nem em aulas de Matemática, nem de outras disciplinas). Tudo isso contribuiu para que os alunos se sentissem motivados e fossem bastante participativos e críticos na resolução das atividades.

Assim, foi bastante satisfatório o resultado da validação. A análise das respostas das atividades e dos questionários permitiu concluir que as atividades atenderam às expectativas, ou seja, possibilitaram a construção de conhecimentos sobre isometrias.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse capítulo, são apresentadas as considerações finais da pesquisa realizada nesta monografia. Além disso, são expostos alguns resultados, as contribuições, as dificuldades encontradas e são explicitadas ações a serem realizadas para dar continuidade a este trabalho.

Esta monografia teve como meta, desenvolver um estudo sobre Isometrias buscando relacionar este conteúdo a situações criadas pelo homem e a elementos presentes na natureza, mais especificamente, às diversas obras de Arte, nas quais estão presentes as Isometrias. Além disso, buscou-se destacar as contribuições da utilização do *software* educacional Régua e Compasso, como ferramenta de apoio a aprendizagem do tema em estudo. Resumindo, o objetivo geral foi elaborar e validar atividades, sobre isometrias, que possibilitem ao aluno do Ensino Fundamental aliar o conhecimento teórico a situações a situações criadas pelo homem e a elementos presentes na natureza, motivando-o para o aprendizado da Matemática, em particular o estudo de isometrias.

Tendo em vista as contribuições da Arte ao processo de ensino e aprendizagem já descritos nos capítulos anteriores, optamos por ressaltá-las. Constatamos, após validarmos as atividades, que a associação da Arte com o tema em estudo contribuiu de forma significativa para a aprendizagem.

Com a aplicação das atividades no teste exploratório, os participantes, além de adquirirem conhecimentos, puderam perceber o quanto este tipo de atividade é importante para proporcionar um processo de ensino e aprendizagem mais eficaz. Todos os participantes afirmaram que os enunciados das atividades estavam claros e que usariam parte do minicurso em suas práticas docentes, dados que ressaltam a importância deste trabalho.

Na validação das atividades, os alunos do Ensino Fundamental conseguiram aprender o conteúdo proposto com facilidade, como descrito no capítulo 2. Ressaltamos que os alunos demonstraram grande interesse e participaram ativamente. Destacamos a iniciativa dos alunos na atividade de elaboração de roseta, na qual, alguns alunos, fizeram mais de uma roseta sem que solicitássemos e ainda, de forma bela e criativa.

Vale ressaltar que os alunos do Ensino Fundamental utilizaram o *software* com o mesmo desempenho dos participantes do teste exploratório, porém sem terem utilizado anteriormente nenhum outro *software* para a aprendizagem de temas matemáticos, o que já havia feito os participantes do teste exploratório.

O presente estudo fornece contribuições de diversos tipos, tais como:

i) todo o referencial teórico pode ser utilizado para estudos futuros acerca do processo de ensino e aprendizagem de Isometrias.

ii) a apostila “O Estudo de Isometrias Visão Artística e Matemática” poderá ser utilizada por professores, assim como, os quadros selecionados para este trabalho e as atividades sobre elaborações dos ornamentos.

iii) o relato das experiências adquiridas, tanto na aplicação do teste exploratório quanto na validação das atividades, permite reflexões sobre a importância da contextualização e do uso de tecnologias no processo de ensino e aprendizagem.

No desenvolvimento deste trabalho algumas dificuldades surgiram, tais como: dúvidas sobre Isometrias e sobre os recursos do *software*; fazer o relato das atividades (como estavam divididas em várias etapas foi muito complicado) e encontrar referencial teórico, principalmente sobre Arte e Matemática. Diante dos resultados obtidos, percebemos que todas as dificuldades vivenciadas enriqueceram este trabalho monográfico.

Para dar continuidade a este trabalho, podem-se aplicar as atividades a outros grupos de alunos, como por exemplo, ao oitavo e ao nono ano do Ensino Fundamental, pois observamos durante as pesquisas bibliográficas realizadas, que o tema Isometrias está presente nos livros didáticos em várias séries. Além disso, pode-se aplicar as atividades elaboradas para a confecção de faixas e mosaicos que não foram finalizadas devido à dificuldade dos alunos ao realizar a dobradura. Consideramos possível elaborar outras atividades que relacionam Arte a outros conteúdos matemáticos, como por exemplo, perspectiva, seção áurea, figuras planas, dentre outros.

Destacamos de forma especial os efeitos que o desenvolvimento deste trabalho possibilitou às suas autoras. Contribuiu de forma significativa para adquirirmos experiências quanto ao desenvolvimento de atividades investigativas

que utilizam as TIC, possibilitou a melhora no processo de escrita e na pesquisa, além de ampliar os conhecimentos sobre tecnologias, sobre o tema isometria e sobre Artes.

Diante do exposto consideramos que nosso objetivo foi atingido satisfatoriamente e que com esse trabalho, estamos semeando idéias e contribuindo na elaboração de trabalhos que revelem aspectos curiosos da Arte, na qual a Matemática está presente, oferecendo uma diferente visão desta ciência.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARANHA, M.L.A. *Filosofia da educação*. São Paulo: Moderna, 1996.

ÁVILA, G. Objetivos do Ensino da Matemática. *Revista do Professor de Matemática*. São Paulo, n 27, p.1-10, 1995.

BARBOSA, R.M. *Descobrimos padrões em mosaicos*. São Paulo: Atual, 1993.

BARCO, L. *Arte e Matemática na escola*. 2002, vídeo TV Escola MEC.

BELFORT, E. Utilizando o Computador na Capacitação de Professores. In: CARVALHO, L. M.; GUIMARÃES, L.C. (Org.). *História e Tecnologia no Ensino da Matemática*. Rio de Janeiro: IME-UERJ, cap. 3, p. 39-50, 2002.

BIEMBENGUT, M.S.; HEIN, N. *Modelagem Matemática no Ensino*. São Paulo: Contexto, 2000.

BRASIL. *PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) Arte*. Brasília: MEC, 1996.

BRASIL, *PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais)*. Secretaria de Educação Fundamental: Matemática – Brasília, 1998. Disponível em: <<http://.mec.gov.br/seb/index.php?option>> última consulta em: 06/09/2007.

BRAVIANO, R.; RODRIGUES, M. H. W. L. *Geometria Dinâmica: Uma nova Geometria*. *Revista do Professor de Matemática*. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 49, p. 22-26, 2002.

CARVALHO, D. L. *Metodologia do ensino da matemática*. São Paulo: Cortez, 1992.

CIFUENTES, *A linguagem visual na matemática*. CD-ROM dos Anais da XI CIAEM – Conferência Inter-Americana de Educação Matemática. Blumenau, 2003.

CROWE, D. W., THOMPSON, T.M. Os usos modernos da Geometria, In: LINDQUIST, M. M. SHULTE, A., (org.): *Aprendendo e ensinando geometria*. Trad. Hygino Domingues São Paulo: Atual, 1994, p.133 -136.

DOLCE, O.; POMPEO, J.N. *Fundamentos de Matemática Elementar, 9: Geometria Plana*. São Paulo: Atual, 1993.

FAINGUELERNT, E. NUNES, K. R. A. *Caminhando Pela Geometria com as Obras de Lygia Clark*. Macaé, R.J.: Anais 4º EEMAT-RJ, 2006. 1 CD-ROM.

GARDNER, H. *Estruturas da mente: A Teoria das Inteligências Múltiplas*. Tradução Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1994.

HOFFMANN, D. S.; FAGUNDES, L. C. *Revista novas Tecnologias na Educação*. Porto alegre, v. 04, n 1, p.1-10, Julho 2006. Disponível em: <Http://www.cinted.ufrgs.br/renote/jul2006/artgosrenote/a18-21168>. Pdf Última Consulta em: 05/07/2007.

LÉVY, P. *Cibercultura*. São Paulo: Ed. 34, 1999.

LIMA, E.L.; CARVALHO, P.C.P.; WAGNER, E.; MORGADO, A.C. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro, Solgraf Publicações Ltda, 2001.

LOPES, M. L. M. L.; NASSER, L. *Geometria: na era da imagem e do movimento*. Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 1996.

MACHADO, A. S. dos. *Álgebra Linear e Geometria Analítica*. 2 ed. São Paulo: Atual, 1982.

MORAN, J.M. *A integração das tecnologias na educação*. s.d. Disponível em: <http://www.eca.usp.br/prof/moran/integracao.htm> Última consulta em: 24/07/2008.

MORAN, J.M. *A educação que desejamos: Novos desafios e como chegar lá* São Paulo: Papirus, 2007.

MORIN, E. *Os sete saberes necessários à Educação do futuro*. São Paulo: Cortez, 2004.

NASSER, L. *O Desenvolvimento do Raciocínio em Geometria*. Boletim do GEPEM, 27, pp. 93-99, 1991.

NOGUEIRA, N. R. *Pedagogia dos projetos: uma jornada interdisciplinar rumo ao desenvolvimento das múltiplas inteligências*. São Paulo: Érica, 2001.

OLIVEIRA, H. *Interdisciplinaridade Ciência – Matemática*. Lisboa, Janeiro de 2000. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm12/>. Última consulta em: 09/09/2007

PONTE, J.P. Tecnologias de Informação e Comunicação na Formação de Professores: Que desafios? *Revista Ibero Americana de Educação*, 24. 2000.

Disponível em: <http://educ.fc.ul.pt/docente/jponte/artigos_pt.htm> Última consulta em: 15/03/04.

PONTE, J.P., OLIVEIRAS, H., VARANDAS, J.M. *As novas tecnologias na formação inicial de professores Análise de uma experiência*. 2002. Disponível em: <http://educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos_pt.htm>. Última consulta em: 15/03/04.

POZO, J. I. A sociedade da aprendizagem e o desafio de converter informação em conhecimento. *Revista Pátio*, Porto Alegre-RS, n. 31, ano 8, p. 9-11, 2004.

RAMOS, C. *O despertar do gênio: Aprendendo com o cérebro inteiro*. Rio de Janeiro: Qualitymark Ed, 2002.

READ, H. *A educação pela arte*. Tradução de Valter Lellés Siqueira. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

RIPPLINGER, H. M. G. *A Simetria nas Práticas Escolares*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Curitiba, PR, Universidade Federal do Paraná, 2006.

VIEIRA, E. R; RIBEIRO, E. S. *Arte e Matemática na escola*. 2002. Disponível em: <http://www.tvebrasil.com.br/SALTO/boletins2002/ame/ame0.htm>. Última consulta em: 15/08/2007.

WAGNER, E. *Construções Geométricas*. R.J: SBM, 1990.

WEINBERG, M. Os burros são raros. *Revista Veja*. São Paulo, ano 40, n. 29, p.13-15, Julho 2007.

WIKIPÉDIA, A Enciclopédia Livre. Delos. s.d. Disponível em <<http://pt.wikipedia.org/wiki/Delos>>. Última consulta em: 20/08/07.

YOKOYAMA, L.Y. *Matemática e Arte: Perspectiva, um Passeio Histórico, Artístico e Teórico Através da Geometria Dinâmica*. Adaptação da tese de Mestrado. Rio de Janeiro, R.J. Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, s.d.

ANEXOS

**Anexo 1: Apostila “O Estudo de Isometrias: Visão Artística e Matemática” -
Utilizada no Teste Exploratório**

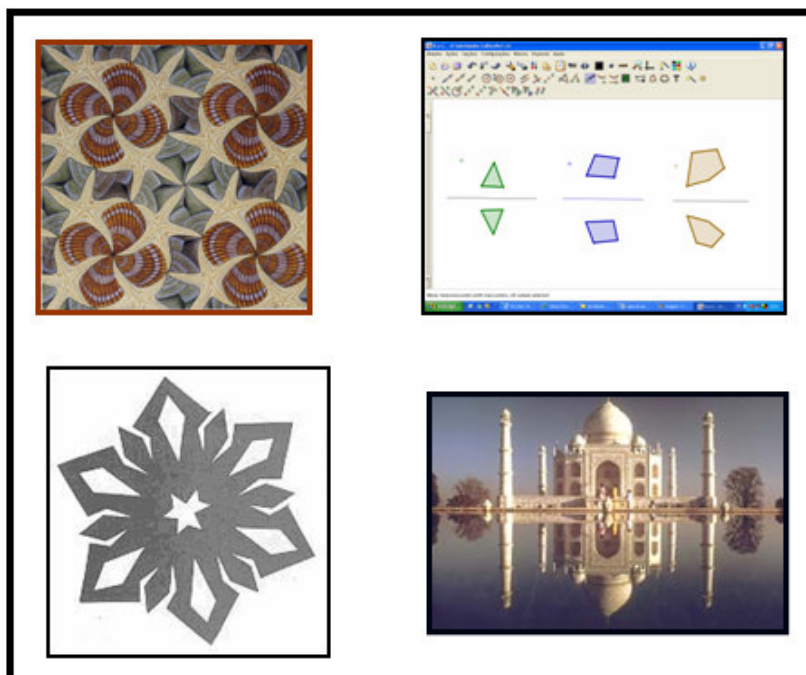


O ESTUDO DE ISOMETRIAS: VISÃO ARTÍSTICA E MATEMÁTICA

Edimara Ribeiro da Silva Soares
Pâmila Camila Almeida
Williana da Silva Azeredo

LICENCIANDAS EM MATEMÁTICA – CEFET-CAMPOS

GILMARA TEIXEIRA BARCELOS
PROFESSORA DO CEFET-CAMPOS - MESTRE EM CIÊNCIAS DE
ENGENHARIA – UENF



O ESTUDO DE ISOMETRIAS: VISÃO ARTÍSTICA E MATEMÁTICA

ATIVIDADES

(As atividades serão resolvidas com o auxílio do *software* Régua e Compasso¹³)

1ª PARTE: Eixo de simetria¹⁴.

1) Abra o arquivo **eixosim1** e trace o eixo de simetria de cada figura, se houver. Salve suas construções, para isso vá em: arquivo, guardar construção (Ctrl-s).

2) Abra o arquivo **eixosim2**. Cada um dos polígonos que esta na tela possui mais de um eixo de simetria. Trace todos os eixos de simetria de cada um deles. Salve suas construções e escreva nos itens abaixo o número de eixos de simetria que você traçou em cada polígono. Movimente um vértice de cada polígono e verifique se as construções estão coerentes com o que foi solicitado.

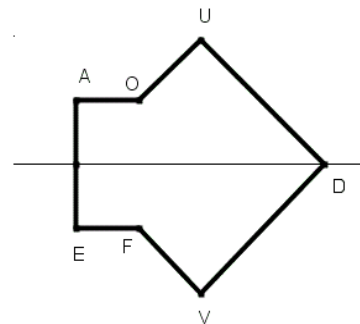
- a) quadrado: _____ c) retângulo: _____
b) triângulo: _____ d) losango: _____

3) Logotipos são figuras que representam uma empresa ou marca. Abra o arquivo **eixosim3**, nele estão alguns logotipos, observe-os. Trace em cada um deles, se possuírem, os eixos de simetria. Salve suas construções e escreva nos itens abaixo o número de eixos de simetria que você traçou em cada logotipo.

- a) _____ b) _____ c) _____ d) _____

4) Pontos que coincidem entre si quando uma figura é dobrada sobre o seu eixo de simetria são chamados correspondentes ou simétricos (LOPES; NASSER, 1996). Na figura abaixo, observe que A e E são correspondentes. Complete corretamente os itens abaixo.

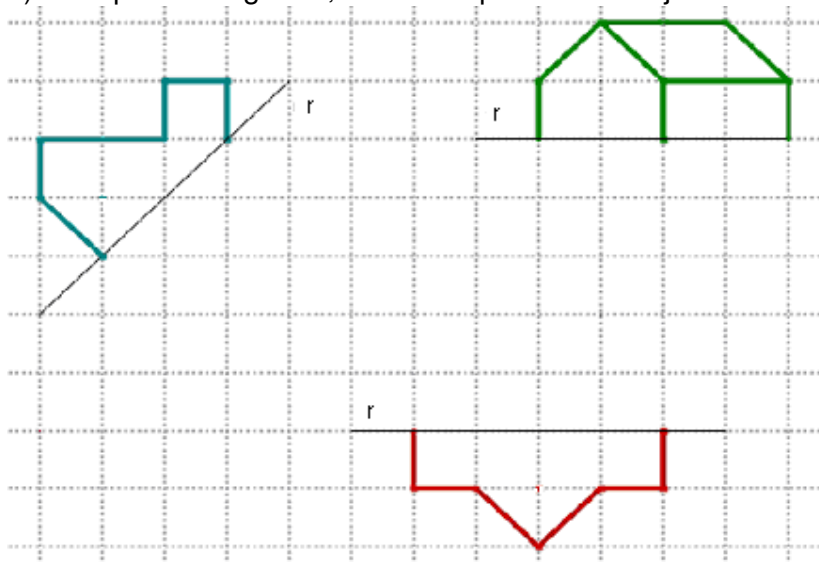
- a) O e são simétricos.
b) U corresponde a
c).....corresponde a ele mesmo.



¹³ O Régua e Compasso é um *software* livre, disponível, em português, no endereço eletrônico <http://www.khemis.hpg.ig.com.br/car/>

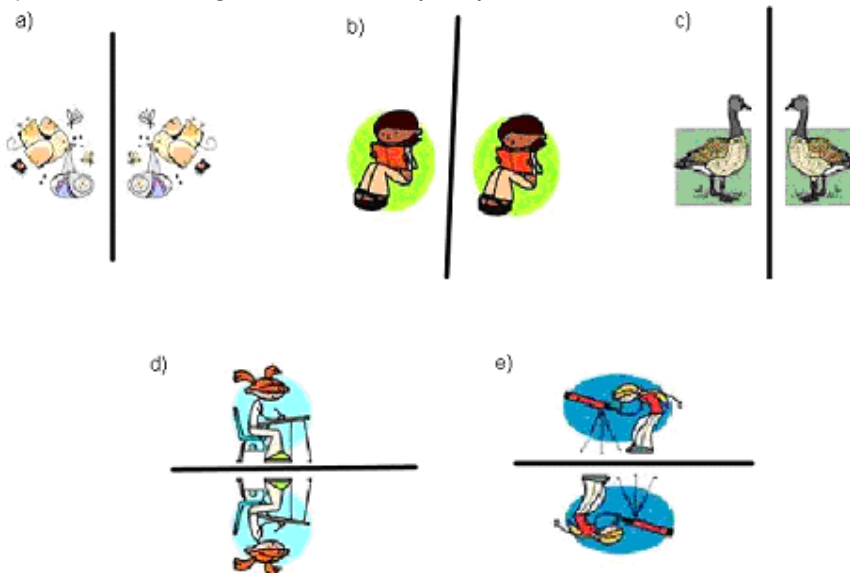
¹⁴ Eixo de simetria é a reta que divide a figura em duas partes que **coincidem exatamente por superposição** (LOPES; NASSER, 1996).

5) Complete as figuras , de modo que a reta r seja o eixo de simetria.




2ª PARTE: Reflexão.


1) Observe as figuras e identifique quais delas estão refletidas em relação a reta.



2) Abra o arquivo **refle2**, observe que o triângulo EFG é a reflexão do triângulo ABC em relação à reta r .

- Clique no ícone  , a seguir clique em um dos vértices do triângulo ABC, movimente-o e observe os dois triângulos.
- Movimente outro vértice do triângulo ABC e observe os dois triângulos.
- Descreva o que você observou.

3) Abra o arquivo **distancia** e determine a distância entre, o ponto P e a reta r. Para tanto:

- a) trace a reta perpendicular a r passando por P (clique no ícone , a seguir clique na reta r, depois no ponto P);
- b) mude a cor e a espessura da linha;
- c) trace sobre a reta perpendicular o segmento com uma extremidade em P e outra sobre r, nomeie esta extremidade de Q;
- d) mostre na tela utilizando os recursos do *software* a medida do segmento traçado e a medida do ângulo que a reta perpendicular forma com a reta r. Anote as medidas;

e) movimente o ponto P e observe a construção feita;

f) salve a construção.

Comentário:


4) Abra o arquivo **refle4** e complete o quadro abaixo, com **sim** para respostas afirmativas e **não** para respostas negativas, para tanto faça as construções necessárias no arquivo que você abriu.

a) b) c) d)

\overline{PQ} é perpendicular a reta r?

Estão P e Q a uma mesma distancia da reta r?

Q é reflexão de P em relação ao segmento que

está traçado? Utilize o ícone  para responder.

5) Com base no que foi respondido no exercício anterior, escreva qual(ais) a(s) condição(ões) para que um ponto seja reflexão do outro em relação a uma reta.

6) Abra o arquivo **refle6**. Observe os pontos **B, C, D e E**. Qual deles é reflexão do ponto **A** em relação à reta **r**? Descreva como você identificou este ponto.


7) Abra o arquivo **refle7** e identifique quais das figuras estão refletidas. Descreva como você identificou.

8) Abra o arquivo **refle8** e desenhe a reflexão de cada uma das figuras em relação à reta **r**. Movimente um dos pontos da figura que já estava no arquivo e verifique se as construções estão coerentes com o que foi solicitado. Movimente a reta **r** para cima ou para baixo e observe as figuras. Descreva o que você observou. Salve sua construção.

9) Abra o arquivo **refle9**, observe que em cada item a bandeira está refletida. Trace o eixo de simetria, movimente uma das bandeiras, observe a outra e verifique se as construções estão coerentes, em cada item, com o que foi solicitado. Salve sua construção.

3ª PARTE: Translação

1) Abra o arquivo **trans1**, complete o quadro abaixo, com **sim** para respostas afirmativas e **não** para respostas negativas, para tanto faça as construções necessárias no arquivo que você abriu.

	a)	b)	c)	d)
\vec{r} e \vec{s} têm o mesmo sentido?				
\vec{r} e \vec{s} têm a mesma direção (são paralelas)?				
\vec{r} e \vec{s} têm o mesmo tamanho?				
\vec{s} é translação de \vec{r} ? (para responder utilize o ícone ).				

2) Com base nas respostas do exercício anterior, escreva a(s) condição(ões) para que uma figura seja translação da outra.

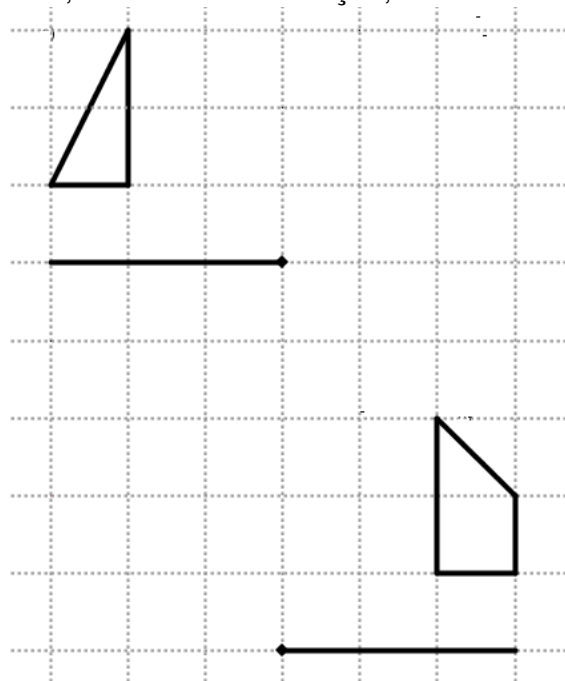
3) Abra o arquivo **trans3** observe que o polígono $A'B'C'D'E'$ é uma translação do polígono $ABCDE$. Trace os segmentos cujas extremidades são vértices correspondentes. Utilizando os recursos do *software* responda:

- a) Os segmentos traçados têm a mesma direção? _____
 b) Os segmentos traçados possuem a mesma medida? _____
 c) Liste os recursos do *software* utilizados para responder os itens a e b.

d) Movimente um dos vértices do polígono $ABCDE$ e refaça os itens a e b.


- a) _____ b) _____


4) Desenhe as imagens das figuras através das translações indicadas. Em cada item, a seta indica a direção, o sentido e a amplitude da translação.



5) Abra o arquivo **trans5**. O ponto **A** da figura foi transladado para o ponto **A'**. Utilizando os recursos do *software* desenhe a partir de **A'** a translação da figura. Movimente um dos pontos e verifique sua construção. Salve sua construção. Descreva a seqüência de passos realizada.

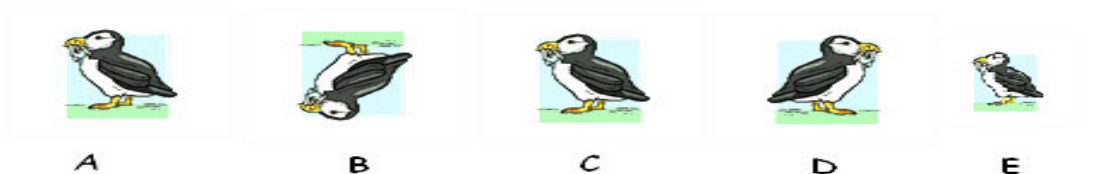
6) Abra o arquivo **trans6**.

a) Utilizando o ícone  aplique a translação relativa ao vetor \vec{a} ao retângulo, usando segmentos verdes. Movimente o vetor \vec{a} e observe a construção. Salve sua construção.

b) Utilizando o ícone  aplique a translação relativa ao vetor \vec{b} ao retângulo, usando segmentos vermelhos. Movimente o vetor \vec{b} e observe a construção. Salve sua construção.

c) Descreva o que você observou a partir da resolução dos itens a e b.

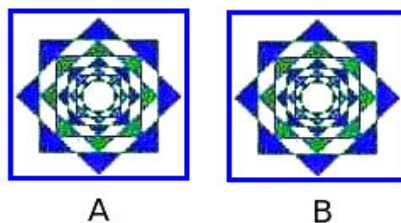
7) Assinale a figura que é a translação da figura A. Justifique sua resposta.



8) A imagem do azulejo **A** por transformação é **B**.

Qual é essa transformação? _____

Existe outra transformação cuja imagem de **A** também é **B**? _____ Em caso afirmativo, qual é? _____




4ª PARTE: Rotação

1) Marque o centro de rotação nos logotipos abaixo, se possuírem.



2) Abra o arquivo **rota2**. Aplique uma rotação de 90° em torno do ponto **O** ao segmento \overline{AB} para tanto, siga os seguintes passos:

- clique no ícone  ;
- clique no ponto **O**;
- clique no ponto **A**;
- digite **90** na janela (solicitação de parâmetro) clique em **OK**. Nomeie este ponto de **A'**;
- clique no ponto **O**;
- clique no ponto **B**;
- digite **90** na janela (solicitação de parâmetro) clique em **OK**; Nomeie este ponto de **B'**;
- trace o segmento $A'B'$;
- Salve sua construção

2.1 A rotação foi no sentido horário ou no sentido anti-horário?

2.2 Trace o os segmentos: \overline{OA} , $\overline{OA'}$, \overline{OB} , $\overline{OB'}$, usando linhas pontilhadas;

2.3 Mostre na tela a medida dos ângulos $\hat{A}OA'$, $\hat{B}OB'$;

2.4 Movimente o ponto **O**, observe a construção e descreva o que você observou.

2.5. Movimente o ponto **A** ou o ponto **B**, observe a construção e descreva o que você observou.

3) Abra o arquivo **rota3**, aplique ao segmento \overline{AB} as rotações indicadas nos itens abaixo:

- 90° no sentido horário em torno do ponto **O** (refaça os itens **a**, **b**, **c**, **d**, **e**, **f**, **g** da atividade 2 substituindo 90 por -90);

- b) 60° no sentido anti-horário em torno do ponto **O**;
- c) 180° em torno do ponto **O**;
- d) Movimente o ponto **O** e observe as construções;
- e) Salve sua construção;
- f) Movimente o ponto **A** e observe as construções;
- 4) Abra o arquivo **rota4**, aplique ao segmento \overline{AB} as rotações indicadas nos itens abaixo:
- a) 90° no sentido horário em torno do ponto **A**
- b) 60° no sentido anti-horário em torno do ponto **A**;
- c) 180° em torno do ponto **A**;
- d) Movimente o ponto **A** e observe as construções;
- e) Salve sua construção;
- f) Movimente o ponto **B** e observe as construções;
- 5) Abra o arquivo **rota5**:
- a) aplique ao triângulo a rotação de 120° no sentido anti-horário em torno do ponto **O**;
- b) aplique ao triângulo construído no item **a** a rotação de 120° no sentido anti-horário em torno do ponto **O**;
- c) aplique ao triângulo construído no item **b** a rotação de 120° no sentido anti-horário em torno do ponto **O**;
- d) Movimente o ponto **O** e observe as construções;
- e) Movimente o ponto **A** e observe as construções;
- e) Salve sua construção.
- 6) Abra o arquivo **rota6** observe que o triângulo $A'B'C'$ é a rotação do triângulo ABC em torno do centro O. Una cada vértice dos dois triângulos ao ponto O, movimente o ponto O observando a construção, a seguir movimente um dos vértices do triângulo ABC observando a construção. Utilizando os recursos do *software* responda:
- a) O segmento \overline{AO} tem a mesma medida de $\overline{A'O}$? _____
- b) O segmento \overline{BO} tem a mesma medida de $\overline{B'O}$? _____
- c) O segmento \overline{CO} tem a mesma medida de $\overline{C'O}$? _____
- d) Mostre na tela a medida dos ângulos $\widehat{AOA'}$, $\widehat{BOB'}$, $\widehat{COC'}$, use cores diferentes. Estes ângulos são congruentes (têm a mesma medida)? _____
- e) movimente o ponto **O** e refaça os itens anteriores.
- a) _____ b) _____ c) _____ d) _____
- 7) Com base no que foi feito no exercício anterior escreva qual(is) a(s) condição(ões) para que uma figura seja a rotação de outra em relação a um ponto.

5ª PARTE : Isometrias: reflexão, translação e rotação

1) Alguns artistas utilizam as isometrias estudadas para compor objetos artísticos. No *power point* abra o arquivo **artes**, nele estão alguns quadros, observe-os. Escreva, nos itens abaixo, as isometrias que você identificou em cada quadro.

Quadro 1: _____

Quadro 2: _____

Quadro 3: _____

Quadro 4: _____

Quadro 5: _____

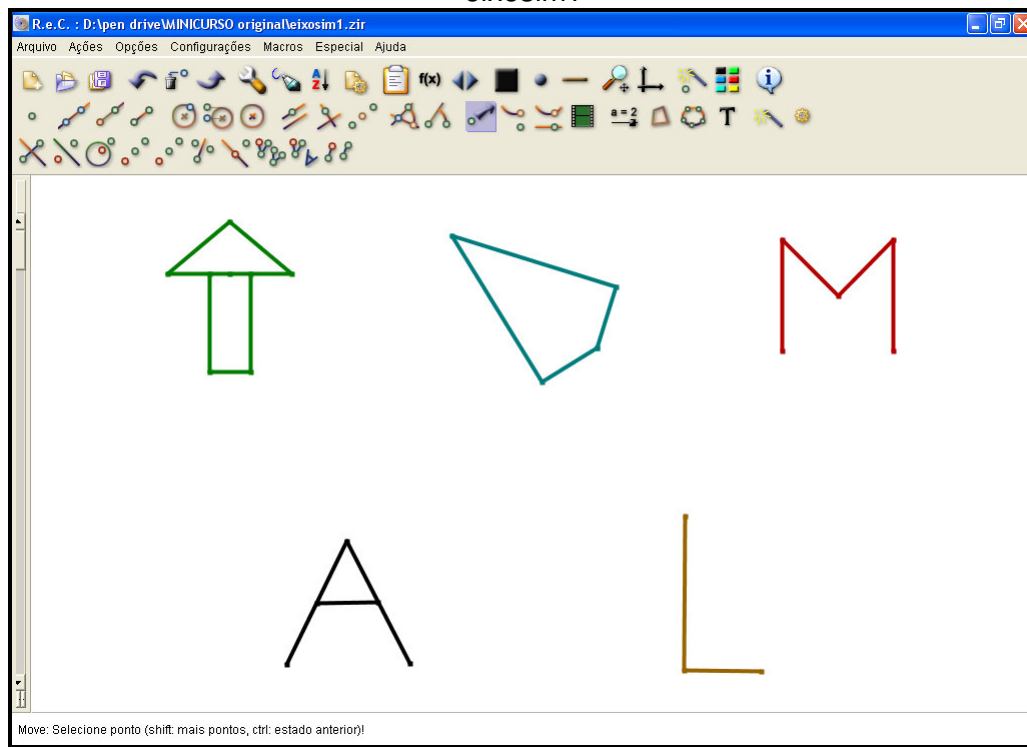
Quadro 6: _____

Quadro 7: _____

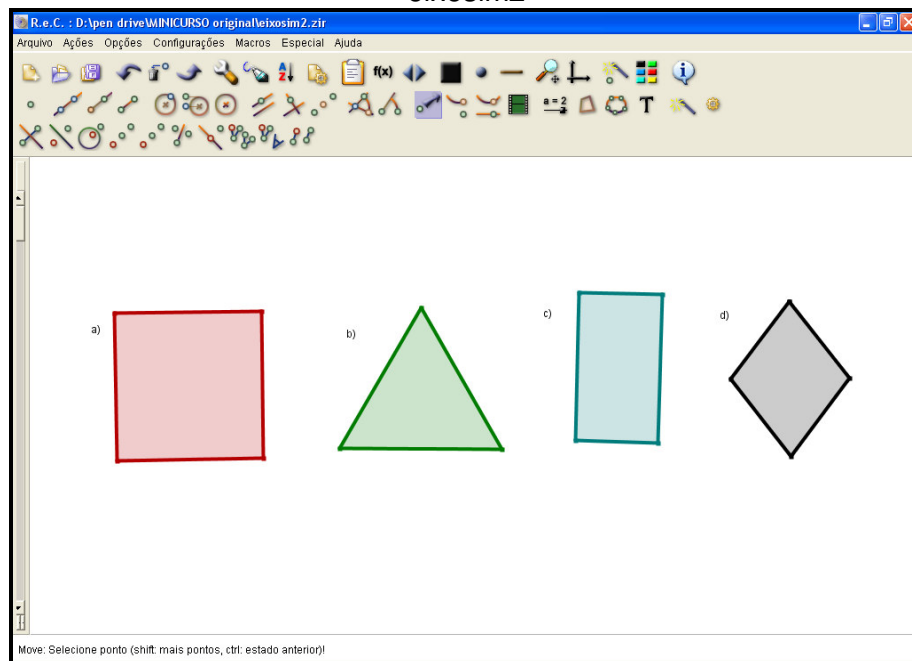
Quadro 8: _____

Anexo 2: Arquivos Eletrônicos Referenciados nas Atividades do Teste Exploratório

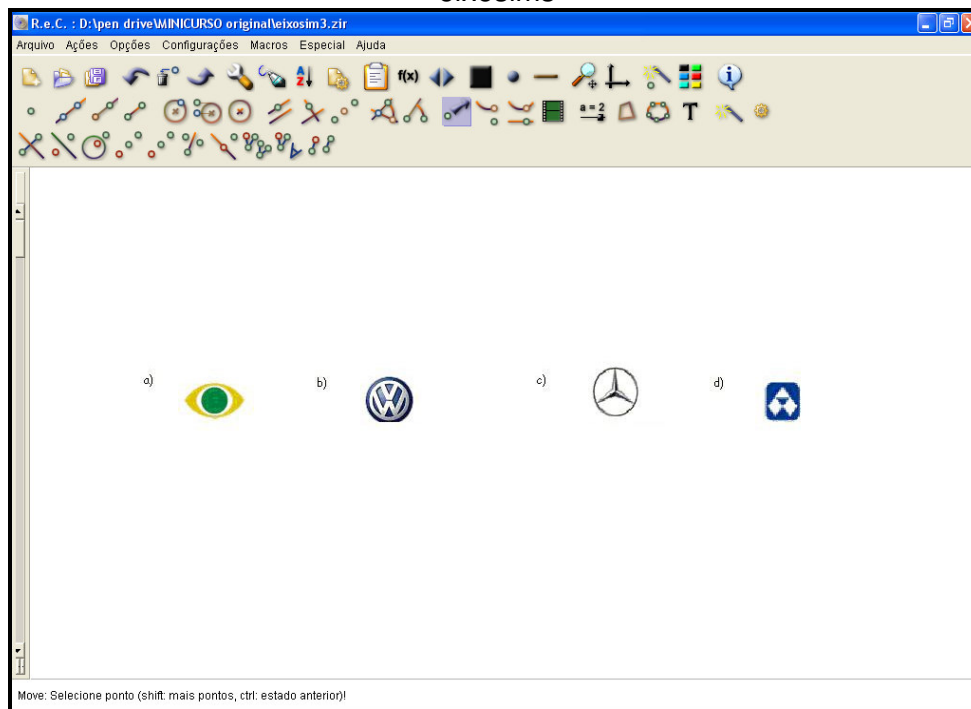
eixosim1



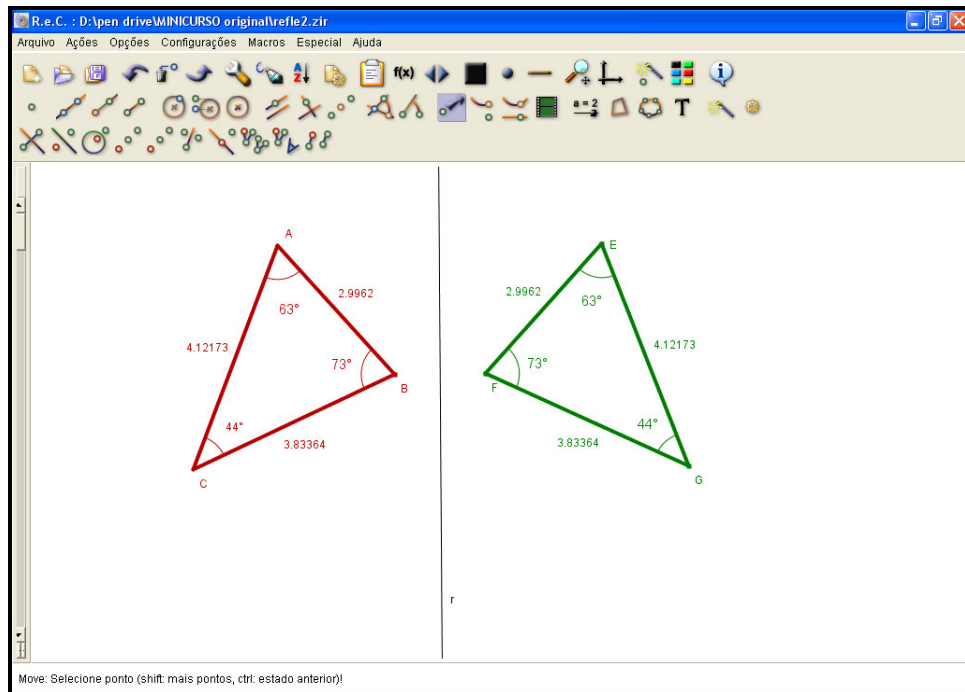
eixosim2



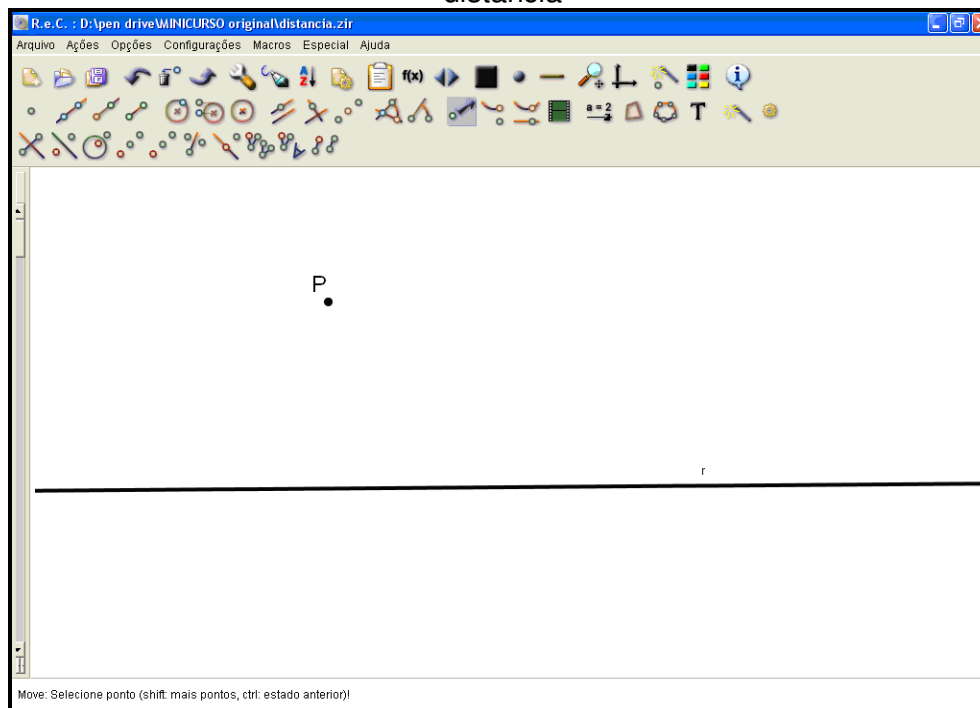
eixosim3



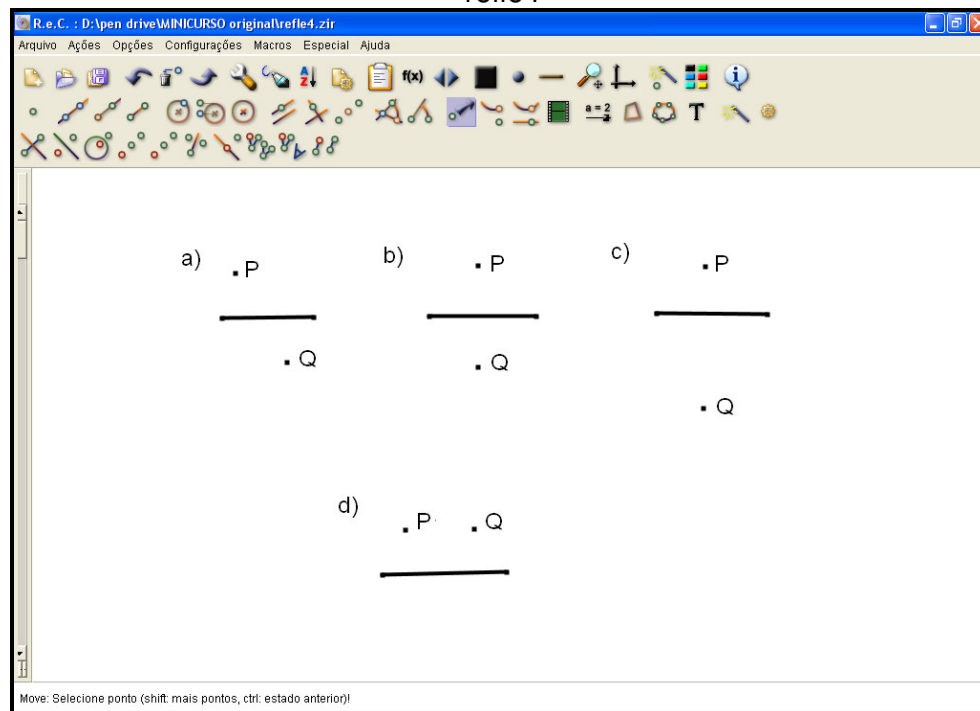
refle2



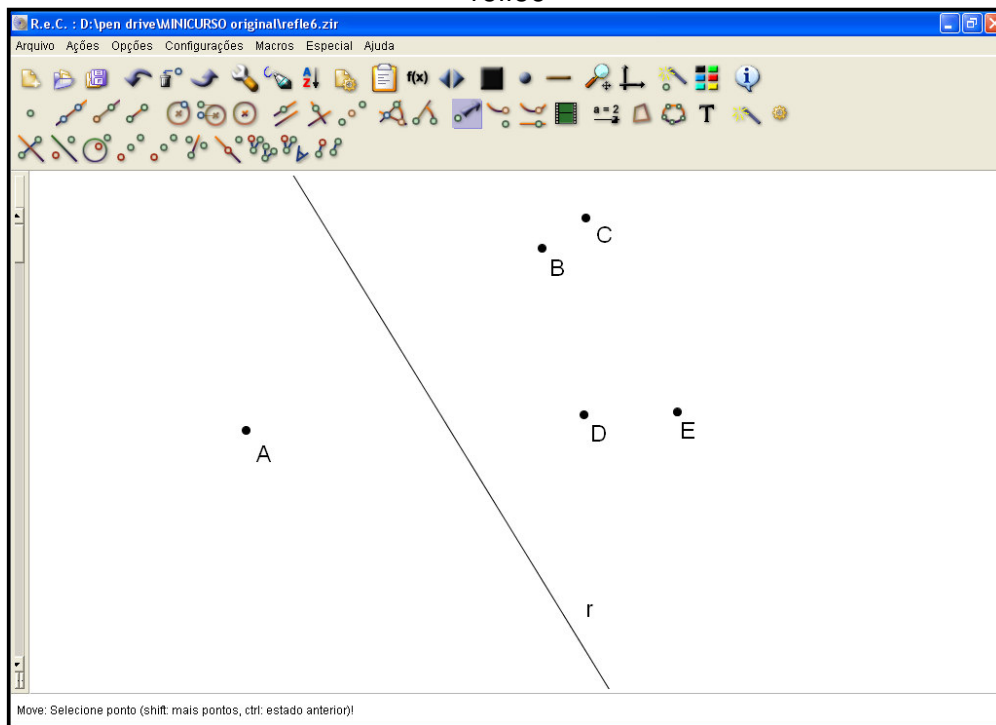
distancia



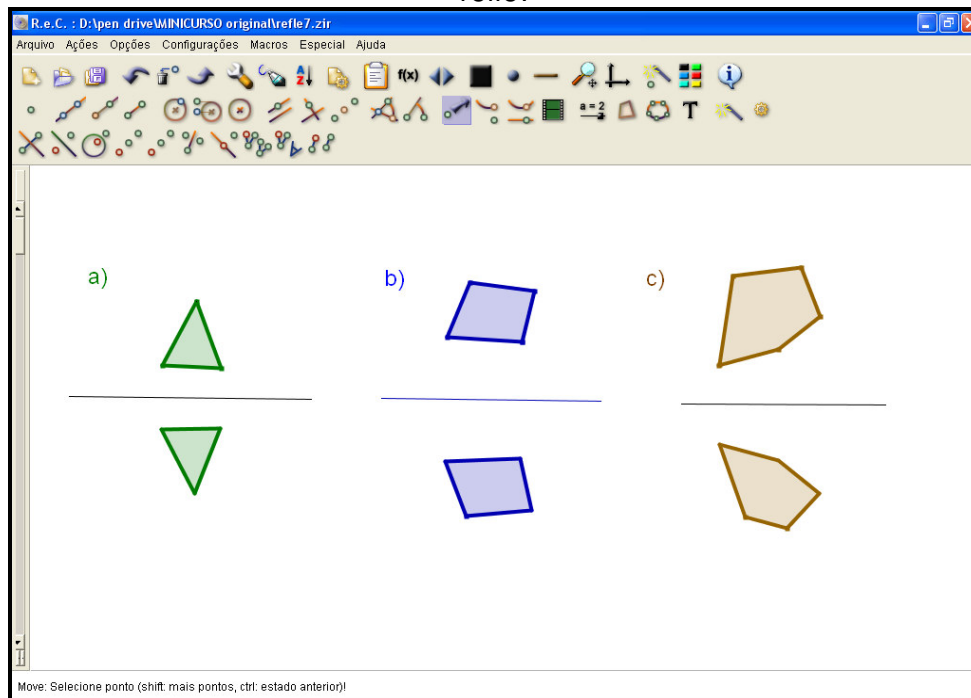
refle4



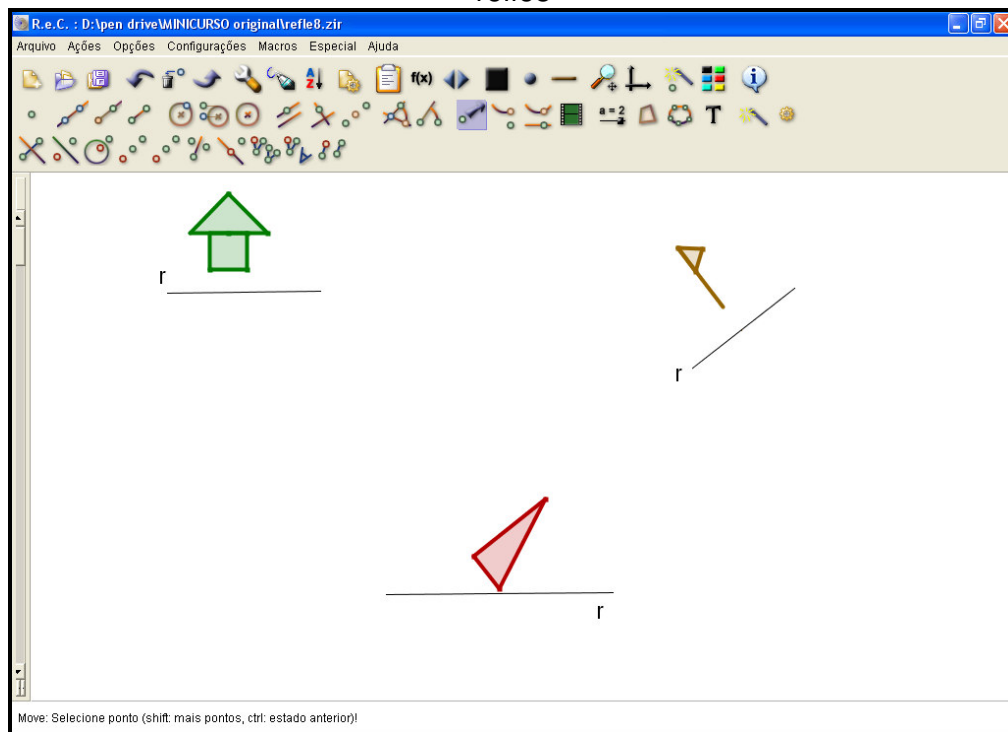
refle6



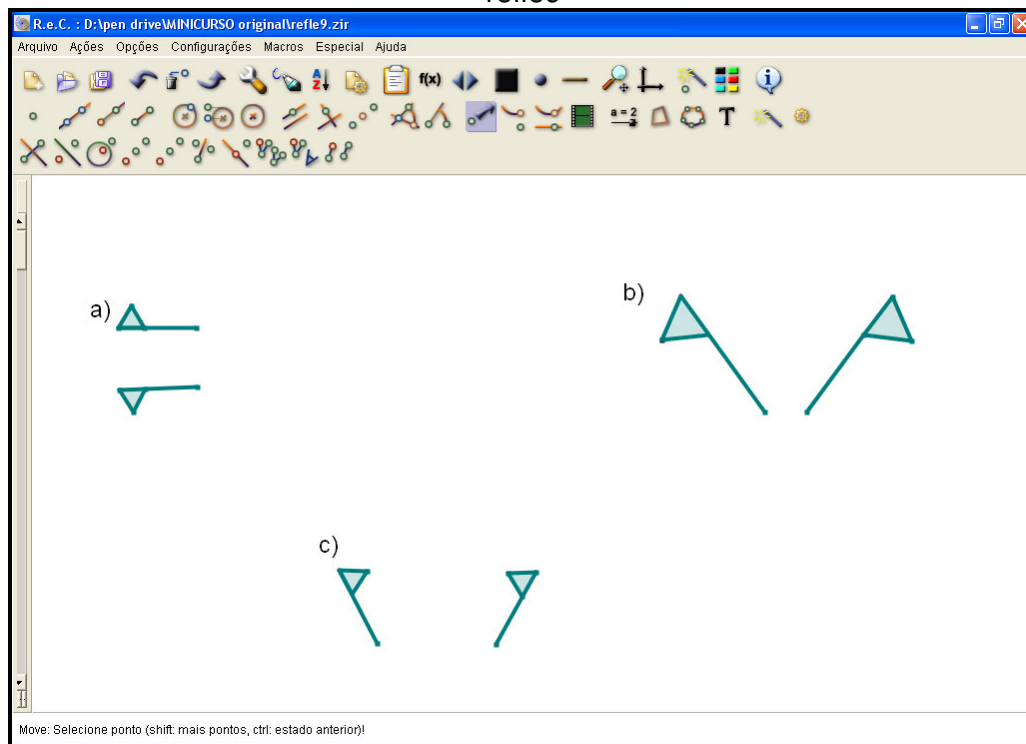
refle7



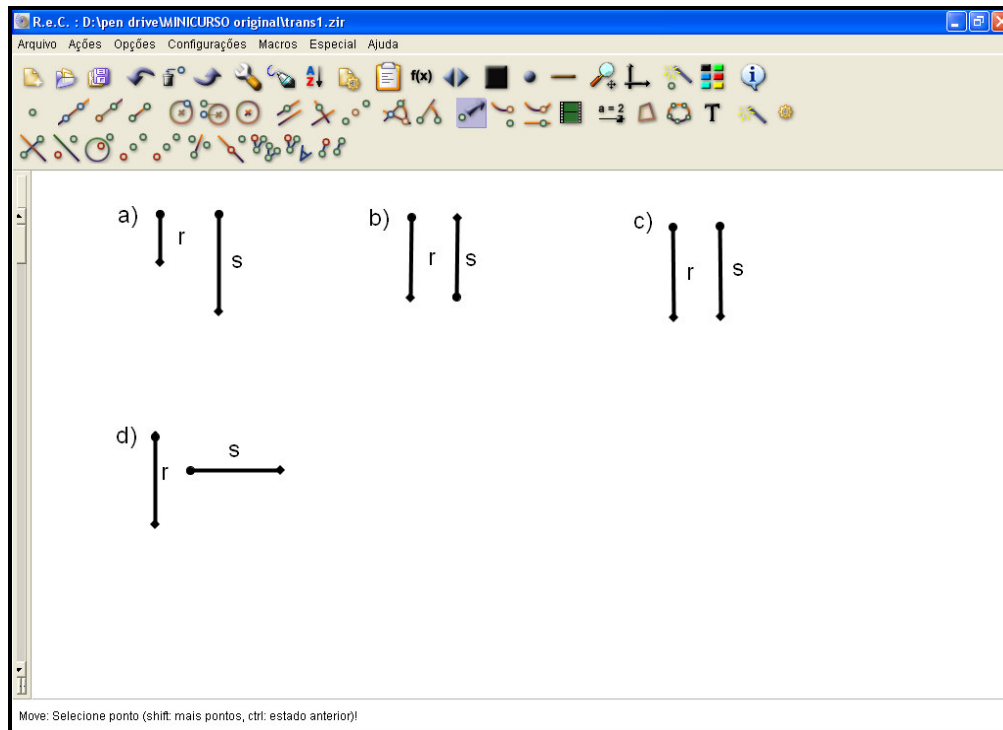
refle8



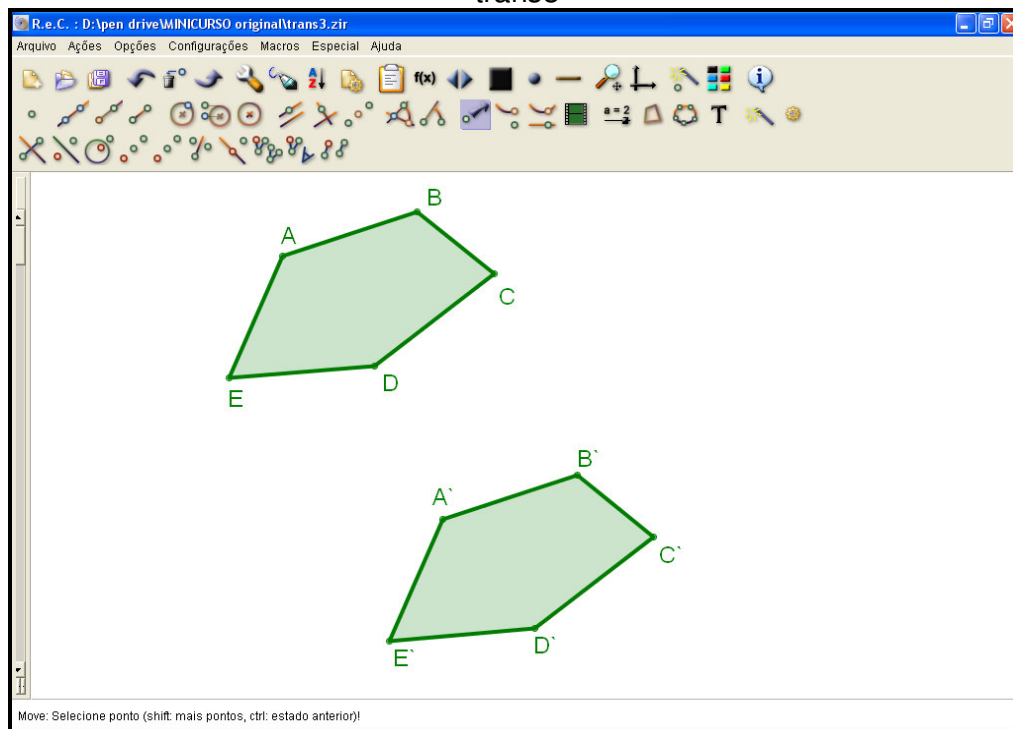
refle9



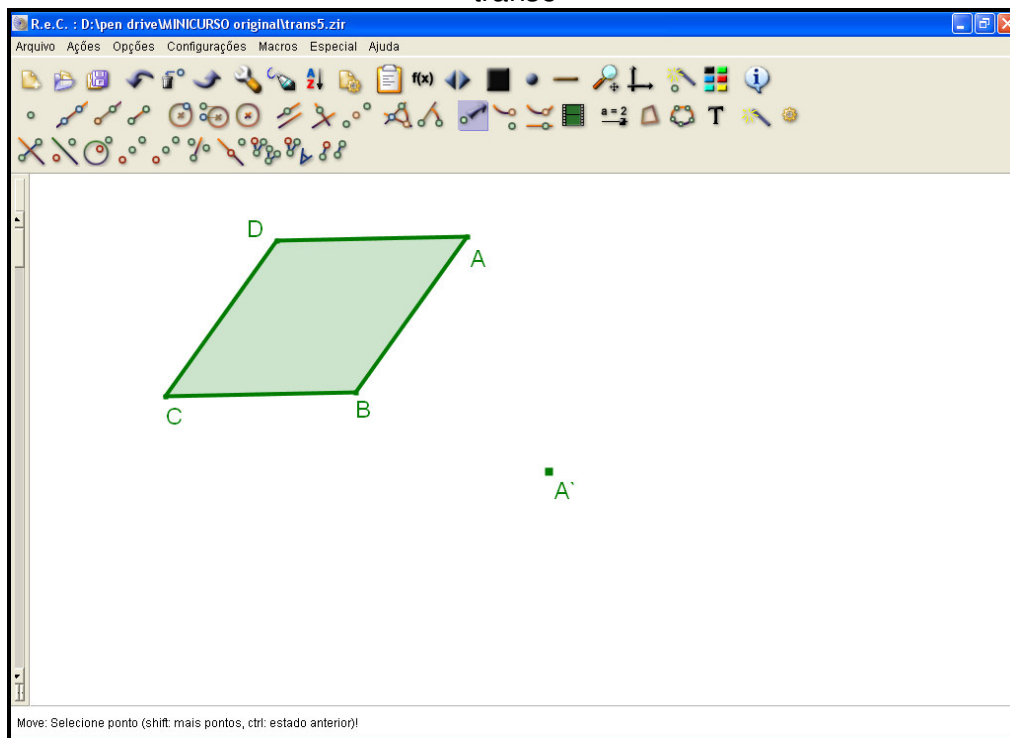
trans1



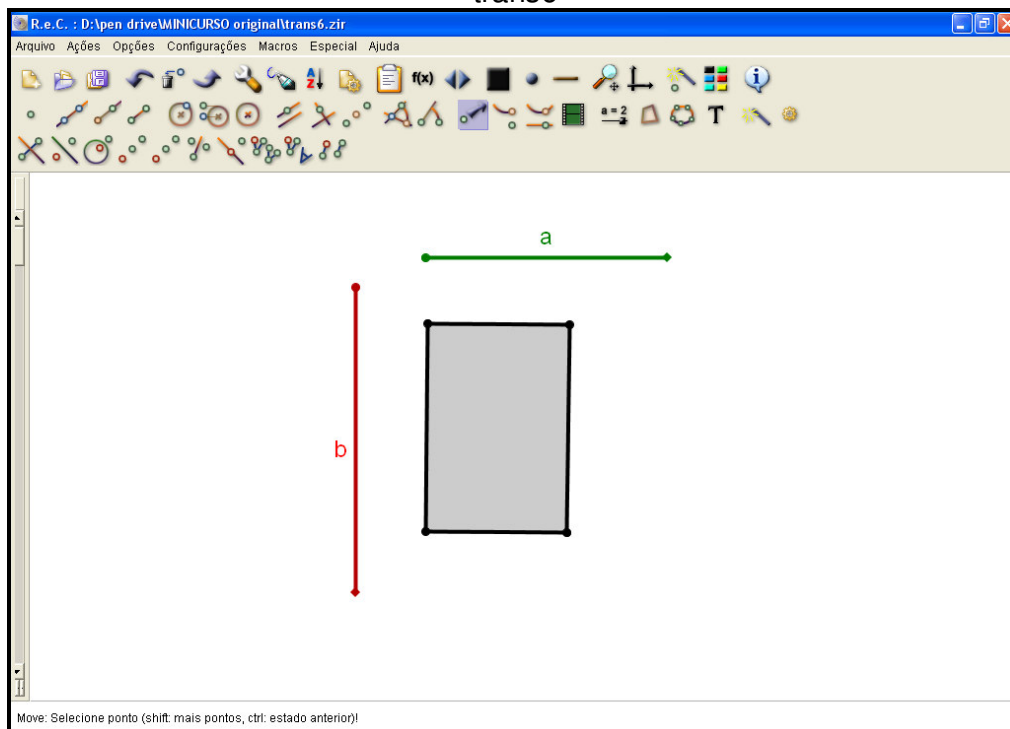
trans3



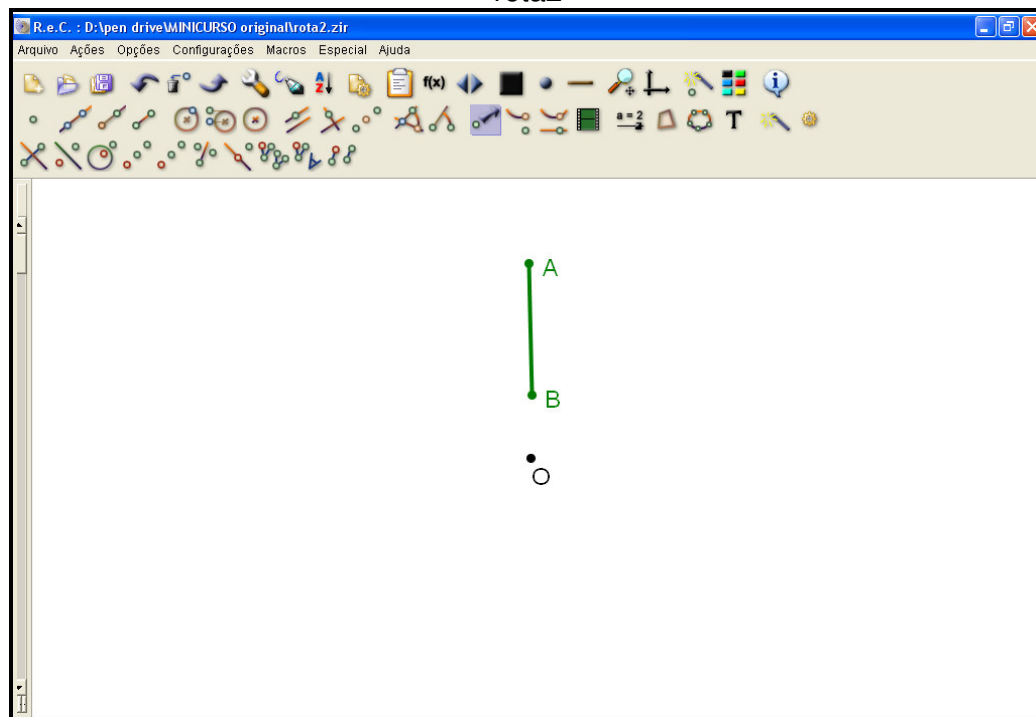
trans5



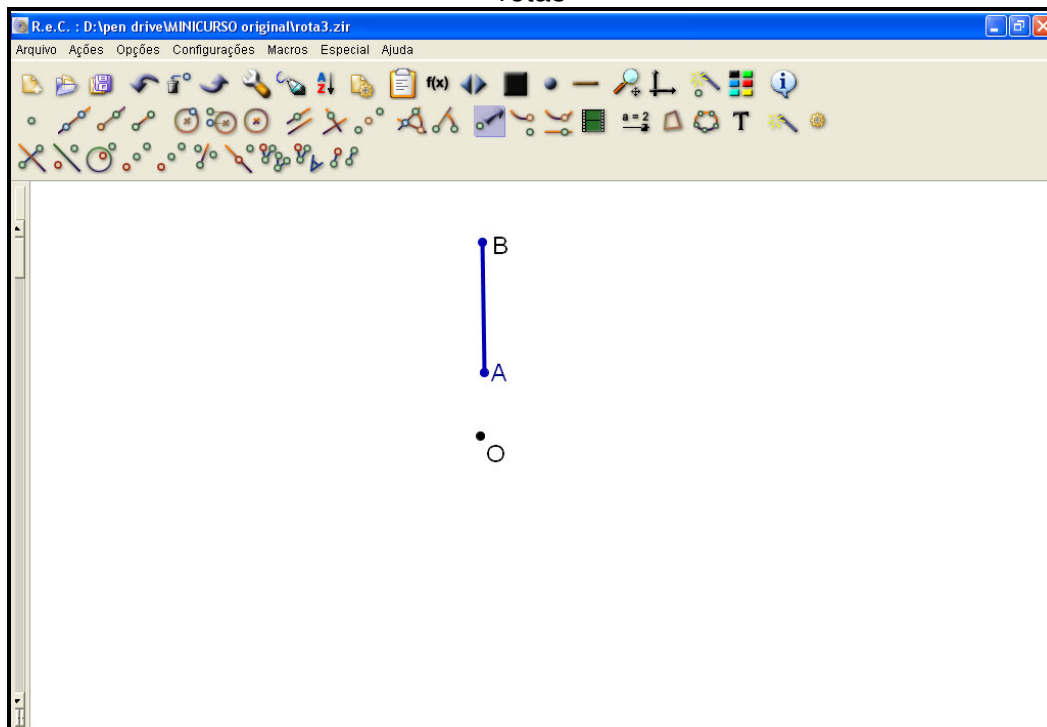
trans6



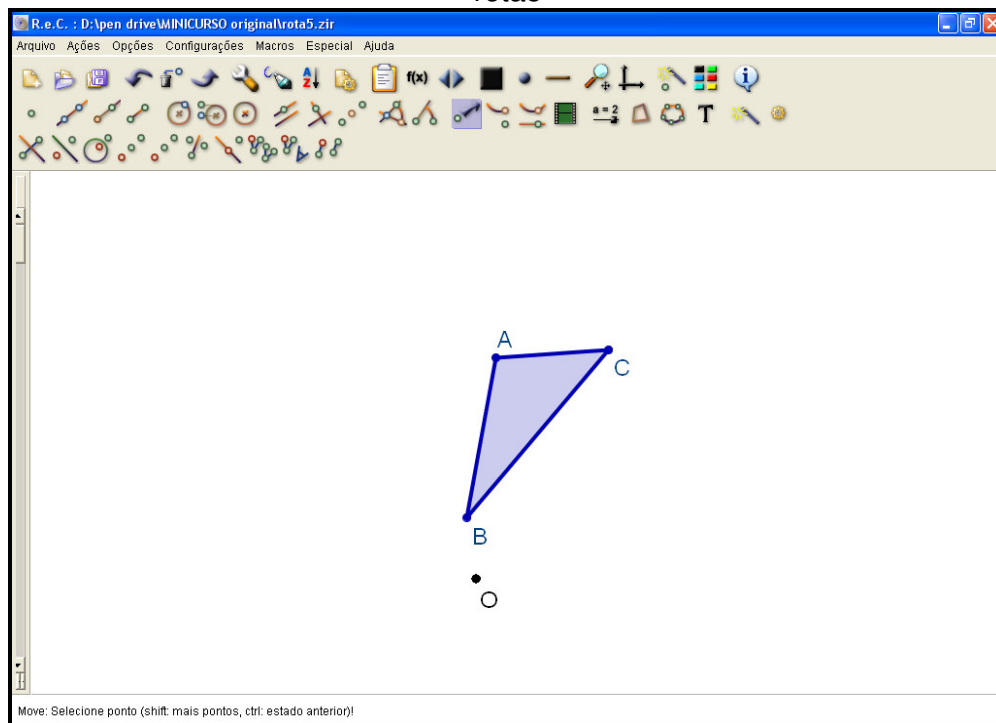
rota2



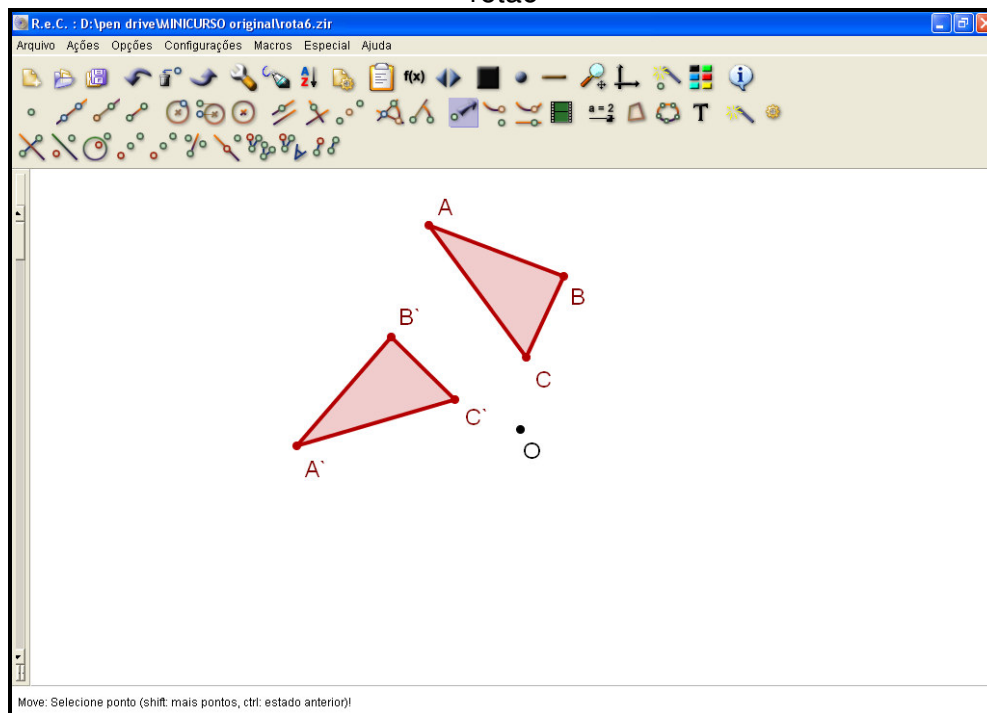
rota3



rota5



rota6



Anexo 3: Figuras (Eixo de Simetria, Reflexão, Translação, Rotação)

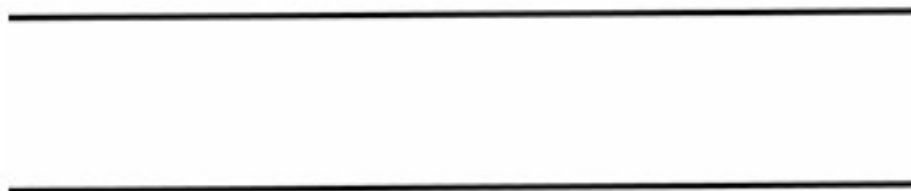
Eixo de Simetria



Reflexão



Translação



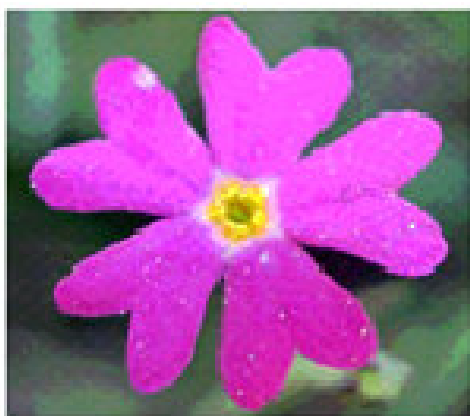
Rotação

Figura A

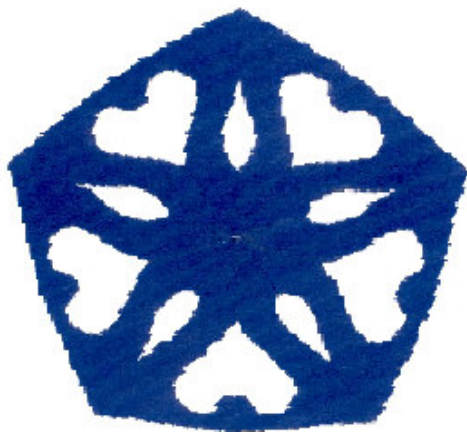
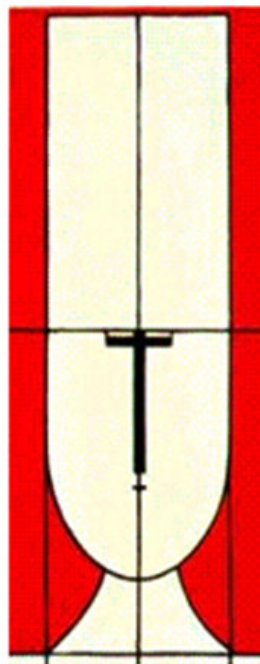
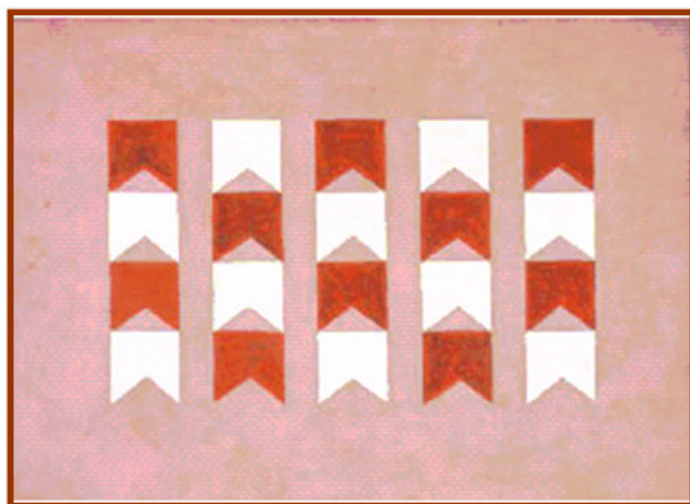


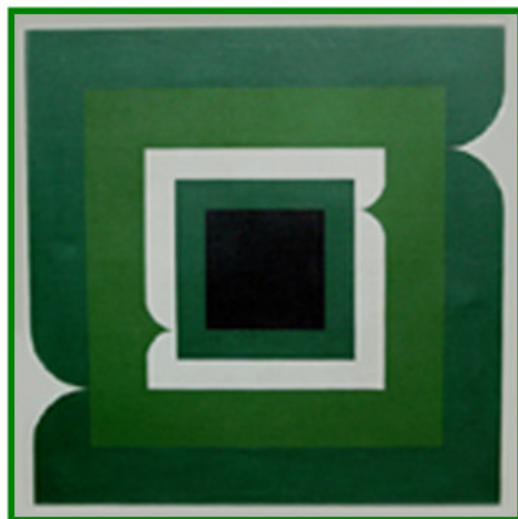
Figura B



Anexo 4: Quadros

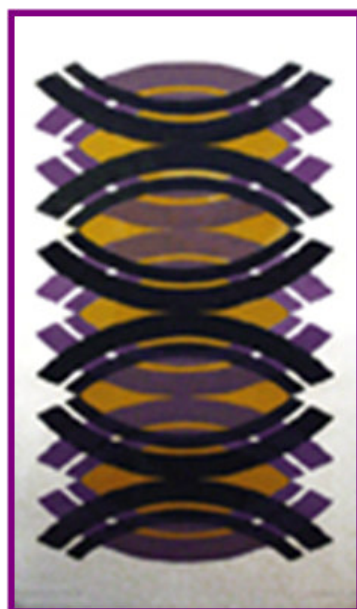
Quadro 1*Milton da Costa**Quadro 2**Volpi*

Quadro 3



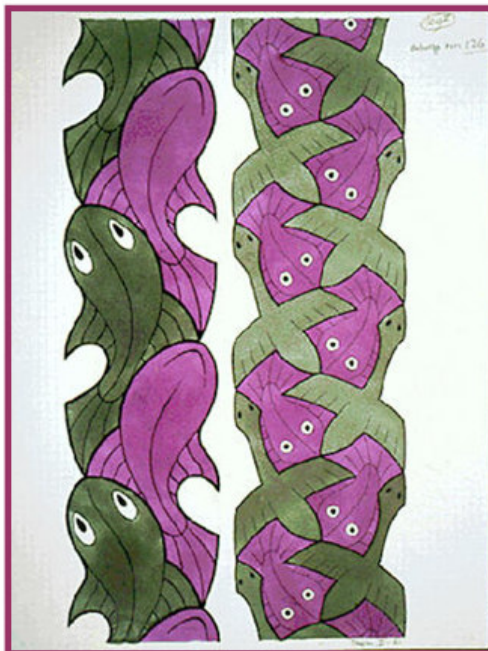
Ivan Serpa

Quadro 4



Odetto Guersoni

Quadro 5

*M. C. Escher*

Quadro 6

*M. C. Escher*

Quadro 7



Odetta Guersoni

Quadro 8



M. C. Escher

Anexo 5: Definições

Definições

- Eixo de simetria divide a figura em duas partes que coincidem exatamente por superposição (LOPES; NASSER, 1996).
- Distâncias entre um ponto e uma reta é a distância entre esse ponto e o pé da perpendicular a reta conduzida pelo ponto (DOLCE; POMPEO, 1993).

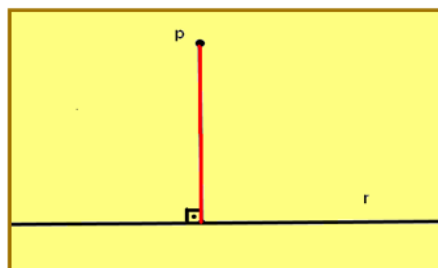


Figura 1: Distância de ponto à reta



- Uma figura é a reflexão de outra se:
 - a linha que une cada par de pontos correspondentes é perpendicular ao eixo de simetria.
 - dois pontos correspondentes estão a mesma distância do eixo de simetria, em lados opostos (LOPES; NASSER, 1996).

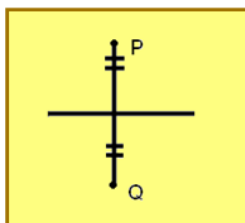
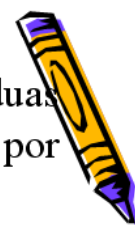


Figura 2: Pontos correspondentes



Obs.: Numa reflexão, a forma e o tamanho da figura são mantidos. Ela é apenas "espelhada" (LOPES; NASSER, 1996).



➤ Translação é uma transformação em que a figura se desloca paralelamente a uma reta. Isto é, todos os pontos da figura são deslocados numa mesma direção (retilínea), com a mesma distância. (LOPES; NASSER, 1996).

Obs.: A forma e o tamanho da figura original são mantidos após uma translação. (LOPES; NASSER, 1996).

Uma translação é determinada pela direção, sentido e amplitude do deslocamento (LOPES; NASSER, 1996).



➤ **Direção** pode ser definida por duas retas paralelas. Quando nos referimos à horizontalidade ou verticalidade de um objeto, estamos a referir-nos, exatamente, à sua direção (WIKIPÉDIA, s.d.)

➤ **Sentido** é uma propriedade associada a uma direção. Se considerarmos que uma direção pode ser representada por uma reta, cada direção pode ter dois sentidos que indicam os dois percursos possíveis sobre essa direção (WIKIPÉDIA, s.d.)



Figura 3: Direção e Sentido



➤ **Rotação** é um “giro” da figura em torno de um ponto fixo O (ponto que pode ou não pertencer a figura).

Isto é, para todo ponto P do plano, P' é obtido sobre uma circunferência de centro O e raio OP deslocado de um ângulo β (BIEMBENGUT;SALETT, 2000).

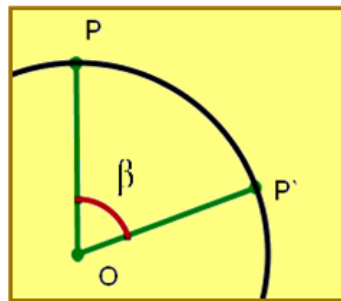


Figura 4: Rotação

Na Matemática, consideramos três tipos de ornamentos: faixa, roseta e mosaico (BIEMBENGUT;SALETT, 2000).

➤ A faixa é um ornamento ilimitado, composto entre duas retas paralelas. A simetria fundamental para sua composição é a translação (BIEMBENGUT;SALETT, 2000).



Figura 5: Faixa

➤ A roseta é um ornamento limitado, composto em um círculo. A simetria fundamental para sua composição é a rotação (BIEMBENGUT;SALETT, 2000).



Figura 5: Roseta

➤ O mosaico é um ornamento ilimitado no plano. A simetridade fundamental é a translação em duas direções. Para compor um mosaico é necessária uma rede. Existem cinco tipos fundamentais de rede: quadrados, retângulos, paralelogramos, triângulos eqüiláteros e losango (BIEMBENGUT;SALETT, 2000).



Figura 7: Mosaico

Anexo 6: Cartaz

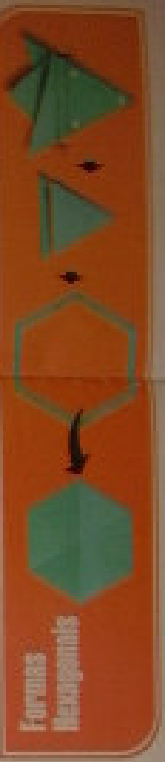
A matemática e a arte da dobradura



Das atividades a seguir, a turma poderá compreender a importância da matemática na arte da dobradura, através da construção de formas geométricas básicas.

FORMA BÁSICA
A seguir, para obter em formato hexagonal, a partir da forma básica.

Exercícios para dobrarem a partir da forma básica.



Formas Hexagonais

Formas Pentagonais

Anexo 7: Questionário para Teste Exploratório das Atividades

Questionário

Prezado(a) Participante

Este questionário faz parte de um trabalho monográfico desenvolvido na Licenciatura em Matemática do CEFET Campos. Seu objetivo é verificar se as atividades estão contribuindo para a construção de conhecimentos dos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental. Para atingir tal objetivo contamos com sua avaliação sobre as atividades desenvolvidas.

Agradecemos sua participação na realização deste trabalho.

Nome (opcional): _____

1- Os enunciados das atividades estão claros?

Sim Não Parcialmente

Caso sua opção tenha sido "Parcialmente", enumere a(s) atividade(s) cujo(s) enunciado(s) precisaria(m) ser melhorado(s). E se possível dê sua sugestão sobre tal.

2- Você classificaria o nível das atividades como:

muito fácil fácil moderado difícil muito difícil

Comente _____

3- As atividades realizadas despertaram interesse sobre o tema em estudo?

Sim Não Parcialmente

4- Assinale a(s) alternativa(s) que apresenta(m) aspectos presentes nas atividades desenvolvidas:

a) Criatividade;

b) Raciocínio;

c) Repetição;

d) Memorização;

e) Troca de idéias;

f) Outros: _____

5- Você considera que as atividades contribuíram para compreensão do tema em estudo (Isometrias)?

Sim Não Parcialmente

Por quê?

6- Você considera possível aplicar as atividades desenvolvidas a alunos do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental?

Sim Não Parcialmente

Caso sua opção tenha sido “Parcialmente”, enumere a(s) atividade(s) cujo(s) enunciado(s) precisaria(m) ser melhorado(s). E se possível dê sua sugestão sobre tal.

7- Você já havia estudado as Isometrias?

Sim Não Parcialmente

Em caso afirmativo

7.1- Em que etapa de sua vida escolar? _____

7.2 - A metodologia utilizada foi a mesma desta vez?

Sim Não Parcialmente

8- Você já utilizou *software* educacional, ou outro recurso tecnológico, em alguma aula de Matemática?

Sim Não

8.1- Em caso afirmativo, como:

Professor Aluno

Cite o(s) nome(s) do(s) *software(s)*: _____

9- Na sua opinião, aprender a utilizar o *software* Régua e Compasso (R.e C.) foi:

muito fácil fácil moderado difícil muito difícil

Comente _____

9.1- Caso você tenha achado a aprendizagem do *software* R. e C. “difícil” ou “muito difícil”, ainda assim julga válida a sua utilização?

Sim Não

Comente _____

10- De maneira geral, você considera que o uso de *softwares* educacionais favorece a construção de conhecimentos matemáticos?

Sim Não

Por
quê? _____

11- Você considera que o papel do professor durante a utilização de *softwares* educacionais, é:

muito importante; importante; pouco importante;

desnecessário; quase desnecessário.

Comente: _____

12-Dê sua opinião sobre a importância do uso das Tecnologias de Informação (TIC) na educação, apontando possíveis vantagens e desvantagens.

Anexo 8: Questionário para Validação das Atividades

Prezado(a) Aluno(a)

Este questionário faz parte de um trabalho monográfico desenvolvido na licenciatura em Matemática do CEFET Campos. Seu objetivo é verificar se as atividades contribuíram para a construção do conhecimento. Para atingir tal objetivo contamos com sua avaliação sobre as atividades desenvolvidas.

Nome (opcional): _____

1- Você classificaria o nível das atividades como:

Muito fácil Fácil Moderado Difícil Muito difícil

2- As atividades realizadas despertaram interesse sobre o tema em estudo?

Sim Não Parcialmente

3- Assinale a(s) alternativa(s) que apresenta(m) aspectos presentes nas atividades desenvolvidas:

a) Criatividade;

b) Raciocínio;

c) Repetição;

d) Memorização;

e) Troca de idéias;

f) Outros: _____

4- Você considera que as atividades contribuíram para a compreensão do tema em estudo (Isometrias: reflexão, translação, rotação)?

Sim Não Parcialmente

5- Você já havia estudado as Isometrias?

Sim Não Parcialmente

6- Você já utilizou *software* educacional, ou outro recurso tecnológico, em alguma aula de Matemática?

Sim Não

6.1- Em caso afirmativo cite o(s) nome(s) do(s) *software(s)*:

7- Na sua opinião, aprender a utilizar o *software* Régua e Compasso (R.e C.) foi:

muito fácil fácil moderado difícil muito difícil

8- Você considera que o papel do professor durante a utilização de *softwares* educacionais é:

Muito importante; importante; pouco importante;

quase desnecessário; desnecessário;

9- Na sua opinião foi interessante ver a Matemática relacionada à Arte:

9.1- Nos quadro? Sim Não. Por quê? _____

9.2- Nos kirigamis? Sim Não. Por quê? _____

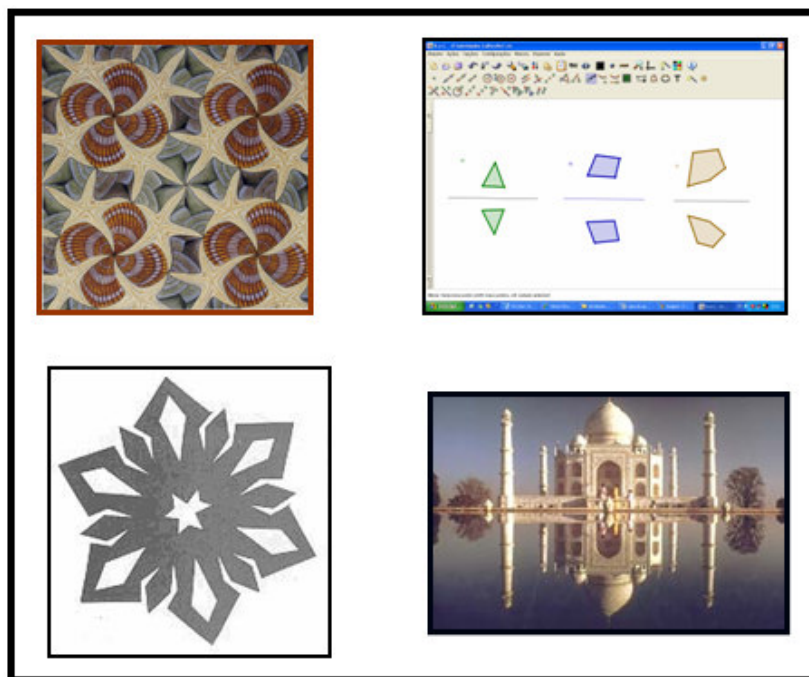
**Anexo 9: Apostila “O Estudo de Isometrias: Visão Artística e Matemática”
Elaborada para validação das Atividades**



O ESTUDO DE ISOMETRIAS: VISÃO ARTÍSTICA E MATEMÁTICA

Edimara Ribeiro Da Silva Soares
Pâmila Camila Almeida
Williana da Silva Azeredo
LICENCIANDAS EM MATEMÁTICA – CEFET-CAMPOS

GILMARA TEIXEIRA BARCELOS
PROFESSORA DO CEFET-CAMPOS - MESTRE EM CIÊNCIAS DE ENGENHARIA – UENF



O ESTUDO DE ISOMETRIAS: VISÃO ARTÍSTICA E MATEMÁTICA

ATIVIDADES

(As atividades serão resolvidas com o auxílio do *software* Régua e Compasso¹⁵)

1ª PARTE: Eixo de simetria¹⁶.

1) Abra o arquivo **eixosim1** e trace o eixo de simetria de cada figura, se houver. Salve suas construções, para isso vá em: arquivo, guardar construção (Ctrl-s).

2) Abra o arquivo **eixosim2**. Cada um dos polígonos que esta na tela possui mais de um eixo de simetria. Trace todos os eixos de simetria de cada um deles. Salve suas construções e escreva nos itens abaixo o número de eixos de simetria que você traçou em cada polígono. Movimente um vértice de cada polígono e verifique se as construções estão coerentes com o que foi solicitado.

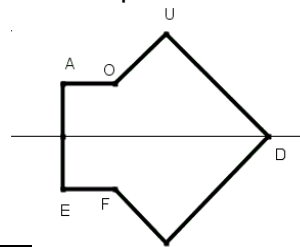
- a) quadrado: _____ c) retângulo: _____
 b) triângulo: _____ d) losango: _____

3) Logotipos são figuras que representam uma empresa ou marca. Encontram-se abaixo alguns logotipos, observe-os. Trace em cada um deles, se possuírem, os eixos de simetria.



4) Pontos que coincidem entre si quando uma figura é dobrada sobre o seu eixo de simetria são chamados correspondentes ou simétricos (LOPES; NASSER, 1996). Na figura abaixo, observe que A e E são correspondentes. Complete corretamente os itens abaixo.

- a) O e são simétricos.
 b) U corresponde a

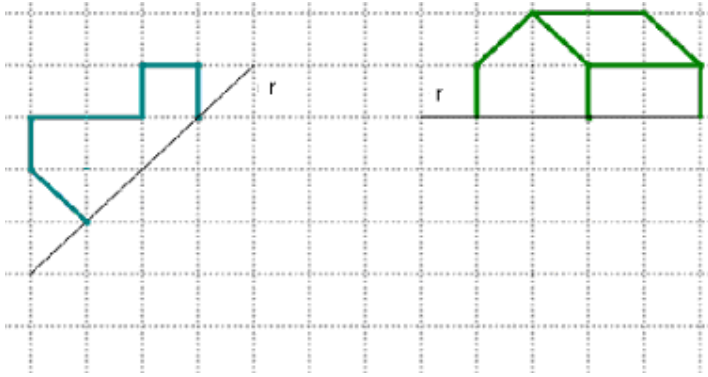


¹⁵ O Régua e Compasso é um *software* livre, disponível, em português, no endereço eletrônico <http://www.khemis.hpg.ig.com.br/car/>

¹⁶ Eixo de simetria é a reta que divide a figura em duas partes que **coincidem exatamente por superposição** (LOPES; NASSER, 1996).

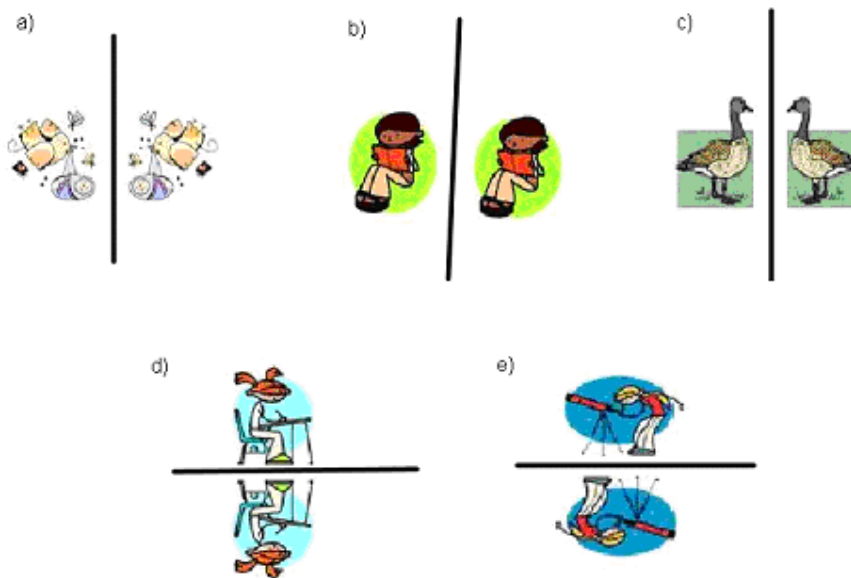
c).....corresponde a ele mesmo.

5) Complete as figuras, de modo que a reta r seja o eixo de simetria.




2ª PARTE: Reflexão.

1) Observe as figuras e identifique quais delas estão refletidas em relação à reta.




2) Abra o arquivo **refle2**, observe que o triângulo EFG é a reflexão do triângulo ABC em relação à reta r .

a) Clique no ícone , a seguir clique em um dos vértices do triângulo ABC, movimente-o e observe os dois triângulos.

b) Movimente outro vértice do triângulo ABC e observe os dois triângulos.

c) Descreva o que você observou.

3) Abra o arquivo **distancia** e determine a distância entre, o ponto P e a reta r . Para tanto:

a) trace a reta perpendicular a r passando por P (clique no ícone , a seguir clique na reta r , depois no ponto P);

b) mude a cor e a espessura da linha;

c) trace sobre a reta perpendicular o segmento com uma extremidade em P e outra sobre r , nomeie esta extremidade de Q;

d) mostre na tela utilizando os recursos do *software* a medida do segmento traçado e a medida do ângulo que a reta perpendicular forma com a reta r . Anote as medidas;

e) movimente o ponto P e observe a construção feita;

f) salve a construção.

Comentário:


4) Abra o arquivo **refle4** e complete o quadro abaixo, com **sim** para respostas afirmativas e **não** para respostas negativas, para tanto faça as construções necessárias no arquivo que você abriu.

- a) b) c) d)

\overline{PQ} é perpendicular a reta r ?

Estão P e Q a uma mesma distância da reta r ?

Q é reflexão de P em relação ao segmento que

está traçado? Utilize o ícone  para responder.

5) Com base no que foi respondido no exercício anterior, escreva qual(ais) a(s) condição(ões) para que um ponto seja reflexão do outro em relação a uma reta.

6) Abra o arquivo **refle6**. Observe os pontos **B, C, D e E**. Qual deles é reflexão do ponto **A** em relação à reta **r**? Descreva como você identificou este ponto.


7) Abra o arquivo **refle7** e identifique quais das figuras estão refletidas. Descreva como você identificou.

8) Abra o arquivo **refle8** e desenhe a reflexão de cada uma das figuras em relação à reta **r**. Movimente um dos pontos da figura que já estava no arquivo e verifique se as construções estão coerentes com o que foi solicitado. Movimente a reta **r** para cima ou para baixo e observe as figuras. Descreva o que você observou. Salve sua construção.

9) Abra o arquivo **refle9**, observe que em cada item a bandeira está refletida. Trace o eixo de simetria, movimente uma das bandeiras, observe a outra e verifique se as construções estão coerentes, em cada item, com o que foi solicitado. Salve sua construção.

3ª PARTE: Translação

1) Abra o arquivo **trans1**, complete o quadro abaixo, com **sim** para respostas afirmativas e **não** para respostas negativas, para tanto faça as construções necessárias no arquivo que você abriu.

	a)	b)	c)	d)
\vec{r} e \vec{s} têm o mesmo sentido?				
\vec{r} e \vec{s} têm a mesma direção (são paralelas)?				
\vec{r} e \vec{s} têm o mesmo tamanho?				
\vec{s} é translação de \vec{r} ? (para responder utilize o ícone ).				

2) Com base nas respostas do exercício anterior, escreva a(s) condição (ões) para que uma figura seja translação da outra.

3) Abra o arquivo **trans3** observe que o polígono $A'B'C'D'E'$ é uma translação do polígono $ABCDE$. Trace os segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$, $\overline{EE'}$. Utilizando os recursos do *software* responda:

- a) Os segmentos traçados têm a mesma direção? _____
- b) Os segmentos traçados possuem a mesma medida? _____
- c) Liste os recursos do *software* utilizados para responder os itens a e b.

d) Movimente um dos vértices do polígono $ABCDE$ e refaça os itens a e b.


a) _____ b) _____


4) Desenhe as imagens das figuras através das translações indicadas. Em cada item, a seta indica a direção, o sentido e a amplitude da translação.



5) Abra o arquivo **trans5**. O ponto **A** da figura foi transladado para o ponto **A'**. Utilizando os recursos do *software* desenhe a partir de **A'** a translação da figura. Movimente um dos pontos e verifique sua construção. Salve sua construção. Descreva a seqüência de passos realizada.

6) Abra o arquivo **trans6**.

a) Utilizando o ícone  aplique a translação relativa ao vetor \vec{a} ao retângulo, usando segmentos verdes. Movimente o vetor \vec{a} e observe a construção. Salve sua construção.

b) Utilizando o ícone  aplique a translação relativa ao vetor \vec{b} ao retângulo, usando segmentos vermelhos. Movimente o vetor \vec{b} e observe a construção. Salve sua construção.

c) Descreva o que você observou a partir da resolução dos itens a e b.

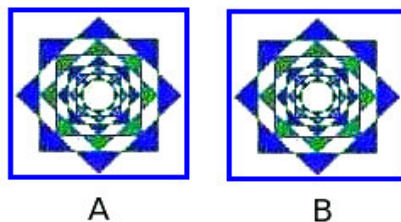
7) Assinale a figura que é a translação da figura A.



8) A imagem do azulejo **A** por transformação é **B**.

Qual é essa transformação? _____

Existe outra transformação cuja imagem de **A** também é **B**? _____ Em caso afirmativo, qual é? _____




4ª PARTE: Rotação

1) Marque o centro de rotação nos logotipos abaixo, se possuírem.



2) Abra o arquivo **rota2**. Aplique uma rotação de 90° em torno do ponto **O** ao segmento \overline{AB} para tanto, siga os seguintes passos:

a) clique no ícone  ;

b) clique no ponto **O**;

c) clique no ponto **A**;

d) digite **90** na janela (solicitação de parâmetro) clique em **OK**. Nomeie este ponto de **A'**;

- e) clique no ponto **O**;
- f) clique no ponto **B**;
- g) digite **90** na janela (solicitação de parâmetro) clique em **OK**; Nomeie este ponto de **B'**;
- h) trace o segmento **A'B'** ;
- i) Salve sua construção

2.1 A rotação foi no sentido horário ou no sentido anti-horário?

2.2 Trace o os segmentos: \overline{OA} , $\overline{OA'}$, \overline{OB} , $\overline{OB'}$, usando linhas pontilhadas;

2.3 Mostre na tela a medida dos ângulos **AÔA'**, **BÔB'**;

2.4 Movimente o ponto **O**, observe a construção e descreva o que você observou.

2.5. Movimente o ponto **A** ou o ponto **B**, observe a construção e descreva o que você observou.

3) Abra o arquivo **rota3**, aplique ao segmento \overline{AB} as rotações indicadas nos itens abaixo:

- a) **90°** no sentido horário em torno do ponto **O** (refaça os itens **a, b, c, d, e, f, g** da atividade 2 substituindo 90 por -90);
- b) **60°** no sentido anti-horário em torno do ponto **O**;
- c) **180°** em torno do ponto **O**;
- d) Movimente o ponto **O** e observe as construções;
- e) Salve sua construção;
- f) Movimente o ponto **A** e observe as construções;

4) Abra o arquivo **rota4**, aplique ao segmento \overline{AB} as rotações indicadas nos itens abaixo:

- a) **90°** no sentido horário em torno do ponto **A**

- b) 60° no sentido anti-horário em torno do ponto **A**;
- c) 180° em torno do ponto **A**;
- d) Movimente o ponto **A** e observe as construções;
- e) Salve sua construção;
- f) Movimente o ponto **B** e observe as construções;
- 5) Abra o arquivo **rota5**:
- a) aplique ao triângulo a rotação de 120° no sentido anti-horário em torno do ponto **O**;
- b) aplique ao triângulo construído no item **a** a rotação de 120° no sentido anti-horário em torno do ponto **O**;
- c) aplique ao triângulo construído no item **b** a rotação de 120° no sentido anti-horário em torno do ponto **O**;
- d) Movimente o ponto **O** e observe as construções;
- e) Movimente o ponto **A** e observe as construções;
- e) Salve sua construção.
- 6) Abra o arquivo **rota6** observe que o triângulo $A'B'C'$ é a rotação do triângulo ABC em torno do centro O. Uma cada vértice dos dois triângulos ao ponto O, movimente o ponto O observando a construção, a seguir movimente um dos vértices do triângulo ABC observando a construção. Utilizando os recursos do *software* responda:
- a) O segmento \overline{AO} tem a mesma medida de $\overline{A'O}$? _____
- b) O segmento \overline{BO} tem a mesma medida de $\overline{B'O}$? _____
- c) O segmento \overline{CO} tem a mesma medida de $\overline{C'O}$? _____
- d) Mostre na tela a medida dos ângulos $\widehat{AOA'}$, $\widehat{BOB'}$, $\widehat{COC'}$, use cores diferentes. Estes ângulos são congruentes (têm a mesma medida)? _____
- e) movimente o ponto **O** e refaça os itens anteriores.
- a) _____ b) _____ c) _____ d) _____
- 7) Com base no que foi feito no exercício anterior escreva qual(is) a(s) condição(ões) para que uma figura seja a rotação de outra em relação a um ponto.

5ª PARTE : Isometrias: reflexão, translação e rotação

1) Alguns artistas utilizam as isometrias estudadas para compor objetos artísticos. No *power point* abra o arquivo **artes**, nele estão alguns quadros, observe-os. Escreva, nos itens abaixo, as isometrias que você identificou em cada quadro.

Quadro 1: _____

Quadro 2: _____

Quadro 3: _____

Quadro 4: _____

Quadro 5: _____

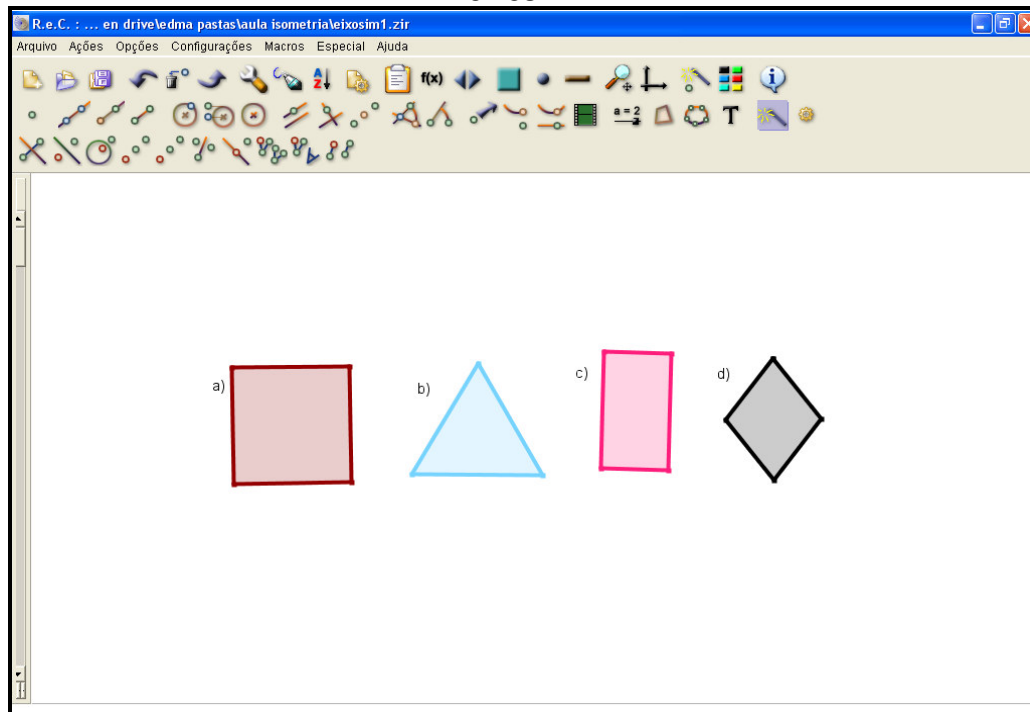
Quadro 6: _____

Quadro 7: _____

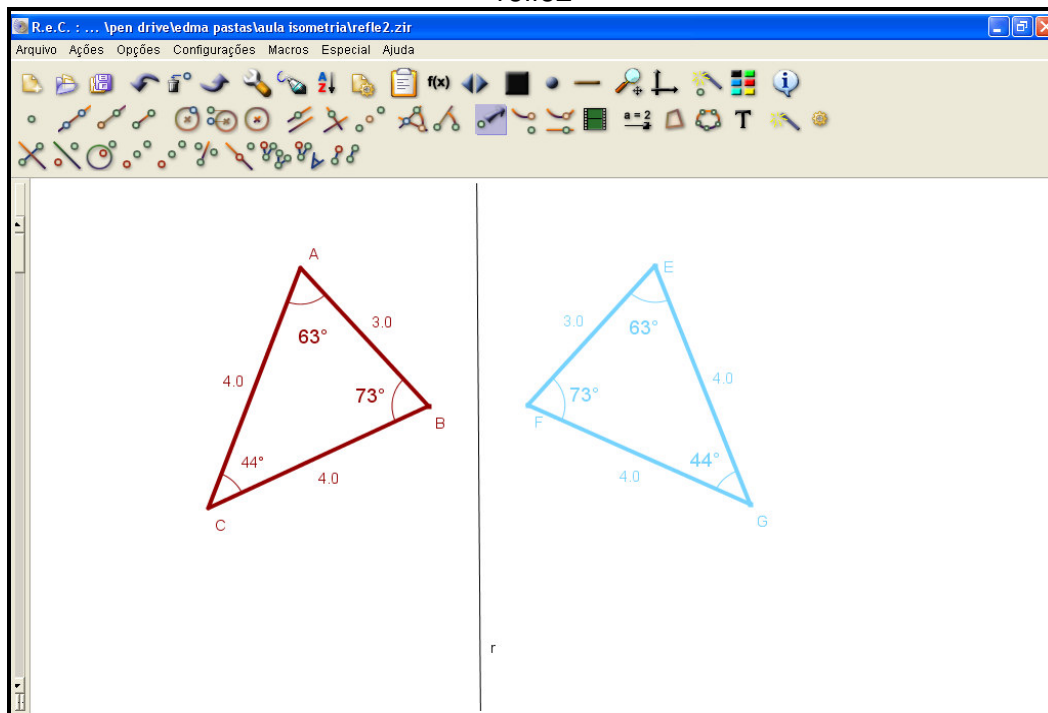
Quadro 8: _____

Anexo 10: Arquivos Eletrônicos Referenciados nas Atividades da Validação

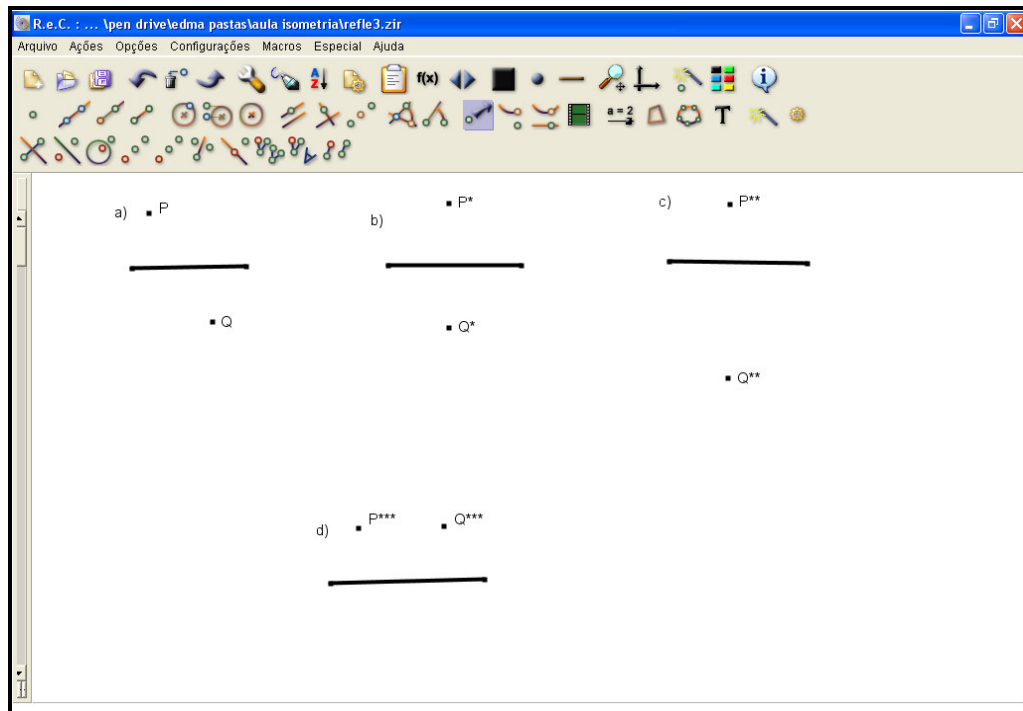
eixosim1



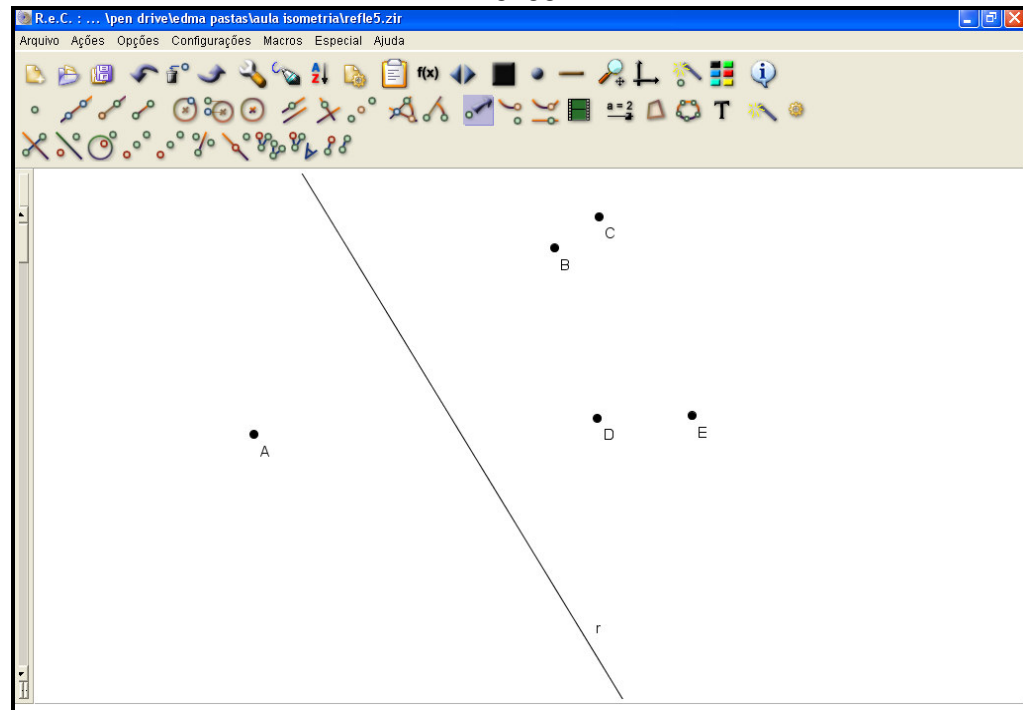
refle2



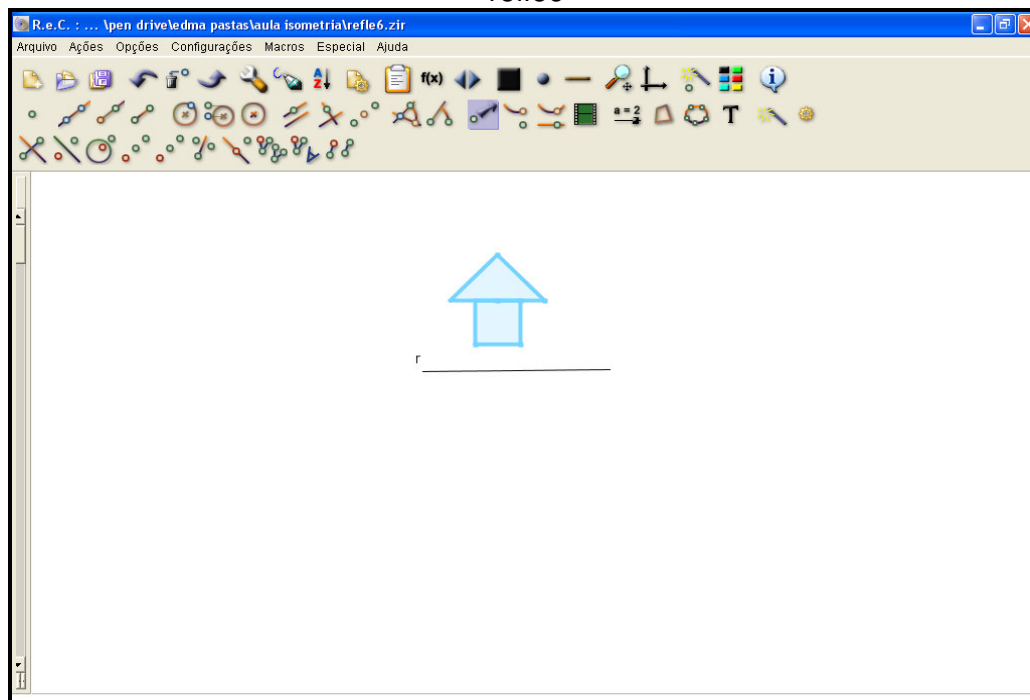
refle3



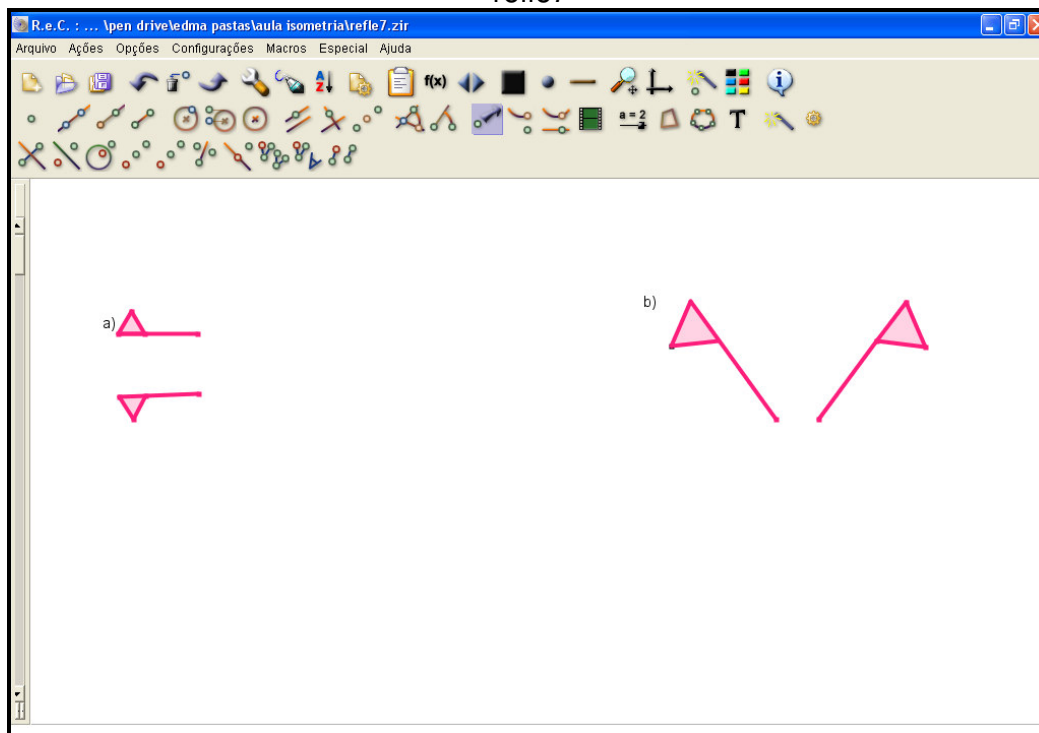
refle5



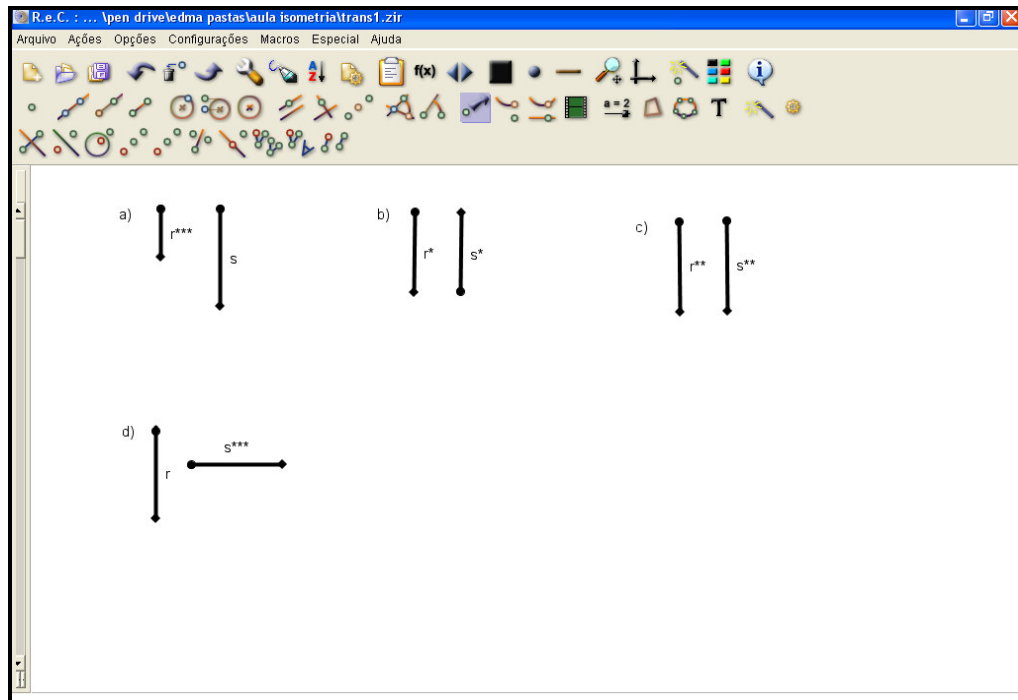
refle6



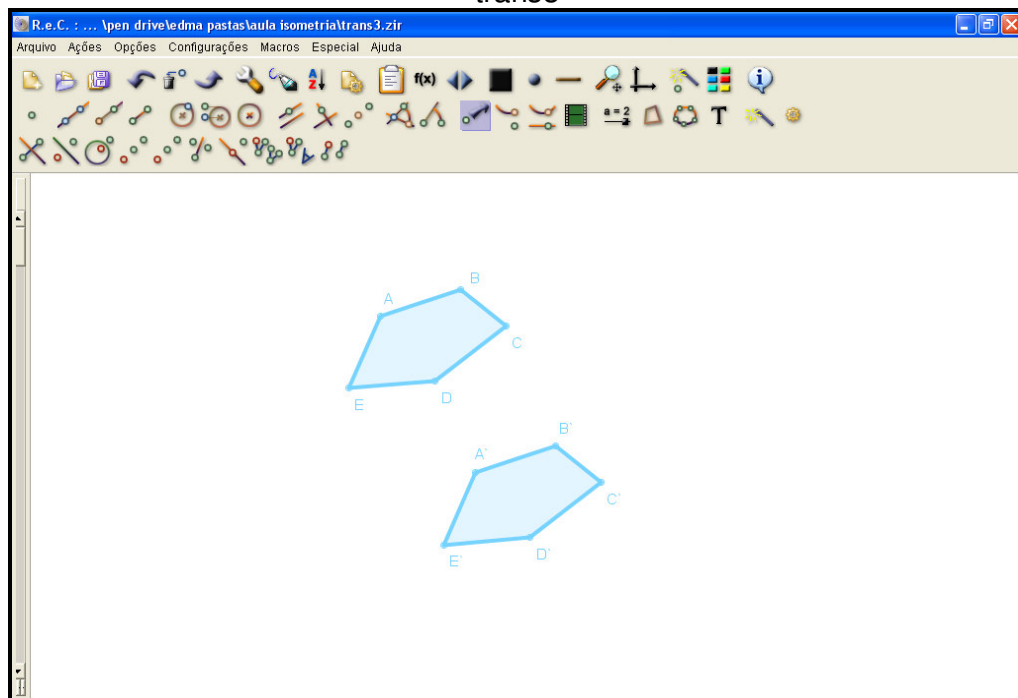
refle7



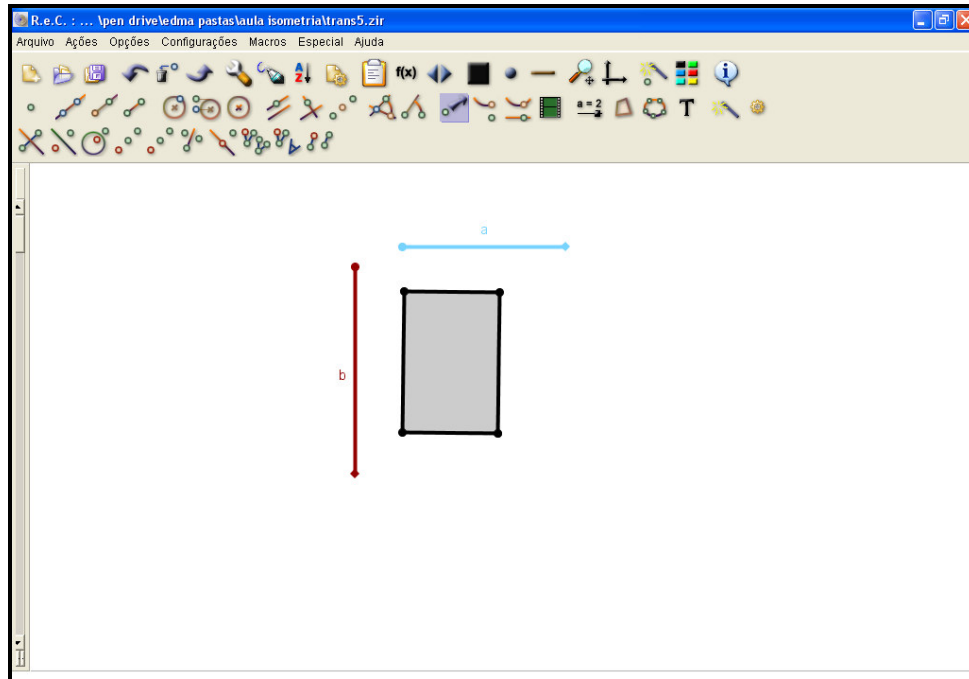
trans1



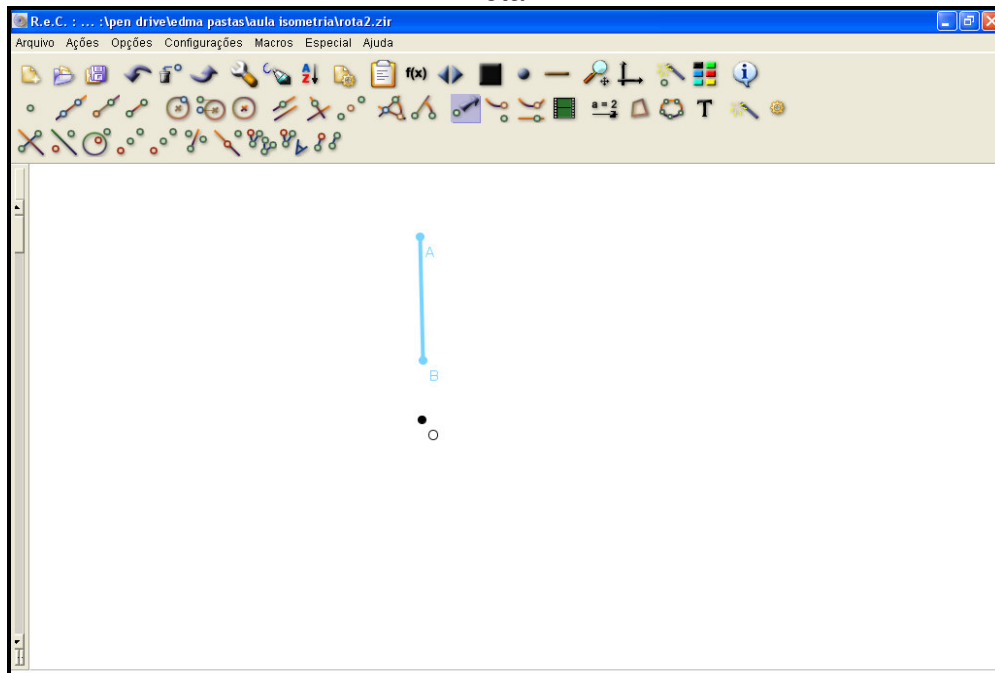
trans3



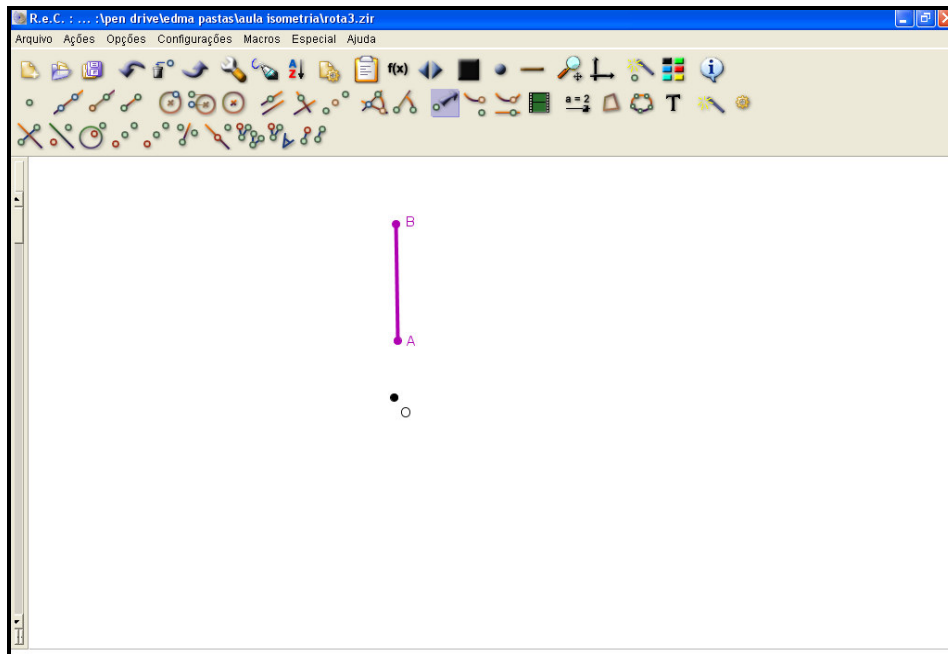
trans5



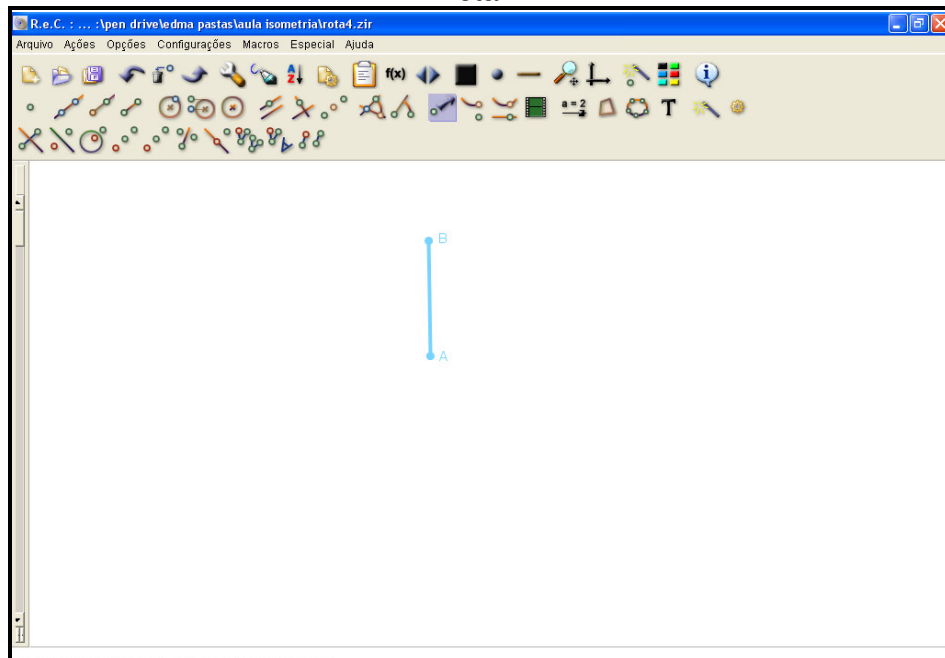
rota2



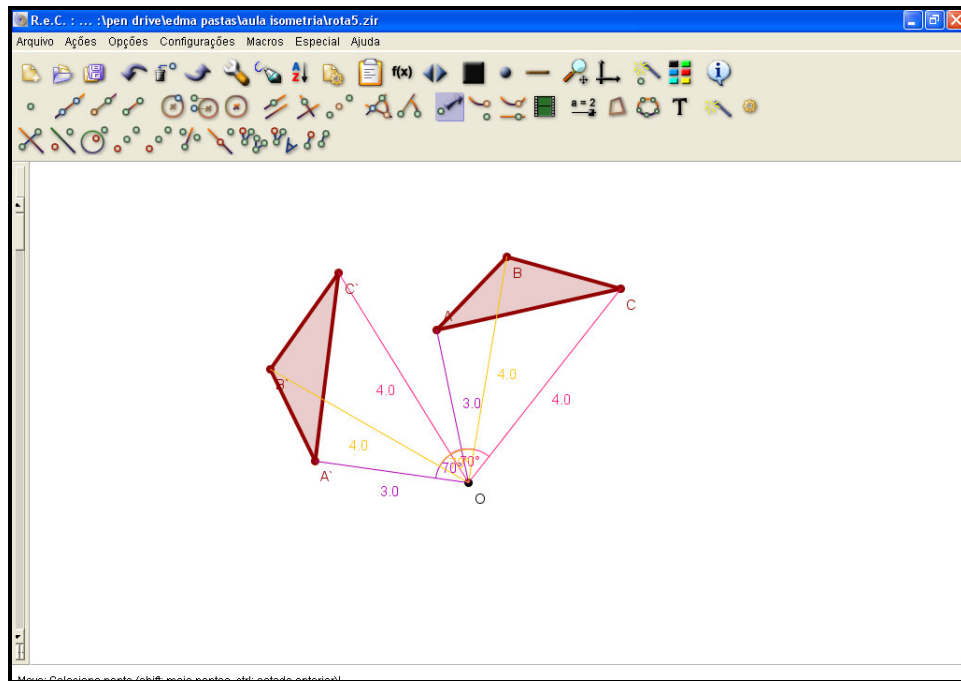
rota3



rota4



rota5



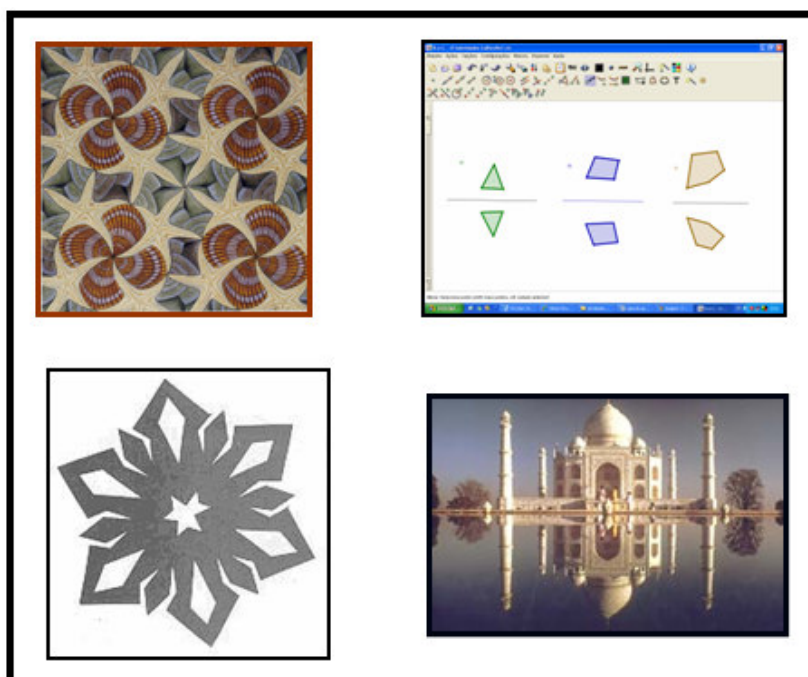
Anexo 11: Apostila de Atividades e Arquivos Eletrônicos Resolvidos por Um Aluno



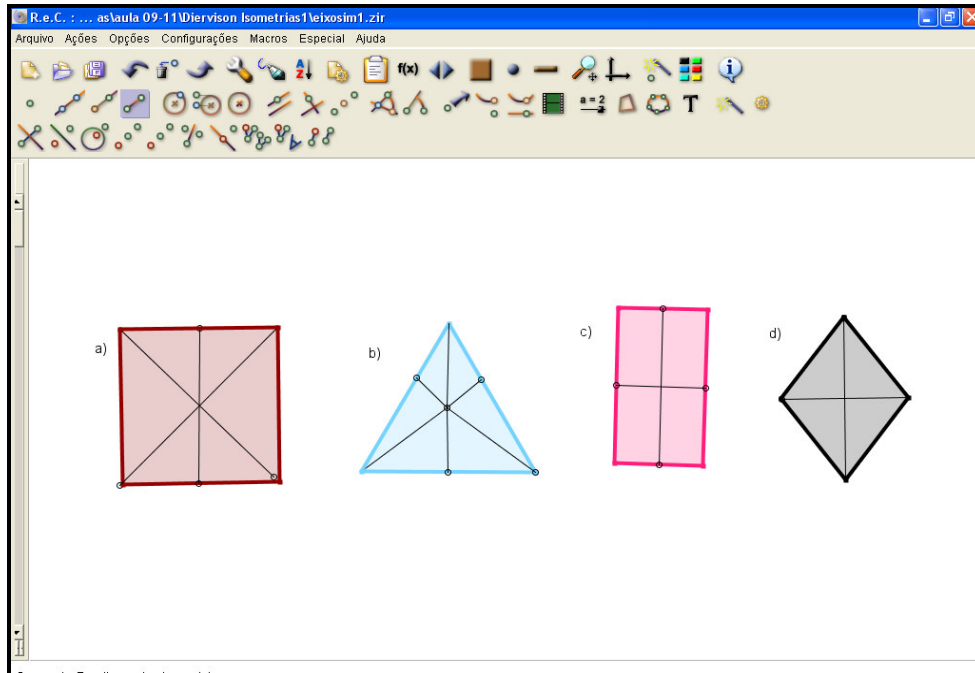
O ESTUDO DE ISOMETRIAS: VISÃO ARTÍSTICA E MATEMÁTICA

Edimara Ribeiro Da Silva Soares
Pâmila Camila Almeida
Williana da Silva Azeredo
LICENCIANDAS EM MATEMÁTICA – CEFET-CAMPOS

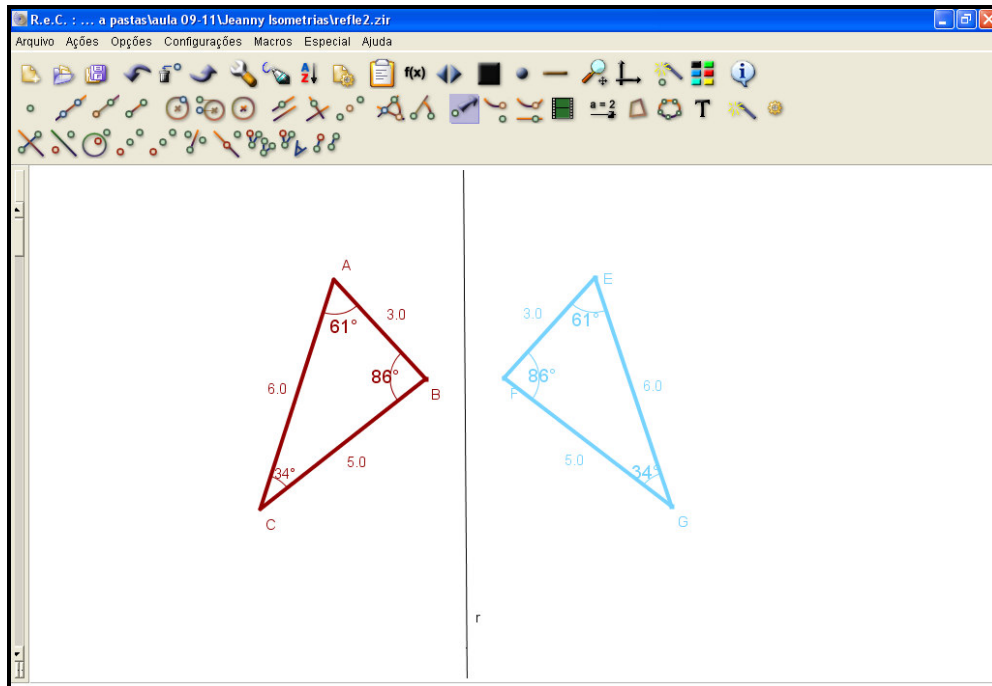
GILMARA TEIXEIRA BARCELOS
PROFESSORA DO CEFET CAMPOS - MESTRE EM CIÊNCIAS DE ENGENHARIA – UENF



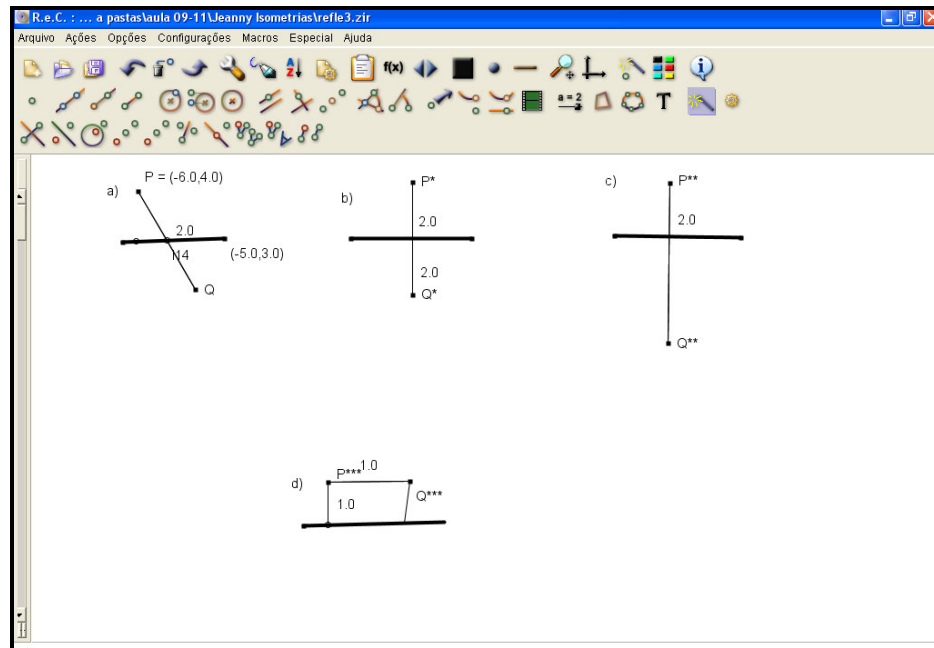
eixosim1



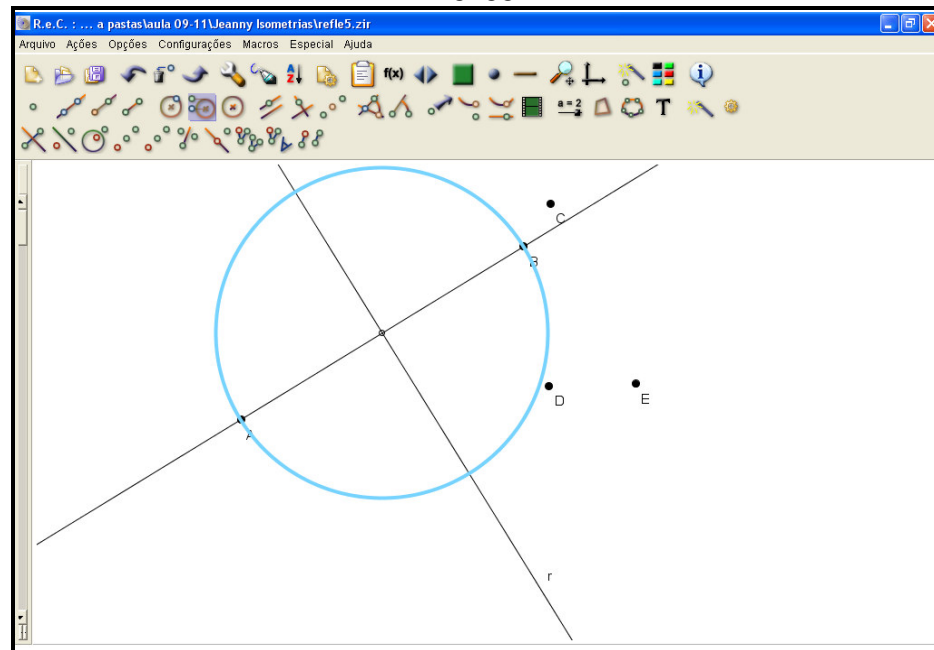
refle2



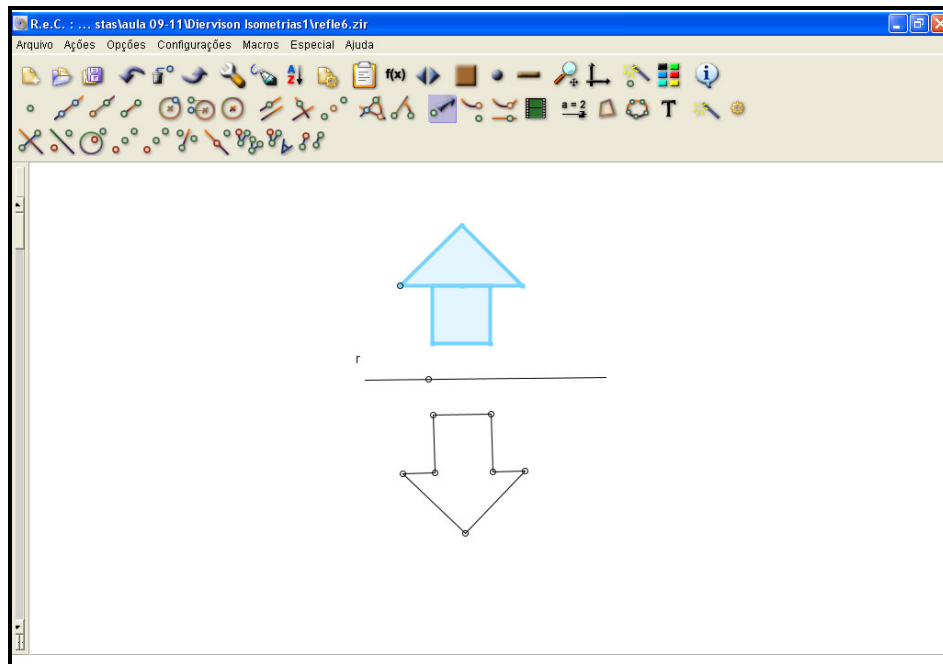
refle3



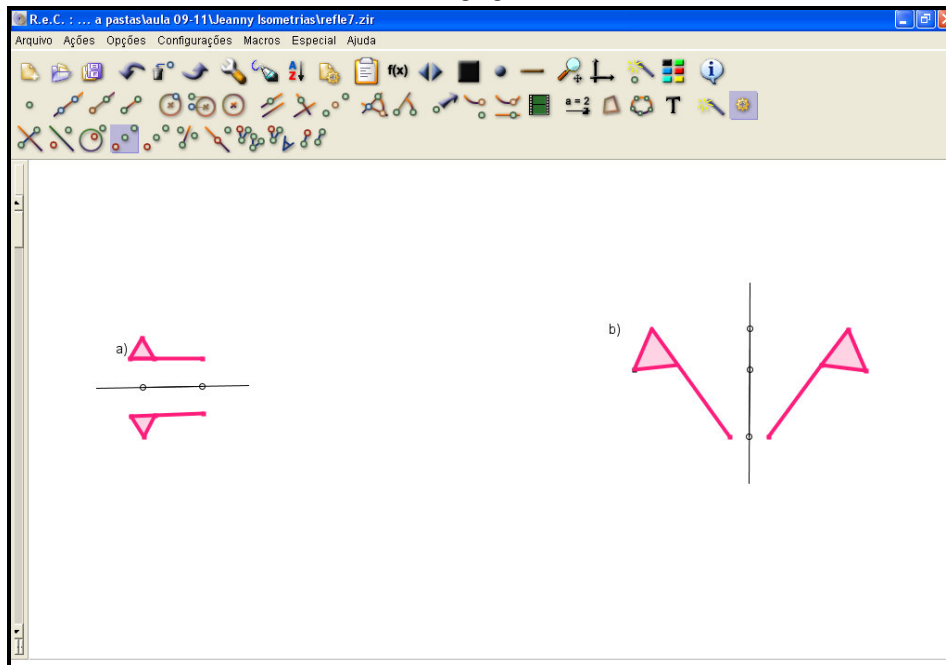
refle5



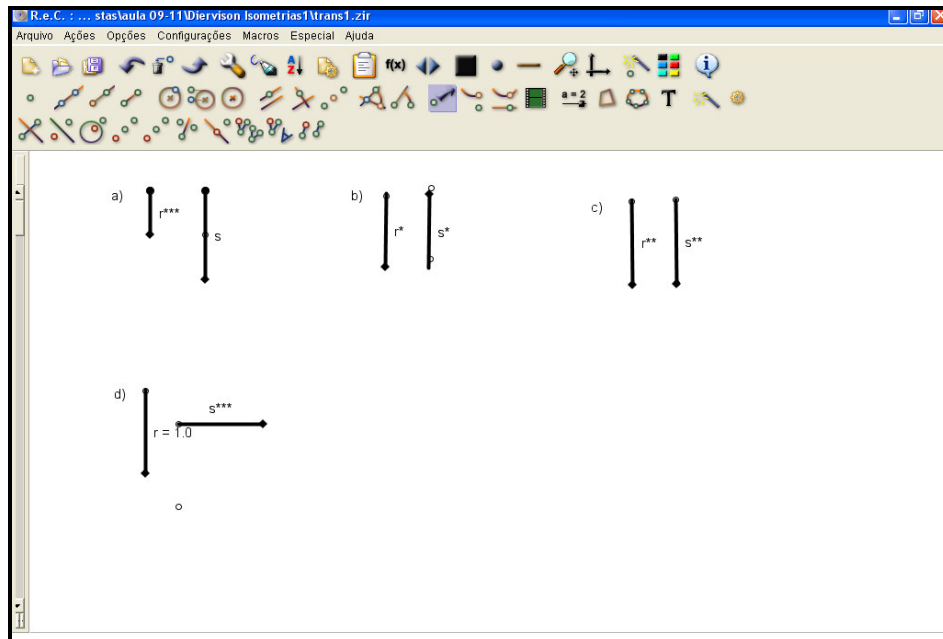
refle6



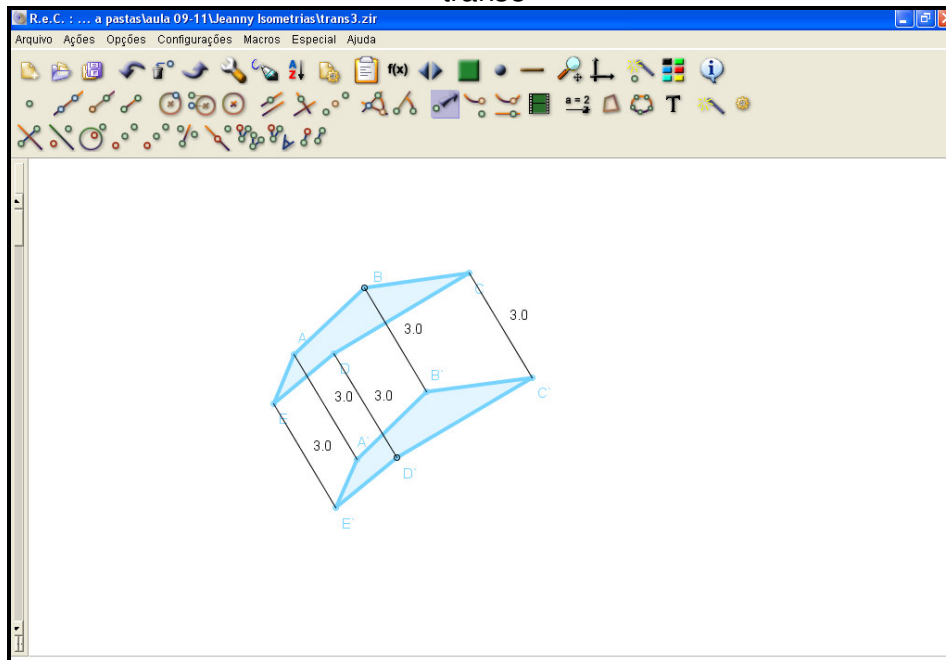
refle7



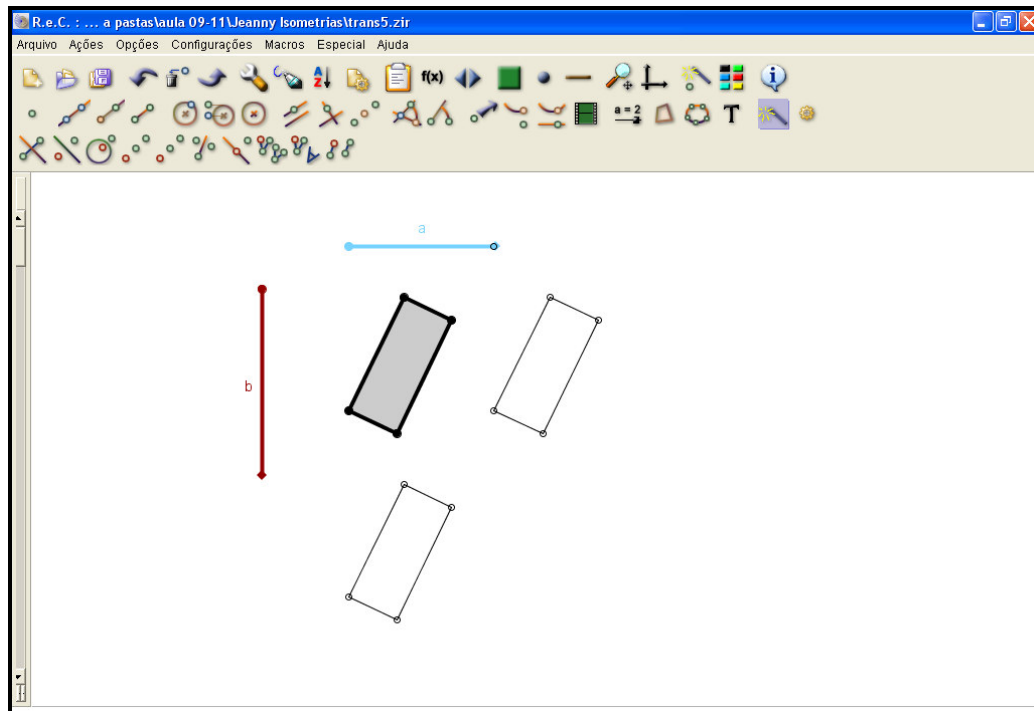
trans1



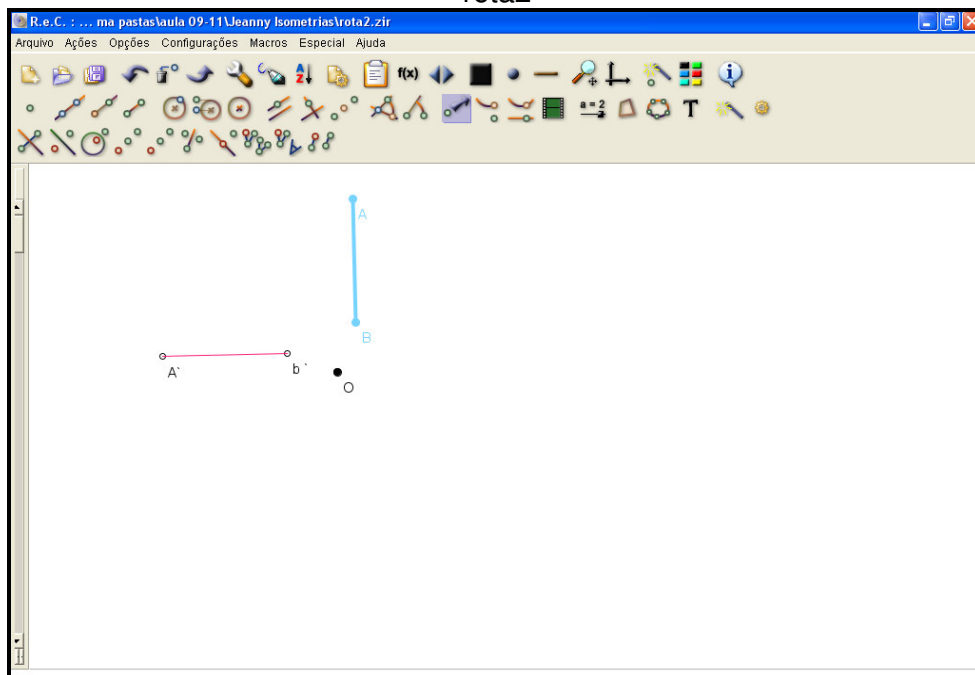
trans3



trans5



rota2



rota3

