

INSTITUTO FEDERAL DE  
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
FLUMINENSE  
Campus Campos-Centro

Secretaria de Educação  
Profissional e Tecnológica

Ministério  
da Educação

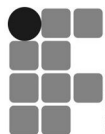


## LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DESENVOLVIMENTO DE RECURSOS PEDAGÓGICOS PARA O ESTUDO DE  
TRIGONOMETRIA UTILIZANDO O *SOFTWARE* GEOGEBRA

LARISSA DE SOUSA MOREIRA  
CÍNTIA DA SILVA GOMES

CAMPOS DOS GOYTACAZES  
2008



INSTITUTO FEDERAL DE  
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
FLUMINENSE  
Campus Campos-Centro

Secretaria de Educação  
Profissional e Tecnológica

Ministério  
da Educação



CÍNTIA DA SILVA GOMES  
LARISSA DE SOUSA MOREIRA

## DESENVOLVIMENTO DE RECURSOS PEDAGÓGICOS PARA O ESTUDO DE TRIGONOMETRIA UTILIZANDO O *SOFTWARE* GEOGEBRA

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos - Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Prof<sup>a</sup> MSc. Gilmara Teixeira Barcelos

Co-orientadora: Prof<sup>a</sup> MSc. Silvia Cristina F. Batista

CAMPOS DOS GOYTACAZES/RJ

2008

Dados de Catalogação na Publicação (CIP)

G633d Gomes, Cíntia da Silva.  
Desenvolvimento de recursos pedagógicos para estudo de trigonometria utilizando o software GeoGebra / Cíntia da Silva Gomes, Larissa de Sousa Moreira - Campos dos Goytacazes, RJ : [s.n.], 2008.  
179 f.: il.

Orientadora: Gilmara Teixeira Barcelos.  
Co-orientação: Silvia Cristina F. Batista.  
Monografia (Licenciatura em Matemática).  
Instituto Federal de Educação, Ciência de Tecnologia Fluminense. Campus Campos. Campos dos Goytacazes, RJ.  
Bibliografia: f. 110 - 114.

1. Trigonometria (Ensino médio) – Estudo e ensino. 2. GeoGebra (Programa de computador). 3. Matemática (Ensino médio) – Estudo e Ensino. I. Moreira, Larissa de Sousa. II. Barcelos, Gilmara Teixeira, orient. III. Batista, Silvia Cristina F., co-orient. IV. Título.

CDD – 516.24

CÍNTIA DA SILVA GOMES  
LARISSA DE SOUSA MOREIRA

DESENVOLVIMENTO DE RECURSOS PEDAGÓGICOS PARA O ESTUDO DE  
TRIGONOMETRIA UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos - Centro, como requisito parcial para conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovada em 03 de março de 2009.

Banca Avaliadora:

---

Prof<sup>a</sup> Gilmara Teixeira Barcelos (orientadora)  
Mestre em Ciências de Engenharia/UENF/RJ  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos -  
Centro

---

Prof<sup>a</sup> Sílvia Cristina F. Batista (co-orientadora)  
Mestre em Ciências de Engenharia/UENF/RJ  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos -  
Centro

---

Prof<sup>o</sup> Salvador Tavares  
Mestre em Educação Matemática/ USU/RJ  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos -  
Centro

---

Prof<sup>a</sup> Carmem L. V. R. Azevedo  
Mestre em Economia Empresarial/ UCAM/RJ  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos -  
Centro

## AGRADECIMENTOS

A Deus, pela presença constante em nossas vidas, iluminando mais uma etapa de nossa caminhada.

Aos nossos pais, pela forma que nos educaram, permitindo o cumprimento desse curso.

Às nossas orientadoras Gilmara Teixeira Barcelos e Silvia Cristina Batista pela paciência, dedicação e competência na orientação deste trabalho e pelo tanto que nos fizeram crescer.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos - Centro, por fazer parte da nossa história.

Aos professores da Licenciatura em Matemática, em especial a professora Ana Paula Rangel de Andrade, responsável pelas aulas de Trigonometria durante a Licenciatura.

Aos participantes do teste exploratório, e aos alunos que participaram da validação das atividades, por contribuírem para o êxito de nosso trabalho.

Enfim, a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização desta pesquisa.

A todos os nossos familiares e amigos.

## RESUMO

Educar para cidadania, favorecer as condições para que o indivíduo construa seu conhecimento, estimular o aprender a aprender são marcas fundamentais da educação atual. O processo de ensino e aprendizagem de Matemática, portanto, não pode ir na contramão das necessidades atuais e permanecer estagnado, imutável, encerrado em si mesmo, como que alheio às mudanças. Nesse sentido, o objetivo deste trabalho foi desenvolver e validar *applets* para o estudo de Trigonometria no Ensino Médio, assim como atividades pedagógicas para a utilização dos mesmos. *Applets* são programas aplicativos desenvolvidos em linguagem de programação Java®, que podem ser incluídos em códigos HTML, geralmente usados para adicionar interatividade à página Web. Os referidos *applets* foram desenvolvidos com o *software* GeoGebra, um *software* de Matemática Dinâmica, livre, que permite o estudo de Geometria, Álgebra e Cálculo. São descritas neste trabalho as etapas cumpridas para atingir os objetivos propostos: desenvolvimento dos *applets*; desenvolvimento de uma Unidade de Aprendizagem, para disponibilizar os *applets*; elaboração das atividades pedagógicas; elaboração dos questionários; teste exploratório; validação das atividades e dos *applets*; análise das respostas das atividades e avaliação dos questionários. Finalizando, são relatadas as considerações sobre os resultados e as formas de continuidade do estudo. Os resultados alcançados foram satisfatórios, mostrando que os recursos desenvolvidos são apropriados para o estudo de Trigonometria e possibilitando formas de continuidade do trabalho realizado.

Palavras-chave: Trigonometria. *Applets*. Aprendizagem Matemática.

## ABSTRACT

Educating for citizenship, promoting conditions for the individual to build their knowledge, stimulating the learning to learn are the fundamentals of education today. The process of teaching and learning of mathematics, therefore, can not go on the opposite way of current in itself, like others to change. Accordingly, the objective of this study was to develop and validate applets for the study of Trigonometry in high school, and educational activities for the use of them. Applets are programs applications developed in Java® programming language, which may be included in HTML code, generally used to add interactivity to web page these applets have been developed with the software GeoGebra, a dynamic Mathematica software, free, allowing the study of Geometry, Algebra and Calculus. In this work are described the completed steps to achieve the objectives: development of applets, the development of a Unit of Learning, to provide the applets, development of educational activities, development of questionnaires, exploratory testing, validation activities and applets; analysis of responses of the activities and evaluation of questionnaires. Finally, the considerations are reported on the results and ways to continue the study. The results were satisfactory, showing that the resources developed are appropriate for the study of Trigonometry and possible ways of continuing the work.

Keywords: Trigonometry. Applets. Learning Mathematics.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1: Medida do raio da Terra.....	27
Figura 1.2: Distância da Terra à Lua.....	28
Figura 1.3: Medida do raio da Lua.....	28
Figura 1.4: Marcação de terreno.....	29
Figura 1.5: Teodolito.....	29
Figura 1.6: Astrolábio.....	30
Figura 1.7: Sexante.....	30
Figura 1.8: Aparelho de GPS.....	31
Figura 1.9: Refração da luz.....	32
Figura 1.10: Movimento periódico na circunferência trigonométrica.....	33
Figura 2.1: Razões trigonométricas no triângulo retângulo.....	40
Figura 2.2: Relações entre as razões trigonométricas de ângulos complementares.....	41
Figura 2.3: Medidas de ângulo.....	41
Figura 2.4: Circunferência trigonométrica.....	42
Figura 2.5: Função de Euler.....	43
Figura 2.6: Seno e cosseno na circunferência trigonométrica – sentido anti-horário .....	44
Figura 2.7: Seno e cosseno na circunferência trigonométrica – sentido horário...	44
Figura 2.8: Relações entre seno e cosseno de ângulos complementares.....	45
Figura 2.9: Relações entre seno e cosseno de ângulos suplementares.....	46
Figura 2.10: Relações entre seno e cosseno de ângulos explementares.....	46
Figura 2.11: Relações entre seno e cosseno de ângulos replementares .....	47
Figura 2.12: Função seno no plano cartesiano e na circunferência trigonométrica.....	47

Figura 2.13: Transformações gráficas da função seno.....	48
Figura 2.14: Página inicial da Unidade de Aprendizagem.....	49
Figura 2.15: <i>Applet</i> da Atividade 1.....	49
Figura 2.16: <i>Applet</i> da Atividade 1.....	51
Figura 2.17: <i>Applet</i> da Atividade 2.....	54
Figura 2.18: <i>Applet</i> da Atividade 3.....	55
Figura 2.19: <i>Applet</i> da Atividade 4.....	59
Figura 2.20: <i>Applet</i> para explicação da Função de Euler.....	60
Figura 2.21: <i>Applet</i> da Atividade 5.....	62
Figura 2.22: <i>Applet</i> da Atividade 6.....	64
Figura 2.23: <i>Applet</i> da Atividade 7.....	65
Figura 2.24: <i>Applet</i> da Atividade 8.....	68
Figura 2.25: <i>Applet</i> da Atividade 9.....	69
Figura 2.26: <i>Applet</i> da Atividade 10.....	69
Figura 2.27: <i>Applet</i> da função seno.....	70
Figura 2.28: <i>Applet</i> da Atividade 11.....	71
Figura 2.29: Alunos durante a resolução da Atividade 1.....	83
Figura 2.30: <i>Applet</i> visualizado quando $\alpha = 89^\circ$ .....	85
Figura 2.31: <i>Applet</i> visualizado quando $\alpha = 0^\circ$ .....	86
Figura 2.32: Mediadoras demonstrando as relações.....	87
Figura 2.33: Mediadoras utilizando o material concreto.....	92
Figura 2.34: Mediadoras utilizando o <i>applet</i> da Atividade 4.....	94
Figura 2.35: <i>Applet</i> utilizado para a explicação da associação de um número real negativo e pontos da circunferência. trigonométrica.....	96

**LISTA DE GRÁFICOS**

Gráfico 2.1: Nível das atividades no teste exploratório.....	78
Gráfico 2.2: Importância das observações no teste exploratório.....	79
Gráfico 2.3: Utilização de alguns recursos do <i>software</i> GeoGebra pelos participantes do teste exploratório.....	80
Gráfico 2.4: Nível das atividades na validação.....	103
Gráfico 2.5: Importância das observações na validação.....	104

**LISTA DE QUADROS**

Quadro 2.1: Primeira parte da Atividade 1.....	52
Quadro 2.2: Segunda parte da Atividade 1.....	53
Quadro 2.3: Conclusão da Atividade 2.....	54
Quadro 2.4: Item 3.1 da Atividade 3.....	56
Quadro 2.5: Itens 3.3, 3.4 e 3.5 da Atividade 3.....	57
Quadro 2.6: Item 3.6 da Atividade 3.....	57
Quadro 2.7: Item 3.8 da Atividade 3.....	58
Quadro 2.8: Explicação da função de Euler.....	60
Quadro 2.9: Definição de seno e cosseno na circunferência trigonométrica.....	61
Quadro 2.10: Itens 5.4, 5.5 e 5.6 da Atividade 5.....	63
Quadro 2.11: Atividade 7.....	66
Quadro 2.12: Conclusão da Atividade 7.....	67
Quadro 2.13: Primeiro item da Atividade 8.....	67
Quadro 2.14: Primeiro item da Atividade 9.....	68
Quadro 2.15: Primeiro item da Atividade 10.....	68
Quadro 2.16: Observação da Atividade 8 no teste exploratório.....	74
Quadro 2.17: Texto atual referente à conclusão da Atividade 8.....	75
Quadro 2.18: Observação da Atividade 11 no teste exploratório.....	76
Quadro 2.19: Observação da Atividade 1 no teste exploratório.....	76
Quadro 2.20: Texto atual referente à conclusão da Atividade 1.....	77
Quadro 2.21: Resolução de um aluno do item 2.5 da Atividade 2.....	87

## SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....	7
LISTA DE GRÁFICOS.....	9
LISTA DE QUADROS .....	10
INTRODUÇÃO .....	13
1 TRIGONOMETRIA .....	20
1.1 Notas Históricas.....	22
1.2 Aplicações .....	22
1.3 Trigonometria e Tecnologias da Informação e Comunicação.....	36
2 RELATO DE EXPERIÊNCIA .....	39
2.1 Desenvolvimento dos <i>Applets</i> .....	39
2.1.1 Trigonometria no Triângulo Retângulo.....	40
2.2.2 Medidas de Ângulo.....	41
2.2.3 Apresentação da Circunferência Trigonométrica .....	42
2.2.4 Função de Euler .....	43
2.2.5 Seno e Cosseno na Circunferência Trigonométrica.....	44
2.2.6 Relações na Circunferência Trigonométrica.....	45
2.2.7 Função Seno e suas Transformações.....	47
2.2 Desenvolvimento da Unidade de Aprendizagem .....	48
2.3 Elaboração das Atividades .....	50
2.3.1 Atividade 1 .....	50
2.3.2 Atividade 2 .....	53
2.3.3 Atividade 3 .....	55
2.3.4 Atividade 4 .....	59
2.3.5 Atividade 5 .....	61
2.3.6 Atividade 6 .....	63
2.3.7 Atividade 7 .....	64
2.3.8 Atividades 8, 9 e 10.....	67
2.3.9 Atividade 11 .....	70
2.4 Elaboração dos Questionários.....	71

2.5 Teste Exploratório.....	72
2.5.1 Sugestões e mudanças.....	72
2.5.2 Análise dos questionários .....	77
2.6 Validação das Atividades.....	82
2.6.1 Análise da Resolução da Atividade 1 .....	83
2.6.2 Análise da Resolução da Atividade 2.....	88
2.6.3 Análise da Resolução da Atividade 3.....	90
2.6.4 Análise da Resolução da Atividade 4.....	93
2.6.5 Análise da Resolução da Atividade 5.....	96
2.6.6 Análise da Resolução da Atividade 6.....	97
2.6.7 Análise da Resolução da Atividade 7.....	97
2.6.8 Análise das Resoluções das Atividades 8, 9 e 10.....	98
2.6.9 Análise da Resolução da Atividade 11 .....	99
2.6.10 Análise dos questionários .....	102
CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	107
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	110
ANEXOS.....	115
Anexo 1: Apostila “Estudando Trigonometria com o auxílio de <i>applets</i> desenvolvidos do <i>software</i> GeoGebra”.....	116
Anexo 2: Questionário para o Teste Exploratório das Atividades .....	143
Anexo 3: Questionário para a Validação das Atividades .....	146
Anexo 4: Folha de Exercícios .....	149
Anexo 5: Apostila de Atividades Resolvida por Um Aluno .....	151

## INTRODUÇÃO

A Matemática, muitas vezes, assume uma função social de diferenciação e de exclusão, na medida em que, sendo pouco acessível, desempenha um papel decisivo na vida das pessoas, rotulando-as e posicionando-as como aptas ou inaptas à participação nos processos de decisão da sociedade (MATOS, 2005).

Entende-se, então, que buscar formas que favoreçam a compreensão dos conceitos matemáticos é de fundamental importância. A Matemática estudada nas escolas deve ser mais acessível, de forma que se torne menos excludente.

A educação para a cidadania deve ser um dos objetivos da educação atual e, para tanto, é necessário considerar o conhecimento moderno, impregnado de ciência e tecnologia (D'AMBRÓSIO, 2001). Segundo Valente (1999), é importante que a educação seja baseada no fazer que leva a compreender, buscando formar um indivíduo crítico, criativo, com capacidade de pensar, de aprender a aprender, de trabalhar em grupo, de utilizar os meios automáticos de produção e disseminação da informação e de conhecer seu potencial cognitivo, afetivo e social.

Assim, educar para cidadania, favorecer as condições para que o indivíduo construa seu conhecimento, estimular o aprender a aprender devem ser marcas fundamentais da educação atual. O processo de ensino e aprendizagem de Matemática, portanto, não pode ir na contramão das necessidades atuais e permanecer estagnado, imutável, encerrado em si mesmo, como que alheio às mudanças.

São inúmeros os recursos que podem ser utilizados no sentido de favorecer a compreensão de conceitos matemáticos. Dentre estes destacam-se as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC), que podem, como defendido por Ponte, Oliveira e Varandas (2003), colaborar para a criação de situações de aprendizagem estimulantes em Matemática e diversificar as possibilidades de aprendizagem. Belfort (2002) afirma que, se essas tecnologias forem utilizadas de forma adequada, podem colaborar no processo de ensino e aprendizagem, favorecendo o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo do aluno.

Segundo Munhoz (2002), as mídias, como TIC, podem servir como meio de incentivar e despertar o desejo pela pesquisa e participação, tornando o ambiente de aprendizagem colaborativo.

Certamente, não está sendo defendido aqui o uso das TIC na educação simplesmente por modismo, e sim se defende o uso consciente e crítico, resultante de uma análise de seus pontos fracos e fortes. Como afirma Levy (1999):

Não se trata aqui de usar as tecnologias a qualquer custo, mas sim de *acompanhar consciente e deliberadamente uma mudança de civilização* que questiona profundamente as formas institucionais, as mentalidades e a cultura dos sistemas educacionais tradicionais e sobretudo os papéis de professor e de aluno (LÉVY, 1999, p. 36, grifo do autor).

No entanto, segundo os PCNEM<sup>1</sup> (BRASIL/MEC/SEMTEC, 1999), existe um distanciamento a ser superado quando o assunto é educação e tecnologia, já que as mudanças na primeira não ocorrem de forma tão rápida quanto na segunda. E ainda complementa:

Esse impacto da tecnologia, [...] exigirá do ensino de Matemática um redirecionamento sob uma perspectiva curricular que favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o indivíduo possa se reconhecer e se orientar nesse mundo do conhecimento em constante movimento (BRASIL/MEC/SEMTEC, 1999, p. 252).

Um dado bastante inquietante advém da avaliação do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA). O objetivo deste programa é produzir indicadores que contribuam para a discussão da qualidade da educação básica e que possam subsidiar políticas nacionais de melhoria da educação nos países participantes (INEP, 2007a). A avaliação é coordenada pela Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico (OCDE), havendo em cada país uma coordenação nacional<sup>2</sup> (INEP, 2007a).

No Brasil, em 2006, 9.295 estudantes de 15 anos (matriculados no sétimo e no oitavo ano do Ensino Fundamental e no primeiro e no segundo ano do Ensino Médio) participaram da avaliação do PISA. Numa escala de 0 (zero) a 800, os estudantes brasileiros obtiveram uma média de 370 pontos na prova de Matemática, o que implicou a classificação do Brasil em 54º lugar na referida prova, à frente

---

<sup>1</sup> Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio

<sup>2</sup> No Brasil, o PISA é coordenado pelo Inep - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais "Anísio Teixeira".



apenas da Tunísia, Catar e Quiruzistão (INEP, 2007b). Em Matemática, a China (549) e a Finlândia (548) apresentaram os melhores resultados (INEP, 2007b).

Os resultados das avaliações do PISA alertam para a necessidade de novas estratégias que permitam aos alunos vencer as dificuldades na aprendizagem da Matemática.

Considerando a importância do uso das TIC no processo de ensino e aprendizagem de Matemática e as dificuldades evidenciadas por resultados como o do PISA, este trabalho monográfico visa desenvolver e validar recursos didáticos para a aprendizagem de Trigonometria.

Para a realização deste trabalho foram elaborados *applets* e atividades que possibilitam a construção de conhecimentos matemáticos. *Applets* (*applets* Java) são programas desenvolvidos em linguagem de programação Java®, que podem ser incluídos em códigos HTML (DEITEL H.; DEITEL P., 2003). Estes, em geral, visam adicionar interatividade a aplicações Web.

Para tanto, foi feito um aprofundamento de estudos sobre Trigonometria e sobre o *software* GeoGebra. Trigonometria é um tema matemático estudado no Ensino Médio. O seu significado (do grego *trigonon*, “triângulo”, e *metron*, “medida”) nos remete ao estudo puro e simples das medidas dos lados, ângulos e outros elementos dos triângulos (IEZZI et al., 2004). Porém, o estudo da Trigonometria evoluiu bastante e, atualmente, se faz presente em inúmeras situações, desde as mais simples, no dia-a-dia, como as mais complexas, nas Ciências e na alta Tecnologia (LIMA et al., 2001a, p.213).

Desde a antiguidade e até hoje, o homem sempre teve a necessidade de avaliar distâncias inacessíveis. Na verdade, são muito poucas distâncias que podem ser medidas diretamente, com uma trena por exemplo. Praticamente tudo que o desejamos saber sobre distâncias no mundo em que vivemos é calculado com o auxílio da trigonometria (LIMA et al., 2001b, p. 64).

O GeoGebra é um *software* de Matemática Dinâmica<sup>3</sup>, que permite o estudo de Geometria, Álgebra e Cálculo. Este *software* é livre e gratuito, disponível em português em <http://www.geogebra.at/>.

---

<sup>3</sup>A expressão “Matemática Dinâmica” é utilizada por Markus Hohenwarter, criador do GeoGebra, ao explicar as funções do mesmo, sendo uma extensão da definição de “Geometria Dinâmica”. Segundo Braviano e Rodrigues (2002), a geometria dinâmica permite a elaboração de construções eletrônicas,

Um estudo sobre Trigonometria e sobre o GeoGebra foi iniciado por uma das autoras deste trabalho, no âmbito do projeto de pesquisa “Tecnologias de Informação e Comunicação no Processo de Ensino e Aprendizagem de Matemática” desenvolvido no CEFET Campos. Esse estudo possibilitou a elaboração de 37 *applets* para o estudo de Trigonometria, dos quais sete foram utilizados neste trabalho. E a fim de complementar os sete *applets* selecionados, criou-se mais seis, totalizando 13 *applets* que foram utilizados na resolução das atividades desta monografia.

Como defendido por Lévy (1999), as técnicas de simulação, possibilitadas pelos recursos tecnológicos, prolongam e transformam a capacidade de imaginação e de pensamento. “A capacidade de variar com facilidade os parâmetros de um modelo e observar imediata e visualmente as conseqüências dessa variação constitui uma verdadeira ampliação da imaginação”(LÉVY, 1999, p.166). Nesse sentido foram desenvolvidos *applets* para Trigonometria.

O objetivo geral deste trabalho é desenvolver e validar recursos didáticos para a aprendizagem de Trigonometria. Recursos, estes, que são *applets* e atividades didáticas, que visam a construção de conhecimentos sobre o tema matemático citado.

Para atingir esse objetivo geral, alguns objetivos específicos foram delineados:

- Elaborar *applets* para o estudo de Trigonometria, complementando os já criados no projeto de Iniciação Científica;
- Desenvolver uma Unidade de Aprendizagem para reunir todos os *applets* em um só local;
- Elaborar atividades didáticas que utilizem os *applets*;
- Validar os *applets* e as atividades;
- Analisar os resultados diagnosticados na validação;

Para atingir os objetivos estabelecidos, o trabalho foi dividido em nove etapas:

i) revisão bibliográfica sobre Trigonometria, sobre o uso das TIC na educação e

---

nas quais os elementos básicos podem ser movimentados na tela do computador sem alterar as posições relativas entre esses elementos e os objetos construídos a partir deles. Assim, além de objetos geométricos, o GeoGebra dá um caráter dinâmico a outros objetos matemáticos como funções, gráficos, números, fórmulas, etc.

sobre *software* GeoGebra, em literaturas especializadas no assunto; ii) complementação dos *applets* já criados; iii) elaboração da Unidade de Aprendizagem; iv) elaboração das atividades; v) elaboração de questionários; vi) realização de um teste exploratório para análise das atividades e dos *applets*, por meio de um minicurso com professores e licenciandos em Matemática; vii) análise dos dados levantados no teste exploratório; viii) validação das atividades e dos *applets* com alunos do Ensino Médio; ix) análise dos dados levantados na validação.

Na primeira etapa, foram realizados estudos sobre o uso das TIC na educação e sobre Trigonometria. O *software* GeoGebra também foi estudado, visando a complementação dos *applets* existentes e a elaboração de outros. Literaturas especializadas, artigos, revistas, dentre outras fontes foram consultados.

No âmbito do projeto de iniciação científica, “Tecnologias de Informação e Comunicação no Processo de Ensino e Aprendizagem de Matemática”, em que uma das autoras desta monografia participou, foram criados 37 *applets* para o estudo de Trigonometria no triângulo retângulo e na circunferência trigonométrica. Na segunda etapa, deste trabalho monográfico, foram criados *applets* para o estudo de medidas de ângulo, para a apresentação da circunferência trigonométrica, para visualização da função de Euler, para o estudo de seno e cosseno de arcos com extremidade na primeira volta negativa e para o estudo da função seno e suas transformações.

Com os *applets* prontos e com os objetivos das atividades definidos, foi elaborada a Unidade de Aprendizagem em HTML, utilizando o *software* NVU<sup>4</sup>. Essa terceira etapa requereu estudo dos recursos do referido *software*. A Unidade de Aprendizagem visa reunir os *applets* em um só local, facilitando a manipulação dos mesmos pelos usuários.

Na quarta etapa, foram elaboradas as atividades, nas quais são utilizados os *applets* já desenvolvidos e os que foram criados. Ao todo são 11 atividades que compõem uma apostila denominada “Estudando Trigonometria com *applets*”

---

<sup>4</sup> **Nvu** (pronuncia-se New view) é um editor HTML de código livre e produzido pela Linspire. Disponível para Linux, MacOS e Windows. O objetivo dos seus criadores é desenvolver um equivalente ao Microsoft FrontPage e ao Dreamweaver, de livre uso e distribuição: um *software* livre. O Nvu é baseado no Composer, um editor HTML integrante do Mozilla e Netscape (NVU, s.d).

desenvolvidos no *software* GeoGebra”. Esta contém, ainda, conclusões referentes às atividades, a fim de formalizar o que se espera que seja conjecturado pelos alunos com o uso dos *applets*, validando ou não as observações feitas por eles.

A quinta etapa foi destinada à elaboração de dois questionários. Ambos contendo perguntas sobre a adequação das atividades realizadas no teste exploratório e na validação, e sobre a importância do uso das TIC na aprendizagem matemática, porém com enfoques diferentes, uma vez que os objetivos e os públicos alvos são distintos. Procurou-se, com isso, verificar se os objetivos das atividades foram devidamente alcançados.

Na sexta etapa, as atividades e os *applets* foram usados em um teste exploratório para a verificação e correção de possíveis falhas, por meio de um minicurso para professores e licenciandos em Matemática.

Os dados levantados nesse minicurso por meio dos questionários foram tabulados e representados em gráficos. Além disso, foram analisadas as respostas das atividades, consistindo a sétima etapa.

A partir da análise do teste exploratório, foram feitas as modificações consideradas importantes na apostila e nos *applets*. A seguir, ocorreu a validação das atividades e dos *applets* com alunos do Ensino Médio. Nesta etapa, foram observadas as atitudes dos alunos frente às atividades, bem como as respostas das atividades e do questionário foram analisadas. Procurou-se, com isso, verificar se os objetivos foram devidamente alcançados.

Este trabalho monográfico encontra-se estruturado em dois capítulos, além desta introdução e das considerações finais.

No Capítulo 1 “Trigonometria” pretende-se fundamentar, teoricamente, o trabalho desenvolvido por meio de uma revisão bibliográfica feita em literaturas especializadas. Assim, inicialmente, faz-se uma abordagem da visão de alguns autores sobre o processo de ensino e aprendizagem de Matemática, bem como relatam-se dificuldades dos alunos diante da Trigonometria, detectadas por alguns pesquisadores. Posteriormente, subdivide-se o capítulo em 3 seções. Na primeira, são tratados alguns aspectos históricos da Trigonometria; na segunda, apresentam-se algumas aplicações desse tema; e na terceira, são tecidas algumas

considerações sobre o uso das Tecnologias da Informação e Comunicação para o processo de ensino e aprendizagem de Trigonometria.

No Capítulo 2, “Relato de Experiência”, são relatadas todas as ações realizadas para o desenvolvimento deste trabalho. O mesmo está subdividido em seis seções. Na primeira seção, “Desenvolvimento dos *applets*”, são descritos os *applets* utilizados nas atividades deste trabalho, apresentando seus objetivos. Na segunda seção, “Desenvolvimento da Unidade de Aprendizagem”, descreve-se a elaboração do ambiente criado para reunir todos os *applets*. Na terceira seção, “Elaboração das Atividades”, descrevem-se as atividades desenvolvidas, explicitando o objetivo de cada uma delas. Na quarta seção, “Elaboração dos Questionários”, é apresentado o objetivo de cada um dos dois questionários, bem como a estrutura dos mesmos. Na quinta seção, “Teste Exploratório”, é descrito e analisado o teste das atividades e dos *applets*, realizado com professores e licenciandos em Matemática, bem como faz-se a análise dos dados levantados por meio do questionário. Na sexta seção, “Validação das Atividades”, é descrito e analisado o processo de validação das atividades e dos *applets*, realizado com alunos do Ensino Médio.

Nas “Considerações Finais”, destaca-se a relevância deste estudo, faz-se uma breve retrospectiva da pesquisa, focalizando os principais resultados; relatam-se as contribuições e as dificuldades encontradas e, finalmente, apontam-se algumas formas de continuidade do estudo realizado.

## 1 TRIGONOMETRIA

Ávila (1995) apresenta a seguinte justificativa para o ensino da Matemática:

A Matemática deve ser ensinada nas escolas porque é parte substancial de todo o patrimônio cognitivo da Humanidade. Se o currículo escolar deve levar a uma boa formação humanística, então o ensino da Matemática é indispensável para que essa formação seja completa (ÁVILA, 1995, p. 7).

O autor ainda complementa afirmando que a Matemática é importante para auxiliar o aluno no estudo de outras ciências e em atividades de seu cotidiano. Além disso, a Matemática colabora para a formação intelectual do aluno, enriquecendo seu pensamento matemático, seja pela exatidão do pensamento lógico-demonstrativo, seja pelo exercício criativo da intuição, da imaginação e dos raciocínios por indução e analogia (ÁVILA, 1995).

Sobre a aprendizagem de temas matemáticos no Ensino Médio, os PCNEM (BRASIL/MEC/SEMTEC, 1999) recomendam que esta esteja relacionada ao domínio de um saber fazer Matemática e de um saber pensar Matemática.

Seguindo essa mesma idéia, Matos (2005) defende que o professor de Matemática deve abandonar a idéia de que tem como dever “ensinar Matemática” e ter consciência de que sua vocação é educar os alunos matematicamente.

[...] aprender matemática não pode ser entendido como adquirir conhecimento matemático [...] e demonstrar certas destrezas no jogo de linguagem em que se transforma tipicamente o trabalho na matemática escolar. Aprender matemática tem que ser visto como um elemento residual do envolvimento dos alunos em práticas que envolvam a necessidade da percepção e do desenvolvimento de um ponto de vista matemático sobre as coisas (MATOS, 2005, p. 4).

No entanto, no ensino da Matemática, o aluno, geralmente, aprende terminologias e fórmulas e treina substituições na resolução de problemas, transformando a Matemática em algo rígido, acabado, chato e sem finalidade (NUNES, 2007). Segundo Nunes (2007), o aluno acaba apenas usando a memória, não desenvolvendo o raciocínio e a criatividade.

Para Rocha (2001, p. 23), “A Matemática ensinada na escola é geralmente muito mecânica e exata: um conjunto de fórmulas e passos que, se repetidos corretamente, levam invariavelmente à solução de um problema hipotético”. Entende-se, assim, que o fato de os programas de ensino serem compostos por

uma grande quantidade de informação, muitas vezes sem interação entre si, pode gerar dificuldades no estudo de alguns tópicos de Matemática (MARANHÃO, 1996).

Algumas dessas dificuldades na aprendizagem de Matemática podem ser constatadas em alguns erros de notação e de conceito de Trigonometria, tema deste trabalho, nas representações dos alunos. Apresentam-se, a seguir, alguns erros baseados em observações sem nenhum cunho de cientificidade, advinda da prática docente de alguns pesquisadores tais como Martins<sup>5</sup> (2003) e Lindegger<sup>6</sup> (2000) e Costa<sup>7</sup> (1997), encontrados em suas respectivas dissertações.

Segundo Lindegger (2000), ao colocar o ponto indicando uma multiplicação entre “cos” e “x”, provavelmente o aluno não compreendeu o significado de cosseno de um arco  $x$ , bem como a sua representação simbólica “cos  $x$ ”. O aluno estaria fazendo uma associação indevida entre “cos  $x$ ” e algo como “5y”. Assim, como 5y significa 5.y, cos  $x$  deve ser o produto cos.x (LINDEGGER, 2000). Martins (2003) cita a representação  $\frac{\cos x}{x} = \cos$  como um erro de mesma natureza.

Lindegger (2000) diz que em algumas aplicações, o aluno obtém e admite valores como  $\cos x = 3,8$ , não levando em consideração que  $\cos x$  está limitado ao intervalo  $[-1, 1]$ , não sendo possível, assim, assumir valores para  $\cos x > 1$ .

Para Lindegger (2000), quando um aluno escreve  $\text{tg } x = 1 \Rightarrow \text{tg } x = 45^\circ$ , trata-se de um erro conceitual, pois mesmo que o aluno tenha interpretado corretamente que  $\text{tg } x = 1$  refere-se ao ângulo de medida  $45^\circ$ , ele não soube diferenciar o significado dos símbolos  $x$  e  $\text{tg } x$ .

---

<sup>5</sup> Dissertação “Atribuindo significado ao seno e cosseno, utilizando o *software* Cabri-Géomètre” de Vera Lúcia de Oliveira Ferreira Martins. Essa dissertação teve como objetivo introduzir os conceitos de seno e cosseno no triângulo retângulo, na circunferência trigonométrica e no plano cartesiano de forma coordenada na tentativa de propiciar condições aos alunos do Ensino Médio de atribuírem significados a tais conceitos.

<sup>6</sup> Dissertação “Construindo os conceitos básicos da trigonometria no triângulo retângulo: uma proposta a partir de manipulação de modelos” de Luiz Roberto de Moura Lindegger. Essa dissertação teve o objetivo de investigar uma abordagem para o ensino de Trigonometria no triângulo retângulo, introduzindo conceitos a partir da manipulação de modelos no Ensino Fundamental.

<sup>7</sup> Dissertação “Funções seno e cosseno: uma seqüência de ensino a partir dos contextos do “mundo experimental” e do computador” de Nielce Meneguelo Lobo da Costa. Essa dissertação tem o objetivo de investigar a influência de dois diferentes contextos, sendo eles o computador e o “mundo experimental” na aprendizagem de Trigonometria.

A notação  $tg = \frac{\text{sen}}{\text{cos}}$  pode indicar somente um erro de notação ou então, pode estar associada à falta de significado das razões trigonométricas (LINDEGGER, 2000).

Em relação às unidades de medida, Costa (1997) cita que o fato de os alunos, inicialmente, trabalharem com graus e seus múltiplos, a introdução de uma nova unidade de medida angular (o radiano), pode constituir uma dificuldade. Ela atribui essa dificuldade ao fato do radiano estar ligado a um arco da circunferência trigonométrica (COSTA, 1997).

Martins (2003) descreve algumas observações feitas em sua prática pedagógica. Segundo esta autora, a representação dos arcos de medida  $-\frac{\pi}{2}$  e  $\frac{3\pi}{2}$  geram dificuldade, pois ambos têm a mesma extremidade, embora um seja positivo e outro negativo (MARTINS, 2003). Esta pesquisadora também completa, afirmando que o fato de o seno e o cosseno desses arcos serem iguais, é comum os alunos se referirem aos arcos de medidas  $-\frac{\pi}{2}$  e  $\frac{3\pi}{2}$  como sendo o mesmo arco (MARTINS, 2003).

Para que seja possível compreender melhor as dificuldades apresentadas pelos alunos, é muito importante um estudo histórico da construção de um conceito, em que se conheçam os erros e as dificuldades superadas pelos matemáticos, bem como as adaptações ocorridas ao longo da história (LINDEGGER, 2000). Sendo assim, a seguir, serão tratados alguns aspectos históricos da Trigonometria, dando uma idéia da sua origem e desenvolvimento.

### 1.1 Notas Históricas

As origens da Trigonometria são incertas (EVES, 2008). No Papiro Rhind é possível encontrar alguns problemas relacionados com a construção de pirâmides envolvendo o cálculo de cotangente (EVES, 2008). Há ainda a tábua cuneiforme babilônica Plimpton 322, que contém algo semelhante às tábuas trigonométricas atuais (EVES, 2008).



O desenvolvimento da Trigonometria está bastante ligado à astronomia. Os astrônomos babilônicos dos séculos IV e V a.C. obtiveram várias informações que foram passadas para os gregos (EVES, 2008).

Sobre o surgimento da Trigonometria, Carvalho (1992) diz:

Ela surgiu devido às necessidades da astronomia, a fim de prever as efemérides celestes, para calcular o tempo, e para ser utilizada na navegação e na Geografia (CARVALHO, 1992, p. 101).

Foi dessa astronomia primitiva que desencadeou o estudo da Trigonometria esférica (EVES, 2008). Porém, foi necessário desenvolver partes da Trigonometria plana (CARMO; MORGADO; WAGNER, 1992).

Aristarco de Samos<sup>8</sup>, que viveu por volta de 260 a.C., em seu livro “Sobre os tamanhos e distância do Sol e da Lua”, baseando-se em observações, deduziu que distância da Terra ao Sol é maior do que 18 vezes e menor do que 20 vezes a distância da Terra à Lua (BOYER, 2001). Deduziu também que os tamanhos do Sol e da Lua estavam na mesma razão que suas distâncias a Terra, e ainda, que a razão entre o diâmetro do Sol e da terra está entre 19:3 e 43:6 (BOYER, 2001). Embora o raciocínio utilizado por Aristarco estivesse correto, hoje se sabe que ele cometeu erros devido o uso de dados experimentais utilizados (CARVALHO, 1992).

Foi por volta do ano 200 a.C., que os astrônomos gregos começaram a se interessar pelo cálculo da distância entre dois pontos da superfície terrestre e também pela medida do raio da Terra (COSTA, 1997).

Erastótenes de Cirene<sup>9</sup> calculou a medida da circunferência da Terra considerada mais célebre da Antiguidade, utilizando regra de três e Trigonometria (BOYER, 2001).

Durante aproximadamente dois séculos e meio, os gregos estudaram relações entre retas e círculos para resolver problemas de astronomia, no entanto não chegaram a uma Trigonometria sistemática (BOYER, 2001).

---

<sup>8</sup>Aristarco de Samos (310 - 230 a.C.) - astrônomo grego, foi o primeiro cientista a propor que a Terra gira em torno do Sol (sistema heliocêntrico) (FERNANDES, 2002).

<sup>9</sup> Erastótenes de Cirene (276 - 194 a.C.) - nasceu em Cirene, na Grécia, foi matemático, astrônomo, geógrafo, historiador, filósofo, poeta e atleta (EVES, 2008)

No século II, Hiparco de Nicéia<sup>10</sup> construiu o que foi, presumivelmente, a primeira tabela trigonométrica, ganhando o direito de ser chamado de “o pai da Trigonometria” (BOYER, 2001). É provável também, que o uso do círculo de 360° na Matemática tenha sido motivado por meio da tabela de cordas de Hiparco (BOYER, 2001).

Têon<sup>11</sup> menciona um tratado sobre cordas de um círculo, escrito por Menelau de Alexandria<sup>12</sup> em seis livros (EVES, 2008). A única obra que se preservou de Menelau foram os três livros do seu tratado chamado *Spherica*, em árabe (BOYER, 2001). No Livro III se encontra o famoso “teorema de Menelau”, como parte do que é a Trigonometria esférica da época (BOYER, 2001).

A Trigonometria grega atingiu seu ápice com Cláudio Ptolomeu<sup>13</sup>, que viveu em torno de 150 d.C. (CARVALHO, 1992). Sua principal obra e mais influente da Trigonometria da Antiguidade foi a *Syntaxis Matemática*, ou seja, Sintaxe Matemática que foi traduzida pelos árabes como Megale Sintaxis, Megista e por fim Almagesto (“o maior”) (CARVALHO, 1992; BOYER, 2001).

Dos 13 livros que compõem o Almagesto, Ptolomeu abordou a Trigonometria nos capítulos 10 e 11 do Livro I (CARVALHO, 1992). Ele deduziu o que hoje seria a expressão para  $\sin(a \pm b)$  e demonstrou a relação  $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$  (sendo A um ângulo agudo), bem como construiu uma tabela de cordas (de senos) (CARVALHO, 1992).

Com os hindus, a Trigonometria continuou sendo ferramenta da astronomia, assim como com os gregos (EVES, 2008). No entanto, os hindus introduziram o equivalente da função seno na Trigonometria, substituindo a tabela grega de cordas (EVES, 2008). Uma das diferenças entre a Trigonometria hindu e grega, é que a

---

<sup>10</sup>Hiparco de Nicéia (190 - 126 a.C.) - nasceu em Nicéia e viveu em Alexandria, foi astrônomo, construtor, cartógrafo e matemático grego. Hoje é considerado o fundador da astronomia científica e também chamado de pai da Trigonometria (FERNANDES, 2002).

<sup>11</sup> Têon (335 - 395) - foi matemático e geômetra. Seus trabalhos, em geral, têm mais valor como informações históricas do que matemáticas (FERNANDES, 2002).

<sup>12</sup>Menelau de Alexandria (70 - 130) - nasceu em Alexandria, no Egito, foi astrônomo e geômetra, continuando os trabalhos de Hiparco em Trigonometria (FERNANDES, 2002).

<sup>13</sup> Cláudio Ptolomeu (85 - 165) - nasceu em Ptolomaida, Hérnia, no alto Egito. Foi astrônomo, geógrafo, físico e matemático da Universidade de Alexandria (FERNANDES, 2002).

primeira era essencialmente aritmética, enquanto a segunda era essencialmente geométrica (EVES, 2008).

Os árabes herdaram a Trigonometria dos gregos e hindus (CARVALHO, 1992). Para facilitar os cálculos, esses introduziram a tangente, cotangente, secante e cossecante (CARVALHO, 1992). Os árabes foram responsáveis também, pelo uso da palavra seno, cuja origem latina significa bolsa, baía (CARVALHO, 1992).

A palavra meio-corda, em sânscrito, língua utilizada pelos antigos hindus, é *jiva*. Esta palavra foi utilizada sem modificações pelos árabes. No entanto, como em algumas outras línguas, em árabe freqüentemente se escrevem somente as consoantes das palavras, deixando as vogais ao cuidado da interpretação do leitor. Ora, a palavra sânscrita *jiva* tem as mesmas consoantes que a palavra árabe bem familiar *jaib* (v e b se confundem como labiais explosivas). *Jaib*, em árabe, significa bacia ou bolso. Assim, foi natural que os tradutores de trabalhos matemáticos, do árabe para o latim, e que desconheciam o sânscrito, supusessem que lidavam com tabelas de *jaib*, e traduziram este termo pela palavra latina correspondente, *sinus*, que deu origem a seno (CARVALHO, 1992, p. 105).

Durante o Renascimento, grande parte do desenvolvimento da Trigonometria deve-se aos alemães, como George Peurbach<sup>14</sup> e João Regiomontano (CARVALHO, 1992). Este último, que ficou conhecido como Regiomontanus<sup>15</sup>, além de ter construído uma tabela de tangentes (CARVALHO, 1992), organizou a Trigonometria como parte da Matemática independente da astronomia (BOYER, 2001).

A utilização crescente da Trigonometria desencadeou a construção de tabelas por outros matemáticos, como por exemplo, George Joaquim Rético, François Vieta<sup>16</sup> e Bartolomeu Pitisco<sup>17</sup> (EVES, 2008).

É de Rético<sup>18</sup> o mais completo tratado de Trigonometria publicado até hoje (CARVALHO, 1992). Ele introduz, essencialmente, a Trigonometria no triângulo

---

<sup>14</sup> Geroge Peurbach (1423 - 1461) - nasceu em Viena, traduziu o Almagesto diretamente do grego, calculou tabelas de senos mais precisas (LINDEGGER, 2000).

<sup>15</sup> Regiomontanus (1436 - 1476) - nasceu em Königsberg ("montanha do rei"), e é o mais capaz e influente matemático do século XV (EVES, 2008).

<sup>16</sup> Vieta (1540 - 1603) - nasceu em Fontenay, estudou advocacia e foi membro do parlamento provincial de Bretanha, mas dedicava a maior parte de seu tempo de lazer à Matemática (EVES, 2008).

<sup>17</sup> Bartholomeo Pitiscus (1561-1613) - nasceu em Grünberg, Silésia (atual Zielona, Polônia), foi matemático, astrônomo e teólogo (CONNOR; ROBERTSON, 2005).

retângulo como é feito até os dias atuais, além de apresentar tabelas para as seis funções trigonométricas conhecidas (CARVALHO, 1992).

O Matemático francês Vieta, em seu trabalho “*Canon mathematicus seu ad triangula*”, contribuiu, notavelmente, para a Trigonometria (EVES, 2008). Nele, Vieta sistematizou métodos para a resolução de triângulos planos e esféricos, além de obter expressões para  $\cos n\theta$  como função para  $n = 1, 2, \dots, 9$ . (EVES, 2008).

No fim do século XVI e começo do século XVII, Bartolomeu Pitisco usou o termo “Trigonometria” pela primeira vez (BOYER, 2001).

A partir de Galileu<sup>19</sup> e com a descoberta da Geometria Analítica, o estudo de curvas desenvolveu-se muito (CARVALHO, 1992). Assim:

A curva seno foi introduzida nos estudos de Roberval (1602, 1675) sobre a cicloide; no livro Mecânica de Wallis (1616, 1703), publicado em 1670, vemos um gráfico de dois períodos da função seno. É o primeiro aparecimento de uma função trigonométrica (CARVALHO, 1992, p. 108).

Aos poucos, as funções trigonométricas passaram a ser utilizadas, freqüentemente, na Matemática, bem como o uso de tabelas cada vez mais precisas (CARVALHO, 1992).

Hoje em dia, a Trigonometria se estende a vários campos da Matemática, como a Geometria e a Análise (DANTE, 2005). Encontram-se aplicações da Trigonometria em Eletricidade, Mecânica, Acústica, Música, Engenharia, Topografia e em muitos outros campos de atividades. (DANTE, 2005). Na próxima seção serão mostradas algumas dessas aplicações.

---

<sup>18</sup> Georg Joachim von Lauchen Rheticus (1514 - 1574), nasceu na Áustria e foi matemático, cartógrafo e professor. Foi discípulo de Nicolau Copérnico (CONNOR; ROBERTSON, 2005).

<sup>19</sup> Galileu (1564 -1642) - nasceu em Pisa, e aos 17 anos iniciou os estudos de medicina, encaminhado pelos pais (EVES, 2008). No entanto, após consentimento de seus pais, abandonou a medicina e passou a dedicar-se à Ciência e a Matemática (EVES, 2008). Foi durante toda a vida, um católico praticante, no entanto, em 1633 foi obrigado pela Igreja a retratar-se de suas descobertas científicas (EVES, 2008).

## 1.2 Aplicações

Desde a Antiguidade, os astrônomos estudam o movimento dos astros por meio da Trigonometria (YOUSSEF; SOARES; FERNANDEZ, 2005).

Para calcular a medida do raio da Terra, por exemplo, um processo utilizado desde os gregos, é o seguinte: “Sobe-se até uma torre de altura  $h$  e mede-se o ângulo  $\alpha$  que faz a reta  $BC$  do horizonte de  $B$  com a vertical  $BO$  do lugar” (CARMO; MORGADO; WAGNER, 1992, p. 9). Pela Figura 1.1 se vê que:

$$\text{sen } \alpha = \frac{OC}{BO}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{R}{R + h}$$

$$R = (R + h) \text{sen } \alpha$$

$$R = R \cdot \text{sen } \alpha + h \cdot \text{sen } \alpha$$

$$R - R \cdot \text{sen } \alpha = h \cdot \text{sen } \alpha$$

$$R (1 - \text{sen } \alpha) = h \cdot \text{sen } \alpha$$

$$R = \frac{h \cdot \text{sen } \alpha}{1 - \text{sen } \alpha}$$

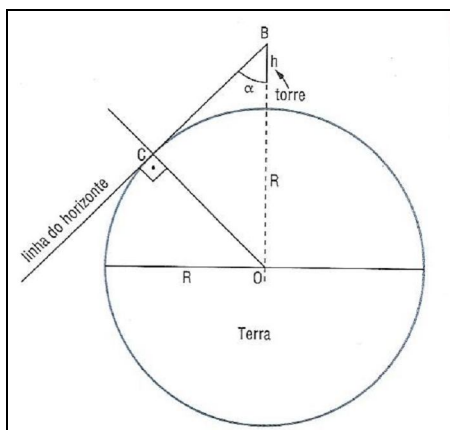


Figura 1.1: Medida do raio da Terra (DANTE, 2006, p. 282).

Sendo assim, com as medidas de  $h$  e do ângulo  $\alpha$ , que são acessíveis, pode-se calcular o raio  $R$  da Terra (CARMO; MORGADO; WAGNER, 1992).

Outro exemplo da aplicação da Trigonometria na Astronomia é o cálculo da distância entre a Terra e a Lua e a medida do raio da Lua.

Suponha-se que em um observatório astronômico  $A$ , a Lua (Figura 1.2) seja vista na vertical; no observatório  $B$ , a Lua seja vista na linha do horizonte (PAIVA, 2005).

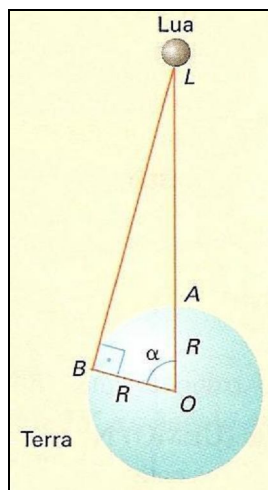


Figura 1.2: Distância da Terra à Lua (PAIVA, 2005, p. 235).

Conhecendo-se a medida  $R$  do raio da Terra e a medida  $\alpha$  do ângulo central  $A\hat{O}B$  (Figura 1.2), que é igual à medida do arco  $AB$ , é possível obter a distância entre os pontos  $A$  e  $L$  ( $AL$ ) da seguinte forma (PAIVA, 2005):

$$\cos \alpha = \frac{BO}{AO + AL} \rightarrow \cos \alpha = \frac{R}{R + AL} \rightarrow R = R \cdot \cos \alpha + AL \cdot \cos \alpha \rightarrow$$

$$\rightarrow R - R \cdot \cos \alpha = AL \cdot \cos \alpha \rightarrow AL = \frac{R - R \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha} \rightarrow AL = \frac{R}{\cos \alpha} - R$$

Para o cálculo da medida  $r$  do raio da Lua, inicialmente, mede-se o ângulo  $\beta$  formado pelos dois segmentos tangentes  $AT$  e  $AT'$  a um círculo máximo do satélite (Figura 1.3).

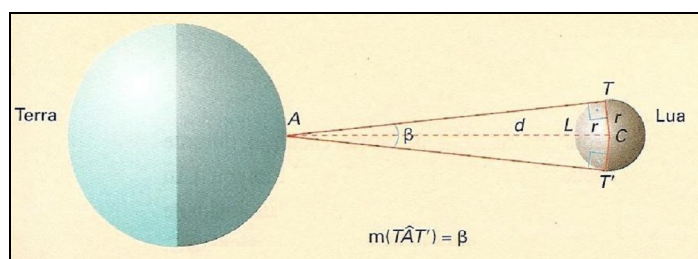


Figura 1.3: Medida do raio da Lua (PAIVA, 2005, p. 235).

Conhecendo-se a distância  $d$  entre os pontos  $A$  e  $L$ , obtêm-se:

$$\text{sen} \frac{\beta}{2} = \frac{r}{d+r} \rightarrow r = \frac{d \cdot \text{sen} \frac{\beta}{2}}{1 - \text{sen} \frac{\beta}{2}}$$

Outra aplicação da Trigonometria se encontra na Topografia. Nesta área, utilizam-se vários métodos de nivelamento para determinar a diferença de nível

entre dois ou mais pontos de um terreno (COMASTRI; TULER, 2003). O método nivelamento trigonométrico baseia-se no valor da tangente do ângulo de inclinação do terreno, pois o valor dessa função trigonométrica representa a diferença de nível por metro de distância horizontal entre os pontos considerados do terreno (COMASTRI; TULER, 2003).

Dessa forma, depois de determinar a distância horizontal ( $dh$ ) entre os pontos do terreno (Figura 1.4), a diferença de nível ( $dn$ ) é calculada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{BC}{AC} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{dn}{dh} \\ dn &= dh \cdot \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

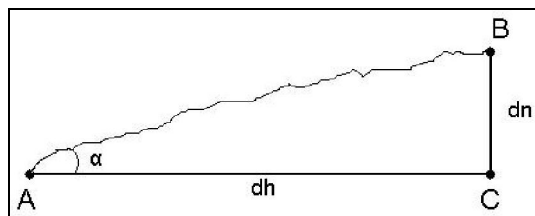


Figura 1.4: Marcação de terreno

No processo de nivelamento trigonométrico, é comum a utilização do teodolito para se obter o ângulo de inclinação do terreno (COMASTRI; TULER, 2003). Os teodolitos (Figura 1.5) são constituídos fundamentalmente por uma lente que permite a rotação horizontal e vertical, fazendo a leitura de ângulos em dois discos (ou limbos), devidamente graduados e protegidos (SMOLE; DINIZ, 2005).



Figura 1.5: Teodolito (YOUSSEF; SOARES; FERNANDEZ, 2005, p. 111).

Ao longo dos séculos, outros aparelhos menos complexos foram utilizados, principalmente na navegação marítima, tais como os astrolábios e os sextantes

(Figuras 1.6 e 1.7), ambos para determinar medidas de ângulos relativas aos astros (SMOLE; DINIZ; 2005).

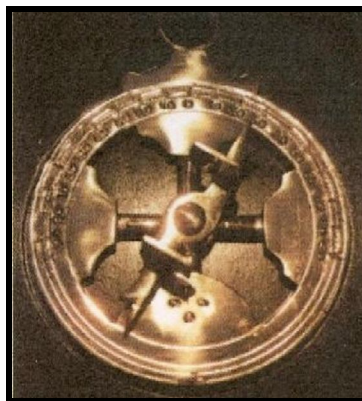


Figura 1.6: Astrolábio (SMOLE; DINIZ, 2005, p. 287).

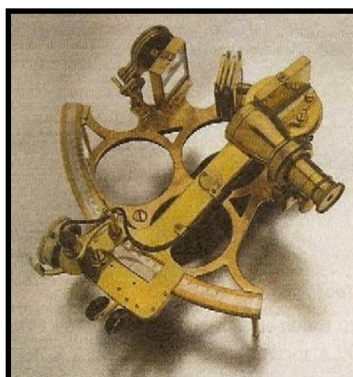


Figura 1.7: Sextante (SMOLE; DINIZ, 2005, p. 287).

Há séculos, a Trigonometria contribuiu também para a resolução de problemas de determinação das posições relativas de pontos sobre a superfície da Terra e de representação da sua esfericidade num mapa plano (SMOLE; DINIZ, 2005). Problemas esses, oriundos de feitura de cartas marítimas e da determinação da posição de um navio em alto-mar, que exigiam a medição de latitude e longitude dos lugares envolvendo cálculos trigonométricos (SMOLE; DINIZ, 2005).

Atualmente, para localizar pessoas e objetos em qualquer ponto do planeta, utiliza-se o GPS (*Global Positioning System*) ou Sistema de Posicionamento Global, que foi desenvolvido pelo Departamento de Defesa norte-americano (YOUSSEF; SOARES; FERNANDEZ, 2005). Para tanto, é utilizado um aparelho (Figura 1.8) receptor de sinais de rádio enviados por satélites na órbita da Terra, que calcula as coordenadas (latitude, longitude e altitude) da posição do ponto (YOUSSEF; SOARES; FERNANDEZ, 2005).



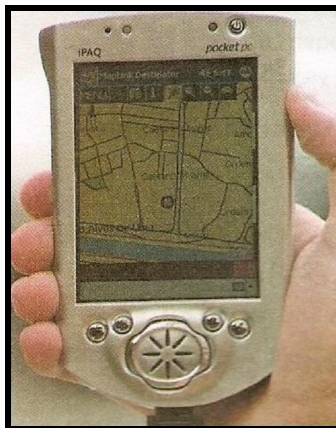


Figura 1.8: Aparelho de GPS (YOUSSEF; SOARES; FERNANDEZ, 2005, p. 144).

O GPS utiliza técnicas de triangulação e cálculos trigonométricos que se assemelham muito aos mais tradicionais processos de localização baseados em instrumentos convencionais com referenciais astronômicos usados, por exemplo, por Cristóvão Colombo e outros grandes instrumentos. (YOUSSEF; SOARES; FERNANDEZ, 2005, p. 144).

É importante ressaltar que os grandes diferenciais são: o controle de posição dos satélites, a transmissão de sinais de rádio e processamento computadorizado de receptor (YOUSSEF; SOARES; FERNANDEZ, 2005).

A Trigonometria também se aplica a vários campos da Física, dentre eles uma das leis da refração da luz. Quando um raio de luz incide obliquamente sobre a fronteira que separa dois meios de propagação diferentes (ar e água, por exemplo), a direção dessa propagação sofre uma alteração (YOUSSEF; SOARES; FERNANDEZ, 2005).

Na Figura 1.9 é possível observar o ângulo de incidência  $\theta_1$  e o de refração  $\theta_2$  formados entre o raio de luz e a perpendicular à superfície que separa os dois meios e os valores  $n_1$  e  $n_2$ , chamados de índice de refração<sup>20</sup> dos meios 1 e 2, respectivamente.

---

<sup>20</sup> O índice de refração de um meio material é definido da seguinte maneira:  
 índice de refração =  $\frac{\text{velocidade da luz no vácuo}}{\text{velocidade da luz no meio}}$  ou  $n = \frac{c}{v}$  (MÁXIMO; ALVARENGA, 2004)

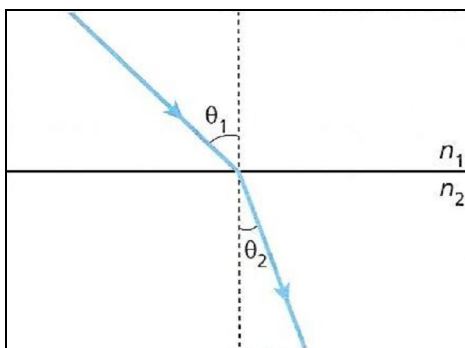


Figura 1.9: Refração da luz (YOUSSEF; SOARES; FERNANDEZ, 2005, p. 133).

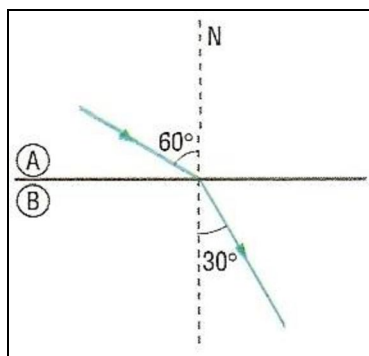
A lei de Snell<sup>21</sup> estabelece a relação existente entre os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  e os índices de refração  $n_1$  e  $n_2$  (YOUSSEF; SOARES; FERNANDEZ, 2005):

$$n_1 \cdot \text{sen } \theta_1 = n_2 \cdot \text{sen } \theta_2$$

$$\frac{\text{sen } \theta_1}{\text{sen } \theta_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

Exemplo:

Um raio luminoso passa de um meio **A** para um meio **B** conforme indica a figura. Sabendo que o índice de refração absoluto do meio B é  $\sqrt{6}$ , qual é o índice de refração do meio **A** (DANTE, 2006)?



<sup>21</sup> A lei de Snell recebe esse nome em homenagem ao cientista holandês W. Snell, que foi o responsável pelas primeiras descobertas que deram origem a ela no século XVII (MÁXIMO; ALVARENGA, 2004).

Resolução:

$$\frac{\operatorname{sen} \theta_1}{\operatorname{sen} \theta_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{n_1} \quad \sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{n_1}$$

$$\frac{\operatorname{sen} 60^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{n_1} \quad \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{n_1} \quad n_1 = \sqrt{2}$$

Outra aplicação da Trigonometria na Física se encontra nos fenômenos físicos chamados periódicos, ou seja, que se repetem sem alteração num determinado intervalo de tempo (DANTE, 2005). Paiva (2005) cita alguns exemplos tais como os movimentos das marés, o movimento de um pêndulo, a propagação das ondas, o movimento dos braços de uma pessoa ao caminhar e os batimentos cardíacos.

As funções trigonométricas, especialmente a função seno, são utilizadas para descrever tais fenômenos, visto que são funções periódicas (DANTE, 2005). A maneira mais simples de associar a função seno a um movimento periódico é imaginar um ponto P (Figura 1.10) percorrendo a circunferência trigonométrica, assim a projeção de P no eixo dos senos ou dos cossenos descreverá um movimento periódico (DANTE, 2005).

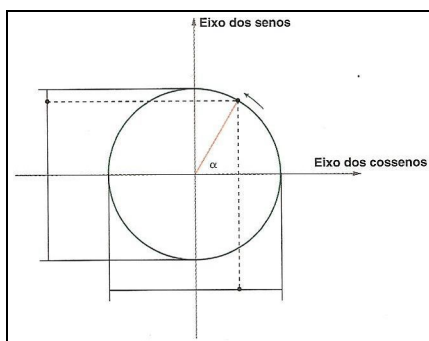


Figura 1.10: Movimento periódico na circunferência trigonométrica (DANTE, 2005, p. 69).

A projeção do ponto P (x, y) sobre o eixo dos cossenos descreve um movimento cuja equação é do tipo  $y = \cos x$  e sobre o eixo dos senos,  $y = \operatorname{sen} x$  (DANTE, 2005).

Dessa forma é possível associar a qualquer movimento periódico uma função senoidal do tipo  $f(x) = \mathbf{d} + \mathbf{a} \cdot \operatorname{sen}(\mathbf{b}x + \mathbf{c})$ , cuja imagem é dada por  $[\mathbf{d} - |\mathbf{a}|, \mathbf{d} + |\mathbf{a}|]$ , e cujo período é dado por  $\frac{2\pi}{|b|}$ .

Exemplo:

Em certa cidade litorânea, a altura  $h$  da maré (em metro), em função do tempo  $t$ , é dada pela função  $h(t) = 2 + 0,5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$ , na qual o tempo é medido em hora, a partir da meia-noite. Calcule a altura da maré às 6 horas da manhã (MELLO, 2005 - adaptado).

Resolução:

Considerando que o tempo é medido a partir da meia-noite, basta substituir  $t$  por 6 na função  $h(t)$ :

$$h(6) = 2 + 0,5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} \times 6\right)$$

$$h(6) = 2 + 0,5 \cdot \cos 2\pi$$

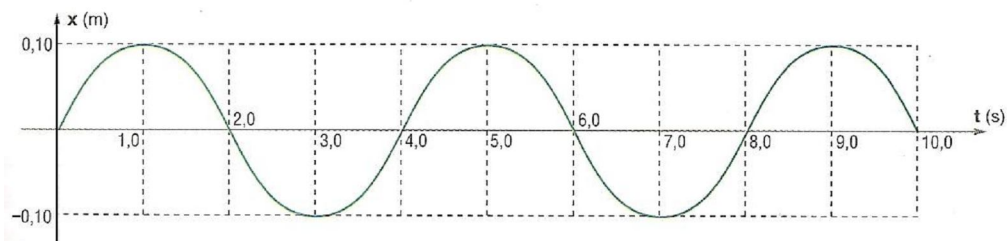
$$h(6) = 2 + 0,5 \cdot 1 = 2,5$$

Assim, às 6 horas da manhã, a altura da maré é de 2,5m.

Um tipo de movimento periódico muito comum é o movimento harmônico simples (MHS), que se caracteriza pelo movimento de um corpo em linha reta, com oscilação em torno de um ponto de equilíbrio (DANTE, 2005). A equação do espaço no MHS é apresentada como  $x = \mathbf{A} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$  ou  $x = \mathbf{A} \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$  (DANTE, 2005). As constantes **a**, **b**, **c** e **d** são substituídas por valores que representam aspectos relevantes do MHS (DANTE, 2005). Assim, tem-se que **A** é amplitude do movimento a partir do centro de oscilação;  $\omega$  é a frequência angular;  $\varphi_0$  é a fase inicial; e o argumento do seno (ou cosseno), ou seja,  $\omega t + \varphi_0$ , é chamado fase do movimento no tempo  $t$  (DANTE, 2005).

Exemplo:

Considere uma partícula realizando um MHS com função horária  $x(t) = \mathbf{A} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$ . Dessa forma,  $x(t)$  representa a posição assumida pela partícula em função do instante  $t$  a partir de  $t_0 = 0$ ; **A** é a medida da amplitude do movimento;  $\varphi_0$ , sua fase inicial e  $\omega$  sua pulsação. Na figura tem-se o gráfico dessa função horária, segundo um certo referencial.



Obtenha a função horária da posição dessa partícula, com dados no SI, e as constantes  $A$ ,  $\varphi_0$  e  $\omega$  números positivos (DANTE, 2005).

Resolução:

A função pedida é derivada de uma função cosseno. Além disso, o gráfico mostra que:

- o período é 4, logo:

$$4 = \frac{2\pi}{|\omega|}$$

$$\omega = \frac{\pi}{2}$$

- A imagem é  $\text{Im} = [-0,1; 0,1]$ , logo:

$$[-|A|, |A|]$$

$$A = 0,1$$

- Existe deslocamento horizontal

Do gráfico tem-se que o cosseno é máximo em  $t = 1\text{s}$ , logo:

$$\cos(\omega t + \varphi_0) = 1$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \varphi_0\right) = 1$$

$$\frac{\pi}{2}t + \varphi_0 = 0 + 2k\pi$$

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Variando  $k$ , encontram-se os possíveis valores de  $\varphi_0$ , que são:  $-\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{3\pi}{2}$ , etc.

Assim, com as constantes positivas, uma equação possível é

$$x(t) = 0,1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{3\pi}{2}\right).$$

### 1.3 Trigonometria e Tecnologias da Informação e Comunicação

A inserção da tecnologia na sociedade vai exigir competências que vão além do simples lidar com a máquina (BRASIL/MEC/SEMTEC, 1999). Como já mencionado na introdução deste trabalho, o impacto da tecnologia exigirá do ensino da Matemática um redirecionamento do currículo, de forma que favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o indivíduo possa se reconhecer e se orientar no mundo do conhecimento (BRASIL/MEC/SEMTEC, 1999).

Segundo Kaput (1992 apud Gravina e Santarrosa, 1998, p.23):

A necessidade de novos conteúdos de Matemática que visem capacitar os estudantes para o próximo século não é compatível com as estruturas curriculares vigentes [...] Novas alternativas curriculares dependem de substancial aplicação de potentes tecnologias. Este processo deve incluir dramático crescimento nas interações entre os participantes do processo educacional e entre os recursos disponíveis.

A introdução das TIC é muito mais do que colocar um computador na sala de aula. Para Litto (1998), modernizar a educação é ter que mudar o papel da escola na sociedade, bem como o papel do professor na sala de aula, e as competências que os alunos devem adquirir dentro e fora da escola.

Ponte, Oliveira e Varandas (2003, p.1) afirmam que os professores de Matemática precisam saber utilizar as TIC na sua prática profissional.

Estas tecnologias permitem perspectivar o ensino da Matemática de modo profundamente inovador, reforçando o papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação e relativizando a importância do cálculo e da manipulação simbólica.

Baldin (2002) também cita algumas vantagens na utilização de recursos tecnológicos no processo de ensino e aprendizagem de Matemática, tais como: capacidade computacional, visualização gráfica, descoberta e confirmação de propriedades, possibilidades de executar experimentos com coleta de dados, entre outras.

A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados possibilita realizar uma variedade de experimentos em pouco tempo, o que favorece o processo de investigação e abstração, resultando na construção de conceitos e relações (GRAVINA; SANTARROSA, 1998).

Entende-se que na Matemática, as TIC podem favorecer o desenvolvimento nos alunos, de atitudes mais positivas e uma visão mais completa sobre a natureza da disciplina (PONTE; OLIVEIRA; VARANDAS, 2002).

Diante das dificuldades enfrentadas pelos alunos no estudo da Trigonometria, como visto no início deste capítulo e as vantagens que as tecnologias digitais oferecem, entende-se que a criação de um ambiente computacional que permita ao aluno a experimentação, a investigação e a manipulação, pode diminuir o elevado nível de abstração desse tema.

Neste contexto, tem-se, por exemplo, os *applets*. Dentre as vantagens já atribuídas aos recursos tecnológicos digitais, Santos e Paixão<sup>22</sup> (2008, p. 3) destacam que no uso de *applets*:

[...] os alunos podem interagir diretamente com o conteúdo (experimentação), criando uma intuição sobre determinado conceito explorado, de modo a tornar mais robusta a sua imagem de conceito sobre ele.

Segundo Borba e Penteado (2005), a experimentação é um aspecto fundamental da aprendizagem matemática. Ela possibilita uma nova ordem de exposição oral da teoria, permitindo que a teorização ocorra após a investigação.

Para Pais (1999), um dos objetivos da Educação Matemática é estimular o aluno a trabalhar na direção de uma iniciação à investigação científica, fazendo com que o hábito do raciocínio seja despertado. Assim, a utilização de *applets* é importante, pois permite a realização de “experiência matemática” que facilita a elaboração de conjecturas, valorizando o pensamento matemático, podendo causar um impacto significativo na qualidade do ensino (SANTOS; PAIXÃO; PEREIRA, 2007).

Dessa forma, com o uso de *applets*, o aluno ainda passará do status de paciente do processo de ensino e aprendizagem, para agente do mesmo (SANTOS; PAIXÃO; PEREIRA, 2007).

Santos, Paixão e Pereira (2007) destacam que para um resultado satisfatório na utilização de *applets*, estes devem oferecer um diferencial em relação ao uso de textos e gráficos. Além disso, é necessário que os *applets*:

---

<sup>22</sup> Os autores, em seu artigo, fazem uso do termo *mathlets* para *applets* direcionados ao estudo de temas matemáticos, sendo *mathlet* um acrônimo “*mathematic’s applet*” (*applet* de Matemática).

[...] contribuam efetivamente para uma melhor compreensão dos conteúdos abordados por parte dos alunos, sejam de fácil navegação, entendimento e manipulação por parte tanto do professor, quanto do aluno (SANTOS; PAIXÃO; PEREIRA, 2007, p. 3).

A contribuição de *applets* no estudo de Trigonometria pode ser comprovada na pesquisa relatada por Martins (2003). Em seu trabalho, a pesquisadora refere-se a arquivos eletrônicos elaborados no *software* Cabri-Géomètre<sup>23</sup>. No entanto, sabe-se que este *software* tem recursos disponíveis para converter tais construções em *applets*. Assim, as vantagens ressaltadas por Martins (2003) com o uso das construções no estudo de Trigonometria podem ser estendidas para *applets* com a mesma finalidade.

Em sua pesquisa, Martins (2003) relata que o movimento proporcionado pelas construções contribuiu de forma significativa para o avanço do processo de aprendizagem de Trigonometria. Além disso, a referida autora verificou que a coordenação de cores utilizadas nas construções auxiliou os alunos na formulação de conjecturas. Martins (2003) também deixa claro, que o uso de computadores para a realização de atividades contribuiu para aumentar o entusiasmo dos alunos.

---

<sup>23</sup> *Software* de geometria dinâmica desenvolvido por Yves Bouac, Franck Bellemain e Jean Marie Laborde, na Universidade de Joseph Fourier em Grenoble (MARTINS, 2003).



## 2 RELATO DE EXPERIÊNCIA

Este trabalho visa desenvolver e validar recursos didáticos (*applets* e atividades) para a aprendizagem: i) de razões trigonométricas no triângulo retângulo; ii) de medidas de ângulos (grau e radiano); iii) de seno e cosseno na circunferência trigonométrica; iv) das relações entre os valores do seno e cosseno de ângulos na circunferência trigonométrica; v) da função seno; vi) das transformações causadas pelos parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  nas funções na forma  $g(x) = d + a \text{ sen } (bx + c)$  em relação à função  $f(x) = \text{sen } x$ .

A fim de alcançar os objetivos traçados, algumas etapas precisaram ser cumpridas. Neste capítulo descrevem-se tais etapas na seguinte ordem: i) desenvolvimento dos *applets*; ii) desenvolvimento da unidade de aprendizagem; iii) elaboração das atividades; iv) elaboração dos questionários; v) realização do teste exploratório das atividades; vi) validação das atividades.

### 2.1 Desenvolvimento dos *Applets*

A motivação para o desenvolvimento dos *applets*<sup>24</sup> para o estudo de Trigonometria, conforme mencionado na introdução desta monografia, decorreu da importância desse tema, e também por ter sido objeto de estudo de uma das autoras dessa monografia, no âmbito do projeto de pesquisa Tecnologias de Informação e Comunicação no Processo de Ensino e Aprendizagem de Matemática<sup>25</sup>. No referido projeto, foram elaborados 37 *applets* dos quais sete foram utilizados nesta monografia. A fim de complementar os sete *applets* selecionados, criaram-se mais seis, totalizando 13 *applets* que foram utilizados na resolução das atividades sobre Trigonometria, que compõem uma apostila descrita na seção 2.3. A orientação para utilização dos *applets* encontra-se nos enunciados das atividades da apostila.

A seguir, apresentam-se os 13 *applets* utilizados neste trabalho.

---

<sup>24</sup> Inicialmente foram elaboradas as construções no *software* GeoGebra, e a partir de recursos disponíveis neste *software* foi possível a conversão dessas em *applets*.

<sup>25</sup> O referido projeto de pesquisa é desenvolvido no CEFET Campos e coordenado pelas professoras Gilmara Barcelos e Sílvia Batista (orientadora e co-orientadora desta monografia, respectivamente).

### 2.1.1 Trigonometria no Triângulo Retângulo

A Figura 2.1 apresenta o *applet* para o estudo das razões trigonométricas no triângulo retângulo. Por meio deste *applet* é possível analisar que as razões trigonométricas dependem somente do ângulo agudo considerado. Este foi elaborado no âmbito do projeto de pesquisa.

Para facilitar a descrição desse *applet* foram colocadas indicações de suas partes: “parte 1”, “parte 2”, “parte 3” (o *applet* em si não possui tais indicações). O mesmo foi feito para as demais figuras dos *applets* desta seção

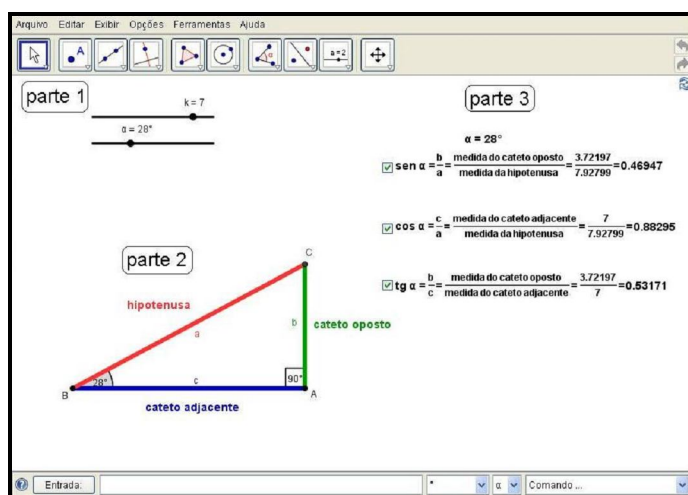


Figura 2.1: Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Na parte 1 da Figura 2.1 encontram-se os seletores<sup>26</sup>  $k$  e  $\alpha$ . A movimentação do primeiro seletor permite alterar as medidas dos lados do triângulo (parte 2). A movimentação do segundo seletor altera a medida do ângulo  $\alpha$ , assinalado no triângulo. Essas alterações mudam, ou não, os valores das razões na parte 3.

O *applet* apresentado na Figura 2.2 também foi desenvolvido no âmbito do projeto de pesquisa e tem por objetivo criar condições para que o aluno identifique as relações entre as razões trigonométricas de ângulos complementares no triângulo retângulo.

<sup>26</sup>Seletor é um recurso do *software* GeoGebra que representa graficamente um número ou um ângulo livre associado a uma construção. Assim, ao ser movimentado, o seletor altera os elementos da construção que são dependentes dele.

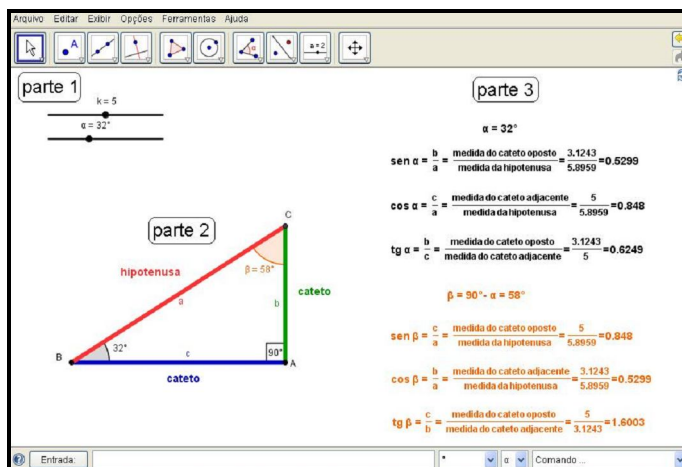


Figura 2.2: Relações entre as razões trigonométricas de ângulos complementares

Na parte 1 da Figura 2.2, encontram-se os seletores  $k$  e  $\alpha$ . A movimentação do seletor  $k$  permite alterar as medidas dos lados do triângulo (parte 2). A movimentação do seletor  $\alpha$  altera a medida do ângulo  $\alpha$  e, conseqüentemente, do ângulo  $\beta$ , ambos assinalados no triângulo. Na parte 3 encontram-se as razões trigonométricas do ângulo  $\alpha$  e do ângulo  $\beta$ , bem como a relação existente entre eles ( $\beta = 90^\circ - \alpha$ ).

## 2.2.2 Medidas de Ângulo

A Figura 2.3 apresenta o *applet* desenvolvido para o estudo de medidas de ângulo (grau e radiano). Este *applet* foi elaborado durante o desenvolvimento deste trabalho monográfico.

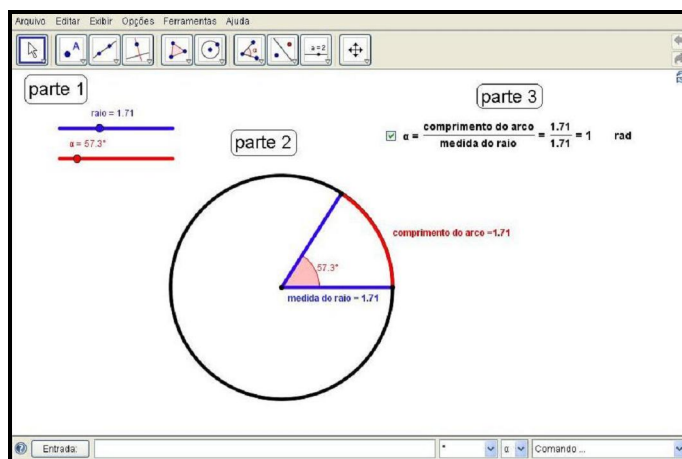


Figura 2.3: Medidas de ângulo

Na parte 1, encontram-se os seletores **raio**, correspondente à medida do raio da circunferência (parte 2), e  $\alpha$ , correspondente à medida do ângulo central,  $\alpha$ , da

circunferência. Na parte 3, apresenta-se a razão entre o comprimento do arco correspondente ao ângulo central e a medida do raio.

### 2.2.3 Apresentação da Circunferência Trigonométrica

O *applet* apresentado na Figura 2.4, elaborado durante a monografia, tem o objetivo de apresentar a circunferência trigonométrica.

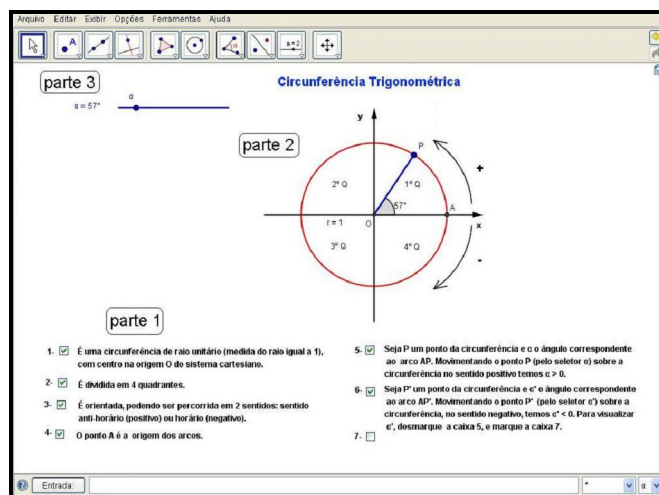


Figura 2.4: Circunferência trigonométrica

Na parte 1, encontram-se caixas numeradas de 1 a 7, que serão marcadas pelo usuário<sup>27</sup>. Ao marcar a caixa 1, por exemplo, aparece o texto “É uma circunferência de raio unitário (medida do raio igual a 1), com centro na origem O do sistema cartesiano.”, ao mesmo tempo que aparece o ponto O e o texto “ $r = 1$ ” na circunferência trigonométrica (parte 2). Ao marcar a caixa 5, além do texto correspondente, aparecem na circunferência o ponto P e o ângulo  $\alpha$ , bem como o seletor correspondente a esse ângulo, na parte 3. Ao movimentar o seletor  $\alpha$ , o ponto P “caminha” no sentido anti-horário sobre a circunferência, alterando a medida do ângulo  $\alpha$ . Ao marcar a caixa 6, no final de seu texto correspondente, solicita-se que a caixa 5 seja desmarcada (para que “desapareçam” o ponto P, o ângulo  $\alpha$  e o seletor  $\alpha$ ) e que a caixa 7 seja marcada, fazendo com que apareçam na circunferência o ponto P’, o ângulo  $\alpha'$  e o seletor correspondente a esse ângulo. Neste caso, ao movimentar o seletor  $\alpha'$ , o ponto P’ “caminha” no sentido horário sobre a circunferência, alterando o ângulo  $\alpha'$ .

<sup>27</sup>A orientação para o usuário quanto à marcação das caixas é feita no enunciado da atividade correspondente ao referido *applet*.

## 2.2.4 Função de Euler

Antes de definir o seno e o cosseno na circunferência trigonométrica, é importante mostrar a correspondência entre números reais e pontos na circunferência. A maneira mais natural de fazer essa correspondência é, segundo Lima (2001a), por meio da função de Euler  $E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , cujo contradomínio é a circunferência  $C$  de raio 1 e centro na origem do plano cartesiano. Esta função faz corresponder a cada número real  $t$  o ponto  $E(t)=(x, y)$  da circunferência unitária (LIMA, 2001a). Para tanto foi elaborado, durante a monografia, o *applet* para a apresentação da Função de Euler (Figura 2.5).

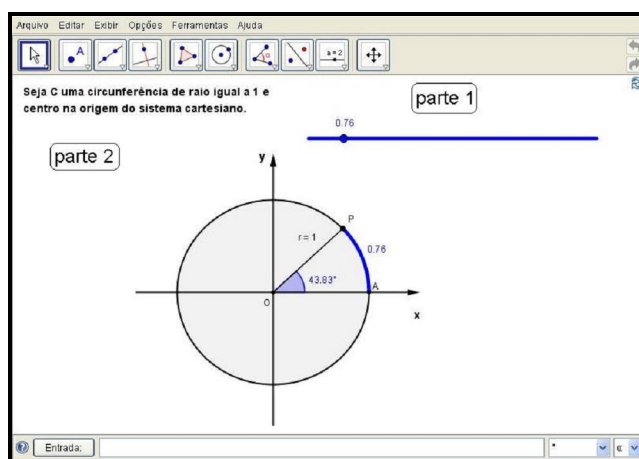


Figura 2.5: Função de Euler

Na parte 1, encontra-se o seletor que representa o intervalo real  $[0; 6,28]$ . Ao movimentar o seletor, a sua imagem (ponto P), percorre sobre a circunferência trigonométrica (parte 2), no sentido anti-horário, um arco AP, de comprimento igual ao número real mostrado no seletor. Para cada número real  $t$  indicado no seletor, tem-se um ângulo  $A\hat{O}P$  na circunferência que mede  $t$  radianos. Dessa forma, associa-se cada número real do intervalo real  $[0; 6,28]$  a um ponto da circunferência.

Esta associação pode ser estendida a todo número real. Neste *applet* só é possível a associação de um número real no intervalo  $[0; 6,28]$ , sendo assim, ao utilizá-lo para a apresentação da função de Euler, faz-se necessário que o professor mencione que é possível fazer a associação de números reais maiores que 6,28, assim como, de reais negativos, a um ponto da circunferência. No caso dos reais negativos, o ponto P será extremidade final de um arco de comprimento  $|t|$ , considerando, em C, um percurso no sentido horário.

## 2.2.5 Seno e Cosseno na Circunferência Trigonométrica

O *applet* apresentado na Figura 2.6 foi elaborado durante o projeto de pesquisa e é usado nas atividades desta monografia para o estudo de seno e cosseno na circunferência trigonométrica.

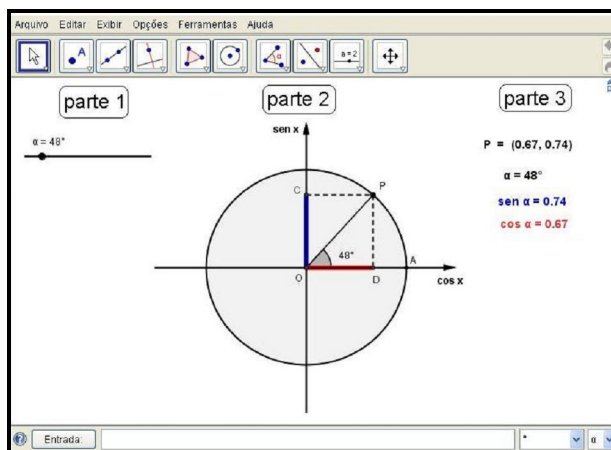


Figura 2.6: Seno e cosseno na circunferência trigonométrica - sentido anti-horário

Na parte 1 encontra-se o seletor  $\alpha$ . Ao movimentá-lo, a medida do ângulo  $\alpha$  assinalado na circunferência trigonométrica (parte 2) se altera, assim como os valores do seno e do cosseno do ângulo (parte 3). Na circunferência, o seno e o cosseno do ângulo são representados geometricamente pelos segmentos  $\overline{OC}$  (azul) e  $\overline{OD}$  (vermelho).

Durante a monografia, surgiu a necessidade de criar um *applet*, semelhante ao mostrado na Figura 2.6, para o estudo de seno e cosseno de arcos com extremidade na primeira volta negativa (sentido horário). Apresenta-se na Figura 2.7 o *applet* elaborado com esse objetivo.

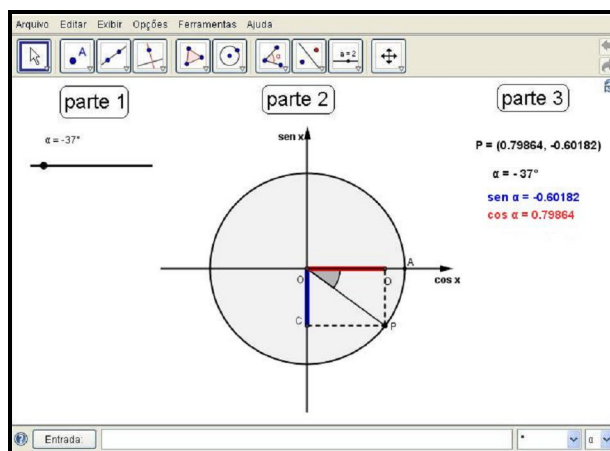


Figura 2.7: Seno e cosseno na circunferência trigonométrica - sentido horário

## 2.2.6 Relações na Circunferência Trigonométrica

São quatro *applets* que possibilitam a investigação das relações entre o seno e cosseno de ângulos na circunferência trigonométrica. Estes são apresentados nas Figuras 2.8, 2.9, 2.10 e 2.11. Na parte 1 desses *applets*, encontra-se o seletor  $\alpha$ , que ao ser movimentado, altera a medida do ângulo  $\alpha$  assinalado na circunferência trigonométrica (parte 2). Conseqüentemente, a medida do ângulo  $\beta$  também se altera, uma vez que existe uma relação entre eles (registrada na parte 3). Assim, alterando a medida dos ângulos, o seno e o cosseno mostrados na parte 3, também se alteram, sendo possível verificar as relações entre os mesmos em cada caso.

A Figura 2.8 apresenta o *applet* que focaliza as relações entre os valores do seno e cosseno de ângulos complementares.

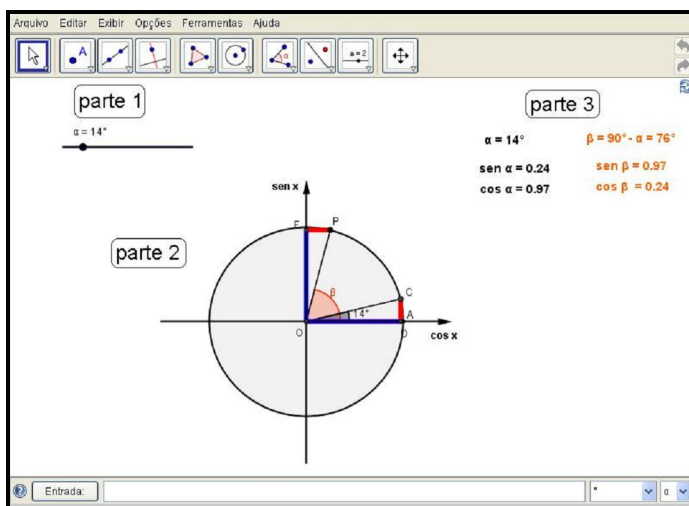


Figura 2.8: Relações entre seno e cosseno de ângulos complementares

Este *applet* permite observar, por exemplo, que  $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$  e  $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$ .

A Figura 2.9 apresenta o *applet* que focaliza as relações entre os valores do seno e cosseno de ângulos suplementares.

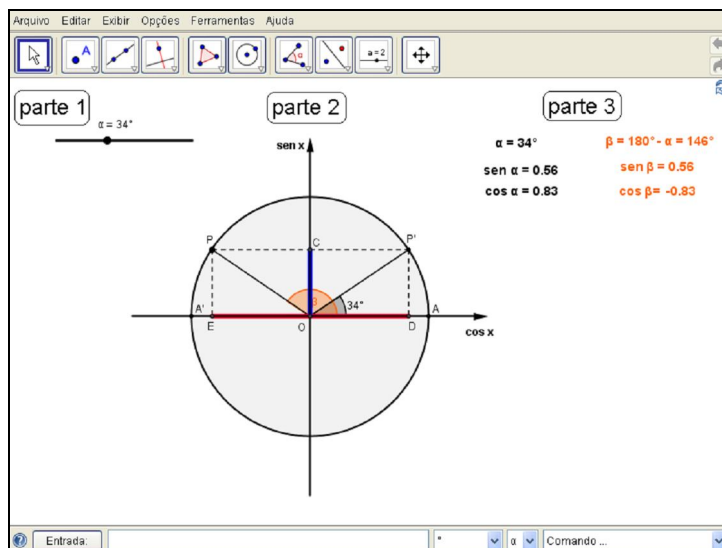


Figura 2.9: Relações entre seno e cosseno de ângulos suplementares

Este *applet* permite observar, por exemplo, que  $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ$  e  $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ$ .

A Figura 2.10 apresenta o *applet* que focaliza as relações entre os valores do seno e cosseno de ângulos explementares (ângulos que diferem de  $180^\circ$ ).

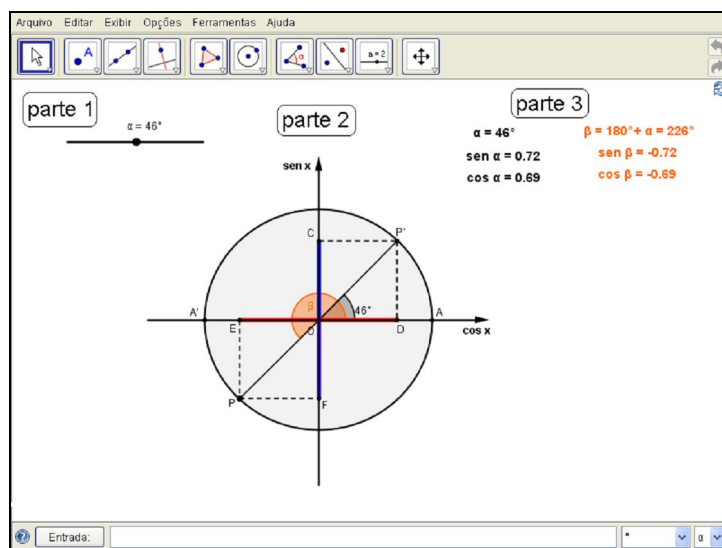


Figura 2.10: Relações entre seno e cosseno de ângulos explementares

Este *applet* permite observar, por exemplo, que  $\sin 210^\circ = -\sin 30^\circ$  e  $\cos 210^\circ = -\cos 30^\circ$ .

A Figura 2.11 apresenta o *applet* que focaliza as relações entre os valores do seno e cosseno de ângulos replementares.



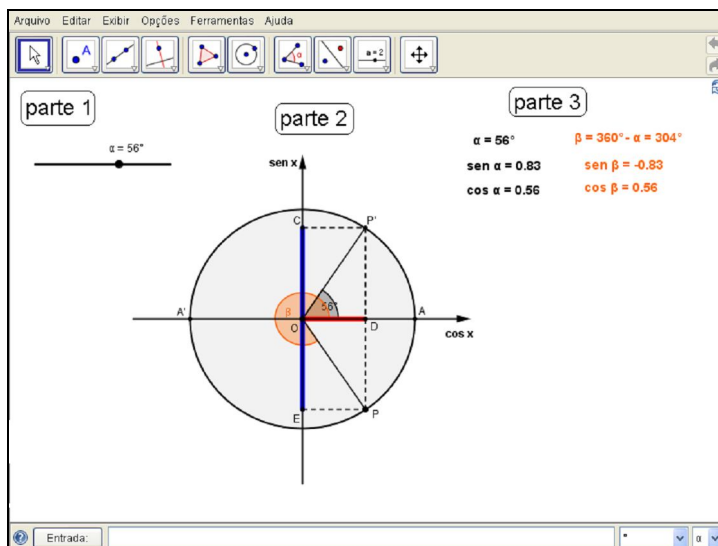


Figura 2.11: Relações entre seno e cosseno de ângulos replementares

Este *applet* permite observar, por exemplo, que  $\text{sen } 330^\circ = -\text{sen } 30^\circ$  e  $\text{cos } 330^\circ = \text{cos } 30^\circ$ .

## 2.2.7 Função Seno e suas Transformações

Para o estudo da função seno, foram elaborados dois *applets*, durante a monografia. Um para a definição de função seno (Figura 2.12) e outro para o estudo das transformações causadas pelos parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  nas funções na forma  $g(x) = d + a \text{sen}(bx + c)$  em relação à função  $f(x) = \text{sen } x$  (Figura 2.13).

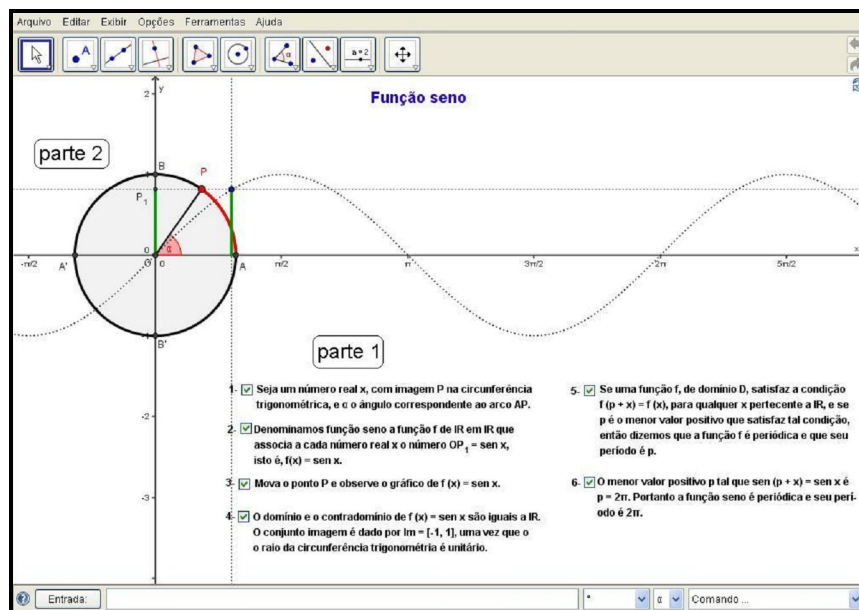


Figura 2.12: Função seno no plano cartesiano e na circunferência trigonométrica

Na parte 1 da Figura 2.12, encontram-se as caixas numeradas. À medida que as caixas são marcadas, aparecem os textos correspondentes, bem como os elementos associados a estes na circunferência trigonométrica (parte 2). Ao marcar a caixa 1, por exemplo, aparece o texto “Seja um número real  $x$ , com imagem  $P$  na circunferência trigonométrica, e  $\alpha$  o ângulo correspondente ao arco  $AP$ .” e aparece também o ponto  $P$  e o ângulo  $\alpha$  na circunferência trigonométrica.

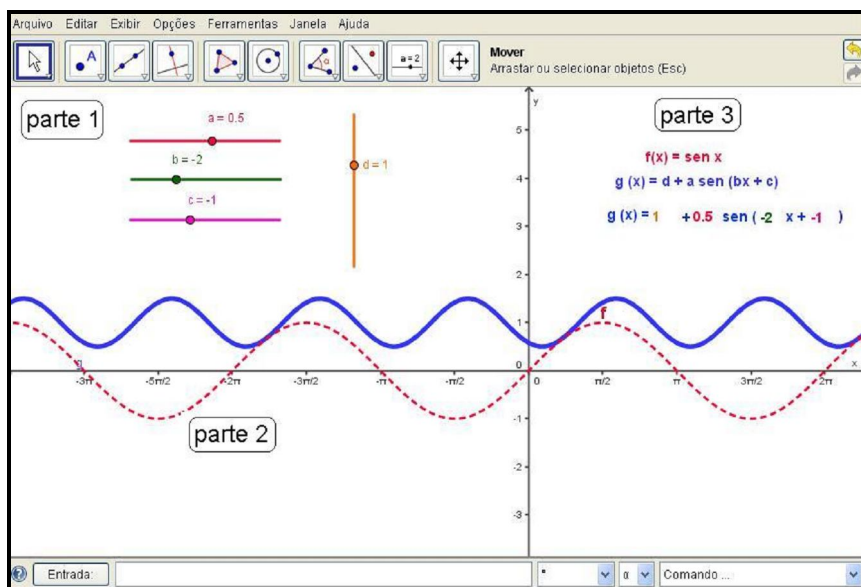


Figura 2.13: Transformações gráficas da função seno

Na parte 1 da Figura 2.13, encontram-se os seletores **a**, **b**, **c** e **d**, que ao serem movimentados, alteram, respectivamente, os valores de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  na função  $g(x) = d + a \operatorname{sen}(bx + c)$  (representada graficamente, em azul, na parte 2 e, algebricamente, na parte 3). Assim, é possível comparar o gráfico da função  $g(x)$ , após a movimentação, com o gráfico da função  $f(x) = \operatorname{sen} x$ .

## 2.2 Desenvolvimento da Unidade de Aprendizagem

A fim de disponibilizar, em único local, os *applets* utilizados na resolução das atividades, criou-se a Unidade de Aprendizagem em HTML, usando o *software* NVU. Esta contém os *applets* necessários para a resolução das atividades elaboradas. Disponibilizando os *applets* em único local considera-se que o uso dos mesmos na validação, seria facilitado, evitando que vários arquivos de construções fossem abertos.

Na Figura 2.14 apresenta-se a página inicial da Unidade de Aprendizagem criada. Esta contém o objetivo da unidade e o significado da palavra Trigonometria, além do menu e do nome das autoras e das orientadoras.

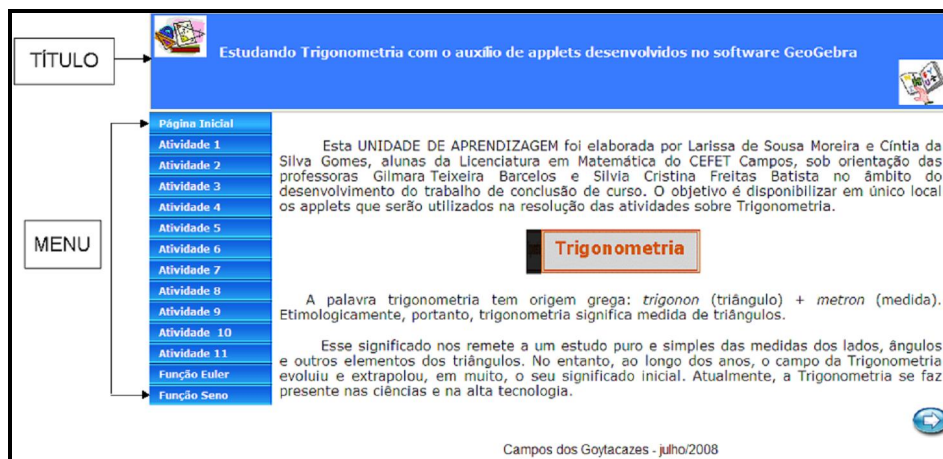


Figura 2.14: Página inicial da unidade de aprendizagem

Ao clicar em "Atividade1" no menu, por exemplo, o aluno irá para a página que contém o *applet* referente à Atividade 1 (Figura 2.15). O mesmo acontece para os demais itens do menu.

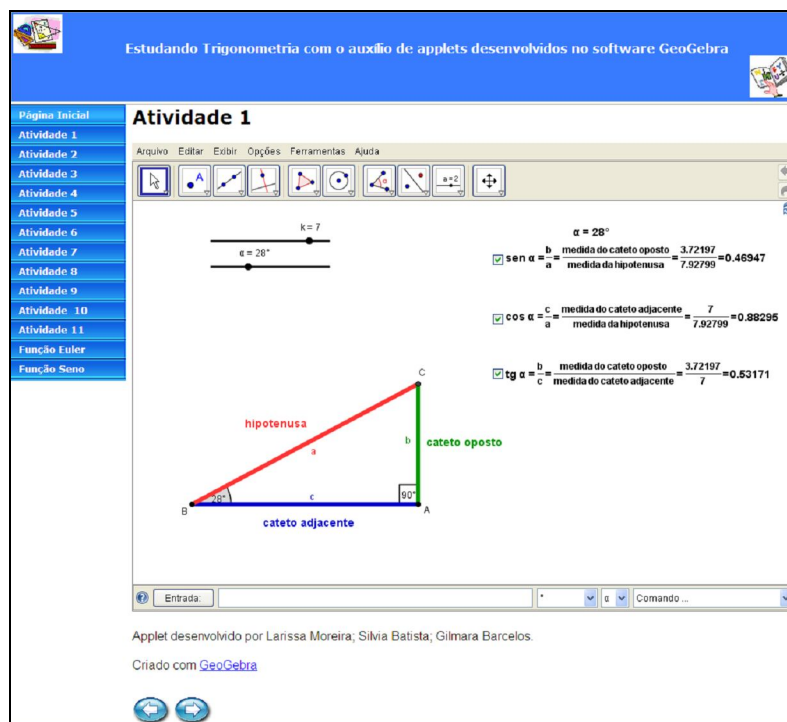


Figura 2.15: Applet da Atividade 1

Para ir para a próxima atividade ou retornar para a página anterior, o aluno também pode utilizar as setas localizadas no canto inferior esquerdo.

## 2.3 Elaboração das Atividades

O objetivo da elaboração das atividades foi fornecer sugestões de uso dos *applets*, além de favorecer a validação dos mesmos. O professor poderá usá-las tais como estão ou, então, tê-las como ponto de partida para a elaboração de suas próprias atividades, de acordo com suas realidades. As atividades relacionam os recursos dos *applets* com os objetivos pedagógicos pretendidos. Buscou-se trabalhar o tema Trigonometria de forma agradável sem, no entanto, prescindir de rigor com os aspectos matemáticos envolvidos.

Nesse sentido, foi elaborada a apostila “Estudando Trigonometria com *applets* desenvolvidos no *software* GeoGebra” (Anexo 1). Esta contém 11 atividades e conclusões referente às mesmas, a fim de formalizar o que se espera que seja conjecturado pelos alunos com o uso dos *applets*, validando ou não as observações feitas pelos alunos. Há, também, textos para a complementação da teoria referente ao assunto. Vale ressaltar, que em algumas atividades, há itens que não necessitam do uso do *applet*, esperando-se que o que foi conjecturado e formalizado, seja suficiente para resolução dos mesmos.

A seguir, apresentam-se as atividades com os *applets* utilizados para a resolução de cada uma, bem como o objetivo de cada uma delas.

### 2.3.1 Atividade 1

Esta atividade, juntamente com o *applet* (Figura 2.16), tem por objetivo definir razões trigonométricas, comparando medidas dos lados do triângulo retângulo, a partir de um de seus ângulos agudos.

Estudando Trigonometria com o auxílio de applets desenvolvidos no software GeoGebra

**Atividade 1**

Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Ajuda

$k = 7$

$\alpha = 28^\circ$

$\alpha = 28^\circ$

$\text{sen } \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{3,72197}{7,92799} = 0,46947$

$\text{cos } \alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{medida do cateto adjacente}}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{7}{7,92799} = 0,88295$

$\text{tg } \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida do cateto adjacente}} = \frac{3,72197}{7} = 0,53171$

hipotenusa a

cateto oposto b

cateto adjacente c

Entrada: \*  $\alpha$  Comando ...

Applet desenvolvido por Larissa Moreira, Sílvia Batista, Gilmar Barcelos.

Criado com [GeoGebra](#)

Figura 2.16: *Applet* da Atividade 1

Esta atividade contém oito itens. Até o item 1.5 pretende-se que, por meio da movimentação dos seletores  $k$  e  $\alpha$  e da comparação entre as razões, os alunos compreendam que as razões entre os lados do triângulo retângulo dependem apenas do ângulo agudo considerado.

No item 1.6, é solicitado que as caixas do *applet* sejam marcadas, assim será visualizado o nome de cada razão. O Quadro 2.1 apresenta a primeira parte da Atividade 1.



Quadro 2.2: Segunda parte da Atividade 1

1.7- No menu principal do *applet*, clique em Exibir e, a seguir, em Janela de álgebra (ativando-a). Utilizando o campo de entrada (na parte inferior do *applet*), solicite e anote o valor de:

a)  $\sin 47^\circ$  (para tanto digite  $t = \sin(47^\circ)$ ).

b)  $\cos 18^\circ$  (para tanto digite  $u = \cos(18^\circ)$ ).

c)  $\operatorname{tg} 31^\circ$  (para tanto digite  $v = \tan(31^\circ)$ ).

1.8- No menu principal do *applet*, clique em Exibir e, a seguir, em Janela de álgebra (desativando-a). Movendo o seletor adequado, identifique:

a) um ângulo agudo cujo seno seja aproximadamente 0,34.

b) um ângulo agudo cujo cosseno seja aproximadamente 0,88.

c) o ângulo agudo cuja tangente é 1.

Após essa segunda parte da Atividade 1, há um segundo texto, que apresenta duas relações e suas demonstrações, uma é  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}$  e a outra é  $\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$ . Posteriormente, há uma atividade (item 1.9) que visa aplicar as relações demonstradas, sem utilizar os recursos do *software*.

### 2.3.2 Atividade 2

Esta atividade tem o objetivo de possibilitar ao aluno identificar as relações existentes entre os valores do seno, do cosseno e da tangente de ângulos complementares, por meio da movimentação dos seletores ( $k$  e  $\alpha$ ) e de comparações entre as razões trigonométricas apresentadas no *applet*. Para tanto é utilizado o *applet* apresentado na Figura 2.17.

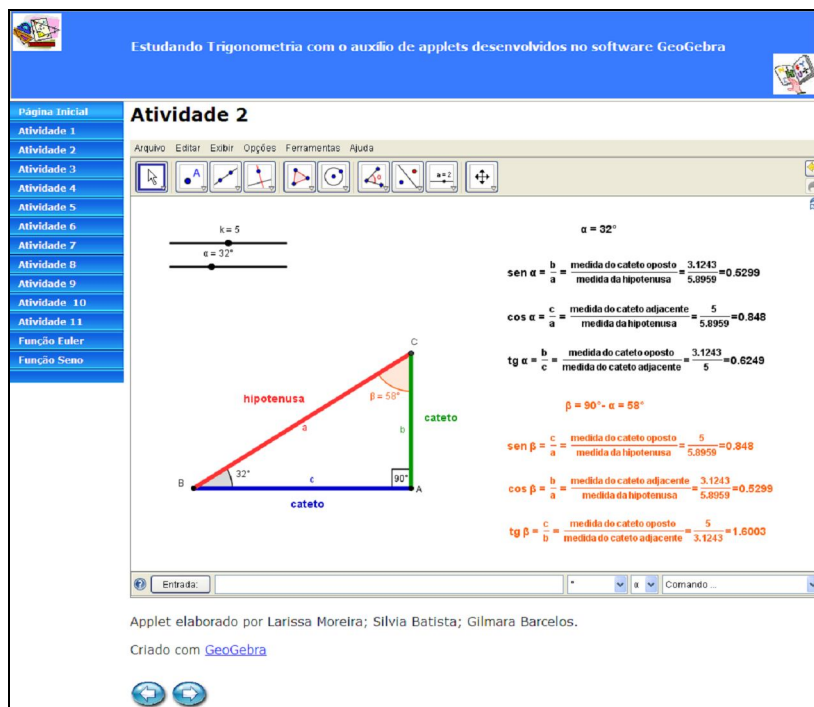


Figura 2.17: Applet da Atividade 2

Como a notação decimal poderia dificultar a observação de que a tangente do ângulo  $\alpha$  é o inverso da tangente de  $\beta$ , o *applet* apresenta a forma fracionária visando facilitar a referida comparação.

Ao final da Atividade 2, apresenta-se um texto com a conclusão da mesma (Quadro 2.3), e uma atividade para aplicação de uma das relações conjecturadas e demonstradas.

Quadro 2.3: Conclusão da Atividade 2

**Conclusão:**

Se dois ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  são complementares ( $\alpha + \beta = 90^\circ$ ), então:

$\text{sen } \alpha = \text{cos } \beta = \frac{b}{a}$

$\text{cos } \alpha = \text{sen } \beta = \frac{c}{a}$

$\text{tg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \beta}$



### 2.3.3 Atividade 3

No Ensino Fundamental, a única unidade de medida de ângulo estudada é o grau. No Ensino Médio é definido o radiano como unidade de medida de ângulos e arcos. A Atividade 3 tem como objetivo principal definir o radiano como unidade de medida de ângulos. Esta possui 7 itens, e é utilizado o *applet* apresentado na Figura 2.18.

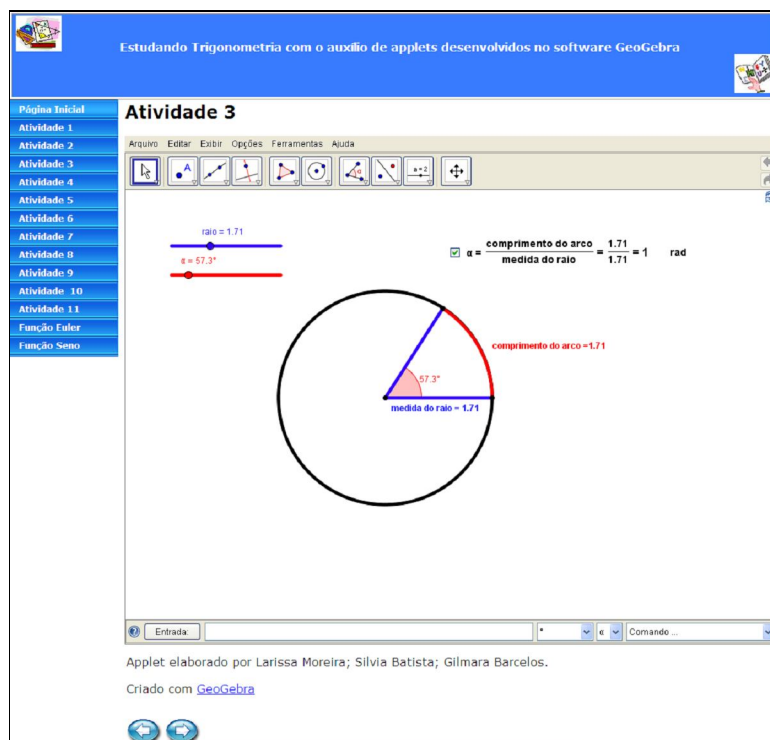


Figura 2.18: *Applet* da Atividade 3

O item 3.1 (Quadro 2.4) tem o objetivo de definir o ângulo de medida 1 radiano. Para tanto, é solicitado que o aluno complete duas tabelas observando e manipulando o *applet*. Espera-se assim, que o aluno observe que quando o ângulo central mede aproximadamente  $57,3^\circ$ , a razão entre o comprimento do arco e a medida do raio é igual a 1 (na verdade, aproximadamente, 1 visto que  $57,3^\circ$  é um valor aproximado), para qualquer que seja a medida do raio da circunferência.

Quadro 2.4: Item 3.1 da Atividade 3

3.1- Clique em "Atividade 3" no menu (a medida do ângulo  $\alpha$ , que aparece na tela, está com aproximação de uma casa decimal) e:

a) observando o *applet*, complete a tabela abaixo:

$\alpha$	comprimento do arco	medida do raio	$\frac{\text{comprimento do arco}}{\text{medida do raio}}$

b) considerando a medida de  $\alpha$  do item anterior, movimente o seletor correspondente à medida do raio e complete a tabela, para dois raios diferentes:

$\alpha$	comprimento do arco	medida do raio	$\frac{\text{comprimento do arco}}{\text{medida do raio}}$
57,3°			

c) descreva o que você observou a partir da resolução dos itens **a** e **b**

---



---



---

No item 3.2, é solicitado que o aluno marque, no *applet*, a caixa que se encontra na frente da razão entre o comprimento do arco e a medida do raio. Ao marcar esta caixa, aparecerá a palavra "rad", definindo, assim, que quando o comprimento do arco tem a mesma medida do raio, a medida do ângulo central é de 1 radiano.

Os itens 3.3, 3.4 e 3.5 (Quadro 2.5) foram formulados com o objetivo de que o aluno observe que, dado um ângulo central, a razão entre o comprimento do arco correspondente e a medida do raio é constante, e que esta razão não depende da medida do raio, mesmo para ângulos diferentes de 1 rad.

Quadro 2.5: Itens 3.3, 3.4 e 3.5 da Atividade 3

3.3- Altere a medida do ângulo  $\alpha$ , movendo o seletor correspondente. Para o valor de  $\alpha$  considerado, preencha a tabela abaixo, utilizando três raios diferentes (para tanto, movimente o seletor correspondente ao raio).

$\alpha$	Comprimento do arco	Medida do raio	$\frac{\text{comprimento do arco}}{\text{medida do raio}}$

3.4- Considerando três valores diferentes para  $\alpha$  e uma medida fixa para o raio, preencha a tabela abaixo:

$\alpha$	Comprimento do arco	Medida do raio	$\frac{\text{comprimento do arco}}{\text{medida do raio}}$

3.5- Descreva o que você observou a partir da resolução dos itens 3.3 e 3.4.

---



---

Tendo em vista o uso de arcos com medidas em radianos na circunferência trigonométrica em atividades posteriores, foi elaborado o item 3.6 (Quadro 2.6) a fim de que o aluno perceba que quando o raio da circunferência é 1, a medida do ângulo central, em radianos, é igual ao comprimento do arco.

Quadro 2.6: Item 3.6 da Atividade 3

3.6- Mova o seletor correspondente à medida do raio até obter raio = 1.

a) Compare o comprimento do arco com a sua medida em radianos.

---

b) Altere a medida do ângulo  $\alpha$ , movendo o seletor correspondente. Compare novamente o comprimento do arco com a sua medida em radiano.

---

c) Descreva o que você observou a partir da resolução dos itens a e b.

---



---



---

Com o item 3.7, objetiva-se que o aluno utilize mais uma vez o campo de entrada do *applet* e converta para radianos as medidas de dois ângulos medidos em graus, obtendo seu valor aproximado.

Para formalizar o que foi observado pelo aluno, após a resolução das atividades propostas nestes itens apresenta-se um texto com duas conclusões. A primeira definindo que a medida de um ângulo em radianos é a razão entre o comprimento do arco determinado por um ângulo central de uma circunferência e a medida do raio dessa circunferência. Sendo assim, quando o comprimento do arco é igual à medida do raio, afirma-se que o ângulo central mede 1 radiano (1 rad). A segunda conclusão formaliza a idéia de que se a medida do raio da circunferência é igual a 1, a medida do ângulo central, em radianos, coincide com o comprimento do arco.

Após estas conclusões, há outro texto com o título “Conversão grau/radiano” que explica como converter a medida de um ângulo em graus para radianos, por meio de regra de três simples, a partir da fórmula do comprimento de uma circunferência.

Para que os alunos exercitem esta conversão, formulou-se o item 3.8 (Quadro 2.7) que contém uma tabela a ser preenchida, que ora apresenta ângulos medidos em graus, ora em radianos.

Quadro 2.7: Item 3.8 da Atividade 3

3.8 Utilizando regra de três, complete a tabela abaixo:

Medida do ângulo em graus	Medida do ângulo em radianos
45°	
	$\frac{\pi}{3}$
90°	
	3
75°	

Ao final desta atividade, há um texto com o título “Tabela trigonométrica”, no qual se comenta a existência de uma tabela com valores aproximados do seno, cosseno e tangente dos ângulos agudos e apresenta-se a tabela com valores exatos do seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis. Esperou-se até esse momento para apresentá-la, com o objetivo de apresentar os ângulos notáveis também em radianos.

### 2.3.4 Atividade 4

Na Atividade 2, o seno e o cosseno foram definidos apenas no triângulo retângulo. Antes de definir esses valores na circunferência trigonométrica, faz-se necessária a apresentação da própria circunferência trigonométrica. Este é o objetivo da Atividade 4. Para tanto, o aluno utilizará o *applet* representado na Figura 2.19.

**Atividade 4**

Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Ajuda

**Circunferência Trigonométrica**

$\alpha = 57^\circ$

1.  É uma circunferência de raio unitário (medida do raio igual a 1), com centro na origem O do sistema cartesiano.

2.  É dividida em 4 quadrantes.

3.  É orientada, podendo ser percorrida em 2 sentidos: sentido anti-horário (positivo) ou horário (negativo).

4.  O ponto A é a origem dos arcos.

5.  Seja P um ponto da circunferência e c o ângulo correspondente ao arco AP. Movimentando o ponto P (pelo seletor c) sobre a circunferência no sentido positivo temos  $c > 0$ .

6.  Seja P' um ponto da circunferência e c' o ângulo correspondente ao arco AP'. Movimentando o ponto P' (pelo seletor c') sobre a circunferência, no sentido negativo, temos  $c' < 0$ . Para visualizar c', desmarque a caixa 5, e marque a caixa 7.

7.

Applet elaborado por Larissa Moreira; Silvia Batista; Gilmara Barcelos.  
Criado com [GeoGebra](#)

Figura 2.19: *Applet* da Atividade 4

No item 4.1, o aluno deverá marcar as caixas numeradas no *applet* e executar as ações solicitadas, como já descrito na seção 2.2.4. Os demais itens não usam o *applet* e têm o objetivo de que o aluno verifique a localização em cada quadrante das extremidades dos arcos medidos em graus e radianos. Além disso, visa-se determinar a medida de arcos com extremidades nos vértices de polígonos regulares inscritos na circunferência trigonométrica, com um dos vértices no ponto (1,0).

Ao final da Atividade 4, apresenta-se um texto com a explicação da Função de Euler (Quadro 2.8), também necessária antes da definição de seno e cosseno de todos os números reais.

Quadro 2.8: Explicação da função de Euler

A maneira mais natural de definir as funções trigonométricas tem como ponto de partida a função de Euler  $E: \mathbb{R} \rightarrow C$ , cujo contradomínio é a circunferência  $C$  de raio 1 e centro na origem do plano cartesiano que faz correspondência a cada número real  $t$  o ponto  $E(t) = (x, y)$  da circunferência unitária obtido do seguinte modo (LIMA<sup>1</sup>, 2001):

- $E(0) = (1, 0)$ .
- Se  $t > 0$ , percorremos sobre a circunferência  $C$ , a partir do ponto  $(1, 0)$ , um caminho de comprimento  $t$ , sempre andando no sentido positivo. O ponto final do caminho será chamado  $E(t)$ .
- Se  $t < 0$ ,  $E(t)$  será a extremidade final de um caminho sobre  $C$ , de comprimento  $|t|$ , que parte do ponto  $(1, 0)$  e percorre  $C$  sempre no sentido negativo.

<sup>1</sup> LIMA, E. L., Carvalho, P. C. P., WAGNER, E., MORGADO, A. C. *A Matemática do Ensino Médio*, v. 1. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

É utilizado nesse momento o *applet* que ilustra tal função. A Figura 2.20 apresenta este *applet* na Unidade de Aprendizagem.

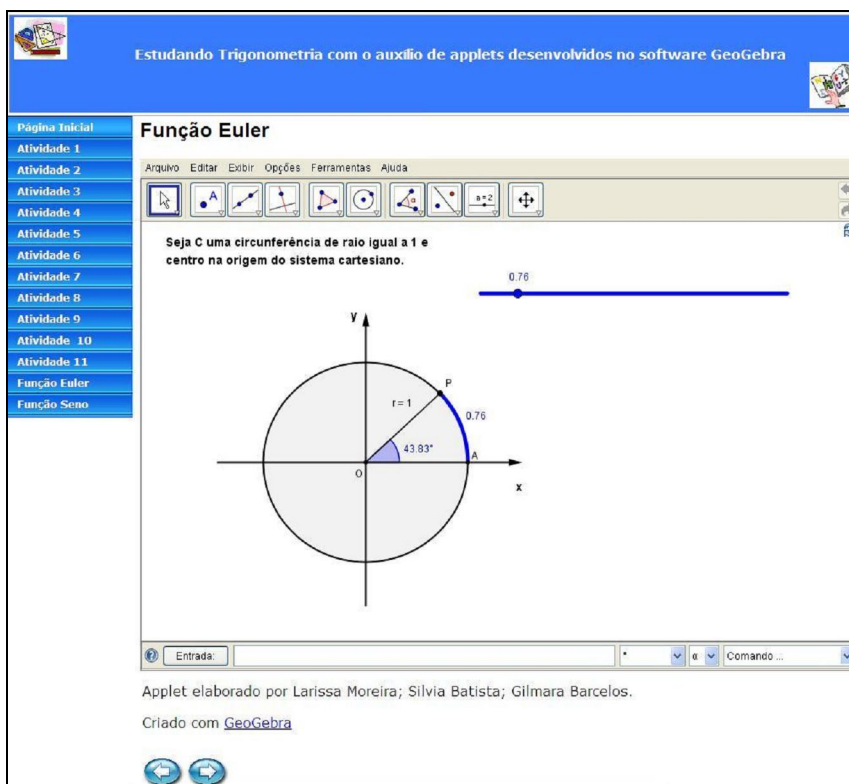


Figura 2.20: *Applet* para explicação da Função de Euler

Depois de explicar a função de Euler, define-se o seno e o cosseno de um número real na circunferência trigonométrica, como apresentado no Quadro 2.9.

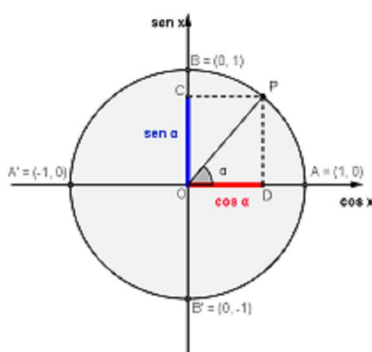
Quadro 2.9: Definição de seno e cosseno na circunferência trigonométrica

Seja  $t$  um número real e  $P = E(t)$  na circunferência trigonométrica, defini-se nesta circunferência:

$\text{sen } t =$  ordenada de  $P$ ;

$\text{cos } t =$  abscissa de  $P$ .

$$P = (\text{cos } t, \text{sen } t)$$



### 2.3.5 Atividade 5

O objetivo desta atividade é identificar os sinais do seno e cosseno em cada quadrante da circunferência trigonométrica, bem como os valores do seno e cosseno de  $0$ ,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$ ,  $\frac{3\pi}{2}$  e  $2\pi$ .

Para a realização desta atividade, o aluno utilizará o *applet* apresentado na Figura 2.21.

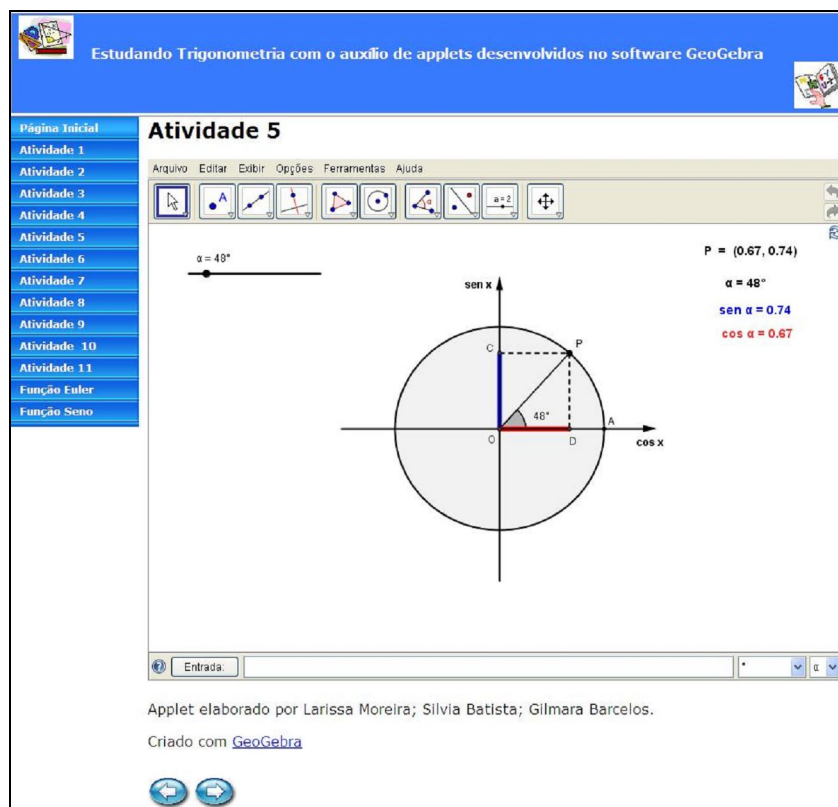


Figura 2.21: *Applet* da Atividade 5

Após o item 5.3, apresenta-se um texto com a conclusão das atividades propostas nos itens 5.1, 5.2 e 5.3. Nesta conclusão, há um quadro de sinais para o seno e outro para o cosseno, além de apresentar uma circunferência trigonométrica, mostrando que os valores do seno e cosseno variam entre  $[-1, 1]$ .

Na resolução dos itens 5.4, 5.5 e 5.6 (Quadro 2.10), o uso do *applet* é opcional.





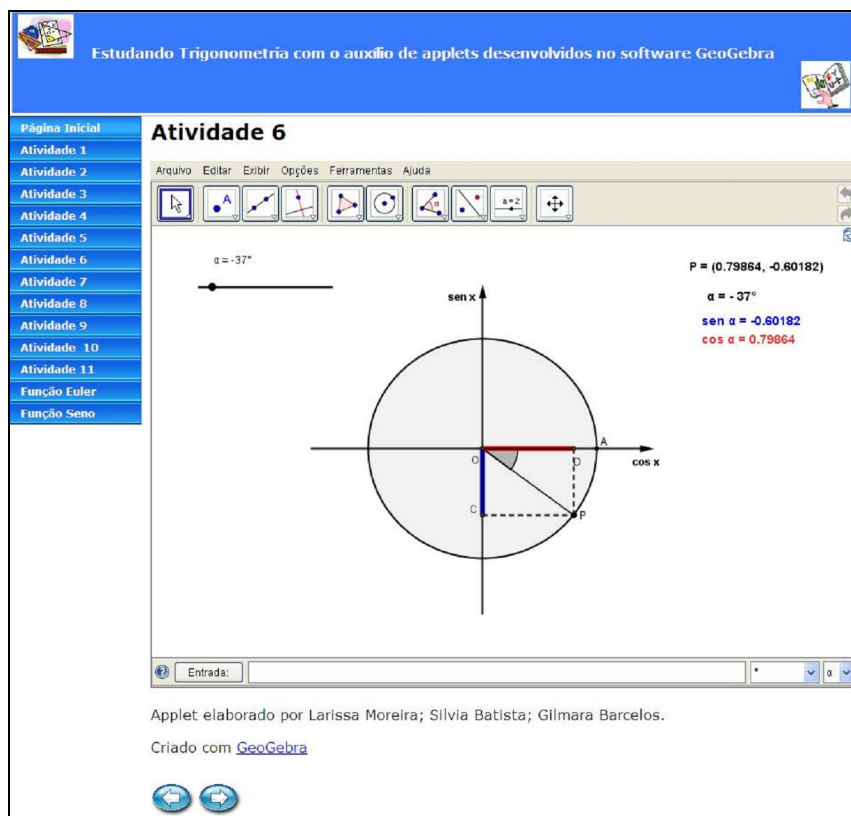


Figura 2.22: *Applet* da Atividade 6

Ao final desta atividade, espera-se que o aluno tenha observado que o quadro de sinais para o seno e para o cosseno dos arcos com extremidades na primeira volta negativa, é o mesmo para os arcos com extremidades na primeira volta positiva nos respectivos quadrantes.

### 2.3.7 Atividade 7

Na Atividade 2, ao estudar Trigonometria no triângulo retângulo, o aluno verificará que quando dois ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  são complementares, as relações  $\text{sen } \alpha = \text{cos } \beta$  e  $\text{cos } \alpha = \text{sen } \beta$  são verdadeiras.

O objetivo da Atividade 7 (Quadro 2.11) é criar condições para que o aluno identifique tais relações na circunferência trigonométrica, com o uso do *applet* apresentado na Figura 2.23. Neste *applet*, a movimentação do seletor  $\alpha$  altera a medida do ângulo correspondente e, conseqüentemente, a medida do ângulo  $\beta$  e, também, os valores do seno e cosseno destes ângulos.

Estudando Trigonometria com o auxílio de applets desenvolvidos no software GeoGebra

**Atividade 7**

Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Ajuda

$\alpha = 14^\circ$

$\beta = 90^\circ - \alpha = 76^\circ$

$\text{sen } \alpha = 0.24$        $\text{sen } \beta = 0.97$

$\text{cos } \alpha = 0.97$        $\text{cos } \beta = 0.24$

Entrada: \*

Applet elaborado por Larissa Moreira; Sílvia Batista; Gilmara Barcelos.  
Criado com [GeoGebra](#)

Figura 2.23: Applet da Atividade 7

Quadro 2.11: Atividade 7

<b>ATIVIDADE 7</b>	
7.1- Clique em "Atividade 7" no menu. Observe o <i>applet</i> e anote o valor de:	
a) $\text{sen } \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$	c) $\text{sen } \beta = \text{sen } (90^\circ - \alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$
b) $\text{cos } \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$	d) $\text{cos } \beta = \text{cos } (90^\circ - \alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$
Compare os valores encontrados nos itens acima.	
<hr/>	
7.2- Mova o seletor correspondente à medida do ângulo $\alpha$ até obter $\alpha = 37^\circ$ e anote o valor de:	
a) $\text{sen } \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$	c) $\text{sen } \beta = \text{sen } (90^\circ - \alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$
b) $\text{cos } \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$	d) $\text{cos } \beta = \text{cos } (90^\circ - \alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$
Compare os valores encontrados nos itens acima.	
<hr/>	
7.3- Escolha um outro valor para $\alpha$ , movendo o seletor correspondente e anote o valor de:	
$\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$	
a) $\text{sen } \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$	c) $\text{sen } \beta = \text{sen } (90^\circ - \alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$
b) $\text{cos } \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$	d) $\text{cos } \beta = \text{cos } (90^\circ - \alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$
Compare os valores encontrados nos itens acima.	
<hr/>	
7.4- Descreva o que você observou.	
<hr/>	
<hr/>	

A fim de formalizar o que o aluno conjecturou com a resolução desta atividade, é apresentada a conclusão da mesma, como mostra o Quadro 2.12.

Quadro 2.12: Conclusão da Atividade 7

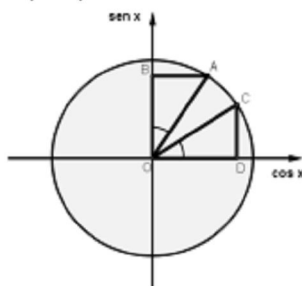
**Conclusão:**

Na atividade 2, no estudo de Trigonometria no triângulo retângulo, foi verificado que quando dois ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  são complementares,

$$\text{sen } \alpha = \text{cos } \beta \text{ ou } \text{sen } \alpha = \text{cos } (90^\circ - \alpha)$$

$$\text{cos } \alpha = \text{sen } \beta \text{ ou } \text{cos } \alpha = \text{sen } (90^\circ - \alpha)$$

É possível provar que essa relação é verdadeira também na circunferência trigonométrica. Para tanto se observa na figura abaixo que o triângulo ABO é congruente ao triângulo CDO pelo caso LAA<sub>o</sub> (Lado, Ângulo adjacente e Ângulo oposto).



Essa relação pode ser escrita como:

$$\text{sen } x = \text{cos } \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \text{ , para } \forall x \in \text{IR, ou}$$

$$\text{cos } x = \text{sen } \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \text{ , para } \forall x \in \text{IR.}$$

**2.3.8 Atividades 8, 9 e 10**

As Atividades 8, 9 e 10 têm por objetivo estabelecer as relações entre os valores do seno e do cosseno de ângulos suplementares, de ângulos explementares, e de ângulos replementares, respectivamente. Estas atividades encontram-se estruturadas da mesma forma que a Atividade 7, com as devidas alterações, como mostra os Quadros 2.13, 2.14 e 2.15.

Quadro 2.13: Primeiro item da Atividade 8

8.1- Clique em "Atividade 8" no menu. Observe o *applet* e anote o valor de:

a)  $\text{sen } \alpha =$  \_\_\_\_\_

c)  $\text{sen } \beta = \text{sen } (180^\circ - \alpha) =$  \_\_\_\_\_

b)  $\text{cos } \alpha =$  \_\_\_\_\_

d)  $\text{cos } \beta = \text{cos } (180^\circ - \alpha) =$  \_\_\_\_\_



Estudando Trigonometria com o auxílio de applets desenvolvidos no software GeoGebra

**Atividade 9**

Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Ajuda

$\alpha = 46^\circ$

$\alpha = 46^\circ$   
 $\text{sen } \alpha = 0.72$   
 $\text{cos } \alpha = 0.69$

$\beta = 180^\circ + \alpha = 226^\circ$   
 $\text{sen } \beta = -0.72$   
 $\text{cos } \beta = -0.69$

Entrada:

Applet elaborado por Larissa Moreira; Sílvia Batista; Gilmar Barcelos.  
 Criado com [GeoGebra](#)

Figura 2.25: Applet da Atividade 9

Estudando Trigonometria com o auxílio de applets desenvolvidos no software GeoGebra

**Atividade 10**

Arquivo Editar Exibir Opções Ferramentas Ajuda

$\alpha = 56^\circ$

$\alpha = 56^\circ$   
 $\text{sen } \alpha = 0.83$   
 $\text{cos } \alpha = 0.56$

$\beta = 360^\circ - \alpha = 304^\circ$   
 $\text{sen } \beta = -0.83$   
 $\text{cos } \beta = 0.56$

Entrada:

Applet elaborado por Larissa Moreira; Sílvia Batista; Gilmar Barcelos.  
 Criado com [GeoGebra](#)

Figura 2.26: Applet da Atividade 10

### 2.3.9 Atividade 11

Para definir função seno, antes de estudar as transformações gráficas (Atividade 11) é solicitado que o aluno clique em “Função Seno” no menu da Unidade de Aprendizagem, assim será possível a visualização do *applet* apresentado na Figura 2.27. Este *applet* é utilizado conforme já descrito na seção 2.2.8.

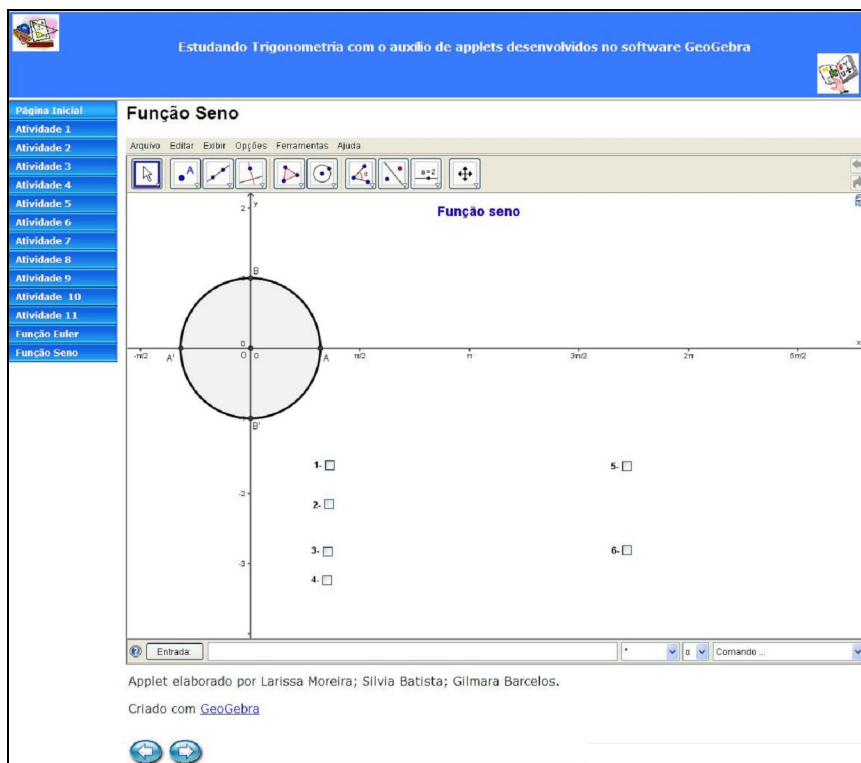


Figura 2.27: *Applet* da função seno

O objetivo da Atividade 11 é possibilitar o estudo das transformações causadas pelos parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  nos gráficos das funções da forma  $g(x) = d + a \operatorname{sen}(bx + c)$  em relação à função  $f(x) = \operatorname{sen} x$ .

Cada parâmetro é estudado separadamente, sendo possível a análise de cada transformação. Para tanto, é utilizado o *applet* apresentado na Figura 2.28.



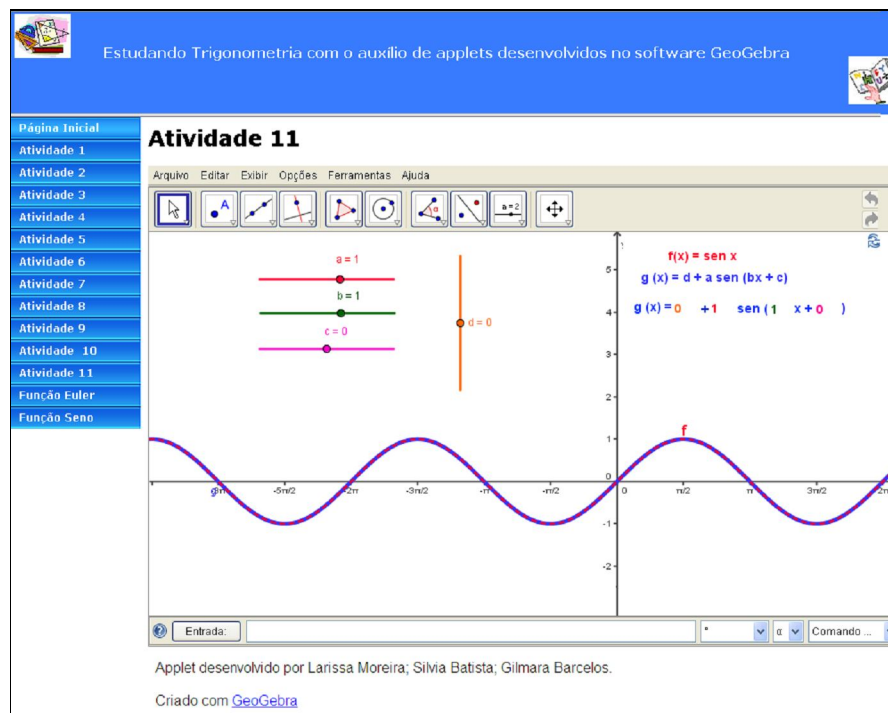


Figura 2.28: Applet da Atividade 11

## 2.4 Elaboração dos Questionários

Além dos *applets*, da Unidade de Aprendizagem e das atividades, foram elaborados dois questionários. Um para ser respondido pelos participantes do teste exploratório e outro pelos alunos participantes da validação das atividades.

O questionário destinado aos participantes do teste exploratório (Anexo 2) contém 12 perguntas, sendo 11 perguntas semiabertas. Estas têm por objetivo levantar dados sobre as atividades e *applets*, tais como clareza e sua adequação ao público alvo, bem como possíveis experiências anteriores com relação ao uso de tecnologias digitais. A última pergunta, que é aberta, solicita que os participantes apontem possíveis vantagens e desvantagens com o uso de tecnologias digitais na formação do professor de Matemática.

O questionário destinado aos alunos que participaram da validação (Anexo 3) contém 13 perguntas, sendo 12 perguntas semiabertas. Estas visam investigar a opinião dos alunos em relação às atividades e ao uso dos *applets*, além de diagnosticar os conhecimentos prévios sobre o assunto estudado, e sobre o uso pedagógico das TIC, em alguma atividade anterior à validação. Na última pergunta,

que é aberta, como no primeiro questionário, é solicitada a opinião dos alunos sobre o uso de tecnologias digitais nas aulas de Matemática.

Vale ressaltar que nos dois questionários, nas perguntas semiabertas, há espaços para os participantes comentarem e/ou justificarem suas respostas, visando assim captar melhor a opinião dos participantes sobre os questionamentos feitos.

## 2.5 Teste Exploratório

O teste exploratório foi realizado a fim de detectar possíveis falhas nas atividades e/ou nos *applets*, para que as correções necessárias fossem feitas antes da validação com os alunos do Ensino Médio.

A realização do teste ocorreu por meio de um minicurso denominado “Estudando Trigonometria com *applets* desenvolvidos no *software* GeoGebra” com duração de 6 horas, em um laboratório de informática de uma instituição pública de ensino de Campos dos Goytacazes, nos dias 21 e 28 de julho de 2008. Colaboraram com o teste 13 participantes, entre os quais 10 alunos de licenciatura em Matemática e 3 professores de Matemática. Estes foram convidados por possuírem conhecimentos de Trigonometria e, também, sobre o uso das TIC na educação.

Os participantes resolveram as atividades e manipularam os *applets* sem dificuldade, como já era esperado. No entanto, sugeriram algumas mudanças na estrutura da apostila, além de diagnosticarem alguns equívocos, como descrito na subseção a seguir.

### 2.5.1 Sugestões e mudanças

No *applet* da Função de Euler, utilizado após a Atividade 4, um participante percebeu que ao movimentar o ponto P, por meio do seletor, sobre a circunferência e parar no ponto  $(-1, 0)$ , o *applet* mostrava as coordenadas do ponto P como  $(-1, -0)$ , ocorrendo o mesmo para os pontos  $(0, -1)$  e  $(1, 0)$ , que eram apresentados como os pontos  $(-0, -1)$  e  $(1, -0)$ , respectivamente.

No *applet* da Atividade 7, um participante, ao movimentar o seletor  $\alpha$  e encontrar  $\alpha = 30^\circ$ , verificou que os valores do seno e cosseno dos ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  apresentadas pelo *applet* estavam trocados.

Os dois problemas foram devidamente solucionados, posteriormente.

Na Atividade 9, um participante questionou se as relações observadas entre os valores do seno e cosseno dos ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  ( $\sin \alpha = -\sin \beta$  e  $\cos \alpha = -\cos \beta$ ) seriam válidas somente para  $\alpha$  no primeiro quadrante, tendo em vista que o seletor  $\alpha$  está limitado no intervalo de  $0^\circ$  a  $90^\circ$ . Foi explicado que as relações observadas nas Atividades 7, 8 e 9 são verdadeiras para  $\alpha$  pertencente a qualquer um dos quadrantes. Para tornar possível a visualização desta resposta, com o *applet* da Atividade 9, foi ampliado o limite do seletor  $\alpha$ , para o intervalo de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ , utilizando os recursos do *applet*. Dessa forma, todos participantes puderam observar que as relações são verdadeiras para qualquer valor de  $\alpha$  (na primeira volta positiva). Vale ressaltar que, a partir disso, foi comentado que as relações são válidas para qualquer medida do ângulo  $\alpha$ .

Após as Atividades 8, 9 e 10, um professor participante do teste exploratório, sugeriu que fossem mencionadas as relações de simetria. Esta sugestão culminou na mudança do texto das observações, no qual agora apenas um texto reúne a conclusão das três atividades, intitulado “Simetrias”. O Quadro 2.16 representa a observação da Atividade 8 antes do teste exploratório (as observações das Atividades 9 e 10 eram análogas), e o Quadro 2.17 representa o texto “Simetrias” referente a Atividade 8. O mesmo padrão foi seguido para reformular as conclusões das Atividades 9 e 10.

Quadro 2.16: Observação da Atividade 8 no teste exploratório

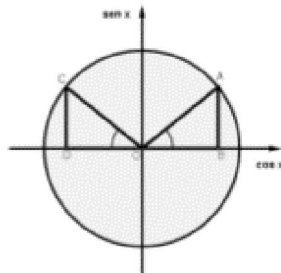
**Observação 11:**

Dados dois ângulos,  $\alpha$  e  $180^\circ - \alpha$ , temos:

$$\text{sen}(180^\circ - \alpha) = \text{sen } \alpha, \text{ e}$$

$$\text{cos}(180^\circ - \alpha) = -\text{cos } \alpha.$$

É possível provar que essa relação é verdadeira na circunferência trigonométrica, bastando observar na figura abaixo, que os triângulos ABO e CDO são congruentes pelo caso LAA, e o quadrante no qual eles estão localizados.



Essas relações podem ser escritas como:

$$\boxed{\text{sen}(\pi - x) = \text{sen } x}, \text{ para } \forall x \in \mathbb{R}, \text{ e}$$

$$\boxed{\text{cos}(\pi - x) = -\text{cos } x}, \text{ para } \forall x \in \mathbb{R}.$$

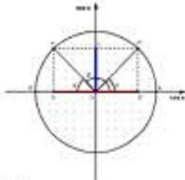
Quadro 2.17: Texto atual referente à conclusão da Atividade 8

**Simetrias**

Em uma circunferência trigonométrica, se um arco tiver sua extremidade no 2º, 3º ou 4º quadrante, sempre existirá um arco com extremidade no 1º quadrante e cujas funções trigonométricas terão, em módulo, o mesmo valor das do arco considerado.

→ Simetria em relação ao eixo dos senos

Dado o ângulo  $\beta$  tal que  $90^\circ < \beta < 180^\circ$ , seja  $P$  a extremidade de  $\beta$  na circunferência trigonométrica. Seja  $P'$  o ponto simétrico de  $P$  em relação ao eixo dos senos,  $\alpha$  o ângulo correspondente ao arco  $\widehat{AP'}$  e  $\alpha'$  o ângulo correspondente ao arco  $\widehat{PA'}$ .



Observando a figura podemos afirmar que

$$\widehat{AP} + \widehat{PA'} = 180^\circ \quad (I)$$

Além disso,

$$\widehat{AP'} = \widehat{PA'} \quad (II), \text{ pois, } P' \text{ é simétrico de } P \text{ em relação ao eixo dos senos.}$$

Substituindo (II) em (I) temos que

$$\widehat{AP} + \widehat{AP'} = 180^\circ \text{ (no sentido anti-horário).}$$

Portanto  $\beta + \alpha = 180^\circ$  ou  $\beta = 180^\circ - \alpha$  (III)

Como  $P(\cos \beta, \sin \beta)$  e  $P'(\cos \alpha, \sin \alpha)$  são simétricos em relação ao eixo dos senos estes pontos têm mesma ordenada e abscissas simétricas. Ou seja:

$$\begin{cases} \sin \beta = \sin \alpha \\ \cos \beta = -\cos \alpha \end{cases} \quad (IV)$$

Substituindo (III) em (IV) temos que:

$$\begin{cases} \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha \\ \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \end{cases}$$

Logo, dois ângulos suplementares têm senos iguais e cossenos simétricos. Essas relações podem ser escritas como:

$$\begin{cases} \sin(\pi - x) = \sin x \\ \cos(\pi - x) = -\cos x \end{cases} \text{ , para } \forall x \in \mathbb{R}, \text{ e}$$

No decorrer do minicurso, os professores presentes notaram que os itens de algumas atividades eram seguidos de observações que eram as respostas dos itens que as precediam, como por exemplo, no item 11.4 da Atividade 11 (Quadro 2.18). Ressaltaram que este fato poderia implicar a cópia das respostas pelos alunos durante a validação, a partir do momento em que eles percebessem o padrão da apostila, ou seja, que a observação ajudaria na resposta da atividade anterior. Foi explicado que esta disposição das observações foi proposital, uma vez que a intenção, após a validação, é disponibilizar todo o material desenvolvido na Internet e que as observações na apostila facilitariam o trabalho dos professores e alunos que o adquirissem. No entanto, esta sugestão não foi descartada e fez com que a

disposição da apostila fosse alterada, conforme foi apresentada na seção 2.3 (Elaboração das Atividades).

Quadro 2.18: Observação da Atividade 11 no teste exploratório

11.4- Movimente o seletor  $d$  e observe a modificação ocorrida no gráfico. Descreva a transformação que o parâmetro  $d$ , das funções da forma  $g(x) = d + \text{sen } x$ , causa sobre o gráfico da função  $f(x) = \text{sen } x$ .

---



---



---

**Observação 14:**

As funções na forma  $g(x) = d + \text{sen } x$ , com  $d > 0$ , sofrem uma translação vertical de  $d$  unidades para cima, em relação à função  $f(x) = \text{sen } x$ .

A imagem é  $[-1 + d, 1 + d]$  e o período é  $2\pi$ .

As funções na forma  $g(x) = d + \text{sen } x$ , com  $d < 0$ , sofrem uma translação vertical de  $|d|$  unidades para baixo, em relação à função  $f(x) = \text{sen } x$ .

A imagem é  $[-1 + d, 1 + d]$  e o período é  $2\pi$ .

Por exemplo, as observações de cada item da Atividade 11, que formalizam as transformações causadas por cada parâmetro na função  $g(x) = a \text{sen}(bx + c) + d$ , foram chamadas, na nova versão da apostila, de conclusões. Estas se encontram no final da atividade e não mais após cada item.

Essa sugestão também contribuiu para que outras observações fossem reorganizadas, e algumas delas, agora, receberam títulos enquanto outras, a exemplo da Atividade 3, receberam o nome de “conclusões”. Os Quadros 2.19 e 2.20 apresentam um exemplo.

Quadro 2.19: Observação da Atividade 1 no teste exploratório

**Observação 1:**

As razões consideradas na Atividade 1 não dependem das medidas dos lados do triângulo retângulo, e sim do ângulo agudo  $\alpha$ . Estas são chamadas razões trigonométricas e cada uma recebe um nome, conforme já visto no *applet* e mostrado, novamente, a seguir:

$$\frac{b}{a} = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \text{sen } \alpha \quad (\text{lê-se seno de } \alpha)$$

$$\frac{c}{a} = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \text{cos } \alpha \quad (\text{lê-se cosseno de } \alpha)$$

$$\frac{b}{c} = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha} = \text{tg } \alpha \quad (\text{lê-se tangente de } \alpha)$$

Quadro 2.20: Texto atual referente à conclusão da Atividade 1

**Razões Trigonômétricas**

As razões consideradas na Atividade 1 não dependem das medidas dos lados do triângulo retângulo, e sim do ângulo agudo  $\alpha$ . Estas são chamadas razões trigonométricas e cada uma recebe um nome, conforme já visto no *applet* e mostrado, novamente, a seguir:

$$\frac{b}{a} = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \text{sen } \alpha \quad (\text{lê-se seno de } \alpha)$$

$$\frac{c}{a} = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \text{cos } \alpha \quad (\text{lê-se cosseno de } \alpha)$$

$$\frac{b}{c} = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha} = \text{tg } \alpha \quad (\text{lê-se tangente de } \alpha)$$

Os exercícios finais não foram resolvidos, apenas o gabarito foi passado. Esse fato não acarretou nenhum dano ao teste, uma vez que os exercícios eram semelhantes aos que os livros didáticos apresentam, ou seja, já conhecidos dos participantes do minicurso. O principal objetivo do teste exploratório, que era diagnosticar falhas nas atividades resolvidas com auxílio dos *applets* e nos *applets*, não foi afetado.

Após a resolução da apostila, os participantes responderam ao questionário. Este foi entregue juntamente com a apostila respondida para que suas respostas fossem analisadas. Na subseção a seguir, apresenta-se a análise das respostas dos questionários.

### 2.5.2 Análise dos questionários

A primeira pergunta do questionário destinado aos participantes do minicurso (Anexo 2) é opcional e refere-se ao nome de cada participante. A pergunta 2 questiona sobre a possibilidade de aplicação de parte do minicurso na prática docente dos participantes. Foram dadas três opções de resposta: *sim*, *não* e *depende*, sendo solicitada uma justificativa para a opção escolhida. Doze participantes responderam *sim*, dos quais sete consideraram que o uso dos *applets* facilita a aprendizagem do conteúdo; dois justificaram pela possibilidade de visualização e movimentação; um justificou por ser uma forma rápida de estudar o conteúdo; e dois justificaram pela importância da utilização de novos recursos tecnológicos na educação. Apenas um participante assinalou a opção *depende*, justificando com a seguinte frase:

“A escola deverá ter pelo menos um computador com data-show, porém o ideal é que tenha um laboratório com computadores disponíveis para os alunos” (Participante 3).

Esta justificativa retrata a preocupação do participante do minicurso com a existência de recursos nas escolas, que é imprescindível para o uso dos *applets*. Os computadores ainda são escassos nas escolas e, geralmente, são usados para fins administrativos.

Com relação à clareza dos enunciados, questionamento da terceira pergunta, todos os participantes afirmaram que estavam claros. Diante desse fato, conclui-se que não houve falhas nos mesmos. Sendo assim, não foi necessário fazer nenhuma correção. Atribui-se a esse fato às inúmeras revisões feitas durante a elaboração das atividades.

Com a pergunta 4 buscou-se verificar se as atividades contribuíram para compreensão da Trigonometria. Analisando as respostas, verificou-se que 92% dos participantes responderam que as mesmas contribuíram para aprendizagem. Os demais (aproximadamente 8%) responderam que contribuíram *parcialmente*.

Na pergunta 5 questionou-se sobre o nível das atividades. A maioria dos participantes considerou o nível *moderado*, uma vez que as atividades serão aplicadas a alunos que nunca estudaram o conteúdo. O restante considerou o nível das atividades *fácil*, justificando esse fato por já terem estudado o conteúdo. O Gráfico 2.1 apresenta os resultados.

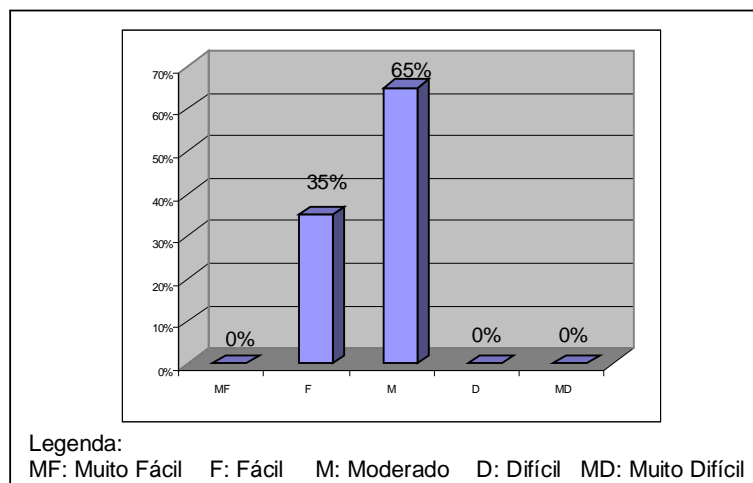


Gráfico 2.1: Nível das atividades no teste exploratório



Alguns comentários dos participantes que marcaram a opção *moderado* são destacados:

“Acho que para um público que nunca viu o conteúdo, poderia ter algumas dificuldades”. (Participante 1)

“Foi fácil, pois já tenho um certo conhecimento, já quem não tem, considero moderado”. (Participante 5)

Na sexta pergunta, questiona-se se as observações da apostila contribuíram para esclarecimento do assunto estudado. Todos os participantes afirmaram que *sim*. A maioria afirmou que as observações contribuíram de forma *esclarecedora* e os demais afirmaram que contribuíram de forma *bastante esclarecedora* (Gráfico 2.2).

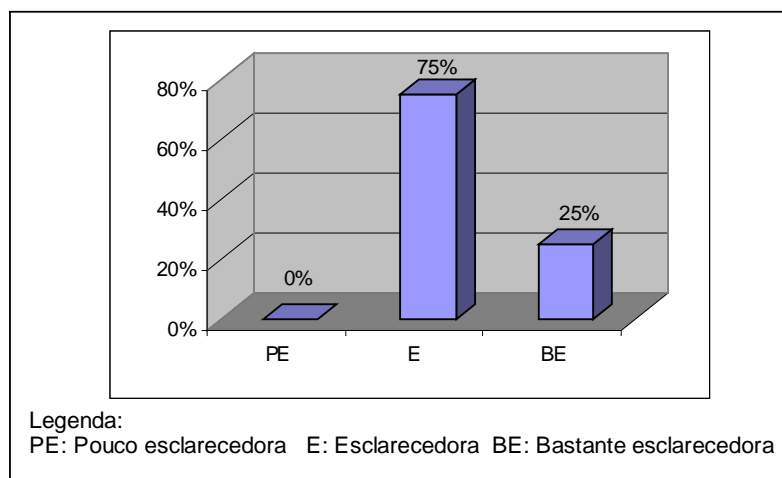


Gráfico 2.2: Importância das observações no teste exploratório

A fim de investigar se os participantes já haviam utilizado o *software* GeoGebra antes do minicurso, foi formulada a pergunta 7. Por meio desta verificou-se que 8 participantes já haviam utilizado, e os demais não tinham utilizado até o momento do minicurso.

A partir da análise das respostas da pergunta 8, verificou-se que mais da metade dos participantes considerou *fácil* aprender a utilizar os recursos do *software* GeoGebra, o restante considerou *moderado*, como mostra o Gráfico 2.3.

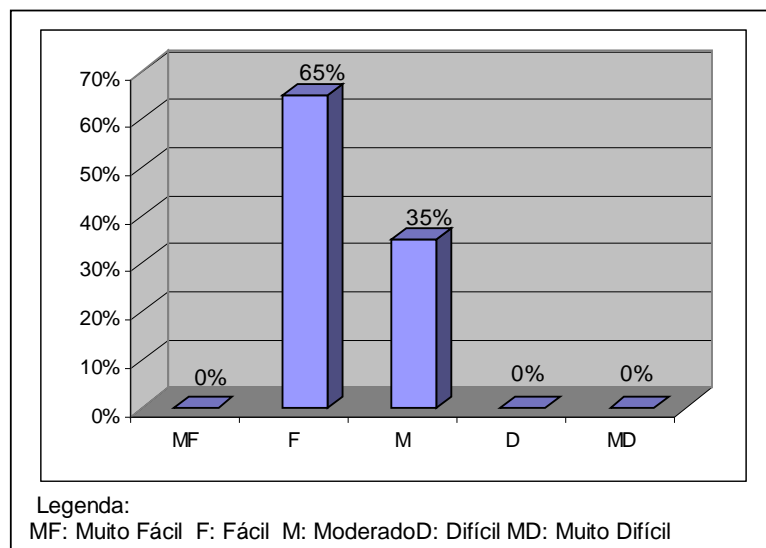


Gráfico 2.3: Utilização de alguns recursos do *software* GeoGebra pelos participantes do teste

Atribui-se a esses índices, o fato de o estudo do *software* GeoGebra fazer parte da ementa de uma disciplina do curso de Licenciatura que a maioria dos participantes do teste cursa. Portanto, estes já tinham algum conhecimento sobre o *software* e julgaram *fácil* a sua utilização.

Apesar dos dados da pergunta 8, verificou-se por meio das respostas da pergunta 9, que 100% dos participantes consideraram que o uso de *applets* favorecem à construção de conhecimentos matemáticos. Destacam-se algumas justificativas dadas pelos participantes:

“O fato dos alunos poderem vivenciar as transformações, deixa o tema muito mais claro do que só exposto pelo professor em sala de aula com quadro e giz”. (Participante 2)

“Despertando o interesse dos alunos leva-os a uma melhor aprendizagem”. (Participante 4)

“Pelo fato da observação e movimentação, que não são possíveis com lápis e papel”. (Participante 6)

Estas justificativas ressaltam a importância da visualização e da movimentação possibilitadas pelos *applets*, na aprendizagem. A visão desses participantes está coerente com a dos autores Santos e Paixão (2008), quando estes afirmam que os alunos, por meio dos *applets*, podem interagir diretamente com o conteúdo (experimentação), criando uma intuição sobre determinado conceito explorado, permitindo que o mesmo seja construído de forma mais consistente. Os referidos autores destacam ainda a praticidade de uso dos *applets*.

Quando questionados, na pergunta 10, sobre a utilização de recursos tecnológicos digitais em aulas que ministraram, aproximadamente 92% dos participantes responderam que já o fizeram, ressaltando que o esforço e todas as dificuldades são compensadas com o resultado obtido. Os participantes ainda afirmaram que os alunos ficam mais interessados e aprendem melhor o conteúdo. Destacam-se algumas respostas dadas pelos participantes no item 10.1.

“Sim, foi uma aula muito interativa e teve uma ótima aceitação pelos alunos”. (Participante 1)

“Sim, os alunos ficam empolgados com a novidade e se tornam mais interessados levando a uma maior fixação do conteúdo”. (Participante 4)

Com relação ao papel do professor durante a utilização dos *applets*, na pergunta 11, 62% dos participantes consideraram *muito importante* e o restante considerou *importante* a presença deste como mediador no processo de ensino aprendizagem e construção do conhecimento.

Destacam-se alguns comentários feitos pelos participantes que consideram *muito importante* o papel do professor durante a utilização dos *applets*.

“O professor tem o papel de auxiliar o aluno, e ele é o mediador entre a tecnologia e o aluno. Ele possui um papel fundamental. (Participante 3).

“Sem o professor conduzindo o trabalho, ele pode perder até mesmo seu objetivo principal”. (Participante 7).

Os índices e as justificativas retratam a importância dos mediadores do conhecimento, o que está coerente com a teoria de Vygotsky (2007). Segundo este autor, os interventores têm papel fundamental, sejam eles pessoas adultas ou companheiros de mesma idade e, conseqüentemente, a figura do professor no ambiente escolar.

A última pergunta (pergunta 12) questiona sobre a importância do uso de tecnologias digitais na formação do professor de Matemática e sugere que os participantes apontem vantagens e desvantagens.

Seguem algumas das respostas dos participantes:

“Acho que quando o uso de tecnologias está inserido durante a formação do professor, se torna mais fácil sua aplicação quando este estiver lecionando”. (Participante 1)

“Com a aprendizagem do uso de tecnologias digitais na formação do professor, fica mais fácil para eles prepararem uma aula mais atrativa, com interação, facilitando a aprendizagem”. (Participante 4)

Estes comentários estão de acordo com Pontes, Oliveira e Varandas (2003) que defendem a idéia de que os professores precisam saber como usar as TIC, uma vez que estas são instrumentos que auxiliam na preparação das aulas e auxiliam a aprendizagem dos alunos, dentre outras coisas.

O teste exploratório foi muito importante. Permitiu verificar que as atividades estão de acordo com o nível dos alunos e que estas, juntamente com os *applets*, possibilitam o alcance dos objetivos estabelecidos previamente para cada uma delas. Após realizadas as alterações na apostila e a correção dos equívocos encontrados nos *applets*, ocorreu a validação das atividades com alunos do Ensino Médio, como descrito na próxima seção.

## 2.6 Validação das Atividades

A validação das atividades ocorreu numa Instituição Pública Federal da Cidade de Campos dos Goytacazes. O critério de escolha utilizado foi a instituição oferecer Ensino Médio e dispor de laboratório de informática.

Tendo em vista que as turmas do segundo ano do Ensino Médio da referida instituição já haviam estudado Trigonometria e que o objetivo era validar as atividades com alunos que não tinham conhecimentos sobre o tema (exceto sobre triângulo retângulo, assunto estudado no nono ano do Ensino Fundamental), foi escolhida uma turma do primeiro ano do Ensino Médio (turno da tarde).

A validação das atividades não ocorreu durante o horário da aula de Matemática da turma, uma vez que Trigonometria não faz parte do planejamento da série escolhida. Sendo assim, a validação ocorreu em outro turno (à noite), com doze alunos da referida turma, que tiveram interesse e disponibilidade para participar.

Foram necessários três encontros: os dois primeiros com duração de 2 horas e 30 minutos, e o último com duração de 3 horas. No primeiro encontro, foram realizadas as Atividades 1, 2 e 3. As Atividades 4, 5, 6 e 7 foram resolvidas no segundo encontro, e as demais no último dia. A realização das atividades foi

mediada pelas autoras deste trabalho, sob supervisão da orientadora e da co-orientadora.

Os encontros foram realizados em um laboratório de informática da instituição, no qual cada aluno usou um computador. Durante os encontros, também foi usado um projetor de multimídia, por meio do qual foram projetados os *applets* utilizados, facilitando a discussão e correção das atividades.

Os alunos ainda não conheciam o *software* GeoGebra. Inicialmente, foram apresentadas as ferramentas que seriam utilizadas no decorrer das atividades, tais como a ferramenta “Mover”, o “Campo de Entrada” e a “Janela Algébrica”. Foi explicado também o uso do seletor. Durante alguns minutos os alunos utilizaram o *software* livremente.

Os alunos utilizaram o *software* GeoGebra com a mesma facilidade, ou talvez com mais facilidade do que os participantes do teste exploratório. Este fato não era esperado já que a maioria dos participantes do teste já conhecia o GeoGebra.

Na subseção a seguir, analisa-se a resolução de cada atividade.

### 2.6.1 Análise da Resolução da Atividade 1

Na Atividade 1, foi solicitado que os alunos respondessem, inicialmente, até o item 1.5 para que, em seguida, as respostas fossem comentadas. Foi ressaltado que, à medida que sentissem necessidade, poderiam pedir ajuda as mediadoras.

A Figura 2.29 representa o momento da realização da Atividade 1 pelos alunos.

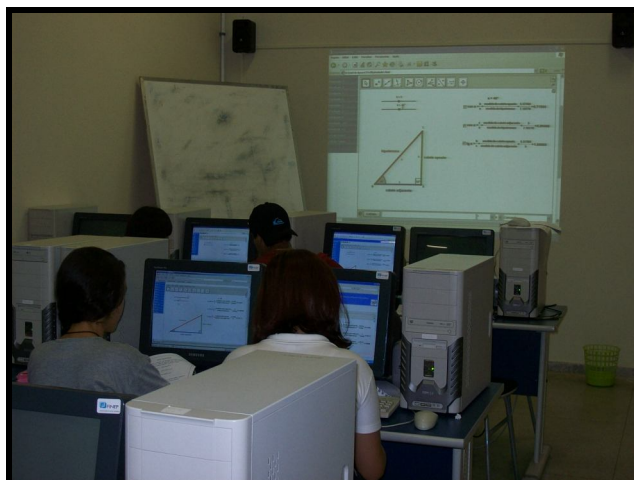


Figura 2.29: Alunos durante a resolução da Atividade 1

No item 1.1 os alunos deveriam anotar o valor das razões apresentadas no *applet*. Foi solicitado, nesse momento, que utilizassem apenas duas casas decimais, embora o *applet* apresentasse cinco. A mesma instrução valeria para as demais atividades. Cabe acrescentar que optou-se pelo uso de 5 casas decimais nos valores das razões apresentadas no *applet*, a fim de minimizar o erro de aproximação desses valores.

No item seguinte, os alunos deveriam mover o seletor **k** e anotar, novamente, o valor das razões. Neste item, embora na apostila de atividades não houvesse um lugar destinado à anotação do valor de **k**, três alunos sentiram a necessidade de anotá-lo.

Ainda no item 1.2, ao observarem que o valor das razões não mudou, vários alunos perguntaram se o que estavam fazendo, estava certo, já que os valores não se modificaram. Nesse momento, uma das mediadoras perguntou aos alunos que justificativa eles dariam para o fato de os valores não mudarem. Revela-se na tentativa da mediadora, criar condições de aprendizagem estimulantes que desafiam o aluno a pensar. Segundo Ponte, Oliveira e Varandas (2003), esse tipo de atitude deve ser marcante no novo papel assumido pelo professor diante do uso das TIC.

Um aluno respondeu que ele observava que ao mover o seletor **k**, o triângulo “aumentava” ou “diminuía”, mas que sua forma continuava a mesma. Outro aluno acrescentou que estavam sendo formados triângulos semelhantes, uma vez que os ângulos não se alteravam. Aproveitando a resposta desse aluno, a mediadora perguntou se todos se lembravam da definição de triângulos semelhantes. Poucos afirmaram lembrar, sendo assim, foi necessário revisar tal conceito. Após a explicação e discussão, todos os alunos concluíram que os triângulos retângulos, formados ao movimentarem o seletor **k**, eram semelhantes, portanto a razão entre os lados não mudava. Esta situação mostrou a relação entre os dois conceitos, ou seja, a aprendizagem das razões trigonométricas ancorada no conceito de triângulos semelhantes.

No item 1.3, os alunos deveriam movimentar o seletor **α** e anotar o valor das razões novamente. Ao mover o seletor **α** até o final, encontrando  $\alpha = 89^\circ$  (Figura 2.30), um aluno afirmou que o triângulo “vira” um “quadrado”.

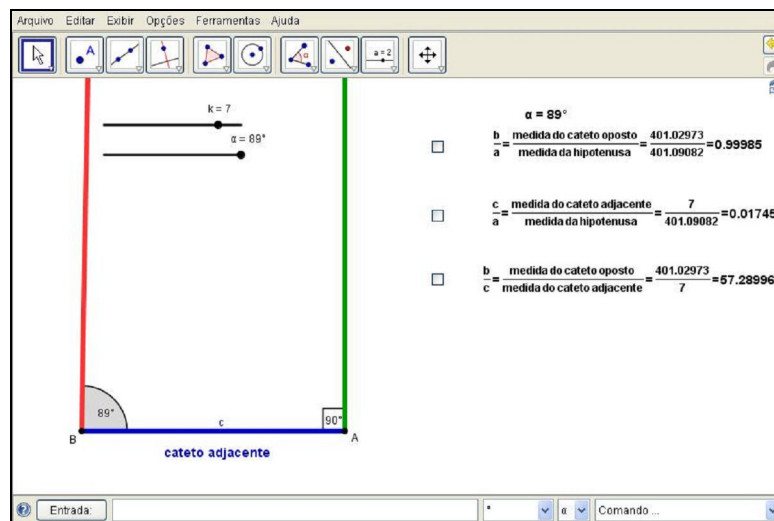


Figura 2.30: Applet visualizado quando  $\alpha = 89^\circ$

Atribui-se essa afirmação ao fato de que, nesse momento, no *applet*, não era possível visualizar um dos vértices do triângulo. Uma das mediadoras perguntou, então, qual era o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo. Poucos alunos lembraram que a soma é  $180^\circ$ , mas o mesmo aluno que fez a afirmação citada anteriormente, respondeu para todos. Além disso, ele refletiu sobre o que disse, e completou dizendo que já que um ângulo era reto (pois o triângulo era retângulo) e o ângulo  $\alpha$  media  $89^\circ$ , logo o terceiro ângulo media  $1^\circ$  e, portanto o triângulo não “virava” um “quadrado”.

Nos comentários das respostas do item 1.3, dois alunos verbalizaram que encontraram  $\alpha = 45^\circ$ , completando, com certo ar de estranheza, que as razões  $\frac{b}{a}$  e  $\frac{c}{a}$  eram iguais, e a razão  $\frac{b}{c}$  era igual a 1. Uma das mediadoras explicou que esse era um caso particular e que seria compreendido melhor na atividade seguinte. Revela-se nesta atitude da mediadora, a tentativa de aumentar o interesse dos educandos na próxima atividade.

Ainda no item 1.3, um aluno chamou a mediadora e comentou que encontrou  $\alpha = 0^\circ$ , e mostrou a construção apresentada na Figura 2.31. Tal situação não era esperada, uma vez que  $\alpha = 0^\circ$  não determinaria o triângulo ABC. Esta situação ilustra o fato alertado por Borba e Penteado (2005), quando ressaltam que ao usar recursos tecnológicos digitais, o professor deve estar disposto a lidar com situações imprevisíveis.

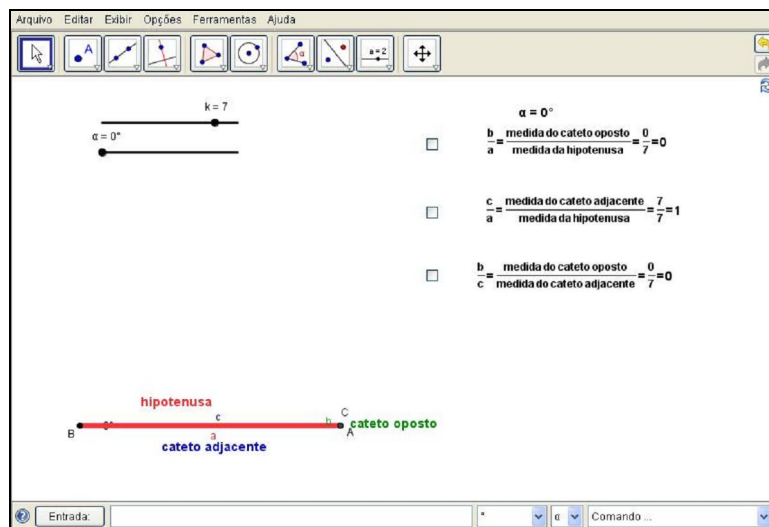


Figura 2.31: *Applet* visualizado quando  $\alpha = 0^\circ$

É importante ressaltar que este problema seria evitado se fosse detectado durante o teste exploratório, sendo o mesmo solucionado com a limitação do seletor  $\alpha$  entre  $1^\circ$  e  $89^\circ$  e não mais entre  $0^\circ$  e  $89^\circ$ , uma vez que este seletor está programado para exibir os ângulos sem casas decimais.

O item 1.5 pretendia investigar se os alunos identificaram do que depende o valor das razões entre os lados de um triângulo retângulo. Ao comentarem suas respostas, todos responderam que depende do ângulo  $\alpha$ , mostrando que o objetivo da atividade foi alcançado.

Após a explicação do texto que concluía os itens anteriores, os alunos resolveram os itens 1.7 e 1.8, sem dificuldade. No item 1.7, os estudantes deveriam anotar o valor do seno, do cosseno e da tangente dos ângulos solicitados, fazendo uso do campo de entrada do *applet*. No entanto, todos os alunos preferiram utilizar o seletor  $\alpha$ , uma vez que essa opção foi dada. Nesse momento, um aluno perguntou que valor o seletor  $k$  deveria estar indicando. Percebe-se com essa pergunta, que este aluno não utilizou os conhecimentos adquiridos nos itens anteriores, nos quais tinha verificado que os valores das razões trigonométricas não dependem do movimento do seletor  $k$  e sim do seletor  $\alpha$ . Sendo assim, foi necessário que uma mediadora relembresse a conclusão dos itens anteriores para que esse aluno seguisse a resolução do item 1.7.

Após o item 1.8, foram demonstradas duas relações,  $\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$  e  $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$ , presentes no texto “Relações” na apostila. A primeira relação, os



alunos já conheciam, no entanto a segunda relação era desconhecida até o momento. Os alunos ficaram bastante atentos às demonstrações, respondendo corretamente as perguntas feitas no encaminhamento das mesmas, superando as expectativas das mediadoras. Na Figura 2.32, observa-se o momento da demonstração.



Figura 2.32: Mediadora demonstrando as relações

No item 1.9, conhecendo o valor de  $\cos x$ , os alunos deveriam aplicar as duas relações apresentadas e demonstradas para encontrar o valor de  $\operatorname{tg} x$ . Neste item, alguns alunos tiveram dificuldade em registrar a resolução de forma correta. Dois alunos, apesar de registrarem de forma indevida, encontraram a resposta certa (Quadro 2.21).

Quadro 2.21: Resolução de um aluno do item 1.9 da Atividade 1

$$\begin{array}{l}
 \text{1.9- Sem utilizar os recursos do applet, calcule } \operatorname{tg} x, \text{ sabendo que } \cos x = \frac{4}{5} \text{ (} 0 < x < 90^\circ \text{).} \\
 \operatorname{sen}^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \quad \operatorname{sen}^2 = 1 - \frac{16}{25} \quad \operatorname{sen} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} \quad \operatorname{tg} = \frac{\operatorname{sen}}{\cos} \quad \operatorname{tg} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} \\
 \operatorname{sen}^2 + \frac{16}{25} = 1 \quad \operatorname{sen}^2 = \frac{9}{25} \quad \operatorname{sen} = \frac{3}{5} \quad \operatorname{tg} = \frac{3/5}{4/5} \quad \operatorname{tg} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}
 \end{array}$$

Segundo Lindegger (2000), como já citado no Capítulo 1 deste trabalho, esse tipo de erro pode ser apenas um erro de notação ou falta de significado das razões trigonométricas. Neste caso, a partir da observação durante a resolução, considera-se que foi apenas um erro na notação, visto que o aluno resolveu o problema corretamente.

## 2.6.2 Análise da Resolução da Atividade 2

Esta atividade foi resolvida de maneiras diferentes pelos alunos. No item 2.1, os alunos deveriam anotar os valores das razões trigonométricas dos ângulos agudos do triângulo retângulo (complementares) e em seguida compará-los.

Um aluno só mencionou a relação entre o  $\sin \alpha$  e o  $\cos \beta$ , escrevendo somente:

“ $\sin \alpha = \cos \beta$ ”. (Aluno 1)

Seis alunos só mencionaram as relações entre os valores do  $\sin \alpha$  e  $\cos \beta$  e entre  $\cos \alpha$  e  $\sin \beta$ .

Somente três alunos observaram alguma relação entre as tangentes de ângulos complementares. Seguem os registros:

“ $\sin \alpha = \cos \beta / \sin \beta = \cos \alpha / \tan \alpha < \tan \beta$ ”. (Aluno 4)

“O  $\sin \alpha$  é igual ao  $\cos \beta$ , o  $\cos \alpha$  é igual ao  $\sin \beta$  e a  $\tan \alpha$  e  $\tan \beta$  tem valores diferentes”. (Aluno 5)

“ $\sin \alpha = \cos \beta / \cos \alpha = \sin \beta /$  o denominador de  $\tan \alpha$  é igual a 5 e o numerador de  $\tan \beta$  também é igual a 5”. (Aluno 6)

Nota-se que neste item, o Aluno 6 foi o que teve mais perto de observar que o valor da  $\tan \alpha$  é o inverso da  $\tan \beta$ . Caso comparasse também o numerador da razão de  $\tan \alpha$  e o denominador de  $\tan \beta$ , poderia ter chegado a esta conclusão.

Como não estava claro para todos os alunos a relação entre os valores da tangente de ângulos complementares, foi necessário que durante a discussão com o grupo, uma mediadora chamasse a atenção dos alunos para a forma fracionária que o *applet* apresentava. Dessa forma, os alunos puderam visualizar que o valor de  $\tan \alpha$  é o inverso de  $\tan \beta$ .

Neste momento, ficou evidente a necessidade da mediação do professor durante o processo de aprendizagem com uso de recursos tecnológicos digitais. Esta situação está de acordo com Gravina e Santarosa (1998), que afirmam que a orientação do professor, mesmo em ambientes informatizados, é indispensável, uma vez que a aprendizagem nem sempre ocorre de forma espontânea.

No item 2.2, os alunos deveriam movimentar o seletor **k**, anotar os valores das razões, e compará-los novamente. A maioria dos alunos repetiu as

comparações feitas no item 2.1. A seguir, destaca-se o registro feito pelo Aluno 5 no item 2.2.

“Os valores encontrados são os mesmos porque dependem do ângulo”. (Aluno 5)

Com essa resposta, pode-se verificar que o Aluno 5 utilizou os conhecimentos adquiridos na Atividade 1, na qual conjecturou e validou que as razões trigonométricas só mudam quando a medida do ângulo interno do triângulo é alterada.

No item 2.3, é solicitado que os alunos movimentem o seletor  $\alpha$ , anotem o valor de  $\alpha$  e  $\beta$ , anotem também o valor das razões e as comparem novamente.

A maioria dos alunos repetiu as comparações feitas nos itens anteriores. Destaca-se a anotação feita pelo Aluno 5:

“Os valores mudaram, portanto mantém a mesma relação: o  $\sin \alpha$  é igual ao  $\cos \beta$ , o  $\cos \alpha$  é igual ao  $\sin \beta$  e a  $\operatorname{tg} \alpha$  e  $\operatorname{tg} \beta$  são diferentes”. (Aluno 5)

Somente um aluno considerou  $\alpha = 45^\circ$ , segue o seu registro feito no item 2.3:

“ $\cos \alpha = \cos \beta = \sin \alpha = \sin \beta / \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$ ”. (Aluno 6)

Nestes registros, bem como os encontrados nos outros itens, verifica-se o uso de diferentes notações. Enquanto alguns alunos utilizaram linguagem corrente (Aluno 5), outros usaram símbolos para fazer suas anotações (Aluno 6).

Durante os comentários, o Aluno 6 verbalizou sua observação. Assim, foi possível retomar a observação feita por dois alunos no item 1.3, citada anteriormente. Um dos alunos presentes comentou que pelo que tinha observado até o momento, isso deveria ter acontecido porque se  $\alpha = 45^\circ$  e  $\beta = 90^\circ - 45^\circ$ , então  $\beta = \alpha$ , logo  $\sin \alpha$  seria igual ao  $\sin \beta$  e  $\cos \alpha$  seria igual a  $\cos \beta$ .

No item 2.4, os alunos deveriam descrever o que foi observado nos itens anteriores. Esperava-se que eles descrevessem que se dois ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  são complementares ( $\alpha + \beta = 90^\circ$ ) então,  $\sin \alpha = \cos \beta$ ,  $\cos \alpha = \sin \beta$  e  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}$ . No entanto, a maioria dos alunos repetiu as anotações feitas nos itens anteriores, ou

seja, escrevendo apenas que  $\sin \alpha = \cos \beta$ ,  $\cos \alpha = \sin \beta$  e  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}$ . Seguem

alguns registros encontrados:

“O  $\sin \alpha = \cos \beta$  e  $\cos \alpha = \sin \beta$ . E movendo o k os valores finais não mudam”. (Aluno 3)

“Que os valores do seno e dos cossenos só mudam com a mudança de  $\alpha$ ”. (Aluno 7)

Observa-se, assim, que esses alunos não generalizaram as relações observadas para quaisquer dois ângulos complementares, não ficando claro se compreenderam o objetivo da atividade.

### 2.6.3 Análise da Resolução da Atividade 3

No primeiro item desta atividade, os alunos deveriam preencher duas tabelas (letras **a** e **b**) e, em seguida, na letra **c**, descrever o que observaram a partir das tabelas preenchidas e da manipulação do *applet*. Quatro alunos descreveram que ao movimentarem o seletor correspondente ao raio, o comprimento do arco e a medida do raio continuaram iguais, acrescentando que o valor da razão era igual a 1.

Destaca-se o registro feito pelo Aluno 2. Este retrata que o aluno não relacionou o valor da razão 1 com a divisão de dois valores iguais (comprimento do arco e a medida do raio) diferente do Aluno 6, como pode ser visto:

“Observei que o comprimento do arco e a medida do raio são sempre iguais, e que a razão é sempre 1.” (Aluno 2)

“Comprimento do arco = medida do raio, com isso razão = 1”. (Aluno 6)

Somente um aluno registrou a resposta justificando que a razão entre o comprimento do arco e a medida do raio era igual a 1, quando o ângulo correspondente a esse arco mede aproximadamente  $57,3^\circ$ :

Foi muito importante a discussão com o grupo, pois dessa forma todos puderam esclarecer as dúvidas e estabelecer conjecturas.

Nos itens 3.3 e 3.4, os alunos deveriam preencher mais duas tabelas. Uma, considerando um valor fixo para o ângulo  $\alpha$  e três valores para o raio, e outra considerando uma medida fixa para o raio e três valores para o ângulo  $\alpha$ . Dessa forma, esperava-se que os alunos descrevessem no item 3.5, que dado um ângulo

central, a razão entre o comprimento do arco correspondente e a medida do raio é constante, e que esta razão não depende da medida do raio, mesmo para ângulos diferentes de 1 rad. Um aluno preencheu as tabelas com as razões na forma fracionária, fato que implicou não conseguir estabelecer a referida conjectura. Sete alunos registraram somente que a razão se altera se o ângulo  $\alpha$  for alterado, sem descreverem o que acontece quando se altera a medida do raio.

Analisando as respostas do item 3.5 foi possível perceber que os alunos ainda não associavam essas conjecturas às estabelecidas no item 3.1.

Durante toda a Atividade 3, foi percebido grande dificuldade dos alunos em escrever suas respostas. Atribui-se o fato à falta de costume com questões abertas, ou seja, questões sem uma resposta pronta.

Após as discussões com o grupo, os estudantes compreenderam que a razão entre o comprimento do arco correspondente a um ângulo central e a medida do raio também é constante para um mesmo ângulo central, mesmo que este seja diferente de 1 rad. Neste momento, foi definido a medida do ângulo em radiano como sendo essa razão.

No item 3.6 os alunos deveriam movimentar o seletor correspondente ao raio, até obter raio = 1 e comparar o comprimento do arco com a sua medida em radiano (letra **a**). Na letra **b**, deveriam mover o seletor correspondente ao ângulo  $\alpha$  e fazer novamente a comparação. Na letra **c**, deveriam descrever o que observaram a partir da resolução da letra **a** e **b**.

Nas letras **a** e **b**, todos os alunos observaram que quando o raio é igual a 1, o comprimento do arco é igual a sua medida angular correspondente em radianos. Vale ressaltar que a maioria dos alunos ainda não reconhecia a razão  $\frac{\text{comprimento do arco}}{\text{medida do raio}}$  como a medida do ângulo  $\alpha$  em radianos, registrando a

resposta da letra **a** da seguinte forma:

“A razão é igual ao comprimento do arco”. (Aluno 6)

Somente quatro alunos demonstraram, pelas suas respostas, que sabiam que a referida razão era a medida do ângulo  $\alpha$  em radiano. Segue-se o registro feito por um desses alunos na letra **a**:

“O comprimento do arco é igual a medida de  $\alpha$  em radianos”.  
(Aluno 2)

Vale ressaltar, a resposta do Aluno 2 referente à letra **b**. Este foi o único aluno a observar a razão como uma fração de denominador (medida do raio) igual a 1, o que justifica a razão ser igual ao comprimento do arco.

“Continua igual porque a medida do raio é 1, e todo numero dividido por 1 é igual a ele mesmo”. (Aluno 2)

Antes da explicação de como converter medidas de um ângulo em grau para radianos, fez-se necessário que os alunos soubessem quantos raios “cabem” em uma circunferência. Para tanto foi utilizado material concreto constituído por uma circunferência de isopor e um pedaço de cordão do tamanho do raio, como mostra a Figura 2.32. Todos os alunos demonstraram que compreenderam o procedimento feito com o material concreto, uma vez que prestaram atenção e responderam às perguntas feitas.



Figura 2.33: Mediadoras utilizando o material concreto

Analisando o resultado positivo do uso do material concreto, fica evidente que o uso de tecnologias digitais não significa abandonar outros recursos tecnológicos. Segundo Borba e Penteadó (2005), é importante refletir sobre a adequação da mídia em cada situação, avaliando o que se deseja enfatizar, escolhendo a mais adequada para alcançar o objetivo pretendido.

Os alunos participaram ativamente da explicação de como converter a medida de um ângulo (quadro “Conversão grau/radiano” da apostila), respondendo as perguntas e deduzindo que  $180^\circ$  corresponde a  $\pi$  rad.

Foi solicitado que os alunos sugerissem um ângulo em graus para que fosse convertido para radianos. Sugeriram  $150^\circ$  (letra **a** do item 3.7). Após converter e obter  $\frac{5\pi}{6}$  rad, alguns alunos copiaram a resolução abaixo do subitem **a** do item 3.7.

Foi comentado que a medida em radiano do ângulo de  $150^\circ$  que encontraram utilizando o *applet* (2, 62 rad) era uma medida aproximada, e que o valor encontrado por meio de regra de três era a medida exata. A seguir, foi perguntado aos alunos que procedimento deveria ser feito com o valor exato, para que se encontrasse o valor aproximado. Muitos alunos ficaram em dúvida, mas um aluno respondeu que deveria substituir o  $\pi$  por 3, 14.

O item 3.8 foi resolvido sem nenhuma dificuldade. Vale ressaltar ainda que todos os alunos resolveram este item utilizando regra de três como o sugerido e não substituindo  $\pi$  rad por  $180^\circ$ .

O texto “Tabela Trigonométrica” da apostila, presente no final da Atividade 3, foi, então, comentado. Vários alunos disseram que já conheciam tal tabela antes dessa aula, exceto os valores dos ângulos notáveis em radianos.

De maneira geral, a Atividade 3 estimulou os alunos a investigar relações e a raciocinar visando o estabelecimento das conjecturas.

#### **2.6.4 Análise da Resolução da Atividade 4**

A apresentação da circunferência trigonométrica utilizando o *applet*, destinado para tal fim, possibilitou que os alunos observassem o ponto P “caminhar” no sentido anti-horário e o P’ no sentido horário.

Enquanto cada um dos alunos manipulava o *applet* em seu computador, uma das mediadoras o explicava com o projetor de multimídia.

A Figura 2.34 registra o momento da realização desta atividade.

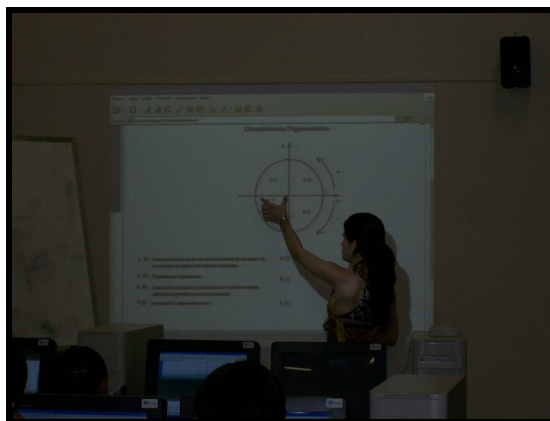


Figura 2.34: Mediadora utilizando o *applet* da Atividade 4

Após a execução das ações solicitadas pelo *applet*, fez-se necessário desenhar uma circunferência trigonométrica no quadro, com a marcação das extremidades dos arcos que medem  $0$ ,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$ ,  $\frac{3\pi}{2}$ , e  $2\pi$ . Como o *applet* não apresentava a marcação dessas extremidades, o uso do quadro foi muito importante. Revela-se aqui outra situação que se fez necessário o uso de recursos tecnológicos não-digitais. Cabe ressaltar que a ausência das marcações das extremidades desses arcos foi proposital, visto que dessa forma foi possível que os alunos refletissem sobre a localização das mesmas.

Esse momento contou com a participação ativa dos alunos. Durante questionamento oral, nenhum dos alunos sugeriu o uso de regra de três para converter a medida do ângulo em graus para radiano, porém foi percebido que a regra de três foi feita mentalmente, revelando assim que os alunos compreenderam a relação entre  $\pi$  rad e  $180^\circ$ .

Após a marcação dos arcos citados, foram marcadas também as extremidades dos arcos que medem  $\frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{\pi}{4}$  e  $\frac{\pi}{3}$ . Um aluno pediu que fosse marcada a extremidade de um arco que mede  $3$  rad e outro que mede  $3\pi$  rad. Logo após, o aluno sugerir o arco de  $3\pi$  rad, um outro já respondeu que seria um arco de uma volta e meia, e que coincidiria com o arco de  $\pi$  rad. Nesse momento foi dito que se pode dar infinitas voltas na circunferência trigonométrica, mas que o presente estudo se restringiria apenas à primeira volta.

No item 4.2, os alunos deveriam identificar a que quadrante da circunferência trigonométrica pertencia a extremidade dos arcos dados. Embora fosse solicitado



que não utilizassem o *applet*, a maioria dos alunos usou. Dos nove arcos, apenas três estavam expressos em graus (unidade de medida usada no *applet*). Diante desse fato, considera-se que o uso do *applet* não tenha facilitado muito a resolução deste item, visto que o *applet* não apresentava a medida exata dos arcos em radiano. Os alunos o utilizaram apenas para evitar o desenho no papel.

Vale ressaltar que por meio dos recursos do *applet*, é possível exprimir a medida do ângulo assinalado no mesmo, em radianos (medida aproximada). No entanto, isso só foi dito aos alunos depois da resolução deste item, para que não o resolvessem mecanicamente, mas sim que raciocinassem.

No item 4.3, os alunos deveriam determinar, em radianos, a medida dos arcos com origem no ponto  $(1, 0)$  e extremidades nos vértices de polígonos regulares inscritos na circunferência (triângulo, quadrado e hexágono). No início desta atividade, os alunos tiveram um pouco de dificuldade. Alguns não entenderam o objetivo da mesma. Assim a letra *a* foi resolvida no quadro com a ajuda dos alunos e as demais letras foram resolvidas facilmente por eles.

Após a resolução da Atividade 4, o quadro “Função de Euler” presente na apostila foi explicado, bem como o *applet* destinado para tal, presente na Unidade de Aprendizagem. Todos os alunos estavam atentos e não apresentaram dúvidas.

A seguir, uma mediadora utilizou um *applet* (Figura 2.34), que foi desenvolvido entre o primeiro e o segundo encontro, logo não se encontra na Unidade Aprendizagem. Este *applet* tem o objetivo de associar um número real no intervalo  $[-6,28; 0]$  a um ponto *P* da circunferência trigonométrica. Assim, o ponto *P* será extremidade final de um arco de comprimento  $|t|$  e percorre a circunferência *C* no sentido horário. A utilização deste fez-se necessária, uma vez que o *applet* Função Euler, presente na Unidade de Aprendizagem, só associava a um ponto *P*, um número real do intervalo  $[0; 6,28]$ .

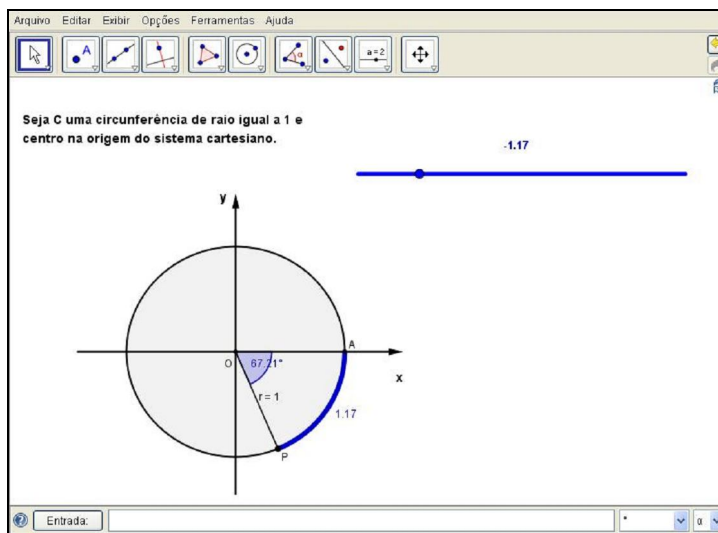


Figura 2.35: Applet utilizado para a explicação da associação de um número real negativo e pontos da circunferência trigonométrica

### 2.6.5 Análise da Resolução da Atividade 5

Os itens 5.1, 5.2 e 5.3 foram resolvidos facilmente pelos alunos. Vale ressaltar que no item 5.2, no qual deveria ser preenchida uma tabela alterando o valor do ângulo  $\alpha$  por meio do campo de entrada, a maioria dos alunos utilizou o seletor sem dificuldade, assim como no item 1.7 da Atividade 1.

Após a resolução destes itens foi desenhada uma circunferência trigonométrica no quadro, na qual foram marcadas as extremidades dos ângulos de  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  e  $360^\circ$ . Com a ajuda dos alunos, foram escritas, então, as coordenadas dessas extremidades. Dessa forma, os alunos visualizaram a tabela que preencheram e as coordenadas dos pontos, podendo verificar a definição de seno e cosseno na circunferência trigonométrica.

No item 5.5, dois alunos tiveram mais dificuldade do que o esperado. Neste item foi solicitado que identificassem o sinal de alguns senos e cossenos. Na letra **b**, por exemplo, solicitava-se o sinal de  $\cos 5$ . Estes alunos argumentaram que é impossível calcular o valor de um ângulo cujo cosseno é maior do que 1. Essa pergunta sinaliza que ficou claro para eles que o cosseno (e o seno) de um número real está compreendido no intervalo de  $[-1, 1]$ . No entanto, estes alunos não compreenderam bem o que a atividade solicitava. Sendo assim, uma das mediadoras explicou para esses alunos que a atividade solicitava apenas o sinal de  $\cos 5$ , e não um ângulo que tivesse cosseno igual a 5, pois isso seria impossível.

No item 5.6 nenhuma dúvida ou problema foi detectado, atribui-se este fato à resolução dos itens anteriores desta atividade e aos comentários que possibilitaram compreensão do assunto em estudo.

### 2.6.6 Análise da Resolução da Atividade 6

Esta atividade tinha como objetivo que os alunos observassem que o quadro de sinais, para o seno e para o cosseno dos arcos com extremidades na primeira volta negativa, é semelhante ao quadro para os arcos com extremidade na primeira volta positiva. A mesma foi resolvida pelos alunos sem nenhuma dificuldade. O objetivo da atividade foi alcançado.

### 2.6.7 Análise da Resolução da Atividade 7

Nos itens 7.1, 7.2 e 7.3, os alunos deveriam anotar o valor do seno e cosseno dos ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  (sendo  $\beta = 90^\circ - \alpha$ ) apresentados no *applet* e compará-los. No item 7.1, deveriam utilizar o valor de  $\alpha$  apresentado no *applet*, no item 7.2, deveriam movimentar o seletor até encontrar  $\alpha = 37^\circ$  e no 7.3, deveriam escolher um valor aleatório para  $\alpha$ . Nestes itens, todos os alunos fizeram as comparações esperadas, sem dificuldade.

No item 7.4, os alunos deveriam descrever o que observaram nesta atividade. Dentre os registros feitos, destacam-se os de dois alunos:

“Quando  $\beta = 90^\circ - \alpha$ , o  $\cos \alpha$  é igual o  $\sin \beta$  e o  $\sin \alpha$  é igual o  $\cos \beta$ ”. (Aluno 7)

“Que  $\sin \alpha = \cos \beta$  e  $\cos \alpha = \sin \beta$ , se  $\beta = 90^\circ - \alpha$ ”. (Aluno 9)

O uso das palavras “quando” e “se” feito por esses alunos, evidencia que ambos procuraram justificativas para a conjectura elaborada por eles nos itens anteriores. Fato que representa uma maior preocupação com a estrutura das respostas das atividades, além de evidenciar que o objetivo da atividade foi alcançado.

Após a resolução da Atividade 7, foram retomadas as relações conjecturadas e demonstradas na Atividade 2, para que associassem as relações entre os valores do seno e cosseno de ângulos complementares no triângulo retângulo com os mesmos na circunferência trigonométrica.

Após o comentário das respostas dadas a esta atividade, foram mostradas duas tabelas trigonométricas. Uma com os valores aproximados do seno e cosseno de ângulos entre  $1^\circ$  e  $89^\circ$  e outra com os valores exatos do seno e cosseno dos ângulos notáveis (já apresentada após a Atividade 3). Dessa forma os alunos puderam visualizar nas tabelas, por exemplo, que o valor do seno de  $30^\circ$  era igual ao valor do cosseno de  $60^\circ$ , sabendo a justificativa.

Ao observar as tabelas, um aluno questionou o porquê do  $\sin 45^\circ$  ser igual ao  $\cos 45^\circ$ . Um outro aluno respondeu em voz alta, que isso acontecia porque  $45^\circ + 45^\circ$  era igual a  $90^\circ$ , ou seja, são complementares, e por isso os valores do seno e cosseno eram iguais. Fica evidente neste momento que este aluno que respondeu em voz alta utilizou os conhecimentos adquiridos nas atividades anteriores.

### **2.6.8 Análise das Resoluções das Atividades 8, 9 e 10**

Como a estrutura dessas atividades é igual a da Atividade 7, não será comentado aqui o desenvolvimento de cada uma delas. Ressalta-se que nenhuma dificuldade foi encontrada por parte dos alunos na resolução dessas atividades. Conclui-se, assim, que o objetivo de cada atividade foi alcançado satisfatoriamente.

A leitura do texto “Simetrias”, presente após estas atividades, foi de grande importância, uma vez que continha as justificativas para as conjecturas elaboradas pelos alunos. Após a explicação do referido texto (somente a primeira demonstração foi feita), os alunos resolveram uma folha de exercícios (Anexo 4) na qual aplicaram as relações de simetria. Esta folha foi elaborada entre o primeiro e o segundo encontro, visto que a resolução de mais exercícios foi considerada necessária, fato decorrente da observação das atitudes e questionamentos dos alunos, pelas mediadoras.

Aparentemente, os alunos não tiveram dificuldade na resolução dos exercícios e a maioria utilizou corretamente os conhecimentos construídos até o momento. No entanto, o tempo disponível não seria suficiente para resolver todas as questões da folha e terminar a resolução das atividades da apostila. Assim, depois de um tempo pré-estabelecido, foi pedido que os alunos retomassem à resolução das atividades da apostila com *applets*.

### 2.6.9 Análise da Resolução da Atividade 11

Durante a definição da função seno, com o *applet* destinado a esse fim, algumas dúvidas surgiram em relação ao período. Alguns alunos não entenderam o significado de  $f(x+p) = f(x)$ . Como, durante a Atividade 4, tinham questionado a localização da extremidade do arco de medida  $3\pi$ , a mediadora desenhou novamente uma circunferência trigonométrica no quadro e localizou, com a ajuda dos alunos a extremidade desse arco. Foi perguntado aos alunos, qual o valor do seno e do cosseno deste do arco de medida  $3\pi$ . Todos responderam corretamente, podendo comparar esses valores com o seno e cosseno de um arco de medida  $\pi$ .

Para que compreendessem melhor, a mediadora fez algumas anotações no quadro:

$$\begin{aligned}\text{sen } 3\pi &= \text{sen } (2\pi + \pi) = \text{sen } \pi \\ \text{sen } \frac{5\pi}{2} &= \text{sen } \left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen } \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Dessa forma, os alunos puderam observar por meio de exemplos o significado da expressão  $f(x+p) = f(x)$ .

Na Unidade de Aprendizagem, não tinha um *applet* para definição da função cosseno. No entanto, foi mostrado aos alunos um *applet* para tal fim. O *applet* em questão se encontra estruturado da mesma forma que o *applet* da função seno presente na Unidade de Aprendizagem e descrito na seção 2.2.8.

Após a definição das funções seno e cosseno, os estudantes iniciaram a Atividade 11.

O objetivo geral dessa atividade, como descrito na seção 2.3.9, é o estudo das transformações causadas pelos parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  nos gráficos das funções da forma  $g(x) = d + a \text{sen } (bx + c)$  em relação à função  $f(x) = \text{sen } x$ .

Cada parâmetro foi estudado separadamente. Inicialmente, os alunos moveram o seletor correspondente ao parâmetro em estudo, até encontrar os valores dados e anotaram o conjunto imagem e o período da função  $g$ . Em seguida, descreveram a transformação que o determinado parâmetro causava sobre o gráfico durante a movimentação do seletor.

Serão comentados aqui, os registros feitos pelos alunos após terem movimentado os seletores e observado os gráficos, destacando algumas dificuldades e/ou fatos considerados importantes.

No estudo do parâmetro  $d$ , ao descreverem a transformação causada pelo mesmo sobre o gráfico na forma  $g(x) = d + \text{sen } x$ , dois alunos registraram:

“Quando  $d = 0$ , o gráfico azul é igual ao vermelho. Quando  $d > 0$ , o gráfico azul fica acima do vermelho. E quando  $d < 0$ , fica abaixo”. (Aluno 3)

“Quando o  $d > 0$  a função  $\text{sen } x + d$  sobe no gráfico e quando  $d < 0$ , a função  $\text{sen } x + d$  desce no gráfico”. (Aluno 5)

O registro feito pelo Aluno 3, pode indicar que ele não identificou o gráfico que estava sendo alterado, uma vez que os distinguiu pela cor e não pela lei apresentada no *applet*. Quanto ao Aluno 5, verifica-se que este observou a alteração esperada no gráfico. No entanto, não identificou a relação entre as imagens da função  $f(x) = \text{sen } x$  e da função  $g(x) = d + \text{sen } x$ . Estes registros não deixam claro se os alunos entenderam de fato a influência do parâmetro  $d$  e a relação deste com o conjunto imagem.

Acrescenta-se que a maioria dos alunos alcançou o objetivo esperado após observarem a translação e a mudança na imagem da função. Ao final, validaram suas conjecturas com o texto da conclusão referente a esta parte da atividade. Os Alunos 3 e 5 puderam assim, complementar suas respostas.

No estudo do parâmetro  $c$ , pode-se afirmar que todos os alunos atingiram o objetivo esperado, visto que observaram a translação horizontal causada pelo mesmo. Destaca-se o registro feito pelo Aluno 7:

“Quando o  $c$  é negativo, o gráfico anda para a direita. Quando o  $c$  é positivo, o gráfico anda para esquerda. A imagem e o período não mudam”. (Aluno 7)

Este deixa clara a mudança observada, bem como ressalta que nada acontece com a imagem e nem com o período ao movimentar o seletor  $c$ .

No estudo do parâmetro  $a$ , quando  $0 < a < 1$  e quando  $a > 1$ , foi observado que todos os alunos visualizaram as mudanças ocorridas no gráfico da função  $g$ . Segue o registro feito por um aluno:

“Quando  $0 < a < 1$  o intervalo das imagens ‘diminui’ (o gráfico achata), e quando  $a > 1$ , o intervalo das imagens ‘aumenta’ (o gráfico espicha)”. (Aluno 5)

Apesar deste aluno não ter deixado claro que não houve mudança no período da função  $g$ , devido a movimentação do seletor  $a$ , considera-se que este fato não tenha prejudicado sua resposta, podendo se afirmar assim, que ele compreendeu as mudanças causadas pelo parâmetro  $a$ .

Ainda no estudo do parâmetro  $a$ , quando  $a = -1$ , destaca-se que os alunos tiveram muita dificuldade em escrever o que observaram. Alguns não encontravam um vocabulário adequado para descrever o comportamento do gráfico, como o Aluno 5. Esse fato foi evidenciado pelos comentários orais feitos pelos alunos durante a realização da atividade.

“O gráfico de  $g(x) = -\text{sen } x$  é o oposto do gráfico de  $f(x) = \text{sen } x$ ”. (Aluno 5)

Neste registro, o aluno pode ter associado a palavra “oposto” ao sinal negativo. No entanto, mesmo sem um vocabulário adequado para descrever o que estavam observando, os alunos compreenderam a mudança provocada pelo parâmetro  $a$ , quando  $a = -1$ .

Ao descrever a transformação causada pelo parâmetro  $a$ , quando  $-1 < a < 0$  e quando  $a < -1$ , um aluno fez o seguinte registro:

“Quando  $-1 < a < 0$ , a linha fica achatada e oposta, e quando  $a < -1$ , os valores da imagem aumentam e o gráfico fica oposto”. (Aluno 5)

Nota-se que este aluno observou que o intervalo da imagem da função  $g$  aumentou quando  $a < -1$ , mas não deixou claro que transformação ocorreu na imagem quando  $-1 < a < 0$ , embora tenha observado que o gráfico “achatou”. No entanto, considera-se que o uso desse vocabulário informal não sinaliza falta de entendimento por parte do aluno.

Em termos gerais, conclui-se que o objetivo do estudo do parâmetro  $a$  foi alcançado, uma vez que todos os alunos validaram suas respostas com o texto referente à conclusão dessa parte da atividade. Além disso, com a discussão da conclusão, os alunos puderam melhorar o vocabulário utilizado para descrever as transformações. Esse fato pode ser verificado nas respostas dos itens destinados para o estudo do parâmetro  $b$ :

“Quando  $0 < b < 1$ , a função dilata na horizontal e período aumenta. Quando  $b > 1$  a função contrai na horizontal e o período diminui”. (Aluno 7)

A evolução no vocabulário do estudo do parâmetro  $a$  para o do parâmetro  $b$  foi comum à maioria dos alunos.

No estudo do parâmetro  $b$ , quando  $b = -1$ , destaca-se o seguinte registro:

“O período e a imagem não mudam, mas um (gráfico) é o reflexo do outro”. (Aluno 5)

Como a maioria dos alunos registrou de forma semelhante, conclui-se que até o momento, o estudo sobre o parâmetro  $b$  foi satisfatório.

Sobre o estudo das transformações causadas pelo parâmetro  $b$ , quando  $-1 < b < 0$  e quando  $b < -1$ , destaca-se as seguintes produções:

“Quando  $-1 < b < 0$ , o gráfico se dilata horizontalmente, quando  $b < -1$  o gráfico se comprime horizontalmente”. (Aluno 5)

“Quando  $-1 < b < 0$ , a função dilata na horizontal e o período aumenta. Quando  $b < -1$ , a função contrai na horizontal e o período diminui”. (Aluno 7)

Diante destas respostas, verifica-se, novamente, a evolução no vocabulário dos alunos, bem como o alcance do objetivo dos itens referentes.

Conclui-se que o objetivo geral da Atividade 11 foi alcançado, devido ao bom aproveitamento dos alunos e à facilidade na resolução dos exercícios.

Cabe acrescentar que com um *applet* semelhante ao da Atividade 11, foi mostrado aos alunos as transformações causadas pelos parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  da função na forma  $g(x) = d + a \cos (bx + c)$ , podendo verificar assim, que são as mesmas ocorridas na função na forma  $g(x) = d + a \sin (bx + c)$ . Ressalta-se que este *applet* não está disponível na Unidade de Aprendizagem.

Para complementar a análise da validação das atividades, os questionários, preenchidos pelos 12 alunos que compareceram aos encontros, foram analisados. Na próxima subseção, serão expostos os resultados.

### 2.6.10 Análise dos questionários

A primeira pergunta do questionário é opcional e refere-se ao nome de cada participante. Com a análise das respostas da pergunta 2, verificou-se que 90% dos alunos consideraram os enunciados *claros* e apenas 10% consideraram



*parcialmente claros*. Este resultado positivo já era esperado, visto que os participantes do teste exploratório não verificaram falhas nos enunciados.

Na pergunta 3, todos os alunos afirmaram que as atividades contribuíram para compreensão dos tópicos estudados de Trigonometria. Quando questionados do porquê, a justificativa do Aluno 8 foi:

“Porque as atividades eram bem dinâmicas nos proporcionando uma boa compreensão”. (Aluno 8).

Considera-se que a palavra “dinâmica” esteja fazendo referência à possibilidade de movimentação dos *applets*, além da estrutura das atividades. Dessa forma, conclui-se que os *applets* contribuíram para que os alunos aprendessem explorando, investigando, tornando-se assim, agentes ativos do processo de aprendizagem. Esta situação é destacada por Santos, Paixão e Pereira (2007), como citado no Capítulo 1 desta monografia.

Com relação ao nível das atividades, a maioria dos alunos considerou *moderado*. O restante considerou o nível das atividades *fácil* (Gráfico 2.4).

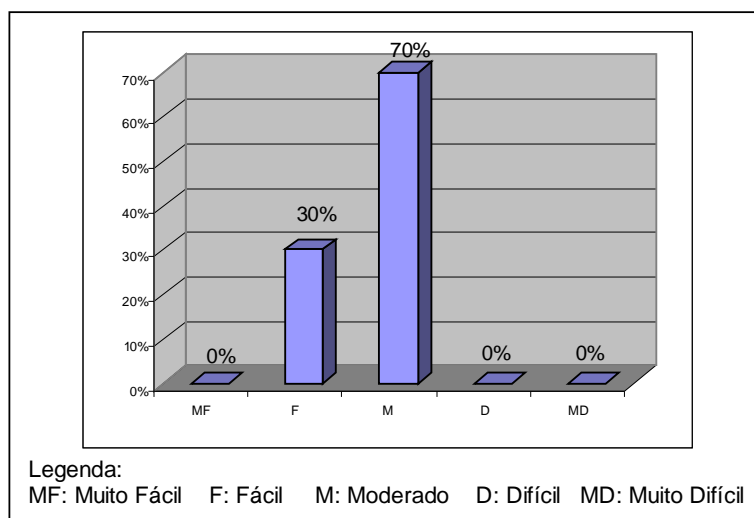


Gráfico 2.4: Nível das atividades na validação

Este índice foi considerado positivo visto que foi a primeira vez que os alunos estudaram o tema e que as atividades não apresentam o padrão convencional dos livros didáticos. É importante ressaltar que os participantes do teste exploratório (professores e licenciandos) alertaram que as atividades poderiam apresentar nível moderado para estudantes que nunca estudaram Trigonometria.

Quando questionados, na pergunta 5, se teoria apresentada na apostila contribuiu para o esclarecimento do assunto estudado, todos afirmaram que sim. Mais da metade dos alunos justificou que contribuiu de forma *esclarecedora* e o restante de forma *bastante esclarecedora*. O Gráfico 2.5 mostra os resultados:

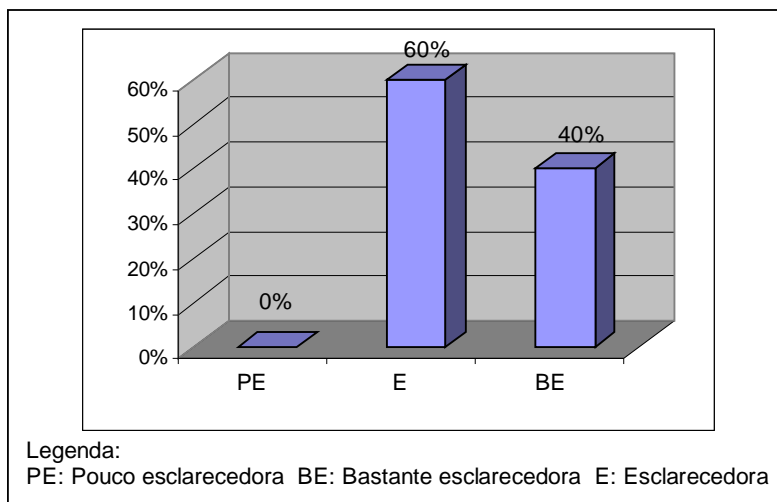


Gráfico 2.5: Importância das observações na validação

A fim de investigar se os alunos já tinham algum conhecimento de Trigonometria antes da validação, elaborou-se a pergunta 6. Cerca de 60% dos alunos responderam que *não*. Os 40% que responderam *sim*, comentaram que estudaram Trigonometria no triângulo retângulo. Esse fato já era esperado, visto que esse estudo é feito no 9º ano do Ensino Fundamental.

Na pergunta 7, quando questionados se já haviam utilizado *applets* no contexto educacional, todos os alunos afirmaram que não. No entanto, na pergunta 8, 60% dos alunos consideraram a utilização de *applets* de Trigonometria *fácil*, enquanto 40% consideraram *muito fácil*. Atribui-se a esse fato a facilidade que os jovens têm na utilização de recursos tecnológicos. Destacam-se as justificativas dadas por dois alunos, que marcaram a opção *muito fácil*:

“Foi muito fácil, e eu achei muito interessante, uma maneira bem dinâmica de aprender Trigonometria”. (Aluno 3)

“Ajudou muito na hora de dúvidas, e evita que o professor escreva muito no quadro”. (Aluno 7)

Estes comentários ressaltam mais uma vez, as vantagens do uso dos *applets*, visto que os alunos não precisam visualizar figuras estáticas no papel ou até mesmo no quadro, já que os *applets* possibilitam a movimentação.

Nenhum dos alunos achou necessário que ocorressem mudanças em qualquer *applet*. Fato verificado na análise das respostas da pergunta 9. Isso deixa claro que todo o esforço e as inúmeras correções que ocorreram foram válidos.

Na análise das respostas da pergunta 10, verificou-se que 100% dos alunos consideraram que o uso de *applets* favorece a construção de conhecimentos matemáticos. Esse índice é bastante significativo, pois evidencia o alcance do objetivo principal do trabalho. São destacados alguns comentários feitos pelos alunos:

“Mostra visualmente como as coisas acontecem”. (Aluno 1 )

“Os alunos preferem uma maneira mais dinâmica a uma aula normal, que é muito cansativa”. (Aluno 2)

Estes comentários estão de acordo com as justificativas dadas pelos participantes do teste exploratório (pergunta 8 do questionário correspondente), citadas na subseção 2.5.3. Os participantes ressaltam a importância da visualização e movimentação possibilitadas pelos *applets*. Além disso, o comentário do Aluno 2, confirma o fato constatado por Martins (2003). A pesquisadora verifica que os alunos tendo a oportunidade de utilizar o computador na realização de atividades de Trigonometria, se sentem mais entusiasmados no processo de aprendizagem.

Na pergunta 11, foi questionado se os alunos já utilizaram tecnologias digitais em alguma aula de Matemática. Dos doze alunos, quatro disseram que sim e citaram o projetor de multimídia como única tecnologia digital utilizada. No entanto, ressaltaram que esta contribuiu para a aprendizagem do tema em estudo.

A pergunta 12 questiona sobre a importância do papel do professor durante a utilização dos *applets*. Cerca de 70% dos alunos consideraram o papel do professor *muito importante*, enquanto 30% consideraram *importante*.

Destacam-se os comentários feitos pelos Alunos 5 e 10:

“O computador é só uma máquina já o professor ensina de fato”.  
(Aluno 5)

“Pois é a explicação do professor que nos faz aprender melhor a matéria”. (Aluno 10)

Os índices e os comentários dos alunos evidenciam a importância dos mediadores do conhecimento. Fato este verificado também, nos dados levantados entre os participantes do teste exploratório.

Por fim, os alunos foram questionados sobre a importância da utilização do uso de tecnologias digitais nas aulas de Matemática apontando as possíveis vantagens e desvantagens. Os alunos justificaram que esses recursos facilitam e dinamizam a aula, visualizam o que estão fazendo, resultando em um entendimento mais proveitoso e, até mesmo, mais rápido.

Diante do exposto, conclui-se que os resultados foram satisfatórios. A análise dos dados levantados, das justificativas e das respostas das atividades permitiu confirmar as vantagens dos *applets*, além de constatar que estes aliados à apostila e a intervenção das mediadoras possibilitaram a construção do conhecimento sobre Trigonometria.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente capítulo são apresentadas as conclusões obtidas durante o desenvolvimento desta monografia. Além disso, são analisados alguns resultados, expondo as contribuições, bem como as dificuldades encontradas durante a realização deste trabalho. Em seguida, algumas ações para pesquisas futuras são sugeridas.

Este trabalho teve como objetivo desenvolver e validar *applets* e atividades didáticas para a aprendizagem de Trigonometria. Destaca-se que o desenvolvimento dos *applets* possibilitou um estudo gratificante sobre as TIC, em particular, sobre o *software* GeoGebra, com seus diversos recursos e comandos, e sobre a própria Trigonometria.

Com a realização do teste exploratório, foi possível corrigir algumas falhas presentes nos *applets* e também aprimorar as conclusões e textos que compõem a apostila. Além disso, os participantes tiveram a oportunidade de ficar cientes das vantagens do uso de *applets* no ensino da Trigonometria, fato que ressalta a importância deste trabalho.

Na validação dos *applets* e das atividades, os estudantes do Ensino Médio se mostraram atentos e motivados, realizando com entusiasmo e quase sempre com facilidade as atividades, tentando explorar ao máximo, os conceitos em questão.

Observou-se também, que os alunos do Ensino Médio apresentaram dificuldade em registrar suas respostas, principalmente nas Atividades 3 e 11. Essa afirmação foi baseada na análise das respostas de cada aluno, bem como na verbalização de alguns deles durante a realização das mesmas. Porém, considera-se que tal dificuldade não seja um problema relacionado diretamente às atividades e nem à Trigonometria, mas sim a falta de costume com atividades que possibilitem a construção de conhecimentos, ainda escassas no cotidiano dos alunos.

Comparando a atitude dos participantes do teste exploratório com a dos alunos do Ensino Médio que participaram da validação das atividades, destaca-se o fato de que os alunos do Ensino Médio mostraram mais interesse e empenho na realização das atividades com os *applets* como um todo, e os participantes do teste

se mostraram mais interessados no funcionamento dos *applets*, mais especificamente. Considera-se que a participação ativa dos alunos deu-se pelo fato deles estarem fazendo parte de uma atividade fora do horário de aula, por vontade própria, além de terem a oportunidade de utilizar recursos tecnológicos digitais. Já o interesse dos participantes do teste pelos *applets* especificamente, atribui-se ao fato da possibilidade de uma abordagem da Trigonometria, que geralmente é tratada de maneira teórica, numa linguagem formal, que muitas vezes exige abstração e memorização de fórmulas por parte do aluno. Fato que pode contribuir com novas práticas docentes.

Quanto ao conteúdo específico, considera-se que fazer o uso do *applet* da Função de Euler foi uma boa estratégia. Dessa forma, foi possível mostrar aos alunos a associação de um número real a um ponto da circunferência trigonométrica e vice-versa, facilitando a compreensão da definição de seno e cosseno na circunferência.

O uso dos *applets* para a definição da função seno e para o estudo das transformações gráficas merecem destaque. Com eles, foi possível reproduzir situações difíceis de serem feitas com lápis e papel.

Conclui-se assim, que no geral, o uso dos *applets* foi satisfatório. Estes permitiram explorar certas habilidades, como a visualização e simulação, o que possibilitou a construção de conhecimentos. Os *applets* utilizados neste trabalho estão disponíveis no site <http://www.es.cefetcampos.br/softmat>. Futuramente, as atividades desenvolvidas, bem com a Unidade de Aprendizagem criada também ficarão disponíveis no mesmo endereço eletrônico.

Algumas dificuldades foram superadas durante o desenvolvimento deste trabalho. Para a elaboração dos *applets* e das atividades, por exemplo, foi necessário muito estudo dos recursos do *software* GeoGebra e de como este poderia contribuir para o estudo de Trigonometria. No entanto, o resultado foi muito gratificante. O mesmo acrescenta-se para a elaboração da Unidade de Aprendizagem, que requereu o estudo do *software* NVU.

A falta de referencial teórico que trate da aprendizagem de Trigonometria com uso de recursos tecnológicos digitais, também foi uma dificuldade. Porém, este fato evidencia a importância dos resultados deste trabalho para pesquisas futuras.

Destaca-se que o trabalho aqui desenvolvido contribuiu de forma significativa para a experiência de suas autoras. Estas tiveram a oportunidade de desenvolver e aplicar recursos didáticos, com os quais os alunos participaram ativamente do processo de aprendizagem. Este trabalho possibilitou também, a melhora na escrita e no processo de pesquisa, além de ampliar os conhecimentos do uso das TIC e sobre Trigonometria.

Para dar continuidade a este trabalho, pode-se desenvolver *applets* e atividades para o estudo de outras funções trigonométricas como secante, cossecante, tangente e cotangente. Além disso, juntamente com os *applets* aqui desenvolvidos, pode-se dar ênfase à aplicação da Trigonometria, partindo de situações concretas e utilizando os *applets* para o estudo do modelo matemático.

Apesar do número pequeno de alunos (12 alunos ao todo participaram) no processo de validação das atividades e *applets*, foi possível vivenciar uma experiência significativa sobre o estudo de Trigonometria com o auxílio dos *applets*, como já exposto. Assim, espera-se que este trabalho mostre a importância da utilização das TIC, em especial o uso dos *applets*, no processo de ensino e aprendizagem de Trigonometria, bem como o de outros temas matemáticos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ÁVILA, G. Objetivos do Ensino da Matemática. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 27, p. 1-10, 1995.

BALDIN, Y. Y. Utilizações Diferenciadas de Recursos Computacionais no Ensino de Matemática. In CARVALHO, L. M.; GUIMARÃES, L. C. (Org). *História e Tecnologia no Ensino da Matemática*. Rio de Janeiro: IME: UERJ, p. 29-37, 2002.

BELFORT, E. Utilizando o Computador na Capacitação de Professores. In: CARVALHO, L. M.; GUIMARÃES, L.C. (Org.). *História e Tecnologia no Ensino da Matemática*. Rio de Janeiro: IME-UERJ, p. 39-50, 2002.

BORBA, M. de C.; PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática*. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. Revista por Uta C. Merzbach. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 2001.

BRASIL, MEC, SEMTEC *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio: Bases Legais*. Brasília, 1999.

BRAVIANO, R.; RODRIGUES, M. H. W. L. Geometria Dinâmica: Uma nova Geometria. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 49, p. 22-26, 2002.

CARMO, M. P. do; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. *Trigonometria e Números Complexos*. Rio de Janeiro: SBM, 1992.

CARVALHO, J. B. P. de. A história da Trigonometria. In: CARMO, M. P. do; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. *Trigonometria Números Complexos*. Rio de Janeiro: SBM, p.101-108, 1992.

COMASTRI, J. A.; TULER, J. C. *Topografia – Altimetria*. 3. ed. Viçosa: UFV, 2003.

CONNOR J. J O.; ROBERTSON E. F. *Indexes of Biographies*, 2005. Disponível em: <<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/>>. Acesso em 15/02/2009.



COSTA, N. M. L. da. *Função seno e cosseno: uma seqüência de ensino a partir dos contextos do "mundo experimental" e do computador*. Dissertação de Mestrado em Ensino da Matemática. São Paulo, SP. Pontifícia Universidade Católica, 1997.

D'AMBROSIO, U. *Etnomatemática – Elo entre as Tradições e a Modernidade*. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

DANTE, L. R. *Matemática, 2ª série (Ensino Médio)*. São Paulo: Ática, 2005.

DANTE, L. R. *Matemática, 1ª série (Ensino Médio)*. São Paulo: Ática, 2006.

DEITEL, H. M; DEITEL, P. J. *Java, como programar*. Tradução de Carlos Arthur Lang Lisboa. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2003.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. 3. ed. Campinas: UNICAMP, 2008.

FERNANDES, C. (org.) *Só Bibliografias*, 2002. Disponível em: <http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/>. Acesso em 15/02/2009.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, L. M. A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados. *Anais IV Congresso RIBIE, Brasília, 1998*. Disponível em: <<http://www.bibvirt.futuro.usp.br/content/download/3299/20193/file/aprendizagemmatematica.PDF>>. Acesso em: 07/11/ 2008.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D. M.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. de. *Matemática: Ciência e Aplicação, 1ª Série (Ensino Médio)*. São Paulo: Atual, 2004.

INEP. O que é o PISA. *Inep: Sala de imprensa*. 2007a. Disponível em: <[http://www.inep.gov.br/imprensa/noticias/internacional/news07\\_05.htm](http://www.inep.gov.br/imprensa/noticias/internacional/news07_05.htm)> Acesso em: 14/02/08.

INEP. *Tabela Resultados Internacionais*. 2007b. Disponível em <<http://www.inep.gov.br/internacional/pisa/Novo/>>. Acesso em: 05/02/08.

KAPUT, J. Technology and Mathematics Education, em Grows, D. (ed), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* , MacmillanPublishing Company, 1992.

LÉVY, P. *Cibercultura*. Tradução de Carlos Irineu da Costa. São Paulo: Editora 34, 1999.

LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E., MORGADO, A. C. *A Matemática do Ensino Médio*, v. 1. Rio de Janeiro: SBM, 2001a.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. *Temas e Problemas*. Rio de Janeiro: SBM, 2001b.

LINDEGGER, L. R. de M. *Construindo os conceitos básicos da trigonometria no triângulo retângulo: uma proposta a partir da manipulação de modelos*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. São Paulo, SP. Pontifícia Universidade Católica, 2000.

LITTO, F. M. *Vá com calma... mas vá!*, 1998. Disponível em <<http://www.aomestre.com.br/cyber/arquivo/ate2006/cyber6.htm>>. Acesso em: 17/03/08.

MARANHÃO, M. C. S. A. *Uma Engenharia Didática para a Aprendizagem de Concepções de Tempo*. Tese de Doutorado. São Paulo, SP. Pontifícia Universidade Católica, 1996.

MARTINS, V. L. de O. F. *Atribuindo significado ao seno e cosseno, utilizando o software Cabri-Géomètre*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. São Paulo, SP. Pontifícia Universidade Católica, 2003.

MATOS, J. F. L. *Matemática, Educação e Desenvolvimento Social – Questionando Mitos que Sustentam Opções Atuais em Desenvolvimento Curricular em Matemática*. In: *Encontro Internacional em homenagem a Paulo Abrantes - Educação Matemática: caminhos e encruzilhadas*, 2005, Lisboa. Comunicações. 2005. Disponível em: <<http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jfmatos/comunicacoes.html>>. Acesso em: 02/01/08.

MÁXIMO, A.; ALVARENGA, B. *Física de olho no mundo do trabalho (Ensino Médio)*. Volume único. São Paulo: Scipione, 2004.

MELLO, J. L. P. *Matemática construção e significado* (Ensino Médio). Volume Único. São Paulo: Moderna, 2005.

MUNHOZ, S. A. *Tecnologias Aplicadas à Educação: Educação e Tecnologia na Sociedade da Informação*. Curitiba: IBPEX, 2002.

NUNES, A. *Resolução de problemas: uma abordagem atual e dinâmica no ensino da Matemática*. Dissertação de Mestrado em Educação Agrícola. Seropédica. RJ. Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, 2007.

NVU. s.d. Disponível em <<http://nvudev.com/index.php>>. Acesso em 09/01/09.

PAIS, L. C. *Transposição Didática*; In Machado, S. D. A. et al. *Educação Matemática*; EDUC; São Paulo, 1999.

PAIVA, M. *Matemática (Ensino Médio)*. Volume único. São Paulo: Moderna, 2005.

PONTE, J. P., OLIVEIRA, H., VARANDAS, J. M. As novas tecnologias na formação inicial de professores: Análise de uma experiência. *J. P. da Ponte: Artigos e Trabalhos em Português*. 2002. Disponível em: <[http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos\\_pt.htm](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos_pt.htm)>. Acesso em: 02/01/08.

PONTE, J. P., OLIVEIRA, H., VARANDAS, J. M. O Contributo das Tecnologias de Informação e Comunicação para o Desenvolvimento do Conhecimento e da Identidade Profissional. *J. P. da Ponte: Artigos e Trabalhos em Português*. 2003. Disponível em: <[http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos\\_pt.htm](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos_pt.htm)>. Acesso em: 02/01/08.

ROCHA, I. C. B. da. Ensino de Matemática: Formação para a Exclusão ou para a Cidadania? In: *Educação Matemática em Revista*, n. 9/10, p. 22-31. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2001.

SANTOS, A. R. dos; PAIXÃO, V. Mathlets Como Ambientes Corporificados no Ensino De Matemática. In: *IV Colóquio de História e Tecnologia no Ensino da Matemática, 2008, Rio de Janeiro. Anais eletrônicos ...* Rio de Janeiro: UFRJ, 2008. Comunicação Científica. Disponível em: <<http://www.limc.ufrj.br/htem4/artigos.htm>>. Acesso em: 29/10/2008

SANTOS, A. R. dos; PAIXÃO, V.; PEREIRA, V. M. C. *Construindo Nosso Próprio Mathlet*. In: *IX Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007, Belo Horizonte*. Minicursos. 2007. Disponível em:

<[www.sbem.com.br/files/ix\\_enem/Minicurso/Trabalhos/MC34908293791T.doc](http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Minicurso/Trabalhos/MC34908293791T.doc)>.

Acesso em: 29/10/2008.

SMOLE, M. S.; DINIZ, M. I. *Matemática, 1ª série (Ensino Médio)*. 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2005.

VALENTE, J. A. Mudanças na Sociedade, Mudanças na Educação: o Fazer e o Compreender. In: Valente, J. A. (Org.) *O Computador na Sociedade do Conhecimento*. Campinas, SP: UNICAMP/NIED p. 29-48, 1999.

VYGOTSKY, L. S. *A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores*. 7.ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

YOUSSEF, A. N.; SOARES, E.; FERNADEZ, V. P. *Matemática de olho no mundo do trabalho (Ensino Médio)*. Volume único. São Paulo: Scipione, 2005.