INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA FLUMINENSE
Campus Campos-Centro

Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

Ministério da Educação

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

CARINA DA SILVA GOMES
KARINE GOMES BARRETO

ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA ESPACIAL: USO DE MATERIAL MANIPULÁVEL E *SOFTWARE* NO DESENVOLVIMENTO DA HABILIDADE DE VISUALIZAÇÃO ESPACIAL

CAMPOS DOS GOYTACAZES – RJ
2010

CARINA DA SILVA GOMES
KARINE GOMES BARRETO

ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA ESPACIAL: USO DE MATERIAL MANIPULÁVEL E *SOFTWARE* NO DESENVOLVIMENTO DA HABILIDADE DE VISUALIZAÇÃO ESPACIAL

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, como requisito parcial à conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Profª. Ms. Carla Antunes Fontes

CAMPOS DOS GOYTACAZES – RJ
2010

Dados de Catalogação na Publicação (CIP)

G633e Gomes, Carina da Silva.
Ensino e aprendizagem de geometria espacial: uso de material manipulável e software no desenvolvimento da habilidade de visualização espacial / Carina da Silva Gomes , Karine Gomes Barreto. – Campos dos Goytacazes, RJ : [s.n.], 2010.
134 f. ; il.

Orientadora: Carla Antunes Fontes.
Monografia (Licenciatura em Matemática). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense. Campos. Campos dos Goytacazes, RJ, 2010.
Bibliografia: f. 66 - 72.

1. Geometria – Estudo e ensino. 2. Matemática – Estudo e ensino. I. Barreto, Karine Gomes. II. Fontes, Carla Antunes, orient. III. Título.

CDD – 516.07

CARINA DA SILVA GOMES

KARINE GOMES BARRETO

ENSINO E APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA ESPACIAL:

USO DE MATERIAL MANIPULÁVEL E *SOFTWARE*

NO DESENVOLVIMENTO DA HABILIDADE DE VISUALIZAÇÃO ESPACIAL

Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, como requisito parcial à conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática.

Aprovada em 05 de novembro de 2010.

Banca Avaliadora:

Profª Carla Antunes Fontes (orientadora)
Mestre em Matemática / UFRJ
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos – Centro

Profª Ana Mary Fonseca Barreto de Almeida
Especialista em Matemática Superior / USS
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos – Centro

Profº Salvador Tavares
Mestre em Educação Matemática / USU
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense Campus Campos – Centro

AGRADECIMENTOS

A Deus, antes de tudo, pelo dom da vida e pela possibilidade de crescer a cada dia, nos guiando em todos os passos desta caminhada.

Aos nossos pais, Nilton, Maria Helena e Carmem Lucia, que com amor e carinho tiveram papel fundamental em nossa formação e sem os quais não teríamos concluído mais esta etapa.

À nossa orientadora Carla Antunes Fontes, pelo exemplo de competência, pela dedicação na orientação deste trabalho e por suas contribuições para o nosso crescimento intelectual e profissional.

Aos nossos companheiros, pelo amor, força e incentivo durante toda a trajetória que percorremos juntos.

Aos componentes da banca avaliadora, Profª Especialista Ana Mary Fonseca Barreto de Almeida e Prof. Mestre Salvador Tavares, pela atenção e tempo dispensados, tanto na leitura criteriosa do texto, como na análise da apresentação do trabalho monográfico.

Aos nossos amigos, pelo apoio e amizade.

Aos participantes do teste exploratório, aos alunos presentes na validação das atividades e aos professores entrevistados, por contribuírem para a realização da pesquisa.

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense, Campus Campos - Centro, pelos recursos técnicos e humanos disponibilizados ao longo de nosso percurso.

A todos que, direta ou indiretamente, possibilitaram a elaboração deste trabalho.

A tarefa essencial do professor é despertar
a alegria de trabalhar e de conhecer.

Albert Einstein

A todos de nossas famílias.

RESUMO

Neste trabalho são propostas atividades que auxiliam no desenvolvimento da habilidade de visualização espacial, facilitando assim o ensino e a aprendizagem de Geometria Espacial. Para este fim são utilizados materiais concretos e o *software Wingeom*. Segundo Kaleff (2003), a habilidade de visualização espacial é imprescindível para o entendimento dos conceitos de Geometria Espacial, tanto para o aluno quanto para o professor. Por outro lado, Lima (2001) afirma que, nos livros didáticos, a Geometria Espacial é tratada de modo insatisfatório, sendo o estudo de áreas e volumes predominantemente aritmético. Há, então, uma lacuna entre a habilidade de visualização espacial e a construção de conceitos em Geometria Espacial, que precisa ser exposta e preenchida. Não ambicionamos preenchê-la. Nosso objetivo é expô-la. Importante não só na vida acadêmica como profissional de artistas, engenheiros, arquitetos, médicos, *designers* e outros, mas colocada em segundo plano durante décadas, a habilidade de visualização espacial ressurge aos poucos como área de interesse da Educação Matemática no Brasil. Esta redescoberta com certeza trará bons frutos para quem estuda ou trabalha com este aspecto da cognição humana, principalmente para os que acreditam “não ter visão espacial”. Durante muito tempo considerada um “dom”, hoje é comprovadamente uma habilidade, e como tal, pode ser desenvolvida através de exercícios adequados. Este desenvolvimento passa por várias etapas, que não serão vencidas de uma só vez. Nossa análise de resultados é primordialmente atitudinal e qualitativa, como deve ocorrer em estudos de caso (PONTE, 2006). Com este trabalho, pretendemos chamar atenção para o tema, tão importante e ainda tão pouco explorado, da possibilidade de desenvolvimento da habilidade de visualização espacial. Acreditamos contribuir positivamente para o ensino e aprendizagem de Geometria Espacial, pois o aluno saberá que tem potencial, e o professor terá meios para incentivar e facilitar seu desenvolvimento. Da mesma forma, o docente com dificuldade de visualização espacial conseguirá, por meio de treinamento adequado, superar este obstáculo e, mais seguro de si, orientar melhor os alunos na construção de seu próprio conhecimento.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática. Geometria Espacial. Habilidade de Visualização Espacial. Educação e Tecnologia. Material Concreto.

ABSTRACT

SPATIAL GEOMETRY'S TEACHING AND LEARNING: THE USE OF HANDLING MATERIAL AND SOFTWARE IN DEVELOPMENT OF SPATIAL ABILITY

In this work, we propose activities that aid the development of spatial ability, in order to make teaching and learning of Spatial Geometry easier. To this end, software Wingeom and concrete materials are used. According to Kaleff (2003), spatial ability is vital to the comprehension of Spatial Geometry's concepts, not only to the student, but to the teacher as well. On the other hand, Lima (2001) sustains that, in text books, Spatial Geometry is poorly treated, their study of areas and volumes being mainly arithmetic. Therefore, there's a gap between spatial ability and construction of Spatial Geometry's concepts that needs to be exposed and fulfilled. We don't intend to fulfill it. Our goal is to expose it. Not only academically but also professionally important to artists, engineers, architects, doctors, designers and others, but put aside for decades, spatial visualization ability little by little reappears as an area of interest to Mathematics Education in Brazil. This rediscovery will certainly bring good news to everyone that studies or works this aspect of human cognition, especially to those who believe they "don't have spatial vision". For a long time considered a "gift", it has been proved to be an ability, so it can be developed through adequate exercises. This development consists of several stages that won't be all reached at once. Our analysis' results are mainly attitudinal and qualitative, as it should be in case studies (PONTE, 2006). With this work, we intend to draw attention to the fact, so important and yet so poorly explored, that spatial ability development is possible. We believe to be giving a positive contribution to teaching and learning of Spatial Geometry, because the student will be aware of his potential, and the teacher will have the means to encourage and aid his development. At the same time, teachers with spatial ability difficulties will be able, with adequate training, to overcome this obstacle and, more confident of themselves, better guide the students in the construction of their own knowledge.

KEYWORDS: Mathematics Education. Spatial Geometry. Spatial Ability. Education and Technology. Concrete Material.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INÍCIO DA PESQUISA E REALINHAMENTO DOS OBJETIVOS

Ao iniciarmos este trabalho, nosso objetivo principal era investigar se o uso integrado de dois tipos distintos de material de apoio — *software* e material manipulável, concreto — poderia facilitar o processo de ensino e aprendizagem da Geometria Espacial.

Outra questão proposta, que até então se mantinha em segundo plano, era se a utilização de tais materiais poderia incentivar o aluno com dificuldade de visualização tridimensional a estudar Geometria Espacial.

Já no teste exploratório, percebemos que os participantes optavam por utilizar apenas um dos materiais de apoio, dando preferência ao *software*. Só um participante utilizou ambos, e em apenas uma das questões propostas. Tais observações indicavam uma resposta negativa à nossa questão principal, o que nos deixou bastante desapontadas.

Ao mesmo tempo, pesquisando sobre as dificuldades de aprendizagem em Geometria Espacial, observamos que pouca ou nenhuma atenção era dada, nos livros didáticos, ao desenvolvimento da habilidade de visualização espacial. De acordo com o exame de textos do qual Elon Lages Lima foi o editor (LIMA, 2001), a maioria dos livros didáticos do Ensino Médio sequer incentiva o uso de *software* ou de material concreto no ensino de Geometria Espacial. No entanto, conforme atestam diversos autores, entre eles Ana Maria Kaleff (KALEFF, 2003), a habilidade de visualização espacial é condição *sine qua non* para a aprendizagem de Geometria Espacial.

Além disso, em nossa busca de ideias para as atividades, já havíamos notado a presença, tanto no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) como em provas de vestibulares, da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) e da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), de questões de Geometria Espacial cujo pré-requisito era tão-somente a habilidade de visualização espacial bem desenvolvida. Isto significava que o aluno do Ensino Médio, cujo professor se ativesse apenas ao livro didático, não estaria preparado para resolver corretamente tais questões. Um novo objetivo apresentou-se diante de nós: expor esta situação.

Aprofundando um pouco mais nossa pesquisa, descobrimos que a habilidade de visualização espacial é um aspecto cognitivo de grande importância, estudado em vários países desde as décadas de 1920 ou 30. Há inclusive testes específicos para avaliá-la, muito utilizados em processos seletivos nos Estados Unidos e na Europa. No Brasil, as primeiras pesquisas sobre o tema datam da década de 1990, não obstante uma brasileira e um espanhol sejam os autores de um dos testes supracitados. Cabe também observar que há um artigo escrito pelo saudoso Geraldo Ávila, publicado em 1983 na Revista do Professor de Matemática (RPM) de número 3, "Geometria e Imaginação" (ÁVILA, 1983), sobre o qual falaremos no Capítulo 4.

Diante dos fatos expostos, realinhamos então os objetivos. As questões iniciais tornaram-se secundárias, porque durante a busca por referencial teórico, nos deparamos com resultados importantes, cuja divulgação auxiliaria em muito o ensino e a aprendizagem de Geometria Espacial (nossa intenção primordial). Um deles é o fato de que a habilidade de visualização espacial pode ser desenvolvida — não é um "dom", como acredita a maioria das pessoas. O outro, já citado, é a lacuna existente entre a importância da habilidade de visualização espacial no ensino e aprendizagem de Geometria Espacial e a pouca ou nenhuma atenção a ela dedicada nos livros didáticos de Ensino Médio. Cabe ressaltar que as questões iniciais foram reformuladas, continuando a fazer parte de nossa investigação.

As atividades elaboradas por nós, revistas após o Teste Exploratório, adquiriram outras finalidades além das inicialmente previstas. Durante sua aplicação, enfatizaríamos que a habilidade de visualização espacial não é um "dom", podendo ser desenvolvida por meio de exercícios adequados. Ao mesmo tempo, verificaríamos se o tipo de questão constante das atividades era familiar aos alunos. Além disso, investigaríamos se o uso de *software* ou de material concreto auxiliaria no desenvolvimento da habilidade de visualização espacial, incentivando, assim, o estudo de Geometria Espacial, principalmente pelo aluno com dificuldade de visualizar figuras tridimensionais.

Tínhamos consciência de que talvez não alcançássemos todos os objetivos. Porém, segundo João Pedro da Ponte (PONTE, 2006), um estudo de caso não é completo em si mesmo, mas serve como um disparador de pesquisas mais abrangentes. Se isto acontecer, teremos ido além de nossas metas.

2. USO DE MATERIAL DE APOIO NO ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o Ensino Fundamental (PCN) de 1ª a 4ª séries (BRASIL, 1997), bem como de 5ª a 8ª séries (BRASIL, 1998) trazem, nas orientações didáticas do bloco “Espaço e Forma”, recomendações sobre o uso tanto de material concreto quanto de *software*.

> Um trabalho constante de observação e construção das formas é que levará o aluno a perceber semelhanças e diferenças entre elas. Para tanto, diferentes atividades podem ser realizadas: compor e decompor figuras, perceber a simetria como característica de algumas figuras e não de outras, etc.
> Dessa exploração resultará o reconhecimento de figuras tridimensionais (como cubos, paralelepípedos, esferas, cilindros, cones, pirâmides, etc.) e bidimensionais (como quadrados, retângulos, círculos, triângulos, pentágonos, etc.) e a identificação de suas propriedades. [...]
> O uso de alguns softwares disponíveis também é uma forma de levar o aluno a raciocinar geometricamente. (BRASIL, 1997, p. 82-83)

> Outro aspecto importante refere-se ao uso de recursos como as maquetes tridimensionais, e não apenas as representações desenhadas. [...]
> As atividades que envolvem as transformações de uma figura no plano devem ser privilegiadas nesses ciclos, porque permitem o desenvolvimento de conceitos geométricos de uma forma significativa, além de obter um caráter mais “dinâmico” para este estudo. Atualmente, existem softwares que exploram problemas envolvendo transformações das figuras. (BRASIL, 1998, p. 123-124)

As Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, publicadas pela Câmara de Educação Básica do Conselho Nacional de Educação (CEB) em 1998, no parecer 15/98, enfatizavam o uso da tecnologia no Ensino Médio. (BRASIL, 1998a)

Nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006), o capítulo sobre conhecimentos de Matemática traz uma seção intitulada “O uso de tecnologia” (BRASIL, 2006, p. 87-90). Além de mencionar a utilização de calculadoras e planilhas eletrônicas, detém-se na análise de *softwares* específicos para uso didático, (“programas de expressão”) que favorecem o “pensar matematicamente”. São explicitamente citados os atributos dos *softwares* de Geometria Dinâmica.

> Para trabalhar com poliedros, existem também programas interessantes. Neles, há poliedros em movimento, sob diferentes vistas, acompanhados de planificação. [...]

> No uso de tecnologia para o aprendizado da Matemática, a escolha de um programa torna-se um fator que determina a qualidade do aprendizado. É com a utilização de programas que oferecem recursos para a exploração de conceitos e ideias matemáticas que está se fazendo um interessante uso de tecnologia para o ensino da Matemática. (BRASIL, 2006, p. 89-90)

Nos livros de Ensino Médio, pelo menos até o ano de 2001, pouco ou nada havia sobre construção de sólidos ou uso de tecnologia. Com a colaboração de diversos autores, Elon Lages Lima editou um trabalho de análise de 36 volumes que compunham 12 coleções de livros didáticos de Matemática, utilizados nos três anos do Ensino Médio das escolas brasileiras.

> Ao concluirmos este trabalho, temos plena consciência de que não examinamos todos os livros adotados em nosso Ensino Médio. Por outro lado, estamos certos de que as coleções aqui analisadas são adotadas pela absoluta maioria dos professores. Por isso não hesitamos em considerar a amostra da qual dispomos como representativa o suficiente para permitir, a partir dela, falar genericamente, sem mencionarmos as exceções de praxe, caso existam. (LIMA, 2001, p. 462)

De acordo com a análise feita, a maioria dos livros não recomenda ao professor o uso de recursos tecnológicos ou a construção de material no ensino da Geometria Espacial.

De todos os livros analisados, apenas um traz alguma recordação sobre construções com régua e compasso. Os outros não citam construção de sólidos, muito menos o uso da tecnologia, deixando claro que é o professor o responsável por buscar tais recursos. Aquele que segue o livro, provavelmente não fará uso de recurso algum.

> Muitas vezes (quase sempre) o livro didático é onde o professor aprende aquilo que vai transmitir a seus alunos, pois em geral não estudou na faculdade (se é que frequentou alguma) um número considerável de assuntos que fazem parte do currículo escolar. (LIMA, 2001, p. 462)

Entretanto, a parte do livro dedicada à Geometria, segundo o autor, se ressente da falta de um tratamento mais cuidadoso da abordagem da Geometria.

> A Geometria é tratada de modo insatisfatório no livro genérico. Autores mostram muito pouca familiaridade com a Geometria e com o método dedutivo em geral. Há uma grande pressa de passar do

> desordenado tratamento da geometria da posição para o estudo de áreas e volumes, predominantemente aritmético.
> O volume de um sólido nunca é definido, nem sequer intuitivamente. A fórmula do volume do bloco retangular é “deduzida” a partir de um exemplo particular onde as arestas têm medidas inteiras. As demais baseiam-se em argumentos mal explicados e omissões de pontos essenciais. O Teorema de Euler para poliedros é demonstrado incorretamente. Incorreta também é a definição de poliedro. (LIMA, 2001, p. 466)

Apesar da ausência no livro didático, o uso de materiais manipuláveis ou *softwares* como recursos facilitadores do ensino e aprendizagem de Geometria Espacial tem sido assunto de pesquisas em Educação Matemática pelo menos desde a década de 1980. José Antonio Andrade e Adair Nacarato (2004), após analisar 363 trabalhos sobre Geometria publicados nos sete primeiros Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEM), realizados de 1987 a 2001, chegaram à conclusão de que havia duas tendências didático-pedagógicas no ensino da Geometria no Brasil: a “Geometria Experimental”, que envolvia, entre outros recursos, a utilização de material concreto, e a “Geometria em Ambientes Computacionais”, que incluía o trabalho com *softwares* de Geometria Dinâmica.

> A análise dessas duas categorias revelou uma característica comum, que pode ser apontada como uma tendência emergente, ou seja, o ensino da Geometria vem se pautando em abordagens mais exploratórias, em que os aspectos experimental e teórico do pensamento geométrico são abordados, quer na utilização de diferentes mídias, quer em contextos de aulas mais dialogadas com produção/negociação de significados, quer na utilização de softwares de geometria dinâmica. (ANDRADE, 2004, p. 1-2)

Salvador Tavares, em sua dissertação de mestrado (TAVARES, 1998), apresentou um trabalho diferenciado, que levava o aluno a deduzir a fórmula do volume da pirâmide. Um prisma triangular de sabão era cortado de modo a obter três tetraedros específicos. Tais tetraedros eram imersos em água, um por vez, e seu volume aproximado era encontrado, pelo princípio de Archimedes. A partir da observação de que os volumes eram aproximadamente iguais, foi realizado um trabalho de desenvolvimento das habilidades necessárias para que os alunos construíssem o conceito de volume de uma pirâmide, chegando inclusive à sua fórmula algébrica.

> Durante este trabalho o pesquisador pretendeu verificar as contribuições da visualização na construção do conceito de volume de uma pirâmide, e, especialmente, que a metodologia usada pode ser utilizada para construir outros conceitos na Geometria Espacial. Também se conclui que a concretização, pela manipulação de objetos, tem sido um instrumento poderoso na construção dos conhecimentos matemáticos em todos os níveis assim como, a importância da visualização, da percepção, da sistematização e da representação na construção de um conceito geométrico. (TAVARES, 1998, p. vii-viii.)

No mesmo ano de 1998, Ana Maria Kaleff lançou seu livro “Vendo e entendendo Poliedros: do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças e outros materiais concretos”, que já está em sua segunda edição (KALEFF, 2003) e até hoje é considerado referência quando se trata de atividades que utilizem material concreto no ensino de Geometria Espacial. A leitura deste livro foi fundamental para a elaboração da monografia, e nele colhemos ideias e questões.

Provando que o tema está longe de ser esgotado, onze anos depois a professora Vangiza Vidaletti obteve o grau de Mestre em Ciências Exatas defendendo a dissertação “Ensino e aprendizado da geometria espacial a partir da manipulação de sólidos” (VIDALETTI, 2009). Respaldada na teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel, propôs uma atividade na qual os alunos elaboraram e construíram novas embalagens para produtos comercializados, “mantendo a área ou o volume da embalagem original”. Os produtos foram escolhidos pelos alunos e as embalagens criadas tinham o formato de prismas, pirâmides, cilindros ou cones. Durante a construção, foram feitos cálculos do volume e da quantidade de material gasto em cada embalagem, levantando questionamentos sobre aproveitamento e desperdício em relação à original.

> Conclui-se que é possível minimizar as dificuldades dos discentes em relação à aprendizagem da geometria espacial, através da manipulação de sólidos, uma vez que dessa forma os alunos percebem a relação entre o conteúdo trabalhado e os problemas do cotidiano, motivando-se e reconhecendo a importância do que já aprenderam com os conteúdos trabalhados no momento. (VIDALETTI, 2009, p. 6)

As dificuldades dos alunos na aprendizagem da Geometria Espacial persistem, segundo Acylena Costa (COSTA, 2009), em parte porque o ensino não se dá de forma satisfatória.

> Hoffer (1981) aponta as principais deficiências relacionadas à geometria como a "Ausência de trabalho com a Geometria de posição" e o "Desenho Geométrico, Ausência de Representação Bi e Tridimensional, entre outras". Recomendados para solucionar tais deficiências, trabalhos que desenvolvam o raciocínio, a capacidade de abstração, resolução de problemas práticos do quotidiano. Como por exemplo, o uso de softwares para representação dos sólidos e percepção das propriedades existente neles; o uso de materiais concretos, propondo a manipulação direta do aluno na construção dos sólidos. (COSTA, 2009, p. 10)

Vincenzo Bongiovanni e Ana Paula Jahn acreditam que o uso de *softwares* de geometria dinâmica, em especial o *Cabri 3D*, pode minimizar tais dificuldades. Parece haver boas razões para isso, a julgar pela pesquisa citada em seu artigo "Explorações em Geometria Espacial com o Software *Cabri 3D*", apresentado em 2008 no IV Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática (BONGIOVANNI, 2008).

> Pesquisas realizadas ao longo de seis anos pelos educadores espanhóis Ildefonso Mazas e José Maria Arias, que incluem 400 professores e 15000 alunos, atestam que o uso de um software de geometria dinâmica provoca uma melhora significativa no rendimento dos alunos em Geometria. (BONGIOVANNI, 2008, p. 1)

A metodologia adotada e outras informações sobre a pesquisa supracitada podem ser encontradas no artigo "Uso de las Tecnologías de La Información y la Comunicación para la ESO y los Bachilleratos", de José María Arias Cabezas e Ildefonso Maza Sáez (CABEZAS, 2006). Sua leitura torna evidente a seriedade dos profissionais, levando-nos a crer que os resultados são expressivos e confiáveis.

Quanto aos *softwares* de geometria dinâmica, em 1996 Maria Alice Gravina já descrevia suas características e discorria acerca dos benefícios de sua utilização.

> Vamos descrever os programas construídos dentro de princípios de "geometria dinâmica". [...] São ferramentas de construção: desenhos de objetos e configurações geométricas são feitos a partir das propriedades que os definem. Através de deslocamentos aplicados aos elementos que compõe o desenho, este se transforma, mantendo as relações geométricas que caracterizam a situação. Assim, para um dado objeto ou propriedade, temos associada uma coleção de "desenhos em movimento", e os invariantes que aí aparecem correspondem as propriedades geométricas intrínsecas ao problema. E este é o recurso didático importante oferecido: a variedade de desenhos estabelece harmonia entre os aspectos conceituais e figurais; configurações geométricas clássicas passam a ter multiplicidade de representações; propriedades geométricas são

> descobertas a partir dos invariantes no movimento. (GRAVINA, 1996, p. 6)
> [...] A partir de nossa experiência e de pesquisas publicadas podemos dizer que os programas de criação de micro-mundos de Geometria, como Cabri-Géomètre e Geoplan, constituem ferramentas poderosas na superação dos obstáculos inerentes ao aprendizado. Nestes ambientes conceitos geométricos são construídos com equilíbrio conceitual e figural; a habilidade em perceber representações diferentes de uma mesma configuração se desenvolve; controle sobre configurações geométricas levam a descoberta de propriedades novas e interessantes. Quanto às atitudes dos alunos frente ao processo de aprender: experimentam; criam estratégias; fazem conjeturas; argumentam e deduzem propriedades matemáticas. A partir de manipulação concreta, "o desenho em movimento", passam para manipulação abstrata atingindo níveis mentais superiores da dedução e rigor, e desta forma entendem a natureza do raciocínio matemático. (GRAVINA, 1996, p. 13)

Com o passar do tempo e o avanço das pesquisas, outros *softwares* têm surgido, e os professores atuantes ou em formação precisam aprender a lidar com as novas Tecnologias de Informática e Comunicação (TIC). Em 2005, Adriana Richit já externava esta preocupação em sua dissertação de mestrado.

> Outrossim, consideramos que este estudo aponta perspectivas para a implementação de mudanças no contexto educacional, em consequência das reflexões em torno do processo de formação profissional docente, o qual deve estar em consonância com as transformações da sociedade contemporânea. Também, relevamos a necessidade de haver uma reestruturação nos currículos das licenciaturas, no intuito de se promover, simultaneamente, a construção de saberes pertinentes à área específica, conhecimentos pedagógicos do exercício da profissão docente e saberes de uso pedagógico das tecnologias informáticas. (RICHIT, 2005, p. 9)

Com base nas referências citadas ao longo deste capítulo, podemos concluir que tanto o uso de material concreto quanto o de *software* pode facilitar o processo de ensino e aprendizagem de Geometria Espacial. Para que isto ocorra, porém, é necessário que os docentes estejam a par das evoluções tecnológicas e sejam capacitados para aplicá-las de forma eficaz.

3. HABILIDADE ESPACIAL x APTIDÃO ESPACIAL

Uma pergunta que pode surgir após a leitura do Capítulo 2 é: porque há tanta dificuldade de aprendizagem em Geometria Espacial? O cerne da questão está na *habilidade de visualização espacial*. Antes de abordar este tema, porém, precisamos fazer uma distinção muito importante, entre *habilidade espacial* e *aptidão espacial*.

De acordo com Sheryl Sorby (SORBY, 1999), pesquisadora americana, a aptidão espacial é definida como a capacidade inata de visualizar que possuímos antes de qualquer treinamento, isto é, nascemos com aptidão. Já as habilidades espaciais são aprendidas ou adquiridas através de treinamento.

A importância de esclarecer a nomenclatura por nós adotada reside no fato de que ainda há, entre os pesquisadores da área de psicologia cognitiva, vários termos (principalmente em inglês) que ora são considerados sinônimos, ora não.

Segundo Temel Kösa (2008), pesquisador na Turquia, diversos termos têm sido utilizados em pesquisas, associados à habilidade espacial. Destreza espacial, percepção espacial, raciocínio espacial e sentido espacial são alguns deles, e todos descrevem processos similares. Embora haja um grande número de pesquisas sobre habilidade espacial, não há um consenso sobre a terminologia usada na área.

Voltando ao que diz Sheryl Sorby (SORBY, 1999), depois de algum tempo de escolaridade — em estudantes universitários, por exemplo — é impossível distinguir entre aptidão e habilidade espacial. Não há como saber se o estudante participou de algum tipo de atividade que desenvolvesse sua habilidade espacial, ou que tipo de atividade foi esta. Talvez por isso não haja tanta preocupação, entre os pesquisadores, em usar termos diferenciados: só é possível investigar, desenvolver ou medir a *habilidade* visual.

Para nós, habilidade pareceu um termo mais adequado porque, segundo Vadim Krutetskii, psicólogo russo citado por Érica Alves (2004, p. 5), “Habilidades são sempre resultado do desenvolvimento. São formadas e desenvolvidas em vida, durante atividade, instrução e treinamento.” (KRUTETSKII, 1976, p. 60)

Krutetskii não descarta a importância das diferenças individuais. Ao contrário, segundo ele, elas influenciam diretamente o nível de desenvolvimento da habilidade que cada um é capaz de alcançar. Porém, a aptidão não impede o desenvolvimento da habilidade. Não existem pessoas ineptas, incapazes de desenvolver suas habilidades: há, sim, diferentes níveis de desenvolvimento. Além disso, para ele o papel da escola é fundamental no pleno desenvolvimento das habilidades do indivíduo.

Segundo Claudia Segadas (SEGADAS, 2004), porém, a capacidade visual já foi considerada um “dom”, aptidão individual que não poderia ser desenvolvida. Isto retardou sua inclusão no currículo escolar como área a ser trabalhada. Em seu artigo “Explorando Atividades de Visualização e Representação de Figuras no Espaço” (SEGADAS, 2004), a autora relata uma pesquisa feita no ano de 1999 com 1763 alunos da 5ª série (atual 6º ano) do Ensino Fundamental da rede municipal do Rio de Janeiro, escolhidos por amostragem. Esta pesquisa revelou que os alunos não estavam sendo “devidamente preparados para “enxergar” *(sic)* figuras espaciais”. Mas, o que significa este “enxergar” ao qual a autora se refere? É o que veremos no próximo capítulo.

4. HABILIDADE DE VISUALIZAÇÃO ESPACIAL (HVE)

Há muitas pesquisas sobre habilidade de visualização espacial (HVE), e conforme comentamos no capítulo anterior, não existe um consenso sobre sua definição exata. Trabalharemos com os aspectos que já são considerados unanimidade atualmente, entre os pesquisadores da área de psicologia cognitiva.

4.1. VÁRIOS ASPECTOS, VÁRIAS CONCEPÇÕES

Em psicologia educacional, pesquisas sobre habilidades espaciais tiveram início nas décadas de 1920 ou 30, mas os primeiros estudos sobre o assunto em Educação Matemática, especificamente, datam da década de 1940 (KÖSA, 2008). No Brasil, pelo material que conseguimos obter, esta área começou a desenvolver-se a partir da década de 1980.

Conforme comentamos no capítulo 3, apesar do número crescente de publicações sobre o assunto, não há um consenso, entre os pesquisadores, sobre o significado do termo "habilidade de visualização espacial". Alguns consideram que "visualização espacial é a habilidade de manipular um objeto ou padrão na imaginação" (KAHLE, 1983), enquanto outros pensam que "visualização espacial envolve manipulações complexas, compostas por várias etapas, de uma informação apresentada espacialmente." (LINN, 1985) Outros ainda sustentam que "visualização espacial é a manipulação mental de informação espacial a fim de determinar como uma dada configuração espacial apareceria se partes dessa configuração fossem rotacionadas, dobradas, reposicionadas, ou transformadas de qualquer outra maneira" (SALTHOUSE, 1990).

Na tentativa de resolver alguns destes impasses, vários pesquisadores têm tentado categorizar as habilidades espaciais, considerando o fato de que não há uma definição única, que abranja todos os aspectos. Segundo Sorby (1999), Lindsay Anne Tartre (1990) estudou o trabalho desenvolvido no final da década de 1970 por Mark McGee (1979), e propôs um esquema de classificação de habilidades espaciais baseado nos processos mentais usados para realizar uma dada tarefa. Ele crê que existem duas categorias distintas de habilidades espaciais: Visualização Espacial e Orientação Espacial. A Visualização Espacial é aquela que nos permite mover mentalmente um objeto, enquanto na Orientação Espacial, movemos mentalmente nosso ponto de vista enquanto o objeto permanece fixo no espaço. A Visualização Espacial é ainda subdividida em duas categorias, Rotação Mental e Transformação Mental. A diferença entre as duas é que na Rotação Mental, todo o objeto é transformado pela rotação no espaço, enquanto na Transformação Mental, apenas parte do objeto sofre alguma transformação. Este esquema de classificação está ilustrado na Figura 1.

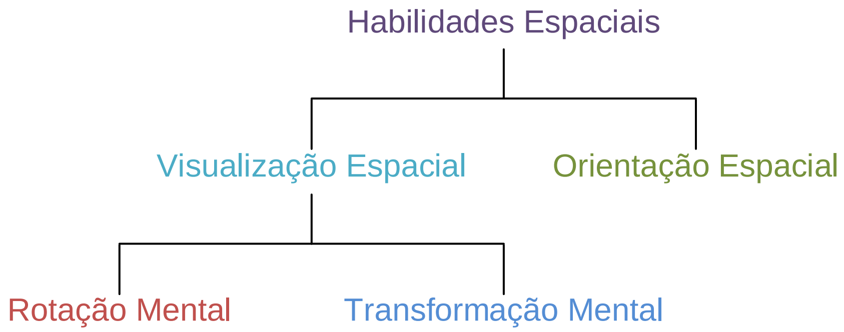


FIGURA 1 – Classificação das habilidades espaciais

Fonte: SORBY, 1999, p. 2.

Em nosso trabalho, adotamos a definição de McGee (1979) apud Sorby (1999): “A habilidade de visualização espacial refere-se à capacidade do indivíduo para mentalmente manipular, girar, torcer ou inverter um objeto representado graficamente.”

Nosso enfoque foi sobre a Visualização Espacial, destacando a Rotação Mental e fazendo um recorte da Transformação Mental, a fim de abordar dois aspectos particularmente importantes para a resolução de problemas em Geometria Espacial: o Corte e o Desdobramento. A Figura 2, abaixo, mostra um quadro que resume os três aspectos da habilidade de visualização espacial estudados por nós e suas especificidades.

ASPECTO	HABILIDADE ESPECÍFICA
Rotação	Girar mentalmente objetos tridimensionais representados graficamente.
Corte	Visualizar secções planas de figuras tridimensionais representadas graficamente.
Desdobramento	Planificar superfícies tridimensionais representadas graficamente, preservando as posições relativas de elementos das faces.

FIGURA 2 – Quadro-resumo dos aspectos estudados

4.2. IMPORTÂNCIA

Em seu artigo "A Plea for Visual Thinking" ("Um apelo a favor do pensamento visual"), Rudolf Arnheim (1986), psicólogo alemão, afirmava que a maioria dos psicólogos educacionais estava errada ao acreditar que existe uma dicotomia bem definida entre percepção (pensamento visual) e raciocínio (pensamento cognitivo). Ele sustentava que, desde Descartes, as habilidades de raciocínio vinham sendo consideradas mais importantes do que as habilidades perceptivas. Arnheim argumentava que percepção e raciocínio são ambos necessários ao processo de pensamento, e que colocar as habilidades de raciocínio acima das visuais é ignorar a forma como a mente de fato funciona. Na verdade, Arnheim era bastante radical em sua crença de que todo pensamento era essencialmente visual: "Thinking, then, is mostly visual thinking." (ARNHEIM, 1986, p. 143) ("O pensamento, então, é em geral visual.")

Radicalismos à parte, inúmeras pesquisas mostram a importância da habilidade de visualização espacial em diversas áreas do conhecimento.

De acordo com Wang (2007), a habilidade de visualização espacial é essencial em muitas profissões, especialmente na engenharia, arquitetura e medicina, que lidam com representações planas de corpos tridimensionais. "Bom desempenho em várias atividades nestes e outros campos mostra forte correlação com a habilidade de visualização espacial." (WANG, 2007, p. 2)

"Também não se pode esquecer sua eficiência para prever o rendimento em atividades específicas de tipo técnico (engenharia, projeto mecânico, pilotagem de aviões, etc.) e artístico (arquitetura, desenho gráfico e visual, etc.)." (ADÁNEZ, 2002, p. 2)

George Bodner (1997) provou a relação existente entre a habilidade de visualização espacial e o desempenho em disciplinas introdutórias de Química. (BODNER, 1997)

A habilidade de visualização espacial também é importante em Geografia, especialmente na área de Cartografia. Em sua tese de doutorado, Linda Issmael (2008) construiu

> [...] um procedimento metodológico para análise do nível de conhecimento espacial de um grupo de indivíduos, que possuem experiência em cartografia, utilizando métodos de representações do

> conhecimento baseadas no significado. Este procedimento pretende possibilitar um maior entendimento dos processos cognitivos relacionados à informação geográfica, além de fornecer mais uma alternativa na análise e avaliação do conhecimento espacial dos indivíduos [...]. (ISSMAEL, 2008, p. vii)

Essas e outras pesquisas revelam a importância da habilidade de visualização espacial em áreas que vão além das ciências exatas, como Medicina e Geografia.

Porém, ministrantes de disciplinas como Geometria Descritiva e Desenho Técnico nos cursos de Engenharia e afins, são os que mais vêm externando sua preocupação com a dificuldade de visualização espacial demonstrada pelos estudantes. (MAFALDA, 1999; SORBY, 1999; ADÁNEZ, 2002; VELASCO, 2002; SILVA, 2007)

Em nossa Instituição, o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense (IFF), a situação não é diferente. Diversos cursos de nível técnico ou superior são oferecidos nas áreas de Engenharia, Arquitetura, Matemática ou Informática. Entrevistamos alguns professores do Campus Campos-Centro que ministram Desenho técnico, Geometria, Construções Geométricas ou Geometria Descritiva. Todos afirmam que a visualização espacial é imprescindível em suas disciplinas, e compartilham a preocupação com as dificuldades demonstradas pelos alunos neste aspecto. A narrativa destas entrevistas constitui o **Apêndice A**.

No Ensino Médio, particularmente em Geometria Espacial, a habilidade de visualização espacial também é imprescindível para o ensino e a aprendizagem.

> Nas duas últimas décadas, diversas pesquisas em Educação Matemática apontaram para a importância de se incentivar nos meios educacionais o desenvolvimento pelo educando da habilidade de visualizar tanto objetos do mundo real, quanto, em nível mais avançado, conceitos, processos e fenômenos matemáticos. Para alguns pesquisadores, esta habilidade é tão ou mais importante do que a de calcular numericamente e a de simbolizar algebricamente. [...]
> Especificamente no contexto geométrico, a habilidade de visualização assume importância fundamental. Ao visualizar objetos geométricos, o individuo passa a ter controle sobre o conjunto das operações mentais básicas exigidas no trato da geometria. (KALEFF, 2003, p. 15-16)

Em 1983, Geraldo Ávila escreveu um artigo para o terceiro número da Revista do Professor de Matemática (RPM), intitulado “Geometria e Imaginação” (ÁVILA, 1983). Este artigo constitui o **Anexo A** deste trabalho. Nele, o autor narra um fato curioso ocorrido em 1981, nos Estados Unidos. Em um exame aplicado para mais de um milhão de estudantes, um deles resolveu corretamente uma questão de Geometria Espacial "precisamente porque soube usar sua imaginação, enquanto seus professores e colegas caíram em erro por que não se valeram da visualização." (ÁVILA, 1983, p. 1).

> A ideia de que a importância da Matemática reside no raciocínio lógico-dedutivo que ela emprega é uma noção bastante generalizada; e não apenas os leigos pensam assim, pois muitos professores de Matemática também acreditam ser o encadeamento lógico das demonstrações a essência do pensamento matemático.
> Isto, todavia, é uma visão parcial, já que o pensamento matemático vai muito além do raciocínio lógico-dedutivo. Em seus aspectos mais criativos ele repousa sobretudo na intuição, no raciocínio plausível e nos recursos heurísticos, na imaginação e na visualização geométrica. Muito frequentemente, o raciocínio demonstrativo apenas legitima o conhecimento já adquirido através desses outros recursos – os mais férteis da criatividade intelectual. (ÁVILA,1983,p.1)

Da leitura do trecho acima, podemos concluir que, à época, Geraldo Ávila já considerava a visualização espacial um aspecto importante do pensamento matemático, equiparando-a ao raciocínio lógico dedutivo.

Salvador Tavares também alertava, em 1998, para o fato de que a aprendizagem de Geometria exige o desenvolvimento de habilidades específicas.

> O tipo de raciocínio usado em geometria é diferente do que é utilizado em outras áreas do saber, cabendo notar que não se pode reduzir a aprendizagem desta parte da Matemática à mera aplicação de fórmulas ou a técnicas operatórias. O aprendizado de Geometria depende de desenvolver, entre outras, as habilidades de visualizar, de perceber e de representar, e envolve três tipos de processos cognitivos que estão intimamente ligados: o processo de visualização com respeito à representação espacial, o processo de construção pelo uso de ferramentas e o processo de raciocínio, o que é básico para ser demonstrado e comprovado. (TAVARES, 1998, p. 3)

Conforme já foi dito, em nossa pesquisa percebemos que a preocupação com o desenvolvimento da habilidade de visualização espacial partiu de cursos de Ensino Superior onde são ministradas disciplinas como Geometria Descritiva e Desenho Técnico. No Ensino Básico, tal preocupação é evidente tanto nos PCN de 1ª. a 4ª. séries (BRASIL, 1997), quanto nos PCN de 5ª. a 8ª. séries (BRASIL, 1998), e ainda nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006).

> O pensamento geométrico desenvolve-se inicialmente pela visualização: as crianças conhecem o espaço como algo que existe ao redor delas. As figuras geométricas são reconhecidas por suas formas, por sua aparência física, em sua totalidade, e não por suas partes ou propriedades. (BRASIL, 1997, p. 82)

> Outro aspecto importante refere-se ao uso de recursos como as maquetes tridimensionais, e não apenas as representações desenhadas. As maquetes, por exemplo, têm por objetivo, de um lado, contribuir para melhorar as imagens visuais dos alunos e, de outro, favorecer a construção de diferentes vistas do objeto pelas mudanças de posição do observador, frequentemente indispensáveis na resolução de problemas que envolvem a localização e movimentação no espaço. (BRASIL, 1998, p.123)

> O estudo de Geometria Espacial é de suma importância para o desenvolvimento da capacidade de abstração, resolução de problemas práticos do quotidiano, estimar e comparar resultados, reconhecer propriedades das formas geométricas. (BRASIL, 2006, p. 75-76)

A habilidade de visualização não é importante apenas para os alunos. Na apresentação de seu livro "Vendo e Entendendo Poliedros", Ana Maria Kaleff (KALEFF, 2003) relata os esforços feitos na última década para promover, entre licenciandos e professores de Matemática do Ensino Básico, o desenvolvimento da visualização geométrica. Comenta, ainda, alguns resultados de tais esforços:

> [...] Lamentavelmente, no decorrer dos cursos ministrados, observamos dificuldades apresentadas pelos cursistas no modo de visualizar e de interpretar informações gráficas, principalmente quando utilizadas para introduzir conceitos geométricos.
> Por exemplo, observamos que alguns professores apresentavam dificuldades em relacionar modelos concretos de sólidos geométricos com representações gráficas dos mesmos. (KALEFF, 2003, p.13)

Mais adiante, justificando a preferência dada, em seu livro, a métodos didáticos que privilegiem a visualização geométrica, afirma:

> Segundo van Hiele *(sic)*, a visualização, a análise e a organização informal (síntese) das propriedades geométricas relativas a um conceito geométrico são passos preparatórios para o entendimento da formalização do conceito. Como, por outro lado, grande parte dos livros-texto para o ensino da Matemática adotados nos cursos de formação de professores apresenta os conceitos geométricos da maneira formal, identificou-se no incentivo à visualização aquele fator que supriria uma deficiência no ensino convencional ao mesmo tempo em que complementaria, por antecipação, o quadro de um aprendizado de outra forma incompleto. (KALEFF, 2003, p.14)
> [...]

> Como em nossas escolas elementares e universidades, os aspectos ligados à visualização têm sido pouco enfatizados, buscamos, neste trabalho, contribuir para sua valorização, enfatizando a visualização geométrica, as representações gráficas e suas interpretações. (KALEFF, 2003, p.15)

Diante dos argumentos apresentados pelos professores-pesquisadores citados, não resta dúvida de que a habilidade de visualização espacial é importante, não só na vida acadêmica, como no dia a dia de diversos profissionais.

4.3. DESENVOLVIMENTO

Agora que já nos convencemos da importância da habilidade de visualização espacial, vejamos como ela pode ser desenvolvida.

De acordo com a teoria de Jean Piaget (1896-1980), renomado psicólogo e filósofo suíço, as habilidades espaciais passam por três etapas de desenvolvimento. (MOHLER, 2008) Na primeira etapa, habilidades topológicas bidimensionais são adquiridas, pela maioria das crianças de 3 a 5 anos de idade. Elas são capazes de reconhecer a proximidade de um objeto em relação a outros, sua ordem em um grupo, e se está isolado ou inserido em um contexto. Uma característica de crianças que adquiriram esta habilidade é a capacidade de resolver quebra–cabeças. Na segunda etapa do desenvolvimento, as crianças adquirem habilidade espacial projetiva. Esta segunda etapa envolve a visualização de objetos tridimensionais e a percepção de qual será sua aparência quando observados de diferentes pontos de vista, ou ainda como pareceriam se fossem rotacionados ou transformados espacialmente. A maioria das crianças alcança esta habilidade tipicamente até a adolescência, para objetos familiares, que fazem parte de seu dia a dia. Nesta etapa, se o objeto não é conhecido ou se um novo aspecto tal como movimento é incluído, muitos estudantes do Ensino Médio ou mesmo universitários têm dificuldade de visualização. Na terceira etapa do desenvolvimento, adquire-se a capacidade de visualizar os conceitos de área, volume, distância, translação, rotação e reflexão. Nesta etapa, a pessoa é capaz de combinar conceitos de medida com suas habilidades projetivas.

Há muitas teorias sobre porque alguns estudantes têm habilidades espaciais altamente desenvolvidas e outros aparentam ter dificuldades no desenvolvimento de tais habilidades. Contudo, há evidências suficientes para sugerir que esboçar objetos tridimensionais é um fator significativo no desenvolvimento destas habilidades (SORBY, 1999).

Vários pesquisadores têm realizado estudos para determinar que tipo de atividades pré universitárias foram realizadas por aqueles estudantes que possuem habilidades espaciais bem desenvolvidas. Segundo Sheryl Sorby (SORBY, 1999), embora cada estudo tenha chegado a resultados ligeiramente diferentes, aparentemente atividades que exigem coordenação motora fina óculo–manual (coordenação entre a informação “enviada” pelos olhos e a “resposta” dada pelas mãos) são aquelas que ajudam a desenvolver estas habilidades. Atividades consideradas desenvolvedoras de habilidades espaciais incluem:

- brincar com blocos de construção ou encaixe na infância;
- participar de aulas como Marcenaria, Desenho ou Mecânica, no Ensino Fundamental ou Médio;
- praticar jogos de computador tridimensionais;
- praticar alguns tipos de esportes.

Mesmo para uma pessoa que não tenha vivenciado tais atividades, de acordo com Velasco (2006) a visualização espacial é uma habilidade, podendo portanto ser desenvolvida através de exercícios específicos.

> Lean (1981) apud Eliot (1987, p.129) coloca que: "A evidência ... indica que estas variadas capacidades espaciais são treináveis se forem dadas as experiências apropriadas. Um treinamento rápido com materiais pictóricos é suficiente para induzir a percepção pictórica de profundidade; uma prática relativamente rápida é suficiente para desenvolver o desempenho nos itens dos testes espaciais; o ensino das variadas convenções espaciais e exercícios com diagramas ajuda a desenvolver o desempenho geométrico e uma suficientemente longa experiência parece melhorar o desempenho em testes espaciais similares aos dados nos cursos de desenho... Os estudos em treinamento mais bem sucedidos foram aqueles que foram feitos com crianças ..., enquanto os feitos com pessoas mais velhas tiveram menos sucesso."
> Apesar deste "insucesso" com as pessoas mais velhas, relatado por Lean, Sherman (1979) revela uma posição com a qual se concorda neste trabalho: "A pesquisa deve se direcionar para fatores que afetam o desenvolvimento das habilidades espaciais não só nos primeiros anos, mas também na idade adulta. Nós não consideramos que um analfabeto não possa aprender, também não podemos pensar que adultos não possam melhorar sua habilidade espacial. Métodos de ensino ... precisam ser encontrados e sua viabilidade e conveniência avaliada ..." Sherman (1979) apud Eliot (1987, p.130).
> Muitas outras pesquisas vêm tentando estabelecer que tipo de atividades podem ser propostas tanto na educação formal como na

> informal, em todas as faixas etárias, objetivando a eficiência no desenvolvimento das habilidades espaciais de maneira a subsidiar principalmente o planejamento do ensino, com a inclusão de variadas metodologias, processos de ensino-aprendizagem e atividades extras curriculares viáveis de serem executadas. (VELASCO, 2006, p.16-17)

Bongiovanni (2008) ressalta a contribuição de atividades feitas no *software Cabri 3D* para o desenvolvimento da habilidade de visualização espacial.

> Cabri 3D é um software de geometria dinâmica que, além de preservar as propriedades de objetos geométricos tridimensionais quando manipulados, permite também mudar o ponto de vista em relação ao objeto representado. Ele foi apresentado oficialmente no Congresso Internacional Cabriworld, realizado em Roma, em setembro de 2004. É um software de manipulação direta em três dimensões. Isto significa que o usuário age diretamente sobre a representação gráfica dos objetos que estão na tela ao invés de agir sobre a sua representação interna (o código).
> [...]
> Em relação ao ensino e aprendizagem da Geometria Espacial – desenvolvida tradicionalmente no ambiente papel e lápis – o desenho tem um importante papel, pois relaciona o espaço sensível com a teoria. Por outro lado, para os alunos em situação de resolução dos problemas, ele cria uma problemática ligada à representação gráfica dos objetos. Quando passamos do objeto espacial à sua representação em um suporte bidimensional (uma folha de papel, por exemplo), há necessariamente perda de informações. Neste caso, problemas podem surgir quando se trata de identificar, com base no desenho, as propriedades do objeto tridimensional. O questionamento de Rommevaux (1999, p. 14) – pode-se ensinar os alunos a verem no espaço? – ilustra essa questão de representação e da visualização de figuras 3D, uma vez que, segundo a autora, é necessário “enxergar” três dimensões em um desenho que tem apenas duas.
> Alguns trabalhos (Bkouche 1983; Bessot, 1983) mostram que essa dificuldade pode ser minimizada com uma aprendizagem das regras da representação ou técnicas de perspectiva. Outras pesquisas (Parsysz, 1989) sugerem que o ensino da Geometria Espacial deve integrar não somente o auxílio das representações dos objetos espaciais, mas também o uso de maquetes tridimensionais, qualquer que seja a idade dos alunos implicados.
> Trabalhos recentes investigam a influência de ambientes informáticos tanto na elaboração da representação gráfica (codificação) quanto na interpretação de uma representação gráfica (decodificação). Alguns resultados destacam o interesse particular de uma abordagem de investigação para a Geometria, apoiada em fases de experimentação, de simulação e de modelização. É nesse sentido que estamos valorizando a difusão e uso de um ambiente de geometria dinâmica para o espaço. (BONGIOVANNI, 2006, p. 1-2)

Ann Eisenberg (1999) combinou *software* e materiais manipuláveis para criar o *HyperGami* e o *JavaGami*, ambientes computacionais que envolvem as crianças em atividades ao mesmo tempo prazerosas e espacial e matematicamente “ricas”.

Modelos são criados no computador e depois executados em papel pelas crianças.

FIGURA 3 – Esculturas matemáticas em papel criadas no *HyperGami*

Fonte: EISENBERG, 1999, p. 5.

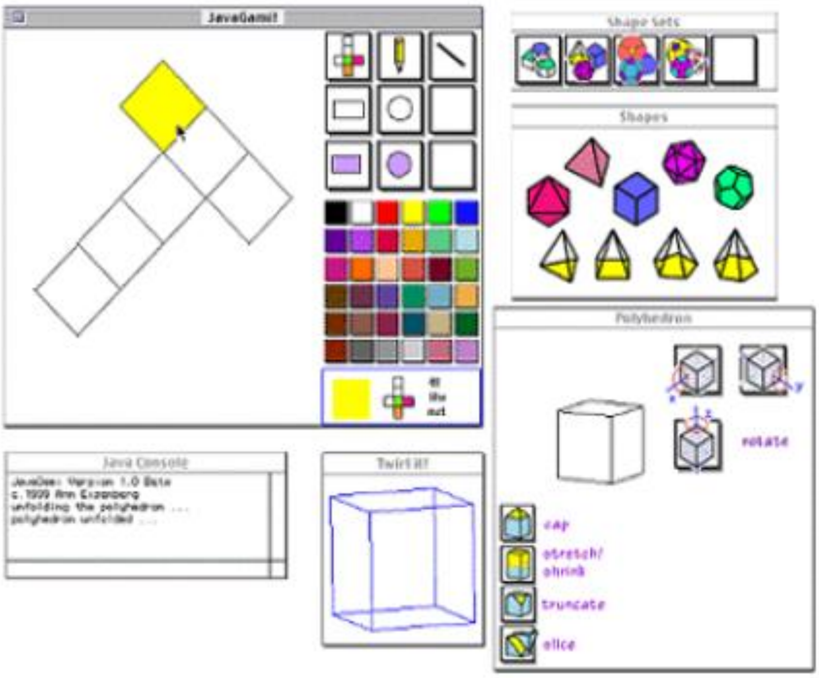


FIGURA 4 – Aspecto de várias interfaces do *JavaGami*

Fonte: EISENBERG, 1999, p. 6.

Segundo Eisenberg (1999), após trabalhar com estes ambientes durante algum tempo, as crianças demonstraram desenvolvimento significativo de sua habilidade de visualização espacial.

Temmel Kösa (2008) apresenta argumentos sustentando que não só o uso de material manipulável como também de *softwares* de geometria dinâmica contribui para o desenvolvimento da habilidade de visualização espacial.

Outros autores, como Sheryl Sorby (1999) defendem a importância de pelo menos esboçar figuras tridimensionais. Segundo ela, os *softwares* podem contribuir para o desenvolvimento da habilidade de visualização espacial, mas ainda é preciso "desenhar, desenhar, desenhar!" (SORBY, 1999, p. 9).

Em nossa pesquisa, percebemos a existência de pelo menos três tendências de pensamento (que podem aparecer simultaneamente ou totalmente dissociadas) relacionadas a atividades que desenvolvam a habilidade de visualização espacial, todas elas baseadas em resultados de pesquisas:

- exercitar o desenho de figuras bidimensionais que representem objetos tridimensionais, tendo modelos (vistos enquanto o desenho é feito);
- usar *softwares* de geometria dinâmica apropriados para desenvolver tais habilidades tridimensionais;
- construir ou utilizar materiais manipuláveis.

Estas tendências podem ser combinadas, originando vários caminhos que podem ser seguidos de acordo com as possibilidades de cada um. Escolas que não possuem laboratórios de informática podem trabalhar com o desenho de modelos e a construção de materiais manipuláveis; escolas que disponham de recursos tecnológicos podem utilizar *softwares* e materiais manipuláveis, ou *softwares* e o desenho de modelos, etc. É sempre possível trabalhar o desenvolvimento da habilidade de visualização espacial.

4.4. AVALIAÇÃO

Segundo Eduardo Toledo Santos (2007), há diversos testes cujo objetivo é avaliar um ou mais aspectos da habilidade de visualização espacial. Estes testes são usados para avaliação psicológica em processos de seleção ou tratamento e também para pesquisas na área educacional. O objetivo neste caso é avaliar os efeitos que novas ferramentas ou metodologias didáticas têm sobre essa capacidade humana. É feito então um pré-teste, em seguida a nova ferramenta ou metodologia didática é aplicada e há então um pós-teste. A diferença entre os resultados do pré-teste e do pós-teste serve como indicador do efeito causado pela nova ferramenta ou metodologia didática.

A maioria dos testes é aplicada na forma de formulário em papel contendo estímulos visuais (ilustrações planas ou perspectivas) e instruções bem definidas.

Inúmeros testes de habilidade de visualização espacial foram desenvolvidos visando medir seus diferentes aspectos. (ELIOT, 1983)

Vamos nos concentrar na apresentação das características fundamentais de três testes bastante usados atualmente na pesquisa em metodologia didática para melhoria da visão espacial: MRT, MCT e TVZ.

4.4.1. Mental Rotation Test (MRT) – Teste de Rotação Mental

Criado por Vandenberg e Kunze em 1978, o MRT enfoca a habilidade de rotacionar objetos mentalmente.

É dada, como referência, a representação de uma peça composta por fileiras de cubos, todos iguais.

Em seguida, há quatro figuras das quais duas representam a mesma peça rotacionada. A tarefa é marcar corretamente estas duas figuras.

A pontuação é feita da seguinte maneira: duas corretas valem dois pontos; uma correta e nenhuma outra marcada vale um ponto; uma correta e uma errada valem zero ponto. Um exemplo de questão deste teste é mostrado na Figura 5.

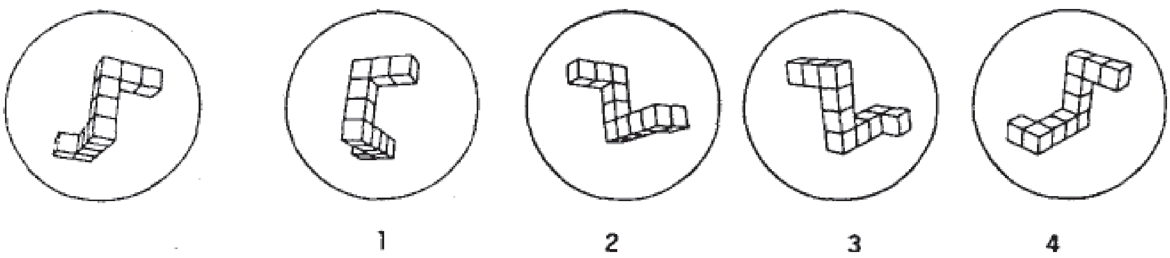


FIGURA 5 – Exemplo de questão do MRT

Fonte: ELIOT, 1983, p. 322.

O teste é composto de duas partes com 10 questões cada uma e o tempo de execução de cada parte é limitado a 5 minutos.

4.4.2. Mental Cutting Test (MCT) – Teste de Corte Mental

Criado pelo *College Entrance Examination Board* (CEEB) em 1939, o MCT enfoca a habilidade de visualizar secções planas de objetos (corte).

É apresentada como referência a representação de uma peça seccionada por um plano.

Em seguida, há cinco figuras das quais apenas uma representa a secção feita, pelo plano, na peça. A tarefa é marcar corretamente esta figura.

A pontuação é feita da seguinte maneira: alternativa correta vale um ponto; alternativa incorreta vale zero ponto. Um exemplo de questão deste teste é mostrado na Figura 6.

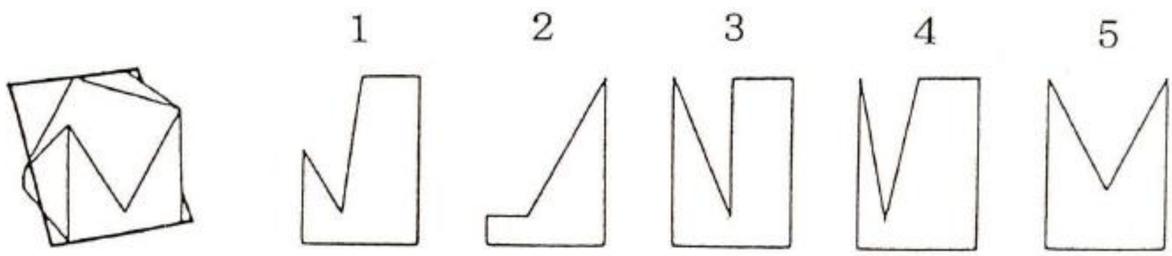


FIGURA 6 – Exemplo de questão do MCT

Fonte: SANTOS, 2007, p. 129.

O questionário é composto por 25 questões. O tempo total para execução é limitado a 20 minutos.

4.4.3. Test de Visualización (TVZ) – Teste de Visualização

Criado por Angela Dias Velasco e Gerardo Prieto Adánez em 2001, o TVZ enfoca a habilidade de planificar um cubo no qual cada face tem uma letra diferente, preservando as relações entre as faces (desdobramento).

É apresentada como referência a representação de um cubo no qual cada face tem uma letra.

Em seguida, há uma planificação deste cubo com uma das faces marcadas com uma letra e outra com uma interrogação. A tarefa é marcar, dentre 9 alternativas diferentes, aquela que representa corretamente a letra que estaria no lugar da interrogação, bem como sua orientação.

A pontuação é feita da seguinte maneira: alternativa correta vale um ponto; alternativa incorreta vale zero ponto.

A Figura 7 a seguir mostra um exemplo de questão do TVZ:

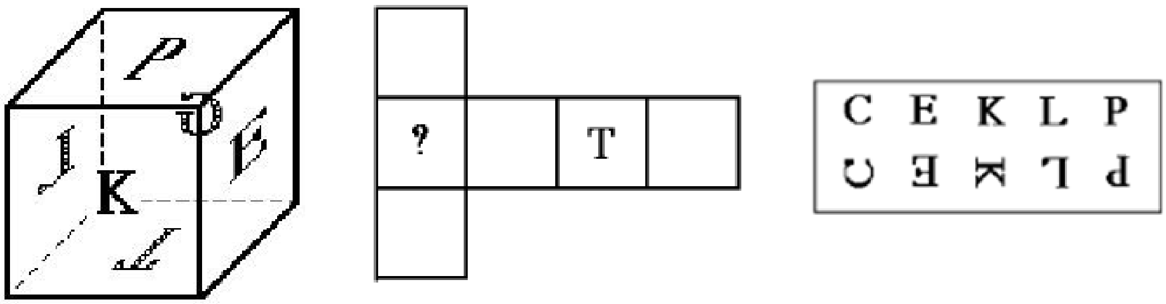


FIGURA 7 – Exemplo de questão do TVZ

Fonte: ADÁNEZ, 2002, p. 41.

Este teste é composto por 18 questões e deve ser terminado em 25 minutos.

Os três testes citados têm uma parte inicial na qual o participante é informado sobre o funcionamento do teste e há questões-exemplo para praticar.

Diversos exemplos de questões destes e de outros testes encontram-se no **Anexo B**.

5. ELABORAÇÃO DAS ATIVIDADES

Neste capítulo faremos um breve relato sobre a escolha ou adaptação de questões, o *software* utilizado e o material concreto confeccionado para as atividades.

5.1. PROBLEMAS DE PESQUISA INICIAIS

O uso de material concreto aliado à tecnologia pode contribuir para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem de Geometria Espacial? Mais ainda, pode incentivar o aluno que tenha dificuldade de visualização tridimensional a prosseguir seu estudo de Geometria Espacial, utilizando-se desses recursos?

Para a primeira pergunta, obtivemos resposta tanto em nossa pesquisa quanto nas aplicações das atividades. O uso de material concreto aliado à tecnologia pode contribuir, sim, para o desenvolvimento da habilidade de visualização espacial e consequentemente para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem de Geometria Espacial, desde que utilizados em momentos diferentes. Eisenberg (1999) foi bem sucedida com o HyperGami e o JavaGami porque o trabalho era dividido em duas etapas distintas: primeiro havia a elaboração da peça a ser confeccionada, com auxílio do *software*; depois a peça era impressa e só então vinha o trabalho de montagem e comparação entre o que a criança visualizara inicialmente e o que havia efetivamente sido feito.

Para a segunda pergunta, a resposta veio da observação da atitude dos alunos durante as atividades. Mesmo aqueles que tinham dificuldade sentiram-se motivados a participar, porque poderiam lançar mão de recursos que ainda não conheciam, especialmente no computador.

5.2. CRITÉRIOS DE SELEÇÃO OU ADAPTAÇÃO DE QUESTÕES

Nosso objetivo era escolher ou adaptar questões de Geometria Espacial cuja resolução não envolvesse cálculos ou a utilização de fórmulas. Além disso, procuramos seguir a ideia de Gerardo Adánez (2002), um dos responsáveis pela criação do TVZ.

> Com o objetivo de minimizar as estratégias de resolução não-espaciais (analítico-verbais), optou-se por usar em todos os itens uma figura regular. Quando se empregam figuras irregulares, facilita-se o etiquetado verbal de características distintivas da figura (ângulos, tamanho, etc.) que permite o emprego de processos que não são de caráter espacial. (ADÁNEZ, 2002, p. 3)

Nosso ponto de partida foi o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), por ser uma prova aplicada a estudantes de todo o país. Foram encontradas várias questões com as características pretendidas, que constam do **Anexo C**. Selecionamos duas, uma da prova de 2005 (INEP, 2005) e outra da prova de 2007 (INEP, 2007).

Examinamos também questões das Olimpíadas Brasileiras de Matemática (SBM, 1997; SBM, 2004), e das Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (SBM, 2006), cujas provas, à semelhança do ENEM, são aplicadas em todo o país. Foram então escolhidas ou adaptadas algumas questões.

Em seguida, procuramos em livros didáticos. Nada havia em coleções de Ensino Médio regular além das questões que já havíamos encontrado no ENEM. Nossa orientadora sabia, por experiência, que a coleção de Ensino Fundamental “Matemática paratodos”, de Luis Marcio Imenes e Marcelo Lellis (IMENES, 2006) trabalhava a visualização espacial. Tal coleção faz parte do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) desde sua primeira edição (da coleção), sendo disponibilizada em escolas públicas de todo o país. Escolhemos algumas questões e adaptamos outras, do suplemento “Problemas e exercícios complementares”, do volume referente a 5ª série / 6º ano do Ensino Fundamental.

Além do critério de abrangência nacional, as questões do ENEM, da OBM, da OBMEP e de Imenes (2006) foram escolhidas tanto pela garantia de adequação à faixa etária (alunos de 3ª série do Ensino Médio regular), como pelo cunho real que trariam às atividades, por serem questões com as quais os alunos poderiam se deparar ao realizar avaliações.

Sempre tendo em mente nossos objetivos, escolhemos questões dos testes que avaliam os três aspectos da HVE destacados por nós: MRT, MCT e TVZ.

Para concluir, em nossa pesquisa por referencial teórico havíamos encontrado questões interessantes em livros, artigos, etc. Selecionamos uma de Velasco (2007) e adaptamos duas de Kaleff (2003).

Este foi o perfil do banco de questões utilizado para elaborar as atividades.

5.3. PESQUISA E CRITÉRIOS DE ESCOLHA DO *SOFTWARE WINGEOM*

No início de nossa pesquisa por *softwares* de geometria dinâmica, cogitamos utilizar o *software Poly*, que permite a manipulação e a planificação de várias figuras espaciais. Porém, fomos alertadas para o fato de que este não era um programa gratuito, e que havia outros, gratuitos, com as mesmas características.

Dando continuidade à pesquisa, encontramos o *software Wingeom*, do mesmo criador do software *Winplot*, Richard Parris, pesquisador do departamento de Matemática da Phillips Exeter Academy. A princípio, nos sentimos pouco confortáveis com sua interface. Aos poucos, porém, fomos nos habituando e percebendo suas múltiplas funcionalidades. Atualmente, se tivéssemos que indicar algum *software* gratuito para trabalhar a Geometria Espacial, seria o *Wingeom*.

> Em síntese, o Wingeom permite a construção de figuras geométricas bastante precisas em duas ou três dimensões, as quais podem ser modificadas e animadas. Além disso, ele é um programa de fácil utilização, de modo que pode atender as necessidades tanto de professores na elaboração de suas propostas de trabalho pedagógico, quanto de alunos no aprofundamento de conteúdos abordados em sala de aula ou na realização de atividades educativas complementares. (RICHIT, 2008, p. 4-5)

5.4. MATERIAL ELABORADO COM O *SOFTWARE WINGEOM*

Uma das listas de exercícios que compunha a atividade (Lista 2) poderia ser resolvida pelos alunos com o auxílio de material de apoio. Nesta lista havia duas questões que envolviam pilhas de cubos e outras duas sobre planificação ou montagem de cubos. Utilizamos o *software Wingeom* para elaborar arquivos com desenhos em perspectiva das pilhas de cubos, que poderiam ser rotacionadas, aumentadas ou diminuídas, preservando as proporções da pilha original. Também foram criados arquivos onde havia cubos cuja planificação era animada. Isto possibilitaria aos alunos observar várias vistas da mesma pilha, bem como planificar e “montar” cubos. O mais importante é que todo o “movimento” de rotação das pilhas, bem como o de planificação ou montagem dos cubos seria visualizado pelo aluno na tela.

Foi elaborado um arquivo para cada questão onde havia uma pilha de cubos e um arquivo para a questão que envolvia a montagem de um cubo. Para a questão sobre a planificação de um cubo foram criados cinco arquivos, um para cada uma das cinco alternativas de resposta.

A Figura 8 ilustra um dos arquivos criados, onde a pilha de cubos foi construída por nós, baseada no sistema de eixos cartesianos tridimensionais que o *software* disponibiliza. Cada cubo é construído a partir das coordenadas de seus vértices em $\mathbb{R}^3$, que permitem definir as faces e por fim o cubo. O processo é então repetido até que todos os cubos sejam criados nas posições corretas para que a pilha seja fielmente reproduzida.

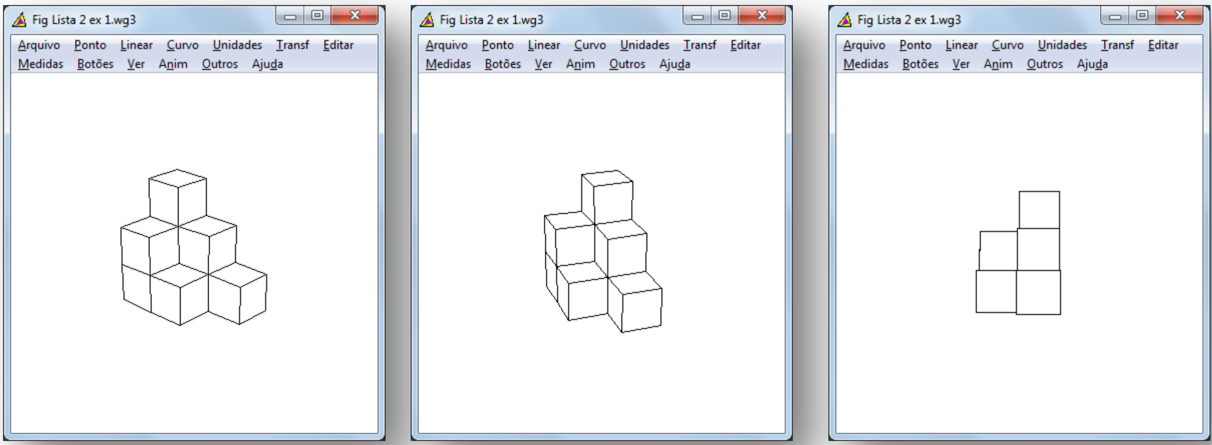


FIGURA 8 – Rotacionando a pilha de cubos para obter sua vista frontal

Neste outro arquivo, um cubo pode ser "dobrado" e "desdobrado", ou seja, "montado" ou planificado. Os vértices, pontos médios, faces, enfim, todos os elementos do cubo são definidos relativamente uns aos outros, de forma que todos se movimentem simultaneamente. A animação é feita movendo os vértices, e as faces "acompanham".

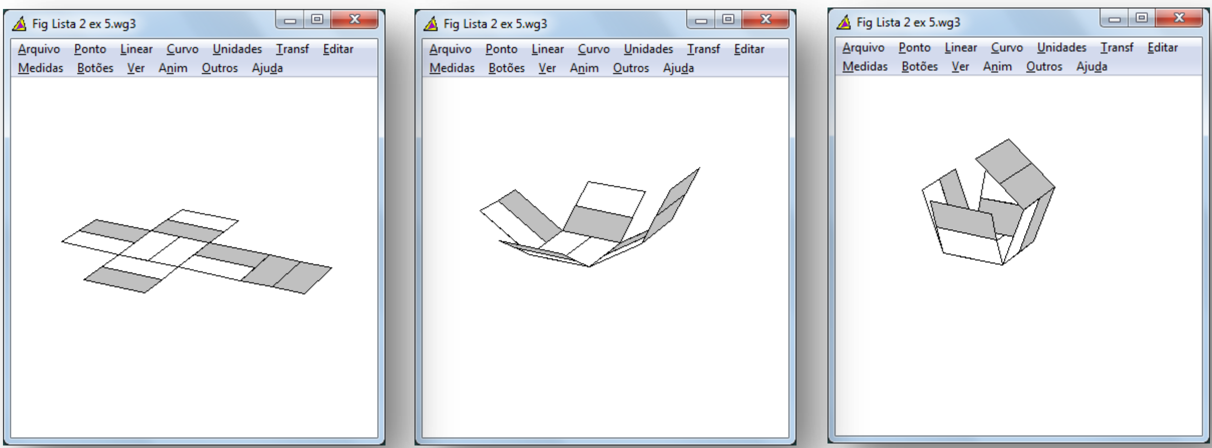


FIGURA 9 – Construindo o cubo a partir de sua planificação

5.5. MATERIAIS MANIPULÁVEIS

Foram confeccionados 15 cubos em cartolina para cada participante, possibilitando a montagem das pilhas, e ainda uma peça em sabão para que os alunos observassem o corte, materiais auxiliares à resolução da Lista 2. Também foram confeccionados um sólido de isopor e duas planificações de cubos referentes à Lista 1, que foram utilizados tanto pelas professoras em formação quanto pelos alunos no momento da correção dos exercícios da Lista 1.

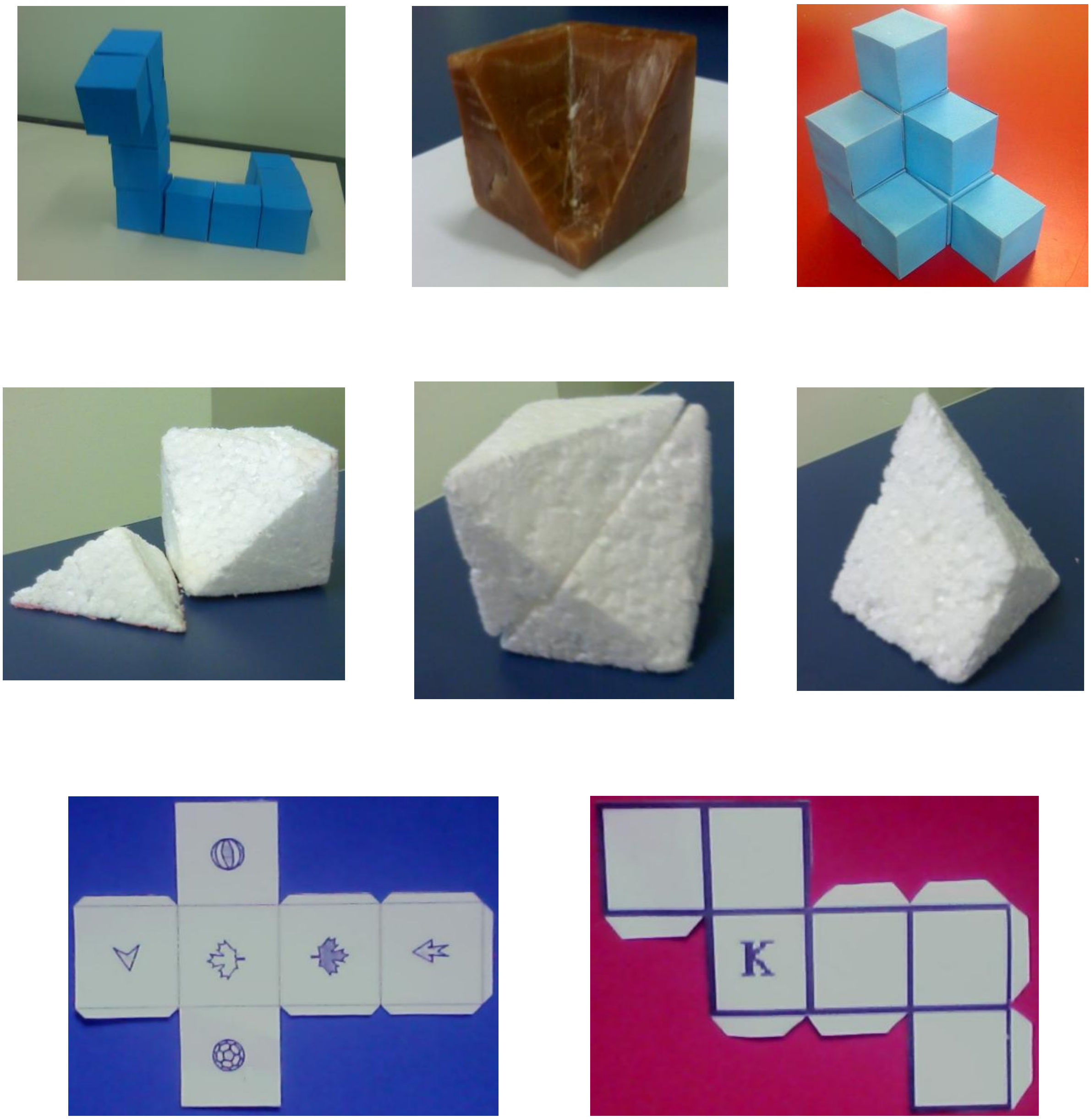


FIGURA 10 – Alguns dos materiais confeccionados

5.6. MATERIAL ELABORADO COM O *SOFTWARE POWERPOINT*

Foi preparada uma apresentação, no *software Powerpoint*, dos conceitos de vista frontal, vista lateral, vista superior, faces opostas e planificação de figuras tridimensionais. Após o Teste Exploratório, foi incluída a definição de secção plana de sólidos geométricos. Os slides estão reproduzidos na Figura 11.

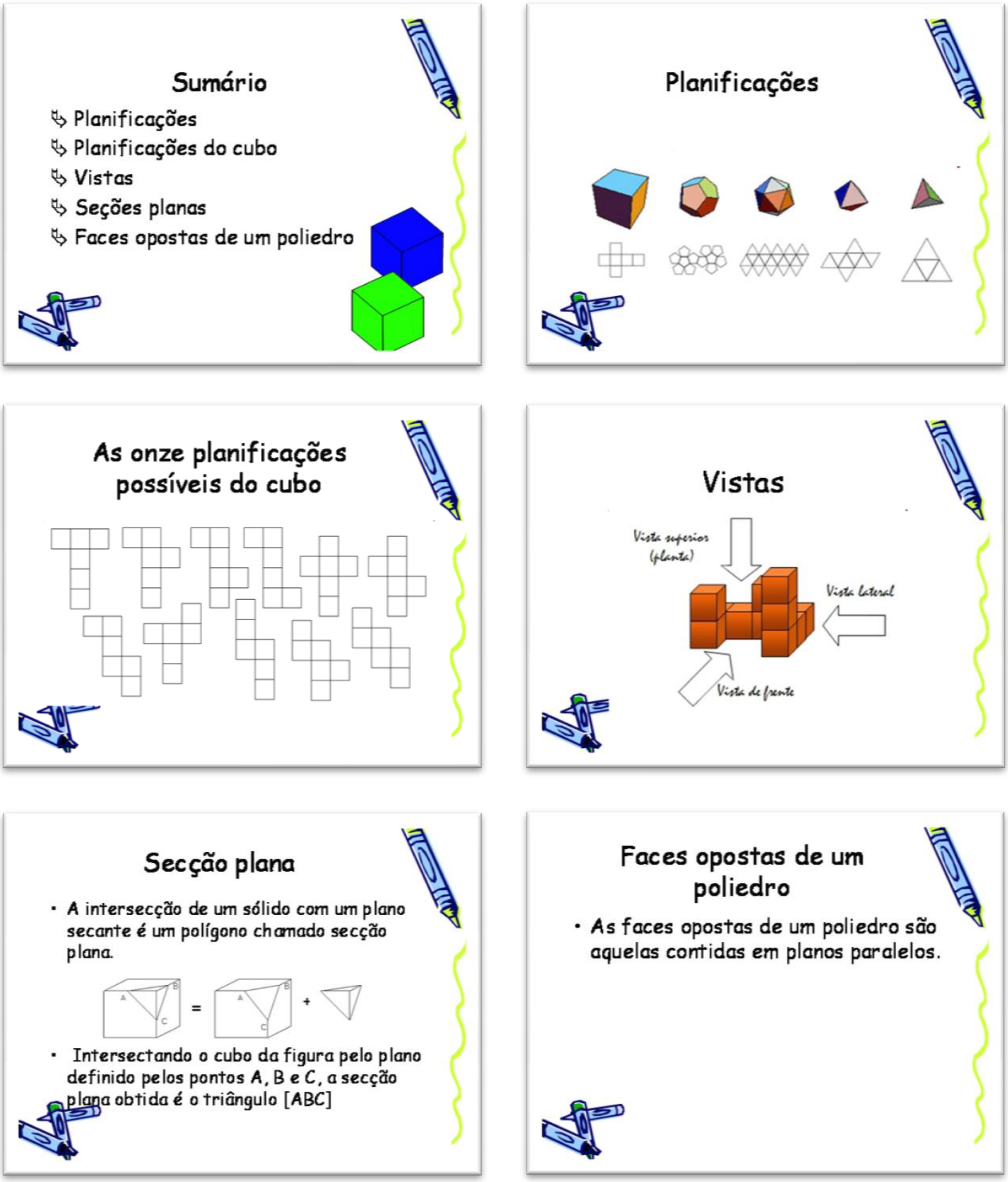


FIGURA 11 – *Slides* da apresentação

6. METODOLOGIA DE PESQUISA

Antes de iniciar o relato de nossa experiência, com a apresentação dos dados e resultados das aplicações das atividades elaboradas, é imprescindível ressaltar a metodologia de pesquisa por nós utilizada, fortemente referenciada no artigo de João Pedro da Ponte, "Estudos de caso em educação matemática". (PONTE, 2006)

Nossa metodologia de pesquisa é o estudo de caso e nossos principais objetivos são expor a lacuna existente entre teoria e prática no que diz respeito ao desenvolvimento da HVE, divulgando também que tal desenvolvimento é possível, ou seja, que a HVE não é um "dom".

As pesquisas sobre o assunto e a análise dos livros didáticos de Matemática atualmente adotados no Ensino Médio, citados nos capítulos 2, 4 e 5, já evidenciam a existência de tal lacuna: enquanto as pesquisas reforçam a necessidade de desenvolvimento da HVE desde os primeiros anos de escolaridade, a maioria esmagadora dos livros sequer menciona a habilidade de visualização espacial, muito menos propõe exercícios para que o estudante a desenvolva, ou desperta no professor atenção especial para o assunto.

Talvez o levantamento bibliográfico relatado fosse suficiente para comprovar o que almejávamos expor. Porém, para verdadeiramente saber o que ocorria em sala de aula, era preciso investigar *in loco*. Nosso universo, contudo, era limitado. Por isso nos identificamos com a metodologia de estudo de caso.

> Um estudo de caso pode com vantagem apoiar-se numa orientação teórica bem definida; além disso, pode seguir uma perspectiva interpretativa, que procura compreender como é o mundo do ponto de vista dos participantes ou uma perspectiva pragmática, tendo em vista proporcionar uma perspectiva global, tanto quanto possível completa e coerente do objecto *(sic)* de estudo. (PONTE, 2006, p. 1)

Outro fato que nos levou a crer que estávamos alinhadas com tal metodologia foi encontrarmos, na descrição das características do estudo de caso, a seguinte afirmação: "É, por isso, muito importante que o investigador possa tirar partido da possibilidade de se surpreender por não estar afectiva *(sic)* e intelectualmente comprometido com os resultados que possa vir a encontrar." (PONTE, 2006, p. 8) Ora, conforme a narrativa feita no capítulo 1, após um breve momento de frustração na análise do Teste Exploratório, fomos capazes de nos distanciar e realinhar nossos objetivos de pesquisa.

Sempre tendo como referência o artigo supracitado, faremos um resumo das características da metodologia, ou, como prefere João Pedro da Ponte, do "*design*" de investigação que é o estudo de caso (PONTE, 2006, p. 7) e teceremos alguns comentários sobre o tipo de conhecimento por ele produzido.

Um estudo de caso é uma investigação feita em uma situação particular, conduzida de forma a descobrir as características mais importantes do objeto estudado, que contribuam para a sua compreensão global (do objeto).

"Um caso funciona sobretudo como um exemplo."(PONTE, 2006, p. 4)

Um estudo de caso é em geral uma investigação *in loco* — em nosso caso, a sala de aula. Fundamenta-se em uma descrição que seja a mais completa possível de seu objeto de estudo (*thick description*) — em nosso caso, a HVE.

> Na verdade, um estudo de caso pode ter um profundo alcance analítico, interrogando a situação, confrontando-a com outras situações já conhecidas e com as teorias existentes. Pode assim ajudar a gerar novas teorias e novas questões para futura investigação. (PONTE, 2006, p. 8)

Apesar de seu empirismo, este tipo de investigação não é intervencionista. Não se pretende modificar a situação, e sim compreendê-la. Não temos a pretensão de que a HVE será desenvolvida em uma só aula. A finalidade das atividades é, antes de tudo, despertar a comunidade docente para o estudo do tema e, ainda, levar ao conhecimento do aluno que a HVE pode ser desenvolvida.

> Na verdade, para se descobrir aspectos novos, escondidos, de uma dada situação, é essencial um distanciamento e uma capacidade de interrogar de modo muito livre os acontecimentos. (PONTE, 2006, p. 8)

Seu relato pode ser feito na forma de uma narrativa, desde que também sejam apresentados os dados da investigação. Até aqui, viemos "contando nossa estória". Este capítulo foi introduzido para deixar clara a metodologia de investigação e o tipo de conhecimento produzido, antes da apresentação de algum resultado.

Segundo Ponte (2006, p. 12), "[...] um estudo de caso produz sempre um conhecimento de tipo particularístico, em que, como diz Erickson (1986), se procura encontrar algo de muito universal no mais particular."

> Deste modo, num estudo de caso não faz sentido formular conclusões sob a forma de proposições gerais. Poderá haver, isso sim, a formulação de *hipóteses de trabalho* a testar em novas investigações. Além disso, parte da tarefa de pensar em que medida certos aspectos se podem ou não aplicar a outros casos fica a cargo dos leitores que deles têm um conhecimento mais directo *(sic)* ou seja, tem lugar a *generalização pelo próprio leitor* (Merriam, 1988). Não devemos menosprezar o facto *(sic)* que muito do valor dos estudos de caso deriva das questões que ajudam a levantar. Na verdade, a importância da investigação educacional tem muito a ver com as questões que coloca e não apenas com as respostas que formula (Nóvoa, 1991; Yin, 1984). (PONTE, 2006, p. 16)

> Em síntese, os estudos de caso *não se usam quando se quer conhecer propriedades gerais de toda uma população*. Pelo contrário, usam-se para compreender a especificidade de uma dada situação ou fenômeno *(sic)*, para estudar os processos e as dinâmicas da prática, com vista à sua melhoria, ou para ajudar um dado organismo ou decisor a definir novas políticas, ou ainda para formular novas teorias. *O seu objectivo (sic) fundamental é proporcionar uma melhor compreensão de um caso específico e ajudar a formular hipóteses de trabalho sobre o grupo ou a situação em causa*. (PONTE, 2006, p. 17)

O que deve ficar claro aqui é que os resultados não devem e nem podem ser considerados diagnósticos da habilidade de visualização espacial dos grupos aos quais pertenciam os participantes, pela própria metodologia de investigação adotada.

Não bastasse isto, uma razão seria o reduzido número de indivíduos presentes em cada aplicação das atividades. Por exemplo, apenas três alunos do curso de Licenciatura em Matemática estiveram no Teste Exploratório. Com certeza, não representam amostra confiável para generalização de conclusões acerca da HVE de todos os professores em formação do curso. O mesmo ocorreu com os grupos de Ensino Médio. Outra razão seria o fato de que não realizamos testes de avaliação da HVE. Conforme descrito nas seções 4.4.1. a 4.4.3., cada teste (MRT, MCT, TVZ) tem sua dinâmica própria, número de questões, tempo limite, etc. Mais importante ainda: havia questões que envolviam mais de um aspecto da HVE e conceitos intrínsecos à Geometria Espacial, como faces opostas, vistas, etc.

Esclarecidos estes aspectos, continuaremos a “contar nossa estória”.

7. O TESTE EXPLORATÓRIO

O teste exploratório foi de grande valia para nós. Analisando as observações feitas durante sua aplicação, tivemos os primeiros sinais de que pelo menos um dos objetivos seria alcançado. Um dos participantes, que se auto-denominava "tendo dificuldade de visão espacial *(sic)*", participou das atividades com interesse, principalmente daquelas em que era disponibilizado material de apoio, concreto ou via *software*. Ao fim do teste, mostrou-se satisfeito e entusiasmado, dizendo que havia "enxergado coisas que nunca tinha conseguido enxergar antes *(sic)*". Não bastasse isto, pediu-nos que o chamássemos caso fossem aplicadas novas atividades. Ora, alguém que se diz "com dificuldade de visão espacial *(sic)*", em geral tem aversão a atividades que envolvam visualização, e não costuma ter prazer em tomar parte nelas. Consideramos este depoimento muito importante, pois havíamos conseguido, com o uso de *software* e material concreto adequados, incentivar um aluno que tinha dificuldade de visualização espacial.

A realização do teste exploratório ocorreu em forma de um minicurso com duração de três horas e meia, no laboratório de informática F 201, situado no IFF, Campus Campos-Centro, em maio de 2010. Os participantes eram três professores em formação do curso de Licenciatura em Matemática do IFF, um cursando o 7º período e dois cursando o 5º período. Todos possuíam conhecimentos tanto de Geometria Espacial quanto do uso de tecnologia e de materiais concretos, portanto puderam opinar de forma produtiva para o aprimoramento do trabalho.

No ato da inscrição, foi aplicado um teste de sondagem, com o intuito de investigar conhecimentos prévios dos conceitos de faces opostas e vistas.

O minicurso foi dividido nas seguintes etapas:

- explicação de pré-requisitos sem uso de material de apoio;
- aplicação da Atividade 1 sem material de apoio;
- correção da Atividade 1 sem material de apoio;
- nova explicação de pré-requisitos, desta vez com material de apoio;
- apresentação dos comandos e recursos do *software Wingeom*;
- aplicação e correção da Atividade 2 fazendo uso dos recursos do *software* e do material concreto;
- correção das questões do Teste de Sondagem. (Esta etapa não estava prevista, mas foi um pedido dos participantes.)

As atividades aplicadas no Teste Exploratório constam do **Apêndice B**. Optamos por omitir as fontes das questões na versão distribuída aos participantes, para evitar que houvesse algum tipo de pré-julgamento, o que poderia influenciar o resultado. Por exemplo, ao se deparar com uma questão da OBM, o aluno poderia sequer tentar fazê-la, por julgá-la, de antemão, muito difícil. Por outro lado, sentiria obrigação de acertar questões adaptadas de um livro de 6º ano do Ensino Fundamental. No momento da correção, porém, todas as fontes foram citadas.

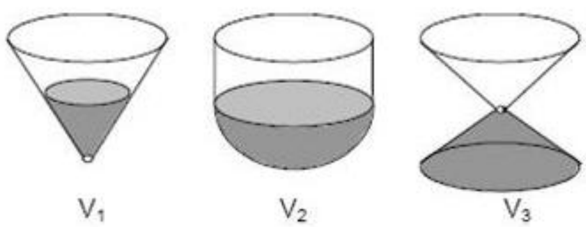
Faremos agora o relato comentado dos resultados do Teste Exploratório. Há um quadro para cada atividade, com o(s) aspecto(s) da HVE predominante(s), o(s) conceito(s) de Geometria Espacial subjacente(s), caso haja, bem como o percentual de acerto, em cada questão. Apresentaremos o enunciado das questões com percentual de acerto abaixo de 50%, acompanhado de comentários específicos e, eventualmente, do processo de resolução ou da resposta de algum participante.

Teste Exploratório – Teste de Sondagem			
Questão	Aspecto(s) da HVE	Conceito(s) de Geometria	Percentual de acerto
1	Desdobramento.	—	100%
2	Corte.	Volume	0%
3	Rotação.	Faces opostas	67%
4	Rotação.	Vista superior	67%
5	Rotação.	—	67%
6	Rotação e Desdobramento.	Faces opostas	33%

FIGURA 12 – Quadro: Teste Exploratório – Teste de Sondagem

Segundo os participantes, o motivo do erro na questão 2 foi a tentativa de utilizar fórmulas para o cálculo do volume, o que era desnecessário e os atrapalhou.

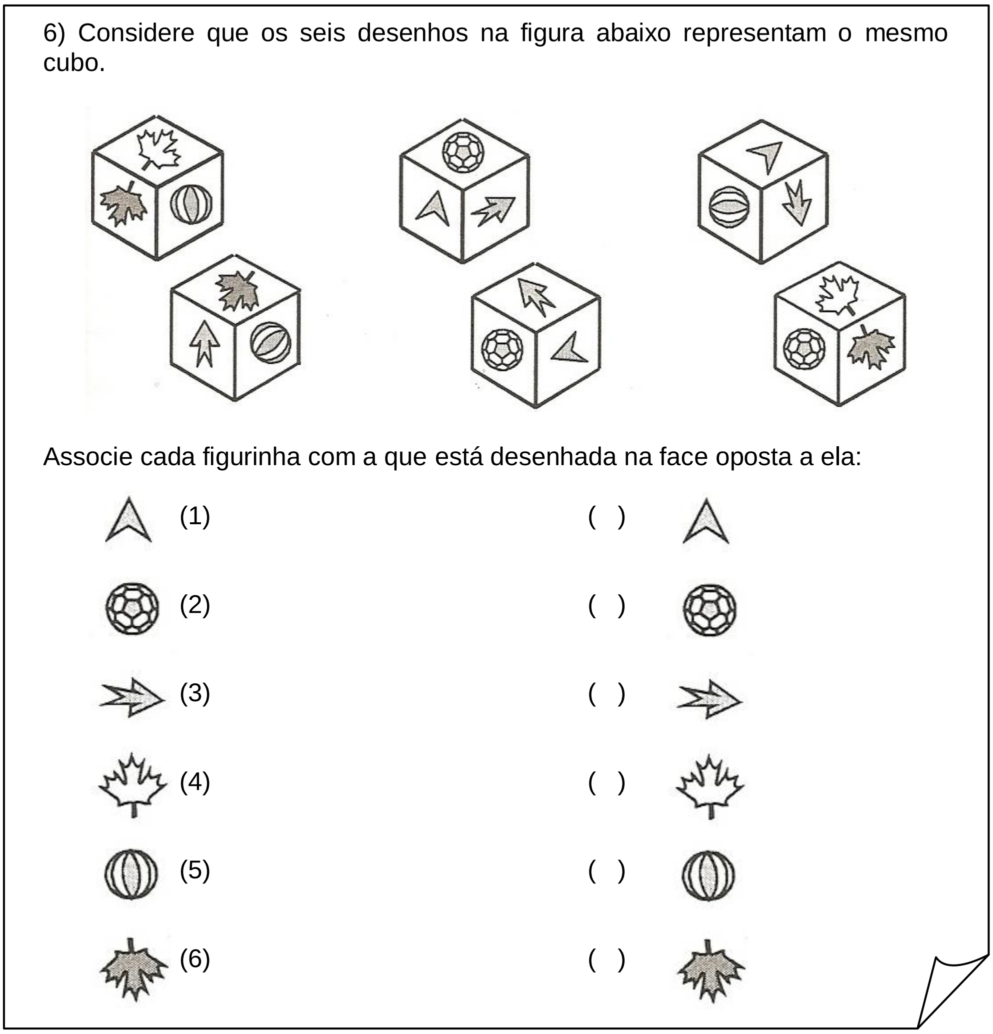
2) Os três recipientes da figura têm formas diferentes, mas a mesma altura e o mesmo diâmetro da boca. Neles é colocado líquido até a metade de sua altura, conforme indicado nas figuras. Representando por V_1, V_2 e V_3 o volume de líquido em cada um dos recipientes, marque a alternativa correta:



(A) $V_1 = V_2 = V_3$ (B) $V_1 < V_3 < V_2$ (C) $V_1 = V_3 < V_2$ (D) $V_3 < V_1 < V_2$ (E) $V_1 < V_2 = V_3$

FIGURA 13 – Questão 2 do Teste de Sondagem

A questão 6 foi considerada, pelos participantes, como a de maior grau de dificuldade. Segundo eles, aqui houve realmente dificuldade de visualização.


6) Considere que os seis desenhos na figura abaixo representam o mesmo cubo.

Associe cada figurinha com a que está desenhada na face oposta a ela:

(1) ( )

(2) ( )

(3) ( )

(4) ( )

(5) ( )

(6) ( )

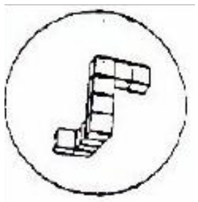
FIGURA 14 – Questão 6 do Teste de Sondagem

Teste Exploratório – Atividade 1			
Questão	Aspecto(s) da HVE	Conceitos de Geometria	Percentual de acerto
1	Rotação.	—	0%
2	Desdobramento.	—	100%
3	Corte.	Secção plana	33%
4	Rotação.	Faces opostas	67%
5	Corte e Desdobramento.	—	67%
6	Desdobramento.	Faces opostas	0%

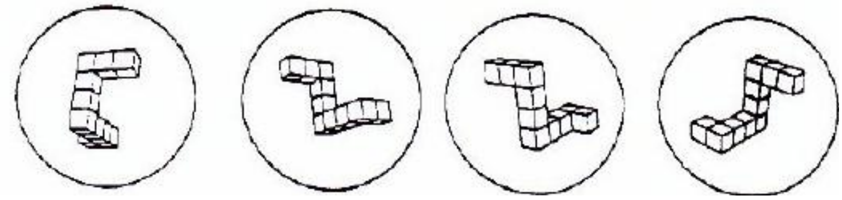
FIGURA 15 – Quadro: Teste Exploratório – Atividade 1

Na questão 1, o motivo principal do erro foi o fato de haver duas alternativas corretas. Ao encontrarem uma, os participantes não procuraram por outra. A falta de atenção na leitura do enunciado os levou a errarem a questão.

1) Considere a figura a seguir, que representa uma peça formada por vários cubos agrupados.



Entre as figuras abaixo, faça um (X) naquela(s) que **não** representa(m) esta mesma peça.



( ) ( ) ( ) ( )

FIGURA 16 – Questão 1 da Atividade 1

Na questão 3, houve realmente dificuldade de visualização da secção plana.

3) Abaixo à esquerda temos o desenho de um sólido cortado por um plano. Que figura representa o polígono que é a seção resultante deste corte? Marque um (X) na resposta correta.

( ) ( ) ( ) ( ) ( )

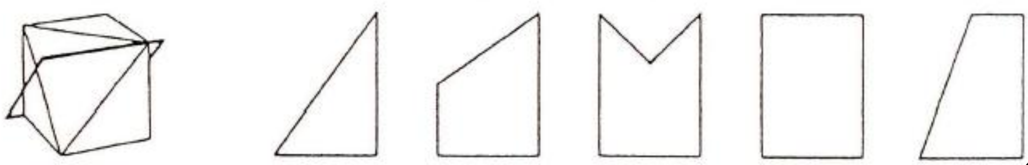
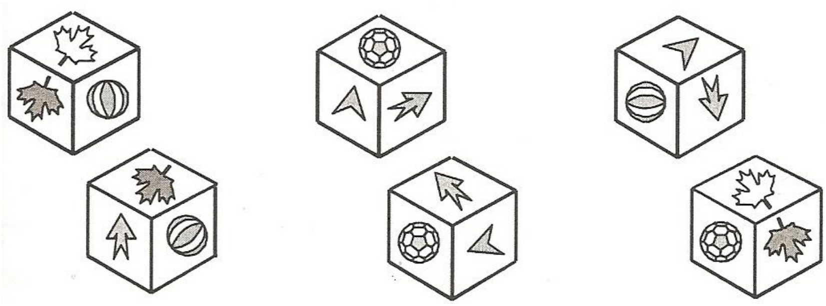


FIGURA 17 – Questão 3 da Atividade 1

Na questão 6, não houve preocupação em desenhar corretamente as posições relativas das figuras nas faces do cubo, após o desdobramento.

6) Considere que os seis desenhos na figura abaixo representam o mesmo cubo.



Desenhe uma planificação deste cubo.

FIGURA 18 – Questão 6 da Atividade 1

Um dos participantes desenhou corretamente as figuras em faces opostas.

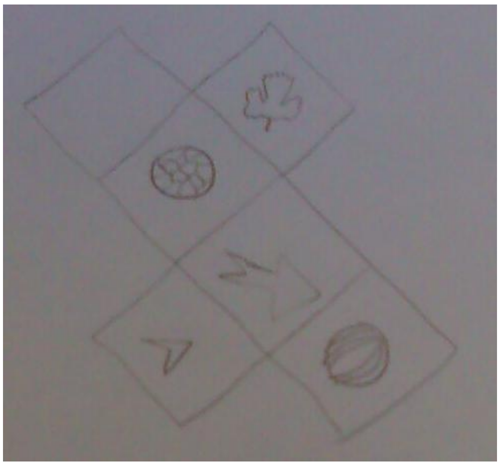


FIGURA 19 – Resolução de um dos participantes

Teste Exploratório – Atividade 2			
Questão	Aspecto(s) da HVE	Conceitos de Geometria	Percentual de acerto
1	Rotação.	—	100%
2	Corte e Desdobramento.	Secção plana	100%
3	Rotação.	Vistas	100%
4	Rotação.	—	33%
5	Desdobramento.	—	33%

FIGURA 20 – Quadro: Teste Exploratório – Atividade 2

Na Atividade 2, foi disponibilizado material de apoio em todas as questões, tanto sob a forma de arquivos no *software* quanto de materiais concretos. Pudemos observar que os participantes não utilizaram simultaneamente o material concreto e o *software*, optando pelo recurso tecnológico. Eles mesmos nos deram tal depoimento ao fim da atividade.

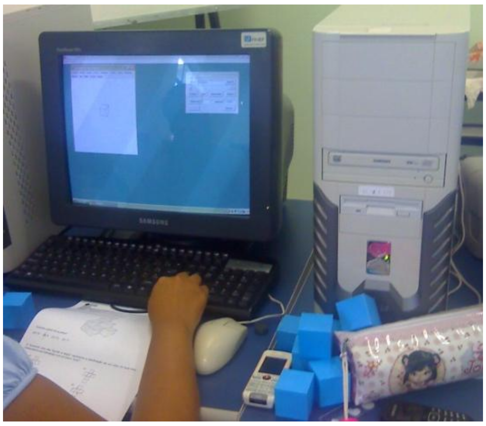


FIGURA 21 – Preferência pelo recurso tecnológico

Os participantes foram unânimes ao afirmar que não seriam capazes de resolver corretamente a questão 2 sem o auxílio do *software*.

2) Somente uma das figuras a seguir representa a planificação de um cubo na qual está destacada a sua interseção com um plano. Qual?

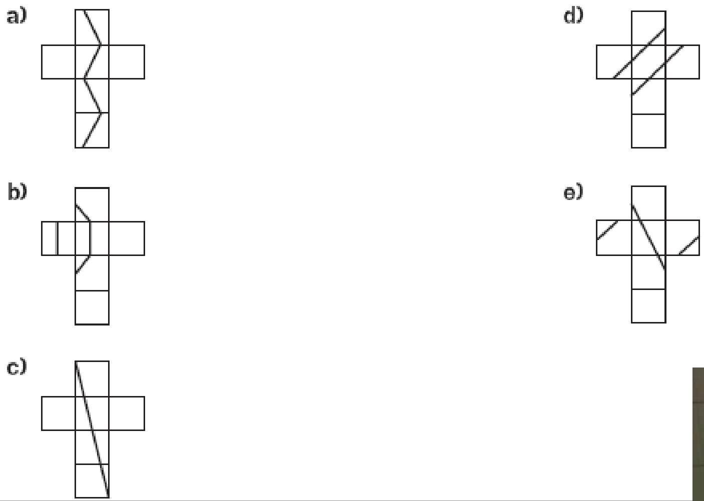


FIGURA 22 – Questão 2 da Atividade 2

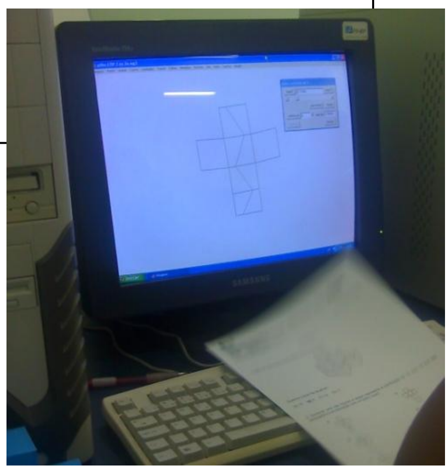
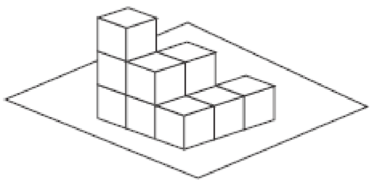


FIGURA 23 – Recurso tecnológico: imprescindível na Questão 2

Na questão 4 houve realmente dificuldade de visualização dos caixotes que ficariam exatamente com três faces acinzentadas. A única participante que acertou utilizou os dois recursos: tecnológico e material concreto.

4) Vários caixotes cúbicos de plástico azul ficaram armazenados ao ar livre, na posição indicada na figura abaixo, na qual apenas um dos caixotes não é visível.



Com o tempo, o plástico exposto ao ar perdeu sua cor, tornando-se cinza. Ao desfazer a pilha, verificaremos que o número de caixotes com três faces azuis e três cinzentas será:

(A) 4 (B) 5 (C) 3 (D) 2 (E) 1

FIGURA 24 – Questão 4 da Atividade 2

Na questão 5, um defeito no arquivo que havia sido preparado prejudicou o desempenho dos participantes, que por outro lado não souberam utilizar os vários cubos disponíveis para resolver a questão.

5) Para montar um cubo, Guilherme recortou um pedaço de cartolina branca e pintou de cinza algumas partes, como na figura abaixo, à esquerda. Qual das figuras representa o cubo construído por Guilherme?

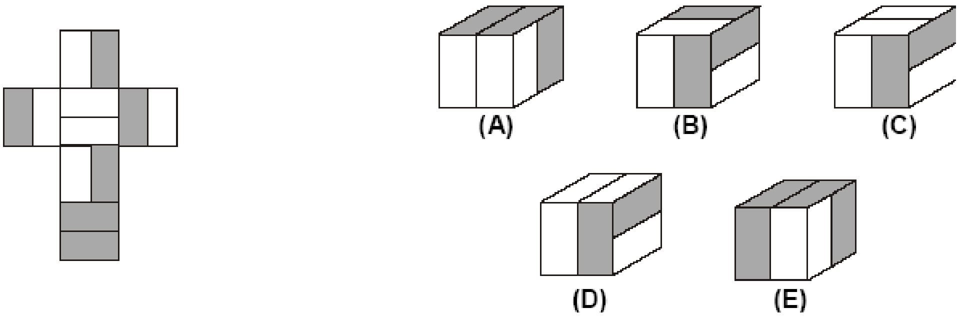


FIGURA 25 – Questão 5 da Atividade 2

Após o teste exploratório, ficou claro que algumas alterações eram necessárias. Os participantes deram suas opiniões e fizemos nossas observações. Na apresentação dos resultados parciais também houve sugestões para o aprimoramento das atividades.

Não houve alterações no Teste de Sondagem, nem na Atividade 1. Já na apresentação dos pré-requisitos, sentimos falta de alguma figura de apoio, pois a apresentação foi feita oralmente. Resolvemos então preparar uma apresentação utilizando o *software Powerpoint*. Além disso, sentimos a necessidade de acrescentar o conceito de secção plana, pois os participantes demonstraram dificuldade na resolução de questões que envolviam esse conceito.

Na Atividade 2, percebemos que havia mais questões envolvendo a rotação do que o corte. Para equilibrar o número de questões de acordo com os aspectos da HVE abordados (rotação, desdobramento e corte), retiramos a questão 3 da atividade 2, que envolvia rotação, e substituímos por outra, que envolvia corte.

Durante a correção da Atividade 1, percebemos que o material de apoio nos fez falta no momento da explicação, a ponto de termos que improvisar algum que auxiliasse o entendimento das questões 1, 3 e 6. Resolvemos então preparar material para <u>nos</u> auxiliar na explicação destas e de outras questões.

Na apresentação de resultados, foram dadas duas sugestões, acatadas por nós: mudar o nome de “Atividade” para “Lista” ou “Ficha” (optamos por “Lista”) e elaborar uma terceira lista para ser resolvida sem material de apoio.

A Lista 3 foi elaborada seguindo os mesmos parâmetros descritos na seção 5.2., usados na confecção do Teste de Sondagem e das Atividades 1 e 2. Já havíamos formado um banco de questões, o que facilitou tanto a reelaboração da Atividade 2, que passou a se chamar Lista 2, quanto a elaboração da Lista 3.

8. PRIMEIRA APLICAÇÃO

Após o Teste Exploratório e a apresentação de resultados parciais, nossas atividades passaram a constituir-se de um Teste de Sondagem e três listas de exercícios, das quais apenas a Lista 2 deveria ser feita com o auxílio de material de apoio. Foram elaborados outros materiais de apoio, concretos, além de inserida a noção de secção plana na apresentação dos conceitos.

A validação das atividades foi realizada no IFF Campus Campos-Centro. Escolhemos esta Instituição pelo fato de oferecer Ensino Médio regular e dispor de laboratório de informática.

Foi oferecido um minicurso, realizado à tarde, aos alunos do terceiro ano do Ensino Médio do turno da manhã. Seis alunos inscreveram-se, fizeram o Teste de Sondagem e compareceram ao minicurso, realizado na sala F 201, no dia 20 de maio de 2010, com início às 13 horas. Cada aluno fez uso de um computador.

O minicurso teve duração de 3 horas e foi dividido nas seguintes etapas:

- explicação de pré-requisitos utilizando projetor multimídia e apresentação feita no *software Powerpoint*;
- aplicação da Lista 1 (sem material de apoio);
- correção da Lista 1 (com material de apoio);
- nova explicação dos pré-requisitos, com material concreto;
- apresentação dos recursos a serem utilizados no *software Wingeom*;
- aplicação e correção da Lista 2 fazendo uso dos recursos do *software* e do material concreto;
- aplicação da Lista 3 (sem material de apoio).

O grupo de alunos mostrou-se bastante à vontade no laboratório de informática e manteve-se interessado durante todo o minicurso. Novamente, observamos a preferência, confirmada por eles, pelo uso do recurso tecnológico em detrimento do material concreto.

As listas aplicadas constam, na íntegra, do **Apêndice C**. Novamente, optamos por omitir as fontes das questões e citá-las no momento da correção.

Faremos agora o relato comentado dos resultados da Aplicação 1. Novamente, há um quadro para cada atividade e serão apresentados os enunciados das questões com percentual de acerto abaixo de 50%, acompanhado de comentários específicos e, eventualmente, do processo de resolução ou da resposta de algum aluno.

Aplicação 1 – Teste de Sondagem			
Questão	Aspecto(s) da HVE	Conceitos de Geometria	Percentual de acerto
1	Desdobramento.	—	67%
2	Corte.	Volume	58%
3	Rotação.	Faces opostas	58%
4	Rotação.	Vista superior	42%
5	Rotação.	—	75%
6	Rotação e Desdobramento.	Faces opostas	75%

FIGURA 26 – Quadro: Aplicação 1 – Teste de Sondagem

A partir dos resultados do Teste de Sondagem, observa-se que este é um grupo que possui a HVE bem desenvolvida, o que se confirmou na realização das atividades. Houve apenas algumas dificuldades localizadas. Em consonância com as referências citadas, a maioria dos alunos deste grupo fazia curso técnico na área de exatas, o que facilitou o desenvolvimento da HVE.

Na questão 4, vários alunos não desenharam as arestas laterais da pirâmide. O motivo da dificuldade foi, aparentemente, o conceito de vista superior. Todos os alunos desenharam uma pirâmide de base pentagonal regular, apesar de nada haver no enunciado da questão que indicasse isto. Provavelmente, isto ocorreu pelo fato de que, no Ensino Médio, são estudadas basicamente as pirâmides de base regular.

4) Imagine uma pirâmide apoiada no solo sobre sua base pentagonal. Desenhe a vista superior simplificada da pirâmide.

FIGURA 27 – Questão 4 do Teste de Sondagem

Aplicação 1 – Lista 1			
Questão	Aspecto(s) da HVE	Conceitos de Geometria	Percentual de acerto
1	Rotação.	—	50%
2	Desdobramento.	—	67%
3	Corte.	Secção plana	33%
4	Rotação.	Faces opostas	100%
5	Corte e Desdobramento.	—	83%
6	Desdobramento.	Faces opostas	50%

FIGURA 28 – Quadro: Aplicação 1 – Lista 1

Na Lista 1, observamos uma dificuldade localizada na visualização de secção plana, por isso o baixo percentual de acerto na questão 3.

3) Abaixo à esquerda temos o desenho de um sólido cortado por um plano. Que figura representa o polígono que é a seção resultante deste corte? Marque um (X) na resposta correta.

( ) ( ) ( ) ( ) ( )

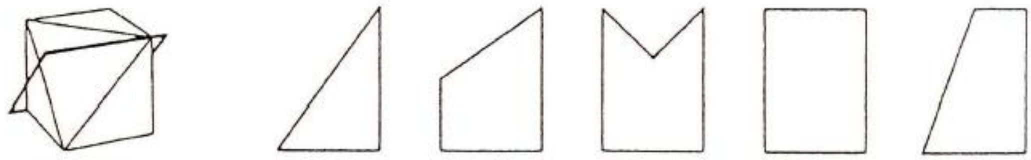
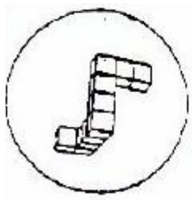


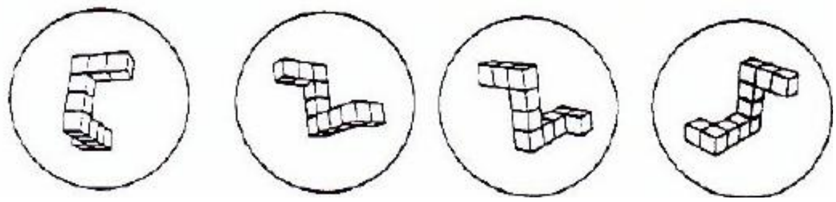
FIGURA 29 – Questão 3 da Lista 1

Na questão 1, novamente o motivo dos erros foi a desatenção, pois havia mais de uma resposta correta.

1) Considere a figura a seguir, que representa uma peça formada por vários cubos agrupados.



Entre as figuras abaixo, faça um (X) naquela(s) que **não** representa(m) esta mesma peça.

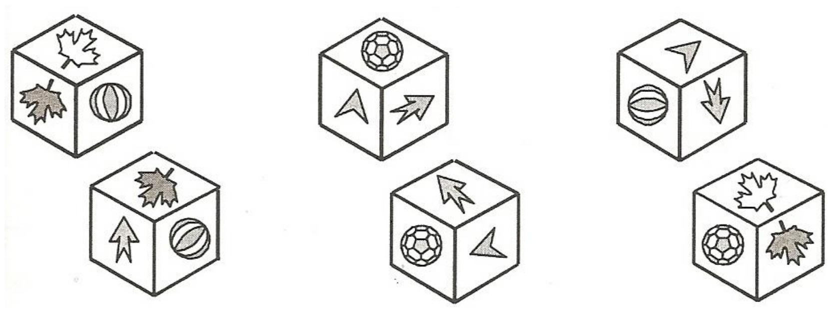


( ) ( ) ( ) ( )

FIGURA 30 – Questão 1 da Lista 1

Na questão 6, nos surpreendeu a precisão da resposta de um dos alunos.

6) Considere que os seis desenhos na figura abaixo representam o mesmo cubo.



Desenhe uma planificação deste cubo.

FIGURA 31 – Questão 6 da Lista 1

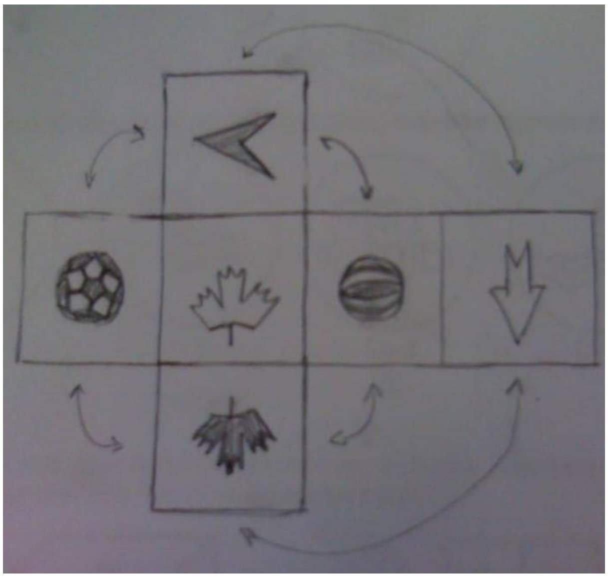


FIGURA 32 – Resposta precisa de um aluno

Baseadas em nossas referências teóricas, podemos dizer que este é, provavelmente, alguém que além de ter aptidão visual também tem a HVE muito bem desenvolvida. Houve detalhamento tanto na reprodução das figuras quanto em como ficaria o cubo depois de construído, por meio da indicação dos segmentos que representam a mesma aresta.

Aplicação 1 – Lista 2			
Questão	Aspecto(s) da HVE	Conceitos de Geometria	Percentual de acerto
1	Rotação.	—	100%
2	Corte e Desdobramento.	Secção plana	83%
3	Corte.	—	33%
4	Rotação.	—	100%
5	Desdobramento.	—	50%

FIGURA 33 – Quadro: Aplicação 1 – Lista 2

Nesta lista, mesmo com material de apoio disponibilizado em todas as questões, tanto sob a forma de arquivos no *software* quanto de materiais concretos, a dificuldade localizada no aspecto de corte permaneceu. A única questão que apresentou percentual de acerto abaixo de 50% foi a de número 3.

Novamente, observamos que os alunos não utilizaram simultaneamente o material concreto e o *software*, optando pelo recurso tecnológico. Também foram unânimes ao afirmar que não seriam capazes de resolver corretamente a questão 2 sem o auxílio do *software*.

Quanto à questão 3, os alunos disseram que realmente houve dificuldade de visualização, só dirimida quando as professoras em formação utilizaram o sólido feito em sabão para explicar. O detalhe é que este sólido estava à disposição deles enquanto faziam as questões, mas poucos alunos o manusearam.

3) Abaixo à esquerda temos o desenho de um sólido cortado por um plano. Que figura representa o polígono que é a seção resultante deste corte? Marque um (X) na resposta correta.

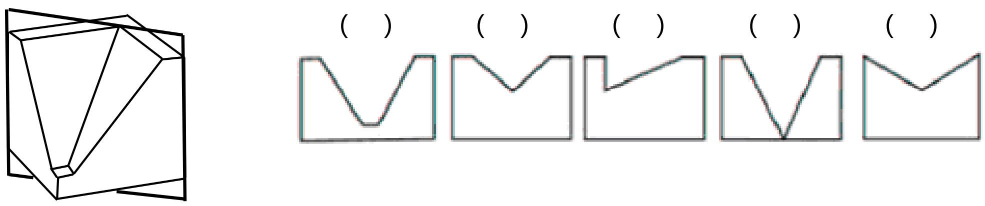


FIGURA 34 – Questão 3 da Lista 2

Aplicação 1 – Lista 3			
Questão	Aspecto(s) da HVE	Conceitos de Geometria	Percentual de acerto
1	Rotação.	Vistas	67%
2	Desdobramento.	—	67%
3	Corte.	—	50%
4	Rotação.	—	33%
5	Desdobramento.	—	83%
6	Corte e desdobramento	—	100%

FIGURA 35 – Quadro: Aplicação 1 – Lista 3

Nesta Lista, observamos um aumento significativo do percentual de acerto da questão cujo aspecto era o corte (Listas 1 e 2: 33%, Lista 3: 50%). Isto talvez seja reflexo das explicações dadas pelas professoras em formação, utilizando material concreto. Este fato estaria inclusive em consonância com os resultados de diversas pesquisas citadas anteriormente por nós.

3) Abaixo à esquerda temos o desenho de um sólido cortado por um plano. Que figura representa o polígono que é a seção resultante deste corte? Marque um (X) na resposta correta.

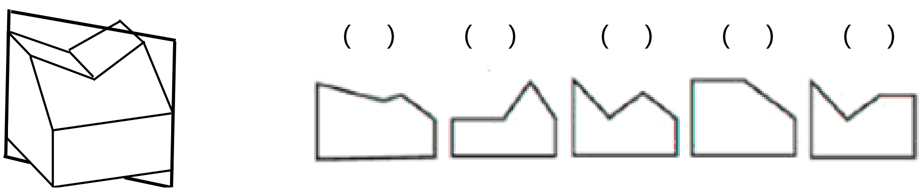
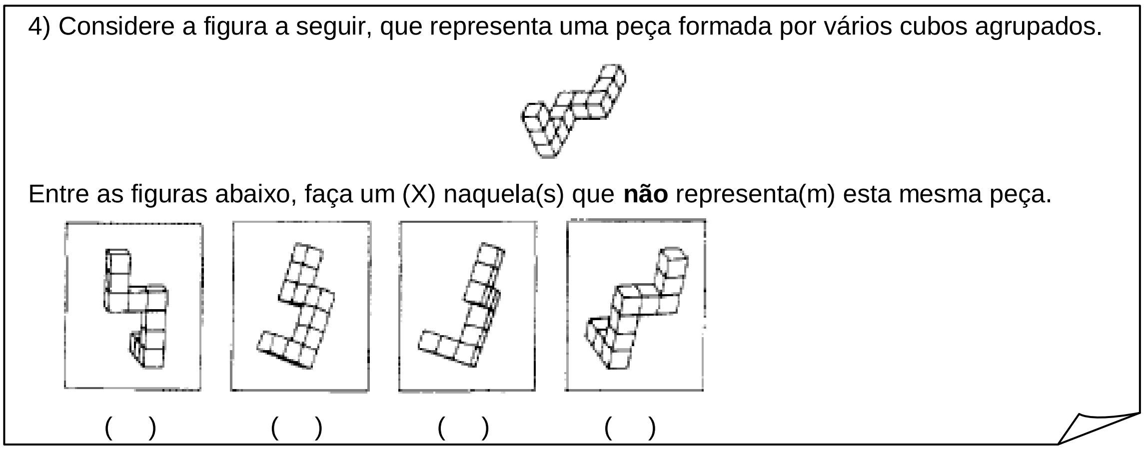


FIGURA 36 – Questão 3 da Lista 3

Por outro lado, na questão 4, o problema da desatenção na leitura do enunciado se repetiu. A maioria marcou apenas uma das alternativas corretas.


4) Considere a figura a seguir, que representa uma peça formada por vários cubos agrupados.

Entre as figuras abaixo, faça um (X) naquela(s) que **não** representa(m) esta mesma peça.

( ) ( ) ( ) ( )

FIGURA 37 – Questão 4 da Lista 3

Ao longo da aplicação, percebemos várias características comuns às observadas no Teste Exploratório. Os alunos demonstraram satisfação em realizar as atividades, principalmente aquelas onde havia recursos tecnológicos disponíveis. Os materiais concretos foram pouco aproveitados por eles, e surtiram mais efeito quando as professoras em formação os utilizaram para explicar. Na verdade, havia até uma certa decepção por parte dos alunos quando o material disponibilizado para a questão era concreto. O que podemos afirmar, sem dúvida é que o material concreto foi um recurso importantíssimo para nós, professores em formação, nas explicações dos conceitos de vistas, faces opostas e secções planas.

FIGURA 38 – Momentos da aplicação

9. SEGUNDA APLICAÇÃO

Após a primeira aplicação, nos ressentimos de não ter trabalhado com um número maior de alunos, e propusemos então uma segunda aplicação, que seria realizada à noite, para alunos da 3ª série do Ensino Médio regular que cursavam a dependência em Matemática, relativa à 2ª série do Ensino Médio, à noite. Desta vez, o grupo era composto por dezoito alunos.

O minicurso foi realizado novamente na sala F 201, no dia 14 de junho de 2010, com início às 18 horas. Cada aluno fez uso de um computador.

O minicurso durou de 2 horas e meia, e foi dividido nas seguintes etapas:

- teste de sondagem (não houve tempo hábil para aplicá-lo antes);
- explicação de pré-requisitos utilizando projetor multimídia e apresentação feita no *software Powerpoint*;
- aplicação da Lista 1 (sem material de apoio);
- correção da Lista 1 (com material de apoio);
- nova explicação dos pré-requisitos, com material concreto;
- apresentação dos recursos a serem utilizados no *software Wingeom*;
- aplicação e correção da Lista 2 fazendo uso dos recursos do *software* e do material concreto;
- aplicação da Lista 3 (sem material de apoio).

Faremos agora o relato comentado dos resultados da Aplicação 2. Mais uma vez, há um quadro para cada atividade e serão apresentados os enunciados das questões com percentual de acerto abaixo de 50%, acompanhado de comentários específicos e, eventualmente, do processo de resolução ou da resposta de algum aluno.

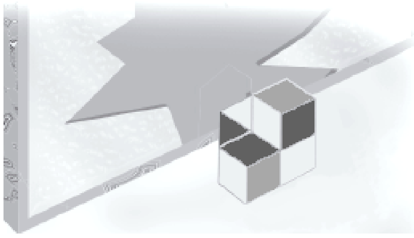
Aplicação 2 – Teste de Sondagem			
Questão	Aspecto(s) da HVE	Conceitos de Geometria	Percentual de acerto
1	Desdobramento.	—	50%
2	Corte.	Volume	50%
3	Rotação.	Faces opostas	28%
4	Rotação.	Vista superior	56%
5	Rotação.	—	78%
6	Rotação e Desdobramento.	Faces opostas	61%

FIGURA 39 – Quadro: Aplicação 2 – Teste de Sondagem

A partir dos resultados do Teste de Sondagem, observa-se que este é um grupo que possui a HVE razoavelmente desenvolvida, com alguma dificuldade localizada em rotação ou no conceito de faces opostas.

Na questão 3, houve dificuldade na interpretação da questão, além de dificuldade de visualização.

3) Nos cubos da pilha abaixo, que está em frente a um espelho quebrado, as faces opostas têm a mesma cor. Qual das quatro alternativas apresentaria a imagem correta da pilha no espelho, se ele não estivesse quebrado?



(A) (B) (C) (D)

FIGURA 40 – Questão 3 do Teste de Sondagem

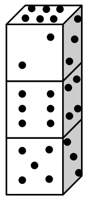
Este grupo de alunos não demonstrou tanto interesse quanto o da primeira aplicação, mas a participação foi razoável. Alguns se ausentavam da sala e depois retornavam. Isto prejudicou nossa análise atitudinal e qualitativa.

Aplicação 2 – Lista 1			
Questão	Aspecto(s) da HVE	Conceitos de Geometria	Percentual de acerto
1	Rotação.	—	56%
2	Desdobramento.	—	78%
3	Corte.	Secção plana	61%
4	Rotação.	Faces opostas	11%
5	Corte e Desdobramento.	—	72%
6	Desdobramento.	Faces opostas	5,6%

FIGURA 41 – Quadro: Aplicação 2 – Lista 1

Houve dificuldade em rotação e faces opostas, mas o que também induziu os alunos ao erro na questão 4 foi o fato de considerarem que a soma das faces opostas de cada dado seria igual a 7, o que não é verdade neste caso.

4) A figura abaixo mostra três dados iguais.



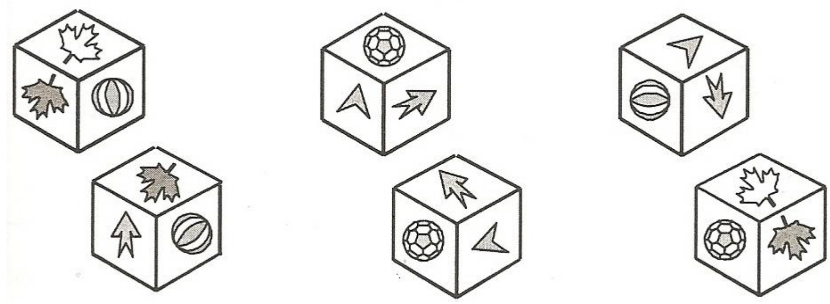
O número da face que é base inferior da coluna de dados:

(A) é 1. (B) á 2. (C) é 4. (D) é 6. (E) pode ser 1 ou 4.

FIGURA 42 – Questão 4 da Lista 1

Na questão 6, novamente aparece a noção de faces opostas, mas a dificuldade da questão vai além disto. O desdobramento e as posições relativas das figuras das faces elevam o grau de complexidade da questão.

6) Considere que os seis desenhos na figura abaixo representam o mesmo cubo.



Desenhe uma planificação deste cubo.

FIGURA 43 – Questão 6 da Lista 1

Aplicação 2 – Lista 2			
Questão	Aspecto(s) da HVE	Conceitos de Geometria	Percentual de acerto
1	Rotação.	—	100%
2	Corte e Desdobramento.	Secção plana	21%
3	Corte.	—	7,7%
4	Rotação.	—	77%
5	Desdobramento.	—	54%

FIGURA 44 – Quadro: Aplicação 2 – Lista 2

Nesta lista, mesmo com material de apoio disponibilizado em todas as questões, tanto sob a forma de arquivos no *software* quanto de materiais concretos, houve dificuldade localizada no aspecto de corte.

Novamente, observamos que os alunos não utilizaram simultaneamente o material concreto e o *software*, optando pelo recurso tecnológico.

Porém, mesmo com o recurso tecnológico, não obtiveram bom resultado na questão 2. A dificuldade estava em compreender as noções de corte e secção plana.

2) Somente uma das figuras a seguir representa a planificação de um cubo na qual está destacada a sua interseção com um plano. Qual?

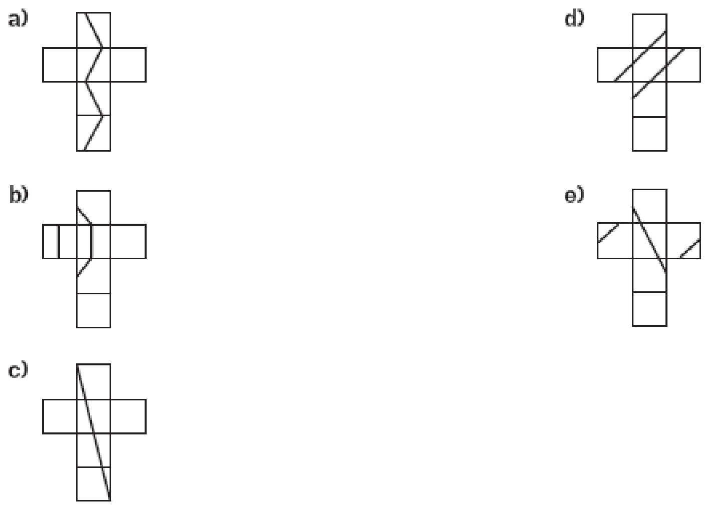


FIGURA 45 – Questão 2 da Lista 2

Quanto à questão 3, os alunos afirmaram que realmente houve dificuldade de visualização, novamente em relação à secção plana.

3) Abaixo à esquerda temos o desenho de um sólido cortado por um plano. Que figura representa o polígono que é a seção resultante deste corte? Marque um (X) na resposta correta.

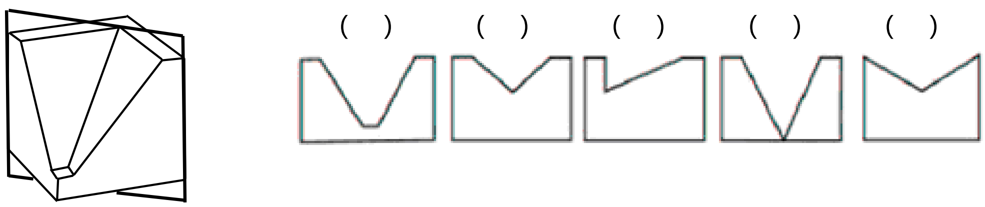


FIGURA 46 – Questão 3 da Lista 2

Aplicação 2 – Lista 3			
Questão	Aspecto(s) da HVE	Conceitos de Geometria	Percentual de acerto
1	Rotação.	Vistas	100%
2	Desdobramento.	—	36%
3	Corte.	—	82%
4	Rotação.	—	45%
5	Desdobramento.	—	64%
6	Corte e desdobramento	—	73%

FIGURA 47 – Quadro: Aplicação 2 – Lista 3

Nesta Lista, observamos que houve um aumento do percentual de acerto significativo na questão de corte, em relação a Lista 2 (7,7% a 82%). Este aumento pode ser devido às explicações dadas, com auxílio de material concreto, pelas professoras em formação. Já na questão 2 notamos uma queda do percentual de acerto da questão cujo aspecto era o desdobramento. Este fato, porém, pode refletir uma dificuldade com o conceito de planificação.

2) Um cubo pode ser construído, a partir dos dois pedaços de papelão apresentados em uma das alternativas a seguir, bastando apenas dobrar nas linhas tracejadas e unir nas linhas contínuas. Esses dois pedaços são:

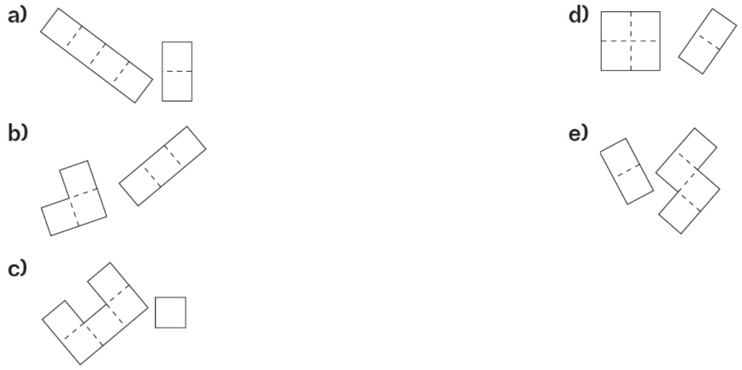
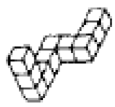


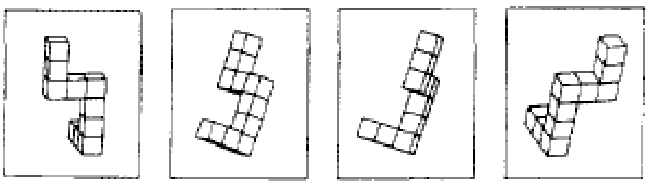
FIGURA 48 – Questão 2 da Lista 3

Na questão 4, o problema foi novamente a desatenção na leitura do enunciado. A maioria marcou apenas uma das alternativas corretas.

4) Considere a figura a seguir, que representa uma peça formada por vários cubos agrupados.



Entre as figuras abaixo, faça um (X) naquela(s) que **não** representa(m) esta mesma peça.



( ) ( ) ( ) ( )

FIGURA 49 – Questão 4 da Lista 3

Ao longo desta aplicação, a observação foi prejudicada pela presença intermitente de alunos. Novamente, os materiais concretos não foram aproveitados por eles, e surtiram mais efeito quando as professoras em formação os utilizaram para explicar. Sem dúvida, o material concreto foi um recurso importantíssimo para nós, professores em formação, nas explicações dos conceitos de vistas, faces opostas e secções planas.

10. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O leitor deve ter observado que não fizemos comparações entre os diferentes grupos nos quais aplicamos as atividades. Isto foi proposital. Conforme já mencionamos, este é um estudo de caso e, como tal, não se presta a análises estatísticas nem tampouco a generalizações. Nossa intenção, desde o início, foi chamar atenção para o problema. Não tivemos intenção de resolvê-lo em uma aula, mas gostaríamos de despertar nos alunos e professores o interesse pelo assunto.

Talvez até tal interesse já exista por parte dos professores. O que há é carência de estudos na área, ou pelo menos falta de divulgação desses estudos. Prova é que, ao oferecermos um minicurso sobre este assunto na III Semana de Matemática do IFF, houve um número de inscritos acima do esperado. Pudemos constatar, no dia da aplicação, que a maioria absoluta era de professores de Matemática.

Este minicurso trouxe grande satisfação para nós, pois percebemos que realmente existe uma demanda sobre o assunto por parte dos professores, e é claro que isto afetará diretamente os alunos. Além disso, ao aplicarmos as atividades, pudemos notar que as dificuldades de visualização espacial dos professores não estão muito distantes daquelas demonstradas por seus alunos. “Culpa” dos professores? Não! Segundo nossa pesquisa (SEGADAS, 2004), houve um tempo em que a habilidade de visualização espacial era tida como um “dom”, e os professores presentes ao curso cresceram com esta ideia. O importante é que eles não querem reproduzir este modelo em seus alunos.

Voltando aos objetivos, em primeiro lugar podemos dizer, pela experiência que tivemos com a aplicação das atividades, que o material concreto e o recurso tecnológico são ambos muito importantes, mas devem ser usados separadamente, em momentos distintos.

Quanto a incentivar o aluno com dificuldade de visualização tridimensional, acreditamos que, se ele não se sentiu incentivado, pelo menos teve o horizonte ampliado, conheceu novos recursos para ajudá-lo a exercitar a visualização. Talvez alcance o “estado de prontidão” (KRUTETSKII, 1976), ou seja, deixe de “bloquear” a Geometria Espacial e retire o rótulo de “nunca vou aprender isso”.

Em relação ao aspecto inato que as pessoas atribuem à HVE, ainda há um longo caminho pela frente. Entre os que participaram do minicurso, discentes ou docentes, pudemos perceber, pelas perguntas que fizemos ou pela fala espontânea de ambos os grupos, que ainda falta muita informação. Por isso, nossa primeira sugestão para continuidade do trabalho seria incluir atividades sobre HVE em programas de formação de professores.

Por último, de acordo com nossa pesquisa, o uso de recursos adequados, tais como *softwares*, materiais manipuláveis, desenhos de modelos (SORBY, 1999), contribuem para o desenvolvimento da HVE. Devemos ter em mente, porém, que tal desenvolvimento é um processo. Nada será resolvido em uma só aula. Desde o início, nossa intenção era despertar a atenção para esta possibilidade, e acreditamos ter conseguido.

O mais interessante para nós foi descobrir estes aspectos da HVE, que estão presentes nas questões mais usuais de Geometria Espacial, mas dos quais nada ou pouco se fala. Por exemplo, para responder à pergunta “Quantas arestas tem um cubo?”, temos que fazer uma rotação mental do cubo. (Caso contrário, corremos o risco de esquecer alguma aresta.) No cálculo da área de superfícies, exercício comum em Geometria Espacial, temos que ter ideia de sua planificação – e aqui entra o desdobramento. Já o corte, ou a secção plana, aparece em exercícios clássicos de cálculo de volume em que a altura do sólido não é dada. Ela precisa ser encontrada utilizando outros elementos do sólido, como arestas ou alturas da face. Para chegar a esta relação entre a altura do sólido e os elementos dados, é preciso visualizar o corte no qual tais elementos aparecem.

A realização desse trabalho nos proporcionou um crescimento profissional e científico significativo. As pesquisas, as leituras, a escrita e o contato com materiais que normalmente não são utilizados em sala de aula foram momentos de grande aprendizado.

Embora tenhamos aplicado as atividades a grupos de Ensino Médio e de professores em formação, este trabalho não pode parar por aqui. Seria interessante que fosse aplicado a outros grupos, para que uma analise mais aprofundada sobre o assunto possa ser feita.

As pesquisas que por ventura forem realizadas sobre este tema serão de grande valia, visto que o assunto não é explorado em livros didáticos e nem em sala de aula pelo professor, apesar de sua importância.

Espera-se, com este trabalho, alertar e semear ideias sobre a importância da utilização de recursos pedagógicos na construção de conhecimentos matemáticos e no desenvolvimento da habilidade de visualização espacial.

REFERÊNCIAS

ADÁNEZ, Gerardo Prieto; VELASCO, Angela Dias. *Construção de Um Teste de Visualização a Partir da Psicologia cognitiva*. Avaliação Psicológica, Porto Alegre, v. 1, n. 1, p. 39-47, 2002. Disponível em: <http://pepsic.bvs-psi.org.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1677-04712002000100005&lng=pt&nrm=>. Acesso em: abr. 2010.

ALVES, Érica V. *As habilidades na Solução de problemas em Matemática*. Projeto Teia do Saber. Santos, SP: UNISANTA, 2004. Disponível em: <http://cursos.ufp.edu.br/bage/espfisqui/wp-content/files/1_3.pdf>. Acesso em: abr. 2010.

ANDRADE, José Antonio; NACARATO, Adair Mendes. *Tendências didático-pedagógicas no ensino de Geometria: um olhar sobre os trabalhos apresentados nos ENEM's*. Educação Matemática em Revista, Ano 11, n. 17, p. 61-70, dez. 2004.

ARNHEIM, Rudolf. *A Plea for Visual Thinking*. New Essays on the Psychology of Art. Berkeley, CA: University of California Press, 1986. p. 135–152. Disponível em: <http://www.scribd.com/doc/38896300/A-Plea-for-Visual-Thinking>. Acesso em: jun. 2010.

ÁVILA, Geraldo. *Geometria e Imaginação*. Revista do Professor de Matemática (RPM), n. 3, p. 25-28. São Paulo: SBEM, 1983.

BESSOT, D. *Problèmes de représentation de l'espace*. In: Enseignement de la géométrie, Bulletin Inter-IREM, n. 23, p. 33-40. Lyon: Ed. IREM de Lyon, 1983.

BKOUCHE, R.; SOUFLET, M. *Axiomatique, formalisme, théorie*. In: Enseignement de La géométrie, Bulletin Inter-IREM, n. 23, p. 3-24. Lyon: Ed. IREM de Lyon, 1983.

BODNER, George M.; GUAY, Roland B. *The Purdue Visualization of Rotations Test*. In: The Chemical Educator, v.2, n. 4. New York: Springer-Verlag, 1997. Disponível em: <http://journals.springer-ny.com/chedr>. Acesso em: abr. 2010.

BONGIOVANNI, Vincenzo; JAHN, Ana Paula. *Explorações em Geometria Espacial com o software CABRI 3D*. In: IV HTEM - Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática, 2008, Rio de Janeiro. Rio de Janeiro: LIMC da UFRJ, 2008. v. 1, p. 1-6. Disponível em: <www.limc.ufrj.br/htem4/papers/30.pdf>. Acesso em: set. 2009.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais (1ª a 4ª séries): matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais (5ª a 8ª séries): Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Parecer CEB/CNE 15/98 : Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. 1998a. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/1998/pceb015_98.pdf>. Acesso em: ago. 2010.

BRASIL. Ministério da educação, Secretaria de Educação Básica. *Orientações curriculares para o Ensino médio. Volume 2: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.* Brasília: MEC/SEB, 2006.

CABEZAS, José María Arias; SÁEZ, Ildefonso Maza. *Uso de las Tecnologías de La Información y la Comunicación para la ESO y los Bachilleratos*. La Gaceta de La Real Sociedad Matematica Española, V. 9, n. 1, p. 223–243. RSME, 2006. Disponível em: <http://www.rsme.es/gacetadigital/abrir.php?id=551>. Acesso em: set. 2009.

COSTA, Acylena Coelho et al. *Análise do Ensino de Geometria Espacial*. (Comunicação Científica) In: Encontro Gaúcho de Educação Matemática, X, 2009, Ijuí/RS. Disponível em: <http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/CC/CC_49.pdf>. Acesso em: mar. 2010.

EISENBERG, Ann. *An Educational Program for Paper Sculpture: a Case Study in the Design of Software to Enhance Children's Spatial Cognition*. 1999. 140f. Dissertação (Ph. D. em Ciência da Computação) - University of Colorado, Boulder, 1999. Disponível em: <http://l3d.cs.colorado.edu/~eisenbea/Home/Home.html>. Acesso em: jun. 2010.

ELIOT, J.; SMITH, I. M. *An international directory of spatial tests*. Windsor, Berks: NFER-NELSON, 1983. (Out of print book.) Disponível em: <http://drc01.drc.ohiolink.edu/handle/2374.OX/30660>. Acesso em: abr. 2010.

ELIOT, J. *Models of Psychological Space: Psychometric, Developmental, and Experimental Approaches.* New York: Springer-Verlag, 1987.

ERICKSON, F. *Qualitative methods in research on teaching*. In: M. C. WITTROCK (Ed.). Handbook of research on teaching. New York, NY: Macmillan, 1986, p. 119-161.

GRAVINA, Maria Alice. *Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o Aprendizado de Geometria.* VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação. Belo Horizonte, MG, Anais do VII SBIE, nov. 1996. p. 1-13. Disponível em: <http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/artigos/a2.zip>. Acesso em: out. 2009.

HOFFER, A. *Geometry is more than proof*. Mathematics teacher, p. 74, jan. 1981.

IMENES, Luis Marcio; LELLIS, Marcelo. *Matemática paratodos, 5ª série / 6º ano*. 2ed. Rio de Janeiro: Editora Scipione, 2006. *Problemas e exercícios complementares.* Disponível em: <http://www.scipione.com.br/ap/didaticos/matematica_paratodos2/pec5.htm>. Acesso em: dez. 2009.

INEP. Ministério da Educação. Exame Nacional do Ensino Médio, 2005, prova amarela. Brasília: INEP, 2005. Disponível em: <http://www.inep.gov.br/download/enem/2005/provas/amarela.pdf>. Acesso em: dez. 2009.

INEP. Ministério da Educação. Exame Nacional do Ensino Médio, 2007, prova amarela. Brasília: INEP, 2007. Disponível em: <http://www.inep.gov.br/download/enem/2007/PROVA%20ENEM_2007_FINALLL_AMARELA.pdf>. Acesso em: dez. 2009.

ISSMAEL, Linda S. Cartografia Cognitiva: Um Instrumento de Espacialização de Informações Geográficas. 2008. 270f. Dissertação (Doutorado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Programa de Pós-graduação em Geografia, Rio de Janeiro, 2008. Disponível em: <http://www.ppgg.igeo.ufrj.br/index.php?option=com_content%task=view&id=6528&Itemid=49>. Acesso em: jun. 2010.

KAHLE, Jane. B. *The disadvantaged majority: Science education for women*. AETS Outstanding Paper for 1983. Burlington, NC: Carolina Biological Supply Company, 1983. Disponível em: <http://eric.ed.gov/PDFS/ED242561.pdf>. Acesso em: jun. 2010.

KALEFF, Ana Maria. *Vendo e entendendo Poliedros: do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças e outros materiais concretos*. 2ed. Niterói: EDUFF, 2003.

KÖSA, Temel. *The effects of virtual and physical manipulatives on students' spatial visualization skills*. Karadeniz Technical University, Turkey. Fourth YERME Summer Scholl (YESS-4) on August 18-24, 2008. Disponível em: <http://yess4.ktu.edu.tr/YermePappers/temel%20kosa.pdf>. Acesso em: mar. 2010.

KRUTETSKII, Vadim A. *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. Chicago: The Univertsity of Chicago Press, 1976.

LEAN, Glen; CLEMENTS, M. A. *Spatial Ability, Visual Imagery, and Mathematical Performance*. Educational Studies in Mathematics, V. 12, p. 267-299. D. Reidel Publishing Co.: Dordrecht, Holland and Boston, U.S.A, Copyright 1981. Disponível em: <http://www.springerlink.com/content/g07845g6l2724086/fulltext.pdf>. Acesso em: mar. 2010.

LIMA, Elon Lages et al. *Exame de Textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio*. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

LINN, Marcia C.; PETERSEN, Anne C. *Emergence and characterization of sex differences in spatial ability: A meta-analysis*. Child Development, V. 56, N. 6, dec. 1985. p. 1479-1498. Disponível em: <http://www.engr.psu.edu/awe/misc/ARPs/VisualSpatialWeb%2003_22_05.pdf>. Acesso em: jun. 2010.

MAFALDA, Rovilson et al. *Avaliação da Eficácia da Reestruturação dos Cursos de Desenho para Engenharia na Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*. Disponível em:<http://toledo.pcc.usp.br/pdf/cobenge99_cursos.pdf>. Acesso em: jun. 2010.

MCGEE, Mark G. *Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences*. Psychological Bulletin, 86(5), 1979. p. 889-918.

MERRIAM, S. *Case study research in education: A qualitative approach.* San Francisco, CA: Jossey-Bass, 1988.

MOHLER, James L. A Review of Spatial Ability Research. Engineering Design Graphics Journal. V. 72. N. 3. Spring, 2008. p. 19-30. Disponível em: <http://www.edgj.org/index.php/EDGJ/article/view/49/48>. Acesso em: jun. 2010.

NÓVOA, A. *As ciências da educação e os processos de mudança*. In: NÓVOA, A. et al. Ciências de educação e mudança. Porto: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 1991. p. 18-67.

PARSYSZ, B. *Representations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au Lycée. Contribution à l'étude de la relation voir/savoir*. 1989. Thèse (Doctorat) – Université Paris VII, Paris, 1989.

PONTE, João Pedro M. da. *Estudos de caso em educação matemática*. Bolema: Boletim de Educação Matemática, Vol. 19, Ano 25, 2006. p. 105-132. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/06-Ponte%20(Estudo%20caso).pdf>. Acesso em: jun. 2010.

RICHIT, Adriana. *Projetos em Geometria Analítica Usando Software de Geometria Dinâmica*: *repensando a Formação Inicial Docente em Matemática*. 2005. 215 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005. Disponível em: <http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/dissetacoes/richit_a_me_rcla.pdf>. Acesso em: set. 2009.

RICHIT, Adriana; TOMKELSKI, Mauri Luís; RICHIT, Andriceli. *Software Wingeom e Geometria Espacial: Explorando Conceitos e Propriedades*. In: IV HTEM - Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática, 2008, Rio de Janeiro. Rio de Janeiro: LIMC da UFRJ, 2008. v. 1, p. 1-6. Disponível em: <*www.limc.ufrj.br/htem4/papers/26.pdf>. Acesso em: set. 2009.*

ROMMEVAUX, M. P. *Le discernement des plans dans une situation tridimensionnelle*. Educação Matemática Pesquisa – Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP, n. 1, p. 13-65. São Paulo: PUC/SP, 1999.

SALTHOUSE, Timothy A. et al. *Age and experience effects in spatial visualization*. Developmental Psychology, V.26, issue 1, 1990. p. 128-136. Disponível em: <http://www.jimdavies.org/summaries/salthouse1990.html>. Acesso em: jun 2010.

SANTOS, Eduardo Toledo. *Implementando testes de visualização espacial no Moodle.* In: Anais do Primeiro Moodle Moot Brasil. São Paulo: Universidade Presbiteriana Mackenzie, p.127-135, 2007. Disponível em: <http://ead.mackenzie.br/mackenzievirtual/file.php/4/resumos/MoodleMoot_ANAIS_2007.pdf>. Acesso em: abr. 2010. (Versão impressa: ISSN 1982-1611)

SBM. XIX Olimpíada Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1997. Disponível em: <http://www.obm.org.br/opencms/provas_gabaritos/>. Acesso em: dez. 2009.

SBM. XXVI Olimpíada Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2004. Disponível em: <http://www.obm.org.br/opencms/provas_gabaritos/>. Acesso em: dez. 2009.

SBM. OBMEP, Banco de Questões, 2006, Nível 2, 4ª Lista. Rio de Janeiro: SBM, 2006. Disponível em: < http://www.obmep.org.br/export/sites/default/Banco_Questoes/2006/N2/16nivel2.pdf >. Acesso em dez. 2009.

SEGADAS, Claudia; PEREIRA, Márcia. M.; SILVA, Fátima. *Explorando Atividades de Visualização e Representação de Figuras no Espaço*. In: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), 2004, Recife - PE. Anais do VIII ENEM, 2004.

SHERMAN, J. A. *Predicting mathematical performance in high school girls and boys*. Journal of Educational Psychology, V. 71, p. 242-249, 1979.

SILVA, Marly Terezinha Quadri Simões. *Geometria Descritiva – Uma Experiência Didática*. Disponível em: <http://www.degraf.ufpr.br/artigos_graphica/GEOMETRIADESCRITIVA.pdf>. Acesso em jun. 2010.

SORBY, Sheryl A. *Developing 3-D Spatial Visualization Skills.* Engineering Design Graphics Journal. V. 63, n. 2, p. 21–32. Spring, 1999. Disponível em: <http://www.edgj.org/index.php/EDGJ/article/viewFile/126/122>. Acesso em jun. 2010.

TARTRE, Lindsay Anne. *Spatial skills, gender, and mathematics*. In: FENNEMA, E. H.; LEDER, G. C. (Eds.), Mathematics and Gender; New York, NY: Teachers College Press, 1990. p. 27-59.

TAVARES, Salvador. *De Archimedes a Cavalieri: uma proposta alternativa para a construção do conceito de volume de uma pirâmide.* 1998. 115f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro, 1998.

VELASCO, Ângela Dias. *Avaliação da aptidão espacial em estudantes de engenharia como instrumento de diagnóstico do desempenho em desenho técnico*. São Paulo : EPUSP, 2002. 12 p. (Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP, Departamento de Engenharia de Construção Civil, BT/PCC/322)

VELASCO, Ângela Dias; KAWANO, Alexandre. *A Aptidão Espacial é um Dom?* Teia do Saber 2006 – Metodologias de Ensino da Matemática. Guaratinguetá: UNESP, 2006. Disponível em: <http://www.feg.unesp.br/extensao/teia/aulas/AulasModulo03-pdf/AptidaoEspacial.PDF>. Acesso em mar.2010.

VELASCO, Ângela Dias; ADÁNEZ, Gerardo Prieto. *Exercícios informatizados para auxílio no desenvolvimento da visualização espacial*. Curitiba: UFPR, 2007. Disponível em: <www.degraf.ufpr.br/artigos_graphica/**EXERCICIOS**.pdf>
Acesso em: dez/2009.

VIDALETTI, Vangiza Bortoleti Berbigier. *Ensino e aprendizado da geometria espacial a partir da manipulação de sólidos.* Lajeado, 2009. 107f. Dissertação (Mestrado Profissionalizante no Ensino de Ciências Exatas) - Centro Universitário Univates, Lajeado, 2009.

WANG, H-C.; CHANG, C-Y.; LI, T-Y. *The Comparative Efficacy of 2D- versus 3D-based Media Design for Influencing Spatial Visualization Skills*. Computers in Human Behavior, 07, p. 1943-1957, 2007. Disponível em: <http://www3.nccu.edu.tw/~li/Publication/pdf/chb2007.pdf>. Acesso em: jun. 2010.

YIN, R. *Case study research: Design and methods.* Newbury Park, CA: Sage, 1984.

APÊNDICES

APÊNDICE A: ENTREVISTAS

ENTREVISTAS

Perguntas

1) Qual(is) disciplina(s) o(a) professor(a) ministra? Para qual(is) curso(s)? Há quanto tempo leciona na área?

2) O que o(a) professor(a) entende como habilidade de visualização espacial?

3) Em sua opinião, a habilidade de visualização espacial é um "dom", ou pode ser desenvolvida?

3) A habilidade de visualização espacial é importante para sua disciplina?

4) Os alunos que ingressam em sua disciplina têm dificuldade de visualização espacial? Em sua opinião, o que poderia ser feito para que os alunos chegassem bem preparados?

5) O(A) professor(a) usa material de apoio em suas aulas? De que tipo?

Respostas

Professor A

Trabalha com a disciplina de Geometria Descritiva, dando aula no curso superior de Arquitetura.

Segundo este professor a HVE é uma habilidade que pode ser desenvolvida, "às vezes parece que essa habilidade é nata *(sic)*", mas ele "acha que é possível trabalhá-la e desenvolvê-la *(sic)*". Além disso, afirma que a habilidade de visualização espacial não só é importante para a sua disciplina, como não existiria sem ela, uma vez que a HVE "retrata o espaço, o trabalho no espaço *(sic)*".

Foi perguntado ao professor A se os alunos que ingressam em sua disciplina têm dificuldade de visualização espacial e se haveria algo que pudesse ser feito para que esses alunos chegassem mais bem preparados na faculdade. Ele acredita que eles "chegam mesmo com dificuldade como em qualquer disciplina que é trabalhada no concreto *(sic)*", e que pelo fato dos alunos não possuírem outras experiências, "por exemplo, às vezes ele tem pouca experiência no estudo de plano, então para ele trabalhar no espaço que são três dimensões há essa dificuldade *(sic)*". Já para os alunos ingressarem mais bem preparados, ele acredita que seja possível "se for trabalhado melhor o plano, as funções na matemática do Ensino Médio *(sic)*".

Em relação ao uso de material de apoio nas aulas, este professor afirma utilizá-los, trabalhando "tanto com a parte visual como na parte digital, tanto na parte do concreto *(sic)*", ele "leva os diedros para sala de aula para que os seus alunos possam sentir a presença do espaço, como também, na parte dos recursos digitais *(sic)*".

Professor B

Atualmente dá aulas de Geometria II no curso de Licenciatura em Matemática, mas leciona Geometria há 26 anos e Desenho há 23 anos, ministrando Desenho Geométrico e também Desenho Técnico.

Para ele, o que se entende por habilidade de visualização espacial é "você ler o enunciado de uma questão e conseguir imaginar a figura *(sic)*". Além disso, acredita que a HVE pode ser desenvolvida, sendo que "algumas pessoas já nascem com essa habilidade *(sic)*". Ele "já teve alunos assim *(sic)*" e ele próprio "é assim *(sic)*". "Eu percebi que em momento algum no tempo de escola eu tive alguma preparação para isso, mas eu conseguia visualizar as figuras, tendo um bom desempenho principalmente na geometria espacial *(sic)*". Porém, ele acredita que essa habilidade "possa ser desenvolvida sim com atividades adequadas, embora muitas vezes isso não seja feito na escola *(sic)*".

Segundo este professor, na geometria espacial a HVE é muito importante e os alunos ingressantes na sua disciplina têm "muita dificuldade em visualização espacial, oriundas do ensino básico *(sic)*", e "a maior dificuldade destes alunos é em questões de geometria espacial, é eles lerem o enunciado e conseguir esboçar a figura, sendo duas as dificuldades, primeiro eles conseguirem elaborar uma imagem mental, pois muitas vezes a gente tem a imagem mental e não faz um desenho adequado, mas esse desenho, mesmo inadequado corresponde a uma imagem mental correta fazendo com que eles consigam resolver o problema, porém há alunos que não conseguem nem a imagem mental e muito menos fazer a representação gráfica *(sic)*".

Para os alunos chegarem mais bem preparados, eles deveriam ter atividades específicas. "Primeiro é a questão do desenho ... quando ele começasse a trabalhar com geometria na escola básica começasse com modelos concretos para que o aluno pudesse observar a visão deste modelo e isso se tornar mais especifico no Ensino Médio. Quando ele começar a estudar a geometria espacial é imprescindível o professor trabalhar com o protótipo, pedir que ele construa o protótipo, mostrar os detalhes no protótipo, e fazer atividades que partam deste para uma visualização plana. Trabalhar com o aluno questões em perspectiva, pois ela corresponde a uma previsão, como por exemplo, porque uma linha de um ângulo que é reto no modelo protótipo, ali no desenho não aparece como ângulo reto. No entanto, para o aluno fazer essa leitura ele precisa ter algumas noções de perspectiva e muitos dos professores não têm, e quando muitas vezes têm, desconsideram essa necessidade do aluno, como se ela não existisse. *(sic)*"

Em relação ao uso de material de apoio em suas aulas, ele "usa e sempre usou. Em geometria descritiva também, levo material de apoio, uso o diedro, mando os alunos construírem os modelos. Até em algumas questões que trazem construções mais elaboradas eu peço que eles construam o modelo daquela questão de geometria espacial, para que com isso eles possam entender algumas relações. *(sic)*"

Professor C

O professor entrevistado trabalha com as disciplinas de Construções Geométricas e Geometria Descritiva I e II, sendo a I no primeiro período e a II no segundo período do curso superior de Licenciatura em Matemática. Vem trabalhando com estas disciplinas desde 2004.

Segundo o professor, "a habilidade de visualização espacial é toda capacidade de resolução de problemas relativo às representações gráficas de elementos tridimensionais no plano e vice - versa *(sic)*". Ao ser perguntado se a HVE é uma habilidade que pode ser desenvolvida, ele diz que "com certeza, esta é uma habilidade que deve ser desenvolvida ao longo do tempo".

O professor afirma que a HVE é muito para sua disciplina, mas também para as demais disciplinas que estão voltadas para as aplicações matemáticas. Além disso, diz que muitos dos alunos que ingressam em sua disciplina têm dificuldade de visualização espacial.

Foi perguntado a este professor o que poderia ser feito para que os alunos chegassem mais bem preparados para a sua disciplina. Ele apontou que, "como a habilidade visual do espaço é uma competência que envolve inúmeras habilidades que devem ser desenvolvidas ao longo do tempo, então para que os alunos fossem mais bem preparados estas habilidades deveriam estar sendo desenvolvida desde o ensino básico *(sic)*".

Em relação ao uso de material de apoio em suas aulas, "uso recursos visuais preparados em PowerPoint, apresentados em projeção multimídia, utilizo também planos de projeção em cartolinas, madeiras e até acetato *(sic)*".

Professor D

O professor entrevistado trabalha com a disciplina de Desenho Técnico em diversos cursos de nível técnico de uma Instituição Federal.

Para este, a habilidade de visualização espacial é "a capacidade de uma pessoa visualizar um objeto sem vê-lo na sua frente *(sic)*". Além disso, ele afirma com certeza que "a HVE é uma capacidade que pode ser desenvolvida, através dos vários exercícios você faz, você a desenvolve *(sic)*", porém ele "acha também que esta capacidade já existe na pessoa *(sic)*".

Sobre a importância da HVE em sua disciplina, o professor disse que "ela é importante porque ele trabalha com projeções ortogonais" que, segundo ele, é a "forma de representar um objeto nas suas diversas vistas e um objeto ou um sólido geométrico normalmente tem seis faces, então a projeção ortogonal trabalha representando-as. Quando recebemos estas, numa forma geral são três vistas, vista de frente, vista superior e vista lateral, ao olhá-las separadamente é preciso ter a visão de como ela estará depois de pronta, qual será sua formação depois de pronta, sua formatação. Então na verdade você vê o objeto através das três vistas que são representadas em duas dimensões, mas você o entende de forma espacial como objeto pronto *(sic)*".

Segundo o professor D, os alunos que ingressam em sua disciplina "de início têm dificuldade em visualização espacial, mas depois dos demais exercícios que ele trabalha a visualização, esta dificuldade tende a diminuir *(sic)*". Ele trabalha da seguinte forma: "dou as três vistas do objeto e através disso, eu ensino os diversos passos que os alunos têm que dar para representar este objeto em três dimensões que são as perspectivas *(sic)*". Ele afirma também que "ao desenhar este objeto transformando as duas dimensões em três dimensões o aluno está fazendo um exercício manual que mais tarde vai ajudar no raciocínio mental para desenvolver este objeto na forma espacial *(sic)*".

Em relação ao que poderia ser feito para que os alunos ingressantes em sua disciplina tivessem uma boa preparação, o professor afirmou que ele "não enxerga esta dificuldade como um problema, com exercícios os alunos acabam condicionando o seu raciocínio a esta forma de interpretação *(sic)*", o que ele vê como solução é o "exercício de passar das três vistas para a perspectiva de forma manual, criando nele este procedimento de raciocinar *(sic)*".

Ao ser perguntado sobre o uso de material de apoio em suas aulas, o entrevistado falou que "no exercício, ele usa papel milimetrado para fazer as projeções ortogonais, papel reticulado para fazer as perspectivas isométricas e usa exercícios onde ele coloca duas das vistas do objeto para que o aluno faça uma terceira através destas duas, com isso o aluno tem a forma como ele deverá obter as medidas para esta terceira vista e isso já vai desenvolvendo esta capacidade de visão espacial *(sic)*". Sobre o uso de tecnologia, o que ele faz é "usar transparências e às vezes quando dá aula no laboratório ele usa o *AutoCAD (sic)*".

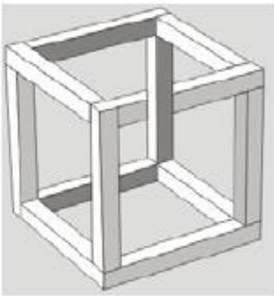
APÊNDICE B: ATIVIDADES INICIAIS

Disciplina: Monografia II Orientadora: Carla Antunes Fontes
Alunas: Carina da Silva Gomes e Karine Gomes Barreto

TESTE DE SONDAGEM

1) Representar objetos tridimensionais em uma folha de papel nem sempre é tarefa fácil. O artista holandês Escher (1898-1972) explorou essa dificuldade criando várias figuras planas impossíveis de serem construídas como objetos tridimensionais, a exemplo da litografia **Belvedere**, reproduzida ao lado.

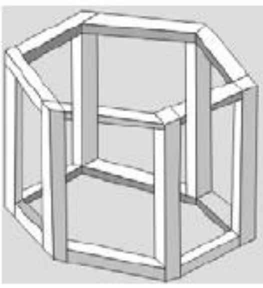
Considere que um marceneiro tenha encontrado algumas figuras supostamente desenhadas por Escher e deseje construir uma delas com ripas rígidas de madeira que tenham o mesmo tamanho. Qual dos desenhos a seguir ele poderia reproduzir em um modelo tridimensional real?

A


D

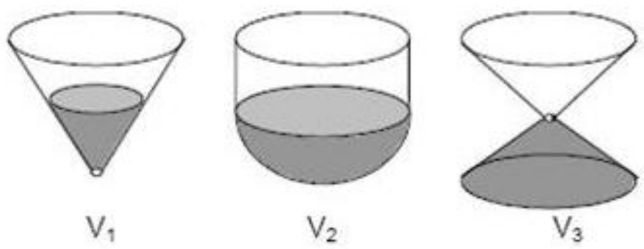

B


E


C


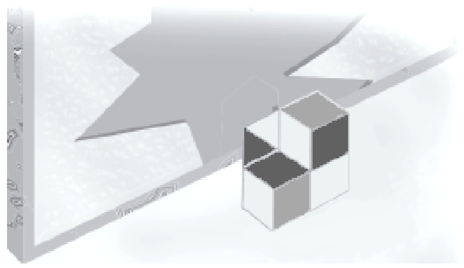
FONTE: QUESTÃO 1) ENEM, 2007.

2) Os três recipientes da figura têm formas diferentes, mas a mesma altura e o mesmo diâmetro da boca. Neles é colocado líquido até a metade de sua altura, conforme indicado nas figuras. Representando por V_1, V_2 e V_3 o volume de líquido em cada um dos recipientes, marque a alternativa correta:



(A) $V_1 = V_2 = V_3$ (B) $V_1 < V_3 < V_2$ (C) $V_1 = V_3 < V_2$ (D) $V_3 < V_1 < V_2$ (E) $V_1 < V_2 = V_3$

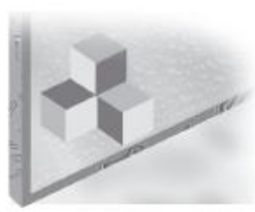
3) Nos cubos da pilha abaixo, que está em frente a um espelho quebrado, as faces opostas têm a mesma cor. Qual das quatro alternativas apresentaria a imagem correta da pilha no espelho, se ele não estivesse quebrado?



(A)


(B)

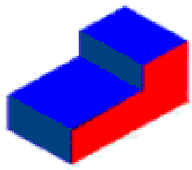

(C)

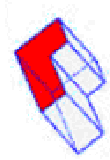

(D)


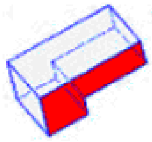
4) Imagine uma pirâmide apoiada no solo sobre sua base pentagonal. Desenhe a vista superior simplificada da pirâmide.

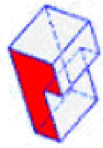
FONTES: QUESTÃO 2) ENEM, 2005; QUESTÕES 3) E 4) IMENES, 2006 (adaptadas).

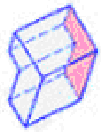
5) Abaixo aparece o desenho de um objeto com uma face destacada em vermelho. Marque onde esta mesma face aparece corretamente destacada, no desenho do objeto sob outro ponto de vista.



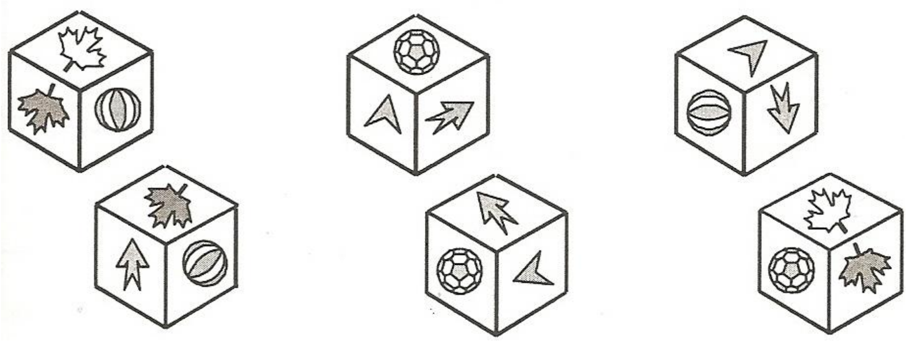
(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

6) Considere que os seis desenhos na figura abaixo representam o mesmo cubo.



Associe cada figurinha com a que está desenhada na face oposta a ela:

 (1) ( ) 

 (2) ( ) 

 (3) ( ) 

 (4) ( ) 

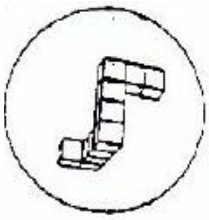
 (5) ( ) 

 (6) ( ) 

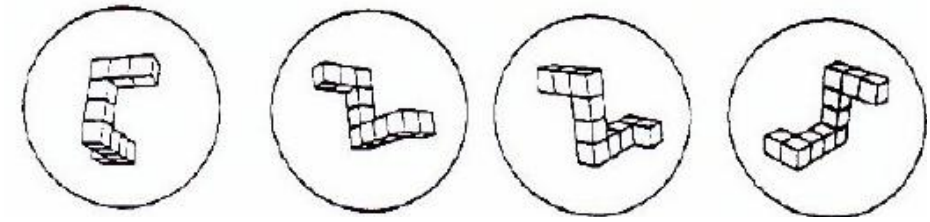
FONTES: QUESTÃO 5) VELASCO, 2007; QUESTÃO 6) KALEFF, 2003 (adaptadas).

ATIVIDADE 1

1) Considere a figura a seguir, que representa uma peça formada por vários cubos agrupados.

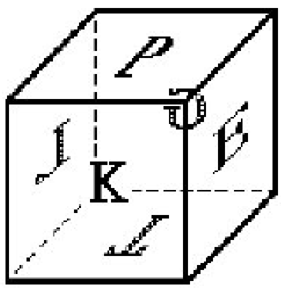


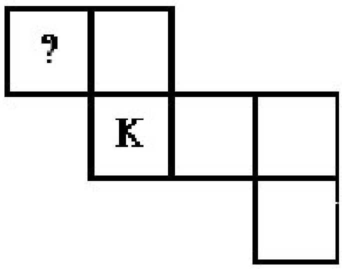
Entre as figuras abaixo, faça um (X) naquela(s) que **não** representa(m) esta mesma peça.



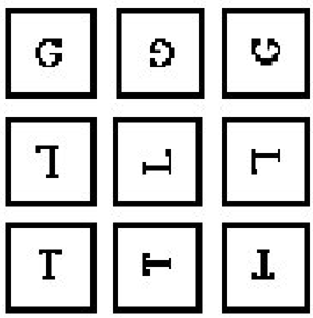
( ) ( ) ( ) ( )

2) O cubo da esquerda aparece desdobrado à direita. Que letra corresponde à face marcada com a interrogação? Em que posição a letra está?





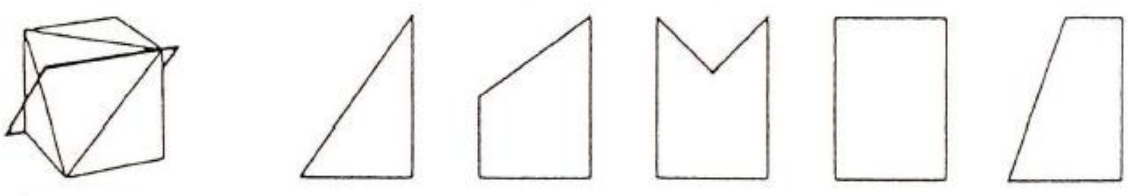
Marque a alternativa correta com um X.



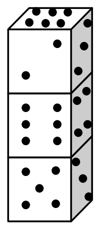
FONTES: QUESTÃO 1) MRT; QUESTÃO 2) TVZ (adaptadas).

3) Abaixo à esquerda temos o desenho de um sólido cortado por um plano. Que figura representa o polígono que é a seção resultante deste corte? Marque um (X) na resposta correta.

( ) ( ) ( ) ( ) ( )



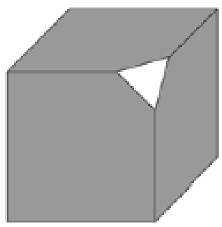
4) A figura abaixo mostra três dados iguais.



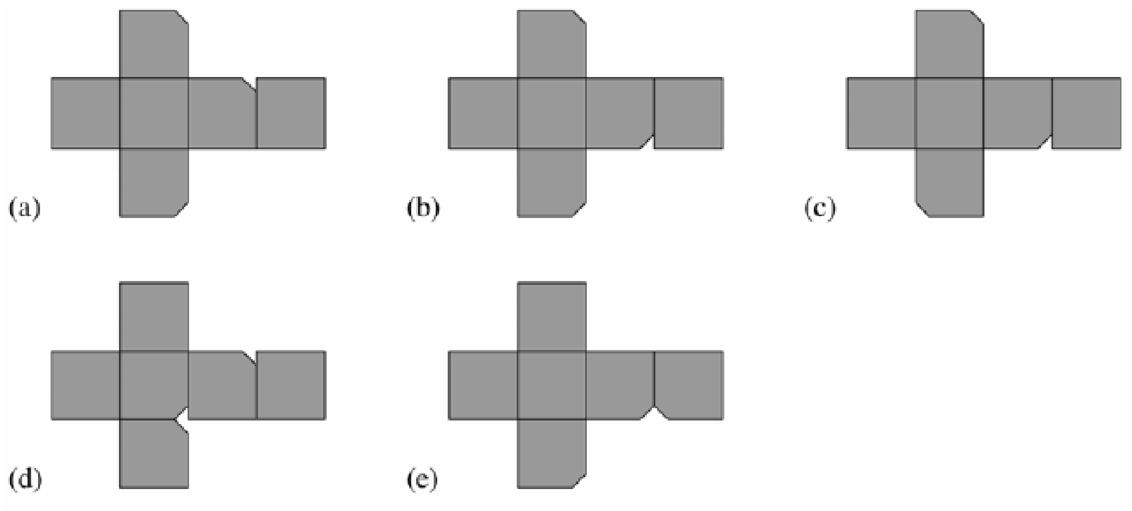
O número da face que é base inferior da coluna de dados:

(A) é 1. (B) á 2. (C) é 4. (D) é 6. (E) pode ser 1 ou 4.

5) Cortamos um canto de um cubo, como mostrado na seguinte figura.

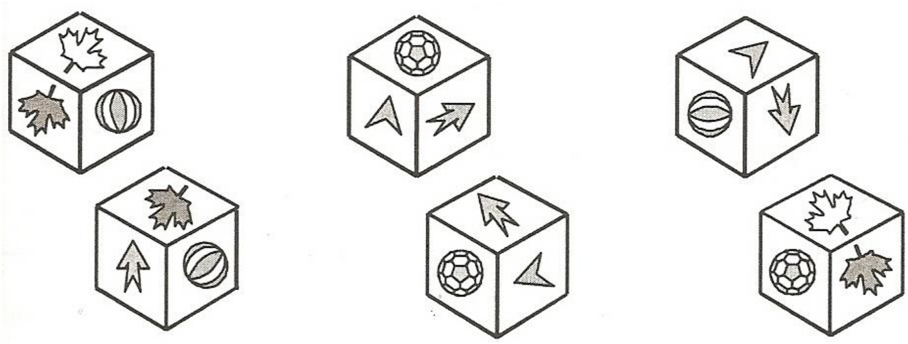


Qual das representações abaixo corresponde ao que restou do cubo?



FONTES: QUESTÃO 3) MCT; QUESTÃO 4) XIX OBM; QUESTÃO 5) OBMEP

6) Considere que os seis desenhos na figura abaixo representam o mesmo cubo.



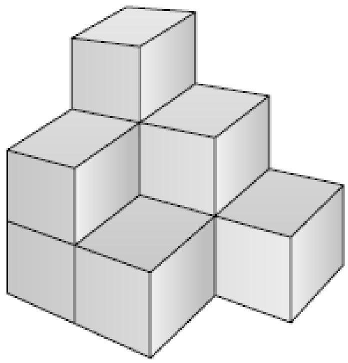
Desenhe uma planificação deste cubo.

FONTE: QUESTÃO 6) KALEFF, 2003 (adaptada).

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
DISCIPLINA: MONOGRAFIA II ORIENTADORA: CARLA

ATIVIDADE 2

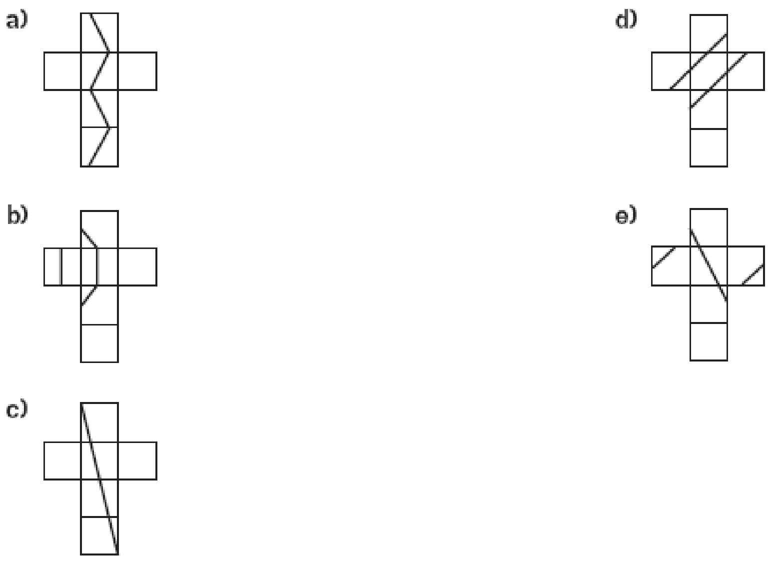
1) Não há cubos escondidos atrás da pilha da figura.



Quantos cubos há na pilha?

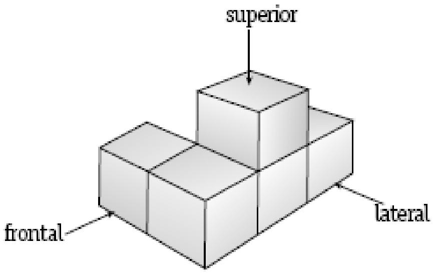
(A) 10 (B) 9 (C) 12 (D) 11

2) Somente uma das figuras a seguir representa a planificação de um cubo na qual está destacada a sua interseção com um plano. Qual?

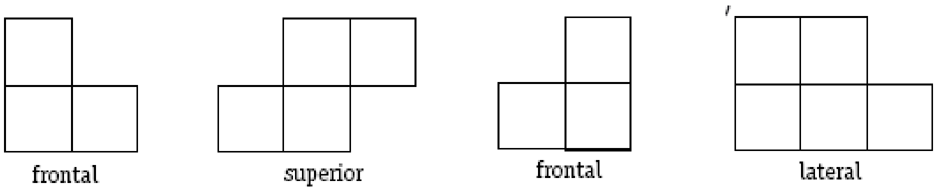


FONTES: QUESTÃO 1) IMENES, 2006; QUESTÃO 2) XXIII OBM.

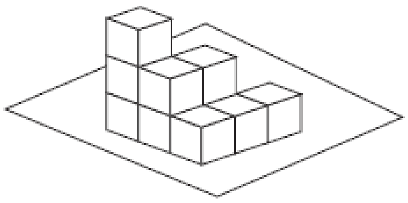
3) Abaixo, há vistas simplificadas da pilha de cubos da figura. Qual(is) é(são) a(s) vista(s) correta(s)?



( ) ( ) ( ) ( )



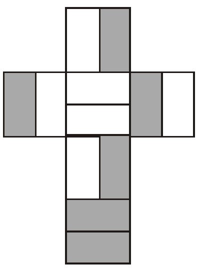
4) Vários caixotes cúbicos de plástico azul ficaram armazenados ao ar livre, na posição indicada na figura abaixo, na qual apenas um dos caixotes não é visível.

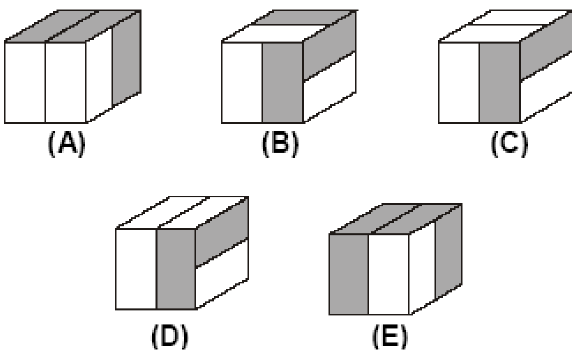


Com o tempo, o plástico exposto ao ar perdeu sua cor, tornando-se cinza. Ao desfazer a pilha, verificaremos que o número de caixotes com três faces azuis e três cinzentas será:

(A) 4 (B) 5 (C) 3 (D) 2 (E) 1

5) Para montar um cubo, Guilherme recortou um pedaço de cartolina branca e pintou de cinza algumas partes, como na figura abaixo, à esquerda. Qual das figuras representa o cubo construído por Guilherme?





FONTES: QUESTÃO 3) IMENES, 2006; QUESTÃO 4) XXI OBM; QUESTÃO 5) OBMEP, 2006. .

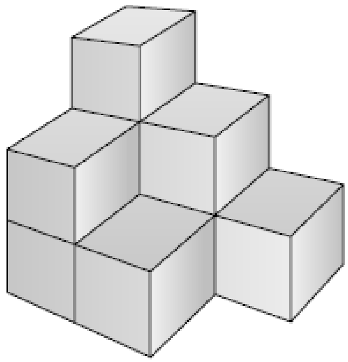
APÊNDICE C: ATIVIDADES REFORMULADAS

O Teste de Sondagem permaneceu o mesmo, e a Lista 1 é igual à Atividade 1. Portanto, apresentaremos aqui a Lista 2 e a Lista 3.

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
DISCIPLINA: MONOGRAFIA II ORIENTADORA: CARLA
ALUNAS: CARINA DA SILVA GOMES E KARINE GOMES BARRETO

LISTA 2

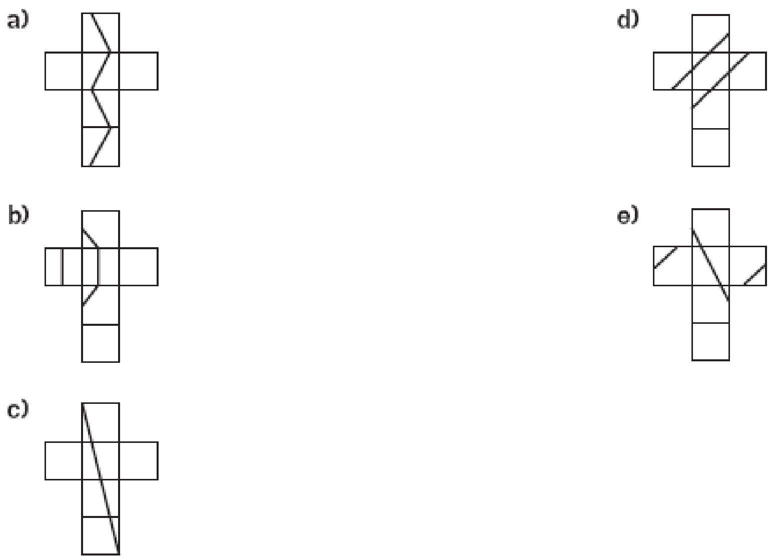
1) Não há cubos escondidos atrás da pilha da figura.



Quantos cubos há na pilha?

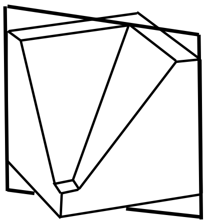
(A) 10 (B) 9 (C) 12 (D) 11

2) Somente uma das figuras a seguir representa a planificação de um cubo na qual está destacada a sua interseção com um plano. Qual?

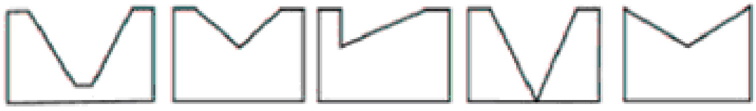


FONTES: QUESTÃO 1) IMENES, 2006; QUESTÃO 2) XXIII OBM

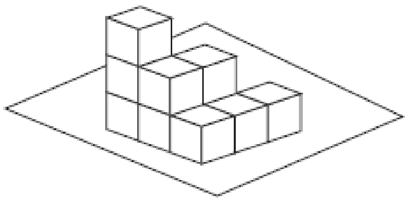
3) Abaixo à esquerda temos o desenho de um sólido cortado por um plano. Que figura representa o polígono que é a seção resultante deste corte? Marque um (X) na resposta correta.



(   )   (   )   (   )   (   )   (   )



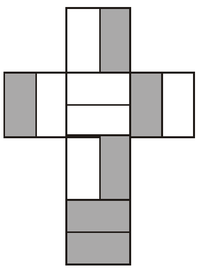
4) Vários caixotes cúbicos de plástico azul ficaram armazenados ao ar livre, na posição indicada na figura abaixo, na qual apenas um dos caixotes não é visível.

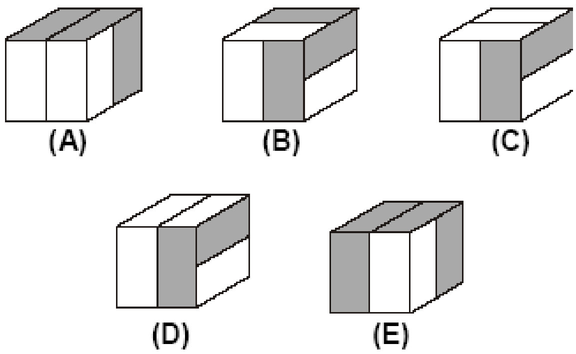


Com o tempo, o plástico exposto ao ar perdeu sua cor, tornando-se cinza. Ao desfazer a pilha, verificaremos que o número de caixotes com três faces azuis e três cinzentas será:

(A) 4   (B) 5   (C) 3   (D) 2   (E) 1

5) Para montar um cubo, Guilherme recortou um pedaço de cartolina branca e pintou de cinza algumas partes, como na figura abaixo, à esquerda. Qual das figuras representa o cubo construído por Guilherme?



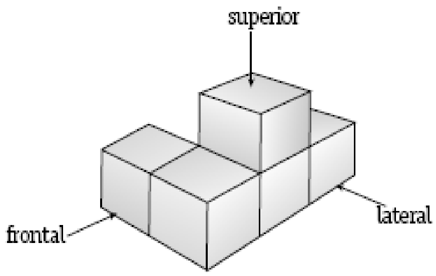


FONTES: QUESTÃO 3) MCT; QUESTÃO 4) XXI OBM; QUESTÃO 5) OBMEP, 2006.

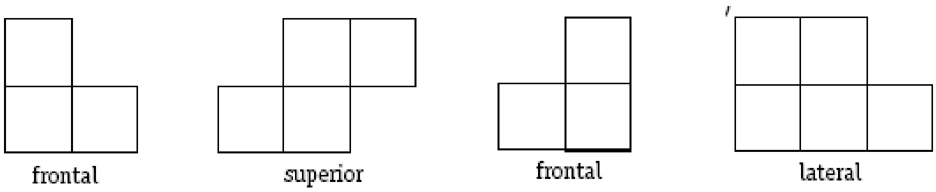
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
DISCIPLINA: MONOGRAFIA II ORIENTADORA: CARLA
ALUNAS: CARINA DA SILVA GOMES E KARINE GOMES BARRETO

LISTA 3

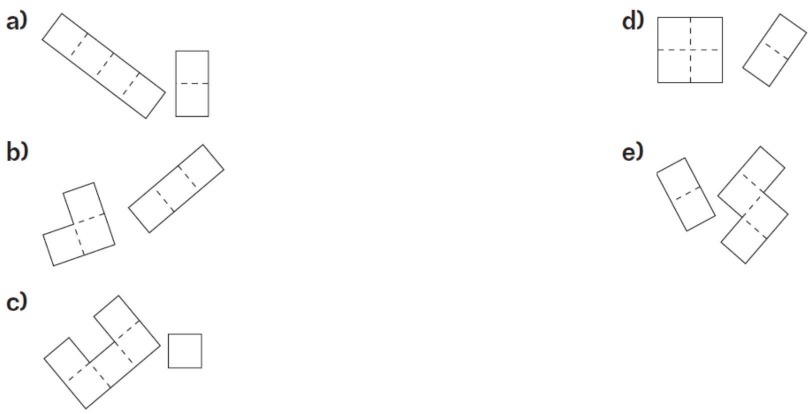
1) Abaixo, há vistas simplificadas da pilha de cubos da figura. Qual(is) é(são) a(s) vista(s) correta(s)?



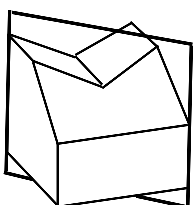
( ) ( ) ( ) ( )



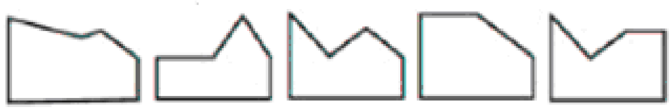
2) Um cubo pode ser construído, a partir dos dois pedaços de papelão apresentados em uma das alternativas a seguir, bastando apenas dobrar nas linhas tracejadas e unir nas linhas contínuas. Esses dois pedaços são:



3) Abaixo à esquerda temos o desenho de um sólido cortado por um plano. Que figura representa o polígono que é a seção resultante deste corte? Marque um (X) na resposta correta.

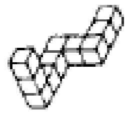


( ) ( ) ( ) ( ) ( )

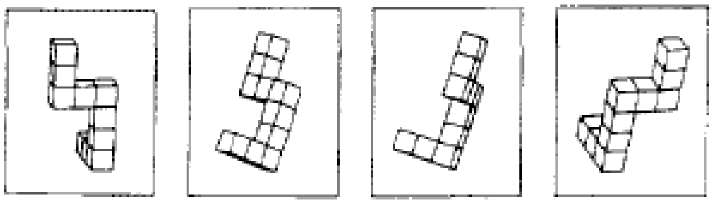


FONTES: QUESTÃO 1) IMENES, 2006; QUESTÃO 2) XXVI OBM; QUESTÃO 3) MCT.
QUESTÃO 4) MRT; QUESTÃO 5) TVZ; QUESTÃO 6) OBMEP, 2006 (modificada).

4) Considere a figura a seguir, que representa uma peça formada por vários cubos agrupados.

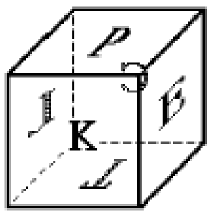


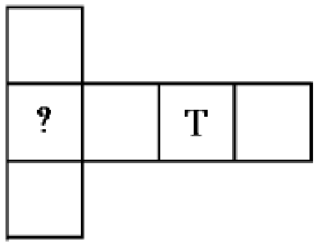
Entre as figuras abaixo, faça um (X) naquela(s) que **não** representa(m) esta mesma peça.



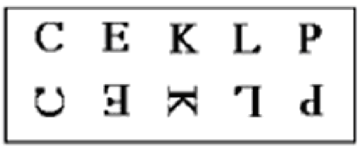
( ) ( ) ( ) ( )

5) O cubo da esquerda aparece desdobrado à direita. Que letra corresponde à face marcada com a interrogação? Em que posição a letra está?

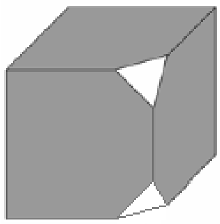




Marque a alternativa correta com um X.

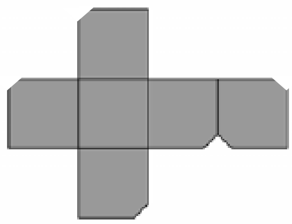


6) Cortamos dois cantos de um cubo, como mostrado na seguinte figura.

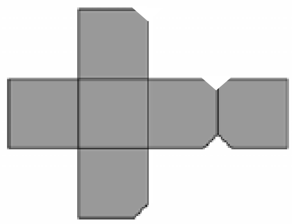


Qual das representações abaixo corresponde ao que restou do cubo?

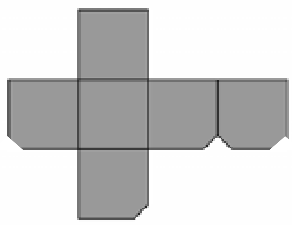
(A)



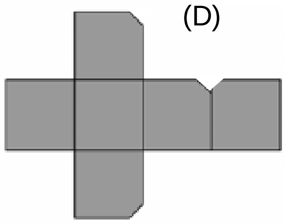
(B)



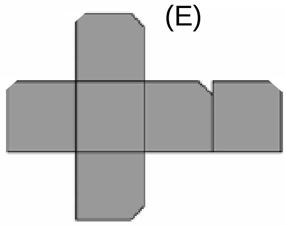
(C)



(D)



(E)



ANEXOS

ANEXO A: GEOMETRIA E IMAGINAÇÃO

Geometria e Imaginação

Geraldo Ávila

Departamento de Matemática
Universidade de Brasília
70910 – Brasília – DF

A ideia de que a importância da Matemática reside no raciocínio lógico-dedutivo que ela emprega é uma noção bastante generalizada; e não apenas os leigos pensam assim, pois muitos professores de Matemática também acreditam ser o encadeamento lógico das demonstrações a essência do pensamento matemático.

Isto, todavia, é uma visão parcial, já que o pensamento matemático vai muito além do raciocínio lógico-dedutivo. Em seus aspectos mais criativos ele repousa sobretudo na intuição, no raciocínio plausível e nos recursos heurísticos, na imaginação e na visualização geométrica. Muito frequentemente, o raciocínio demonstrativo apenas legitima o conhecimento já adquirido através desses outros recursos – os mais férteis da criatividade intelectual.

Há muitos exemplos que podem ser aduzidos para ilustrar esse fato, alguns até célebres na História da Matemática, como várias das descobertas feitas por Arquimedes, notadamente a da fórmula do volume da esfera. Entretanto, deixando de lado esses exemplos, vamos descrever e comentar aqui um episódio interessante e pitoresco, referente a um problema de Geometria, proposto numa prova para mais de um milhão de alunos. Um deles resolveu corretamente o problema, precisamente porque soube usar sua imaginação, enquanto seus professores e colegas, caíram em erro por que não se valeram da visualização.

Tudo se passou nos Estados Unidos, no ano de 1981, quando uma organização chamada Serviço de Testes Educacionais (Educational Testing Service) ministrou um exame para cerca de 1,3 milhão de estudantes do 2º grau. O interesse de um aluno em fazer tal exame, que é oferecido anualmente, reside em que a classificação nele obtida é usada para pleitear certas bolsas de estudos distribuídas em todo o país. Nesse exame foi proposto o equivalente à seguinte questão:

Seja ABCDE uma pirâmide de base quadrada, cujas laterais são triângulos equiláteros; e seja FGHI um tetraedro regular cujas faces sejam (triângulos equiláteros) congruentes às faces laterais da pirâmide (Fig. 1). Suponhamos que se juntem os sólidos de maneira que a face ADE da pirâmide coincida com a face GIH do tetraedro, o resultado sendo o poliedro ABCDEF (Fig. 2) Quantas faces tem este poliedro?

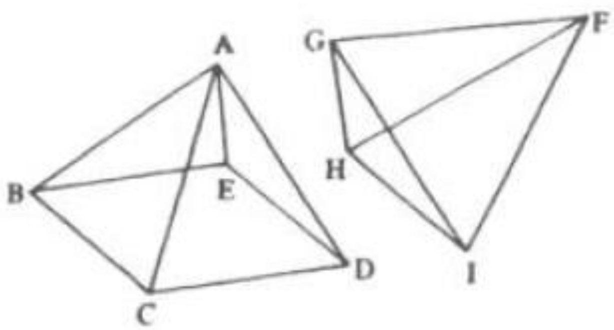


Fig.1

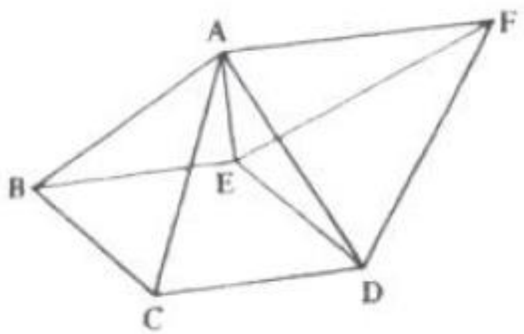


Fig.2

Ao proporem esta questão os organizadores da prova usaram de raciocínio puramente lógico: “a pirâmide tem 5 faces e o tetraedro 4, num total de 9 faces; ao se juntarem os dois sólidos, 2 faces desaparecem, logo o poliedro restante terá 7 faces. Esta era a resposta que eles julgavam correta e que esperavam dos alunos que fizeram a prova.

Entretanto, um dos alunos, Daniel Lowen, de 17 anos, da Escola “Cocoa Beach”(Cocoa Beach High School), na Flórida, respondeu que o novo sólido tinha 5 faces. Mais tarde ele explicou que a questão lhe pareceu a principio extremamente simples, envolvendo apenas contagem de faces, uma soma, uma subtração e nenhuma fórmula. Refletindo um pouco mais e considerando a justaposição dos dois sólidos, através da visualização espacial, ocorreu-lhe a ideia de que não apenas duas faces desapareceriam, mas as faces ACD e FGI ficariam num mesmo plano, o mesmo devendo acontecer com as faces ABE e FGH. Desta maneira, no sólido resultante, ABEF seria uma única face e não duas, o mesmo ocorrendo com ACDF.

Ao chegar em casa, após o exame, Daniel Lowen construiu modelos dos sólidos para certificar-se que tinha acertado a resposta. No entanto, quando recebeu o resultado do exame, ele constatou que sua resposta fora marcada como errada! Face a isto e considerando que seus examinadores não tivessem cometido qualquer engano, seu pai (que é engenheiro mecânico da empresa

Rockwell) começou a estudar o problema, tentando descobrir o erro do filho. Não o conseguindo, acabou encontrando duas demonstrações diferentes de que o filho estava certo!. Os organizadores do exame foram notificados e tiveram que aceder às provas apresentadas, após submeterem a questão a uma comissão de professores, os quais, antes de saberem da solução do aluno Daniel Lowen, acharam, todos eles, que a resposta devia mesmo ser 7!

Toda essa história foi contada pelo jornal “The New York Times”, num artigo reproduzido pelo jornal “San Francisco Chronicle” em sua edição de 18.03.81, que nos chegou às mãos pelo Prof. Said Siddki. Ainda um dado pitoresco dessa historia: a Educacional Testing Service gastou um adicional de 110.000 dólares para comunicar a todos os alunos que fizeram o exame o novo resultado, após o reajuste que se fez necessário (sem prejudicar os que deram a resposta como sendo 7, o que é correto, pois podemos considerar faces num mesmo plano, embora seja mais natural, ao referirmos às faces de um poliedro, entendermos faces em planos distintos). Um dos organizadores do exame disse também que no futuro eles terão o cuidado de construir modelos físicos de questões semelhantes ou fazer simulações em computadores.

O leitor deve atentar bem para o processo de descoberta usado por Daniel Lowen, todo ele baseado na imaginação e na visualização geométrica. Procedimentos como esse são frequentes nas atividades de pesquisa dos matemáticos, cujas descobertas quase sempre se processam dessa maneira. Os grandes matemáticos, quando tratam de Pedagogia, insistem sempre na importância de se estimular a imaginação do aluno, de se valer o professor do raciocínio heurístico, dos argumentos de plausibilidade e das analogias que possam eventualmente ser exploradas nos processos de aprendizado e descoberta. O raciocínio lógico-dedutivo é, como já dissemos, apenas um dos aspectos do pensamento matemático.

David Hilbert (1862-1943), considerado, ao lado de Henri Poincaré (1854-1912), um dos maiores matemáticos dos últimos cem anos, produziu uma obra matemática extraordinária, com resultados notáveis e profundos - em Álgebra, Análise, Geometria, Física, Matemática, Fundamentos e Filosofia da Matemática. Em 1920 esse grande matemático deu um curso de Geometria na sua Universidade (de Göttingen, na Alemanha) e, mais tarde, as notas desse curso foram buriladas e publicadas em forma de livro (em 1932) em co-autoria com H.

Colin-Vossen. Esse livro, que existe em tradução inglesa, chama-se “Geometria e Imaginação” (donde tiramos o titulo do presente artigo) e nele Hilbert nos ensina, com sua autoridade de grande mestre, a riqueza dos fatos geométricos vistos intuitivamente e com imaginação.

É claro, todavia, que só imaginação também não basta para estabelecer verdades matemáticas. Os examinadores de Daniel Lowen certamente não iriam mudar de opinião, enquanto não vissem uma demonstração conclusiva do teorema por ele imaginado. Mas, como dissemos no início, a atividade matemática, longe de se resumir nos encadeamentos lógicos das demonstrações, é o resultado de uma dosagem equilibrada dos vários recursos do raciocínio.

Vamos agora concluir este artigo com uma demonstração do resultado de Daniel Lowen. O leitor poderá descobrir outras, talvez até mais simples que esta que encontramos.

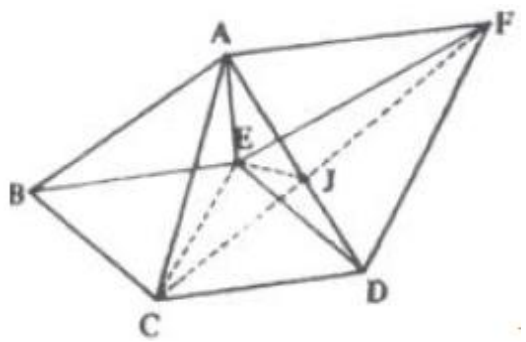


Fig 3

Provaremos que as faces ACD e ADF se fundem numa única face $ACDF$ (Fig. 2).

Para isto basta mostrar que o ponto F está no mesmo plano que A, C e D. Seja J o ponto médio do segmento AD (Fig. 3). Vamos estabelecer o resultado desejado provando que C, J e F são pontos da mesma reta. Os segmentos FJ, EJ e CJ são perpendiculares ao segmento AD, pois cada um desses três segmentos é mediatriz de um triangulo equilátero de base AD. Isto mostra que os pontos C, E, F e J estão no mesmo plano, precisamente o plano perpendicular ao segmento AD, passando pelo ponto médio deste segmento. Então $ECJF$ é um quadrilátero plano, cujos lados podem ser calculados facilmente em termos da aresta **a** das faces triangulares dos poliedros dados inicialmente (Fig. 4) Da lei dos senos aplicada aos triângulos EJF e EJC obtemos, respectivamente,

$sen\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\,sen\,\mathbf{x}$ e $sen\,\beta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\,sen\,\mathbf{y}$. (1)

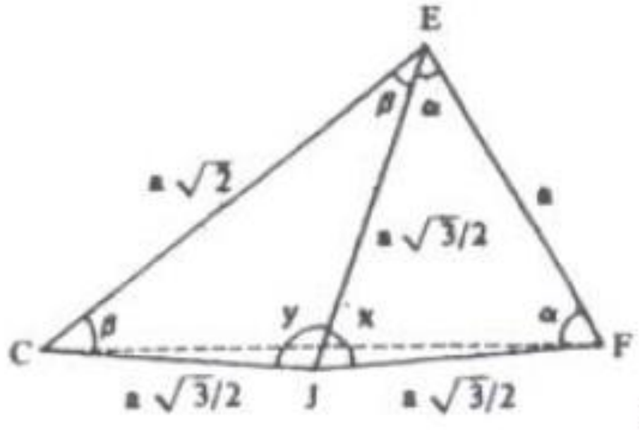


Fig. 4

Por outro lado, o triangulo isósceles EJF nos mostra que 2α e **x** são ângulos suplementares, de sorte que $sen\,2\alpha = sen\,\mathbf{x}$. Analogamente, $sen\,2\beta = sen\,\mathbf{y}$. Então,

$2\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha = sen\,\mathbf{x}$ e

$2\,sen\,\beta\,cos\,\beta = sen\,\mathbf{y}$. (2)

Levando (1) em (2) obtemos

$$cos\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ e } cos\,\beta = \sqrt{2/3}\,.$$

Então, $sen\,\alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha} = cos\,\beta$

Isso mostra que os ângulos α e β são complementares, logo o triangulo CEF é retângulo em E. Portanto,

$$\mathrm{CF} = \sqrt{CE^2 + EF^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} =$$

$$= a\sqrt{3} = \mathrm{CJ} + \mathrm{JF}.$$

Concluímos daqui que o ponto J está alinhado com C e F, como queríamos demonstrar.

A demonstração de que as faces ABE e AEF (Fig. 3) se fundem numa única face ABEF é inteiramente análoga.

Testes em que um gênio pode falhar

Henri Poincaré (1854-1912) foi um dos homens a dominar toda a Matemática do seu tempo, proeza inteiramente impossível nos dias de hoje. Ele possuía uma memória prodigiosa. Quando era aluno, não tomava notas de aula: gravava fórmulas, definições, enunciados e demonstrações na cabeça. Se lia um artigo ou um livro, era capaz de se lembrar da página, da linha e das exatas palavras com as quais certa afirmação estava escrita. Elaborava mentalmente seus trabalhos de pesquisa matemática, mesmo os que envolviam laboriosos cálculos. Quando se sentava para redigí-los, já estavam acabados; escrevia sem apagar, consertar ou revisar nada, tudo num só jato. Nessas ocasiões, não o incomodava o barulho em volta, nada perturbava sua concentração.

Certa feita, no auge da sua carreira matemática e de sua extraordinária vocação literária, que o permitia escrever belos livros de divulgação cientifica, os quais lhes asseguraram um lugar na Academia Francesa de Letras (além da Academia de Ciências, de que fazia parte), Poincaré se submeteu a uma bateria de testes de inteligência do tipo Binet. Seu desempenho nesses testes foi considerado como o de um débil mental. Evidentemente, isto diz mais sobre os testes do que sobre o imortal Poincaré.

Mas como pode um gênio ser reprovado num teste de inteligência? Em parte porque esses testes são elaborados por pessoas de inteligência média, as quais não percebem certas possibilidades que são óbvias para os super-dotados. Mas a razão principal é que as maioria das questões nesses testes exigem intuição e não dedução, palpites em vez de raciocínio lógico. Ilustremos estes pontos com dois exemplos. Consideremos as questões abaixo:

a) Que número está faltando na sequência 1, 2, 4, 5?

b) Um relógio marca 8 horas e 20 minutos. Que hora marcará se trocarmos a posição do ponteiro grande com a do pequeno?

A maioria das pessoas responderá “3” para a primeira pergunta e “4 horas e 40 minutos” para a segunda. Mas, do ponto de vista lógico, as respostas certas são “não sei”e “hora nenhuma”, respectivamente. Com efeito, a pergunta a) apenas “induz”uma resposta mas não contém elementos que nos permitam concluir que esta é a única resposta possível. A partir do seu enunciado, qualquer maneira de completar a serie é aceitável, logo a única resposta logicamente adequada é “não sei”. A pergunta b) contém um erro grosseiro. Trocando as posições dos ponteiros, o menor ficará exatamente sobre o número 4 e aí o ponteiro grande só poderia estar sobre o 12. Em hora nenhuma teremos o ponteiro pequeno sobre o 4 e o grande sobre o 8. (Na realidade, esta pergunta chegou a fazer parte dos testes Binet durante algum tempo.)

ANEXO B: QUESTÕES DE TESTES

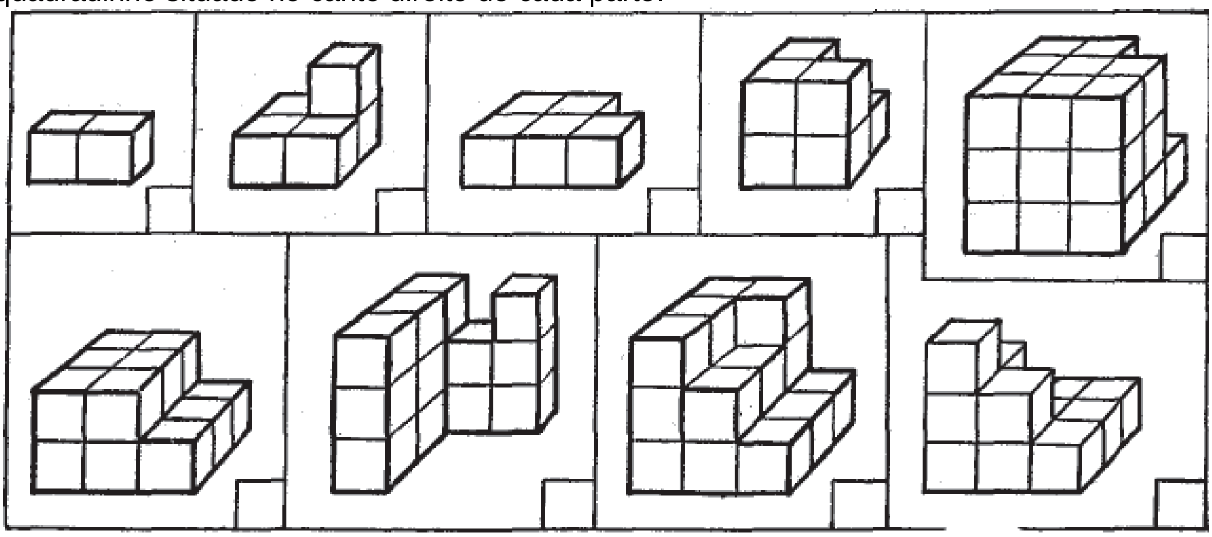
FONTE:
ELIOT, J.; SMITH, I. M. *An international directory of spatial tests*. Windsor, Berks: NFER-NELSON, 1983. (Out of print book.) Disponível em: <http://drc01.drc.ohiolink.edu/handle/2374.OX/30660>. Acesso em: abr. 2010. (Tradução)

p. 251

Dearborn's Group Tests of Intelligence, Series 2D (1920)

Subteste 7A: Contagem de blocos
Status: Fora de prelo.

Instruções do teste e exemplos
Conte o número de blocos representados em cada desenho e escreva o número no quadradinho situado no canto direito de cada parte.



Informação sobre a fonte:
Autor(es): Walter F. Dearborn
Publicado por The J. B. Lippincott Company, East Washington Square, Philadelphia, Pa. 19105
Desenvolvido para fins de testagem acadêmica.
Conteúdo: 1 questionário; nenhum exemplo; 9 itens; sem limite de tempo para resolução
Pontuação: Número de itens corretos
Referências: Dearborn, W. F. Repeated measurement of the physical and mental development of school children. *School and Society*, 1924, 20. 515-518.
Hildreth, G. *Bibliography of Mental Tests and Rating Scales*. New York, N.Y.: The Psychological Corporation, 1939.

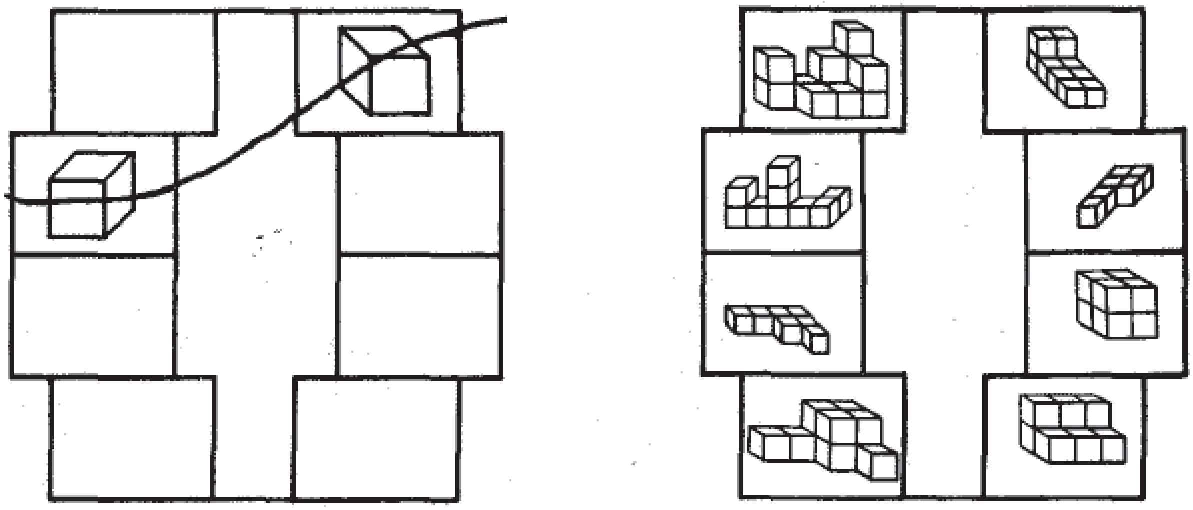
p. 252

International Group Mental Test: Form B, Book I (1926)

Subteste 1: Contagem de blocos

Status: Fora de prelo.

Instruções do teste e primeiro e vigésimo exemplos



A tarefa é ligar as duas pilhas (como ilustrado à esquerda) que têm o mesmo número de cubos.

Informação sobre a fonte:
Autor(es): Stuart C. Dodd
Distribuído por The Princeton Book Store, Princeton, N.J. 08540
Desenvolvido para testagem de aptidão
Conteúdo: 2 questionários; 20 exemplos; 21 itens; 7 minutos
Pontuação: Número de itens corretos
Referências: Dodd, S. C. *Statement Concerning Research on an Intelligence Scale for International Use*. Princeton, N. J.: Princeton Book Store, 1926.
Hildreth, G. *Bibliography of Mental Tests and Rating Scales*. New York, N.Y.: The Psychological Corporation, 1939.

p. 254

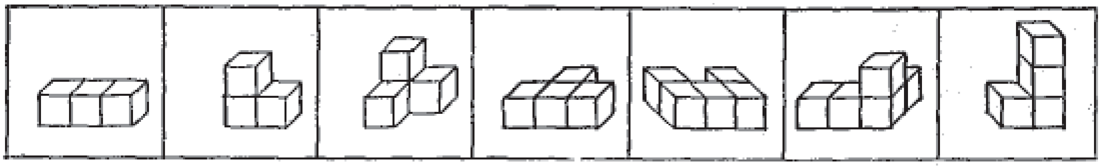
Special Aptitude — Spatial Relations Tests: Form A (1930)

Subteste 5: Contagem de blocos

Status: Fora de prelo.

Instruções do teste e exemplos

Descubra o número de blocos em cada pilha abaixo. Todos os blocos têm o mesmo tamanho.



Informação sobre a fonte:

Autor(es): Eucational Testing Service Staff

Publicado por The College Entrance examination Board, 888 Seventh Avenue, New York, N. Y. 10019

Desenvolvido para medição de aptidão na admissão às escolas técnicas e de engenharia; versão anterior para testagem ocupacional

Conteúdo: 1 questionário; 1 exemplo; 62 itens; 15 minutos

Pontuação: Número de itens corretos

Referências: Scott, W. D.; Clothier, R. C. *Personnel Management*. New York, N.Y.: Shaw Publishing Company, 1923.

Wenbridge, H. A. Experiment and statistics in the selection of employees, *Journal of American Statistics Association*, 1923, 8, 600-606.

p. 259

Scholastic Achievement Test (1939)

Espacial: Seção 1

Status: Fora de prelo.

Instruções do teste e exemplos

Cada pilha de blocos mostrada abaixo foi feita colando CUBOS do mesmo tamanho e então pintando todas as faces expostas exceto o fundo. Examine de perto cada figura e determine QUANTOS CUBOS têm, respectivamente: nenhuma de suas faces pintadas; apenas uma de suas faces pintadas; apenas duas de suas faces pintadas; apenas três de suas faces pintadas; apenas quatro de suas faces pintadas; apenas cinco de suas faces pintadas. Depois, no caderno de respostas, escureça o círculo cujo número corresponde à quantidade de cubos que têm o número indicado de faces pintadas.

EXEMPLO

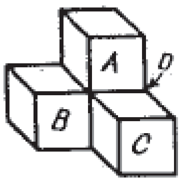


Figura O

Por exemplo, na figura à esquerda, há quatro cubos. O cubo A tem apenas cinco faces pintadas. O cubo B e o cubo C têm apenas quatro. O cubo D, que não está à vista (sob o cubo A), tem apenas duas. Logo, não há cubos sem nenhuma face pintada, nem cubos com apenas uma ou apenas três de suas faces pintadas. Há um cubo com duas faces pintadas, dois com quatro e um com cinco. As seis primeiras linhas do caderno de respostas (itens a até f inclusive) estão corretamente marcadas de acordo com esta explicação. Responda as questões restantes da mesma maneira.

Na Figura O quantos CUBOS têm
a. nenhuma de suas faces pintada?
b. apenas umas de suas faces pintada?
c. apenas duas de suas faces pintadas?
d. apenas três de suas faces pintadas?
e. apenas quatro de suas faces pintadas?
f. apenas cinco de suas faces pintadas?

Informação sobre a fonte:
Autor(es): Educational Testing Service staff
Publicado por The College Entrance Examination Board, 888 Seventh Avenue, New York, N.Y. 10019
Desenvolvido para estimativa acadêmica
Conteúdo: 1 questionário; 6 exemplos; 120 itens; 20 minutos
Pontuação: Número de itens corretos
Referências: Buros[1]: 8:1041; 6:1084; 4:808.

[1]Buros: Buros Institute of Mental Measurements Yearbook (N.T.)

p. 269

Special Aptitude — Spatial Relations (c 1951)

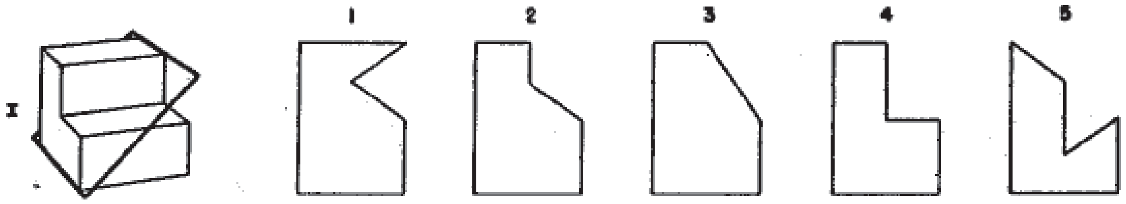
Subteste 1: Intersecções

Status: Fora de prelo.

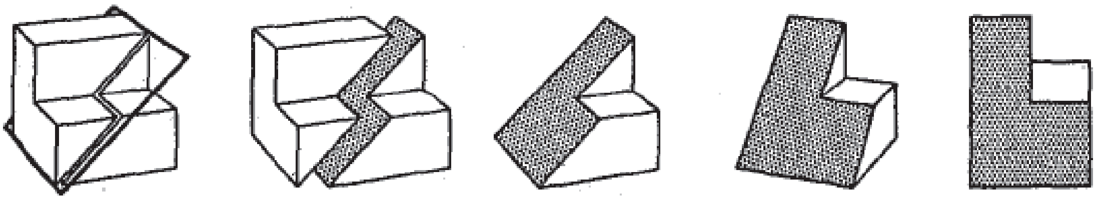
Instruções do teste e exemplos

Nesta parte cada problema traz a figura de um bloco irregular colocado dentro de uma moldura retangular. A moldura indica a posição de um plano atravessando o bloco. Você tem que determinar a forma da superfície que seria formada pelo corte do bloco pelo plano, ou seja, a forma da intersecção do plano com o bloco.

Observe o exemplo I e descubra qual das figuras planas numeradas à direita tem a forma da intersecção.

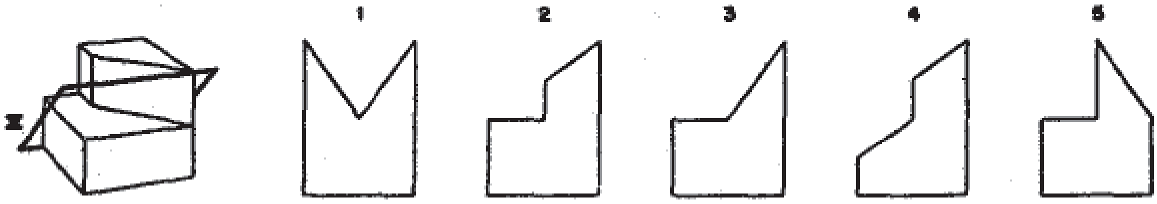


Estas figuras mostram que 4 é a alternativa correta para o exemplo I.

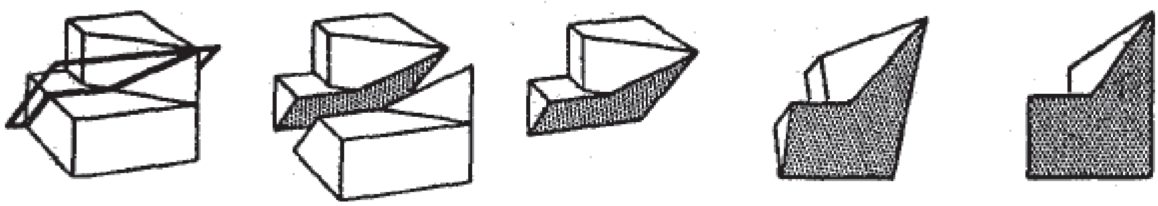


Nestas figuras você vê o bloco cortado em dois e a parte da frente é removida. Então o bloco é virado até que a parte cortada esteja de frente para você. A resposta é apenas a forma da parte cortada, sombreada na última figura.

Agora tente fazer o exemplo II.



Estas figuras mostram que 3 é a alternativa correta para o exemplo II.



Informação sobre a fonte:

Autor(es): Eucational Testing Service Staff

Publicado por The College Entrance examination Board, 888 Seventh Avenue, New York, N. Y. 10019

Desenvolvido para medição de aptidão na admissão às escolas técnicas e de engenharia

Conteúdo: 1 questionário; 2 exemplos; 45 itens; 20 minutos

Pontuação: Número de itens corretos

Referências: Buros: 8:1041; T1:2899; 7:665; 6:1084; 4:808.
Myers, C. T. *Validity Study of Six Spatial Relations Tests*. Princeton, N. J.: Educational Testing Service; RB–53–15, 1953.

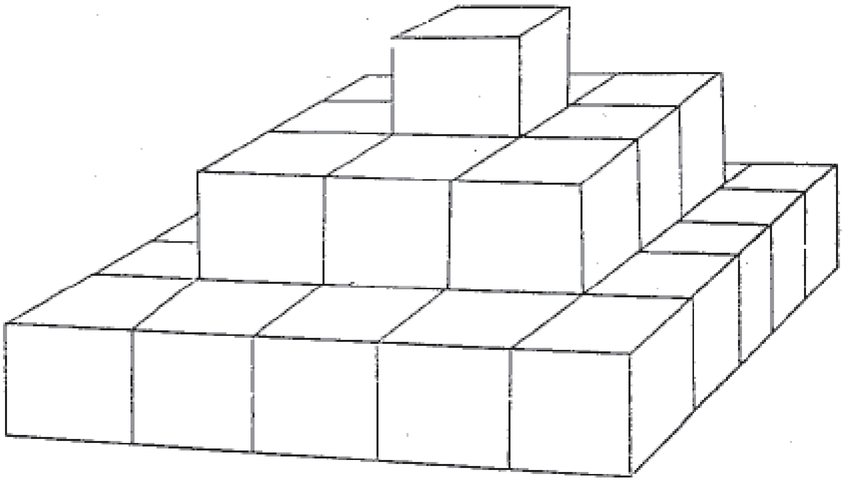
p. 273

James' Tests of Practical Ability (1952)

Cubos pintados

Status: Fora de prelo.

Instruções do teste e um item



35 cubos são arrumados desta forma. Agora imagine que toda a parte externa, incluindo o fundo, é pintada de preto.

(a) Quantos cubos têm 5 faces pretas? .... Resposta
(b) Quantos cubos têm 4 faces pretas? .... Resposta
(c) Quantos cubos têm 3 faces pretas? .... Resposta
(d) Quantos cubos têm 1 face preta? .... Resposta
(e) Quantos cubos não têm faces pretas? .... Resposta

Informação sobre a fonte:
Autor(es): W. S. James
Publicado por A. Wheaton and Company, 143 Fore Street, England
Desenvolvido como preparatório para exames
Conteúdo: 1 questionário; nenhum exemplo; 6 itens ou 36 respostas; sem limite de tempo
Pontuação: Número de itens corretos
Referências: Buros: 5:B229.

p. 281

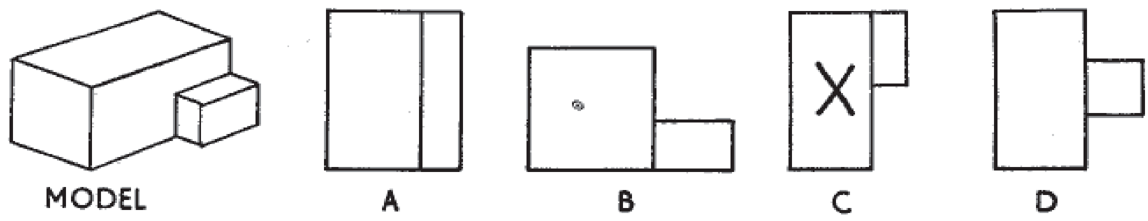
Spatial Test 3 (1959)

Subteste 2: Vistas de um objeto

Status: Subteste disponível.

Instruções do teste e exemplos

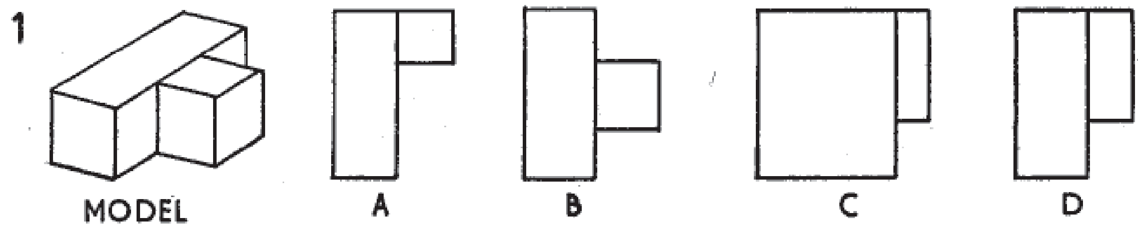
Abaixo há um modelo feito de blocos arrumados juntos e próximo a ele há quatro desenhos. Um destes desenhos mostra a vista superior do modelo.

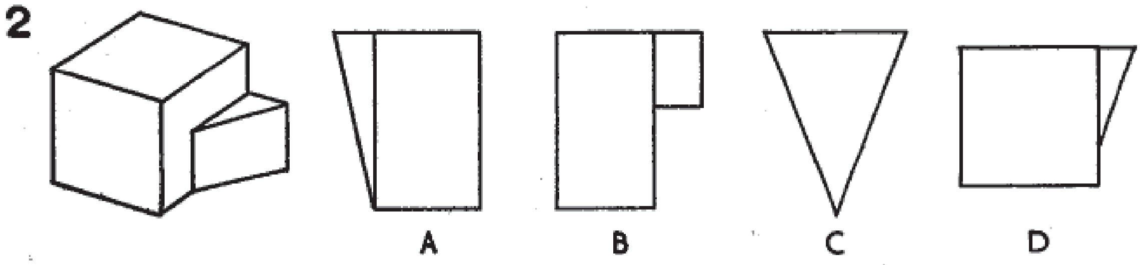


Uma cruz (X) foi colocada no diagrama C porque ele mostra a vista superior do modelo.

EXEMPLOS

Coloque uma cruz (X) no diagrama (A, B, C ou D) que mostra a vista superior do modelo.





Informação sobre a fonte:

Autor(es): Ian Macfarlane Smith e J. S. Lawes

Publicado por NFER–Nelson Publishing Company, 2 Oxford Road East, Windsor, Berks SL4 1DF, England

Desenvolvido para alocação em cursos técnicos

Conteúdo: 1 questionário; 2 exemplos; 10 itens; 3½ minutos

Pontuação: Número de itens corretos

Referências: Buros: T2:2269; T1:1941; 6:1093; 5:881.

Lawes, J. S. Construction and validation of a spatial test, Abstract of M. Ed. Thesis. *British Journal of Educational Psychology*, 1961, 31, 297–299.

p. 290

Kit of Reference Tests for Cognitive Factors (1963)

Teste de comparações de cubo: S–2

Status: Subteste disponível.

Instruções do teste e exemplos

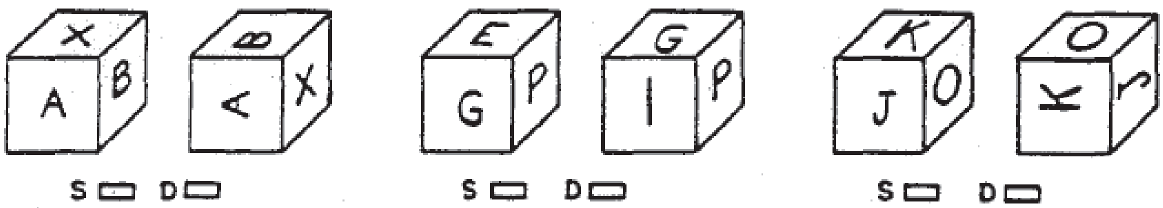
Blocos de madeira como os que as crianças brincam são geralmente cúbicos com diferentes letras, números ou símbolos em cada uma das seis faces (superior, inferior, quatro lados). Cada problema neste teste consiste de desenhos de pares de cubos ou blocos desse tipo. Lembre-se, há um desenho, número ou letra diferente em cada face de um cubo ou bloco dado. Compare os dois cubos em cada par abaixo.

O primeiro par está marcado com D porque as figuras são de cubos *diferentes*. Se o cubo à esquerda for virado até que A esteja na vertical para cima e de frente para você, o N estaria à esquerda de A e escondido, não à direita de A como mostrado no membro à direita do par. Assim os desenhos têm que ser de cubos diferentes.

O segundo par está marcado com S porque as figuras podem ser do mesmo cubo. Ou seja, se A é virado de lado, o X fica escondido, o B agora fica na face superior, e o C (que estava escondido) agora aparece. Assim os dois desenhos podem ser do mesmo cubo.

Nota: Nenhuma letra, número ou símbolo aparece em mais de uma face de um cubo dado. Excetuando-se isto, *qualquer* letra, número ou símbolo pode estar nas faces escondidas de um cubo.

Tente resolver os três exemplos abaixo.



O primeiro par imediatamente acima deve ser marcado com D, porque o X não pode estar no cume do A no desenho à esquerda e na base do A no desenho da direita. O segundo par é "diferente" porque P tem G a seu lado no cubo da esquerda, mas G está voltado para sua parte de cima no cubo da direita. Os blocos no terceiro par são os mesmos, o J e o K foram simplesmente virados de lado, movendo O para a face superior.

Sua nota neste teste será o número de respostas corretas menos o número de incorretas. Assim, não será vantajoso para você "chutar" a não ser que você tenha alguma ideia de qual é a escolha correta. Trabalhe tão rápido quanto você conseguir, sem sacrificar a precisão.

Você terá *3 minutos* para cada uma das duas partes deste teste. Cada parte tem uma página. Quando terminar a Parte 1, PARE.

Informação sobre a fonte:

Autor(es): John French, Ruth Ekstrom e Leighton Price

Publicado em: French, J. W. et al. *Kit of Reference Tests for Cognitive Factors* Princeton, N.J. 08541: Educational Testing Service, 1963

Desenvolvido para os níveis 9–16 para fins de pesquisa

Conteúdo: 1 questionário; 3 exemplos; 21 itens em cada uma das duas partes; 3 minutos para cada parte
Pontuação: Número de itens corretos menos número de itens incorretos
Referências: Just, M. A.; Carpenter, P. A. Eye fixations and cognitive processes. *Cognitive Psychology*, 1976, 8, 441–480.
Loehlin, J. C.; Sharan, S.; Jacoby, R. In pursuit of the 'spatial gene': a family sudy. *Behavioral Genetics*, 1978, 8, 27–41.

p. 291

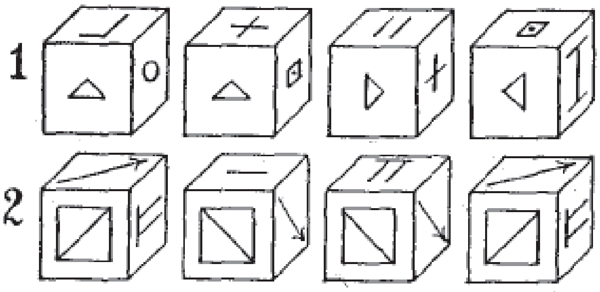
Special Aptitude — Spatial Relations Tests: Form A (1930)

Blocos decorados ou com números

Status: Fora de prelo.

Instruções do teste e exemplos

Em cada grupo de quatro cubos abaixo, três são vistas do mesmo cubo, e um é uma vista de um cubo diferente. Faça uma cruz no único cubo que não combina com os outros três. Não há duas faces iguais em um cubo. Na primeira linha, a segunda e a terceira figuras são vistas possíveis do mesmo cubo, assim como a segunda e a quarta, e não há inconsistência entre a terceira e a quarta, mas a primeira e a segunda não podem ser desenhos do mesmo cubo, a primeira e a terceira não podem ser desenhos do mesmo cubo, nem a primeira e a quarta. O primeiro desenho então tem que estar errado e deve ser marcado com uma cruz. Em cada um dos outros problemas, faça uma cruz no único cubo que não combina com os outros três.



Informação sobre a fonte:

Autor(es): Eucational Testing Service Staff

Publicado por The College Entrance examination Board, 888 Seventh Avenue, New York, N. Y. 10019

Desenvolvido para fins de testagem acadêmica

Conteúdo: 1 questionário; nenhum exemplo; 16 itens; 20 minutos

Pontuação: Número de itens corretos

Referências: Crawford, A.B.; Burnham, P.S. *Forecasting College Achievement: A Survey of Aptitude Tests for Higher Education*. New Haven, Conn.: Yale University Press, 1946.

p. 299-300

Special Aptitude — Spatial Relations (c. 1951)

Subteste 6: Cubos decorados com números

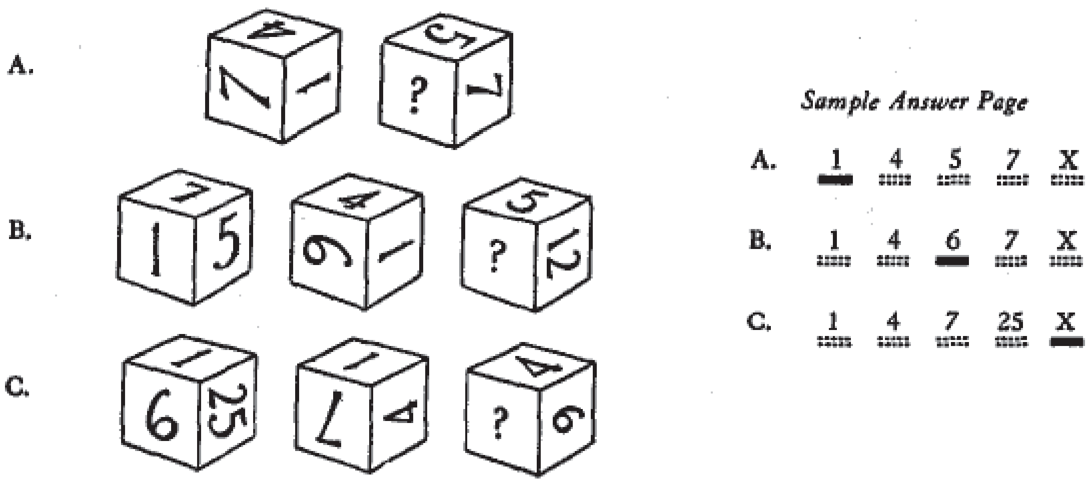
Status: Fora de prelo.

Instruções do teste e exemplos

Os desenhos nesta parte representam cubos que têm um número diferente em cada face. Em cada problema os desenhos representam duas, três, ou quatro vistas do mesmo cubo, o último desenho tendo um ponto de interrogação no lugar de um dos números. Você tem que determinar que número pertence à face do cubo marcada com o ponto de interrogação, e então escureça o espaço entre as linhas pontilhadas sob aquele número na linha apropriada da página de respostas. Se muito pouca informação é dada a você para determinar que número o ponto de interrogação representa, escureça o espaço sob o X.

Tente os exemplos abaixo. As respostas corretas foram marcadas para você. Confira para ver se suas respostas estão de acordo com aquelas marcadas.

Assim que você entender as orientações, comece a resolver o teste sem esperar por outras instruções. Marque suas respostas na página de respostas.



Informação sobre a fonte:

Autor(es): Eucational Testing Service Staff

Publicado por The College Entrance examination Board, 888 Seventh Avenue, New York, N. Y. 10019

Desenvolvido para fins de testagem acadêmica

Conteúdo: 1 questionário; um exemplo; número de itens desconhecido; 20 minutos

Pontuação: Número de itens corretos

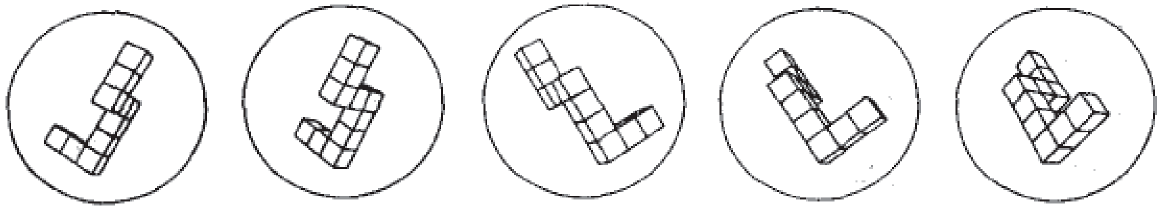
Referências: Brigham, C.C. *A Study of Error*. New York, N.Y.: College Entrance Examination Board, 1932.

p. 322-323

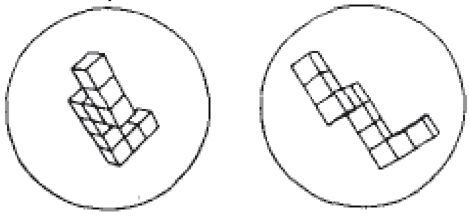
Vandenberg's Test of Three-dimensional Spatial Visualization (1971)

Status: Teste experimental.

Instruções do teste e exemplos



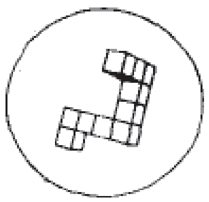
Note que estes desenhos ilustram um objeto feito de 10 blocos mostrado sob diferentes ângulos. Tente imaginar-se movendo o objeto (ou a si mesmo em relação ao objeto), enquanto você olha de um desenho para o outro.

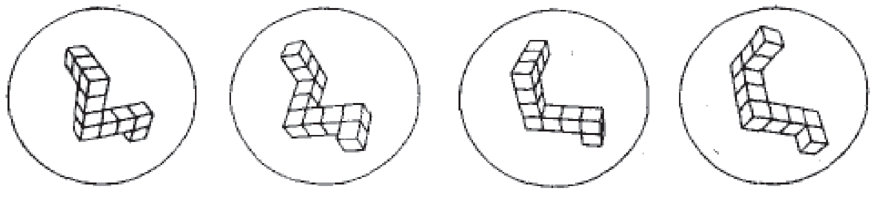


Em seguida, convença-se que estes dois desenhos são diferentes do objeto acima, no qual os 10 blocos estão colocados de forma ligeiramente diferente logo você não pode "rotacioná-los" para que sejam idênticos ao objeto mostrado nos 5 primeiros desenhos.

Agora olhe para este objeto:

Dois destes quatro desenhos ilustram o mesmo objeto.
Você pode encontrar os dois?
Circule o número sob os dois desenhos que ilustram o



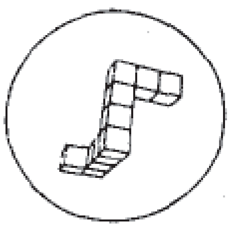


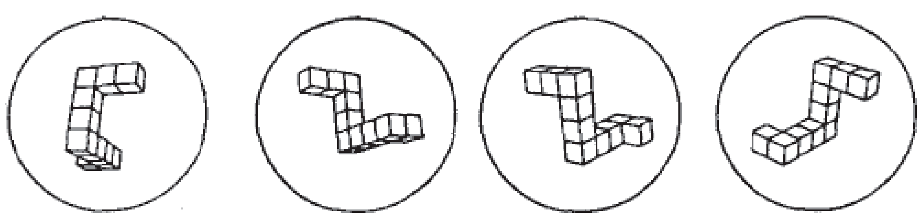
1 2 3 4

Se você circulou os números 1 e 3, você estava certo.

Agora tente o próximo exemplo.

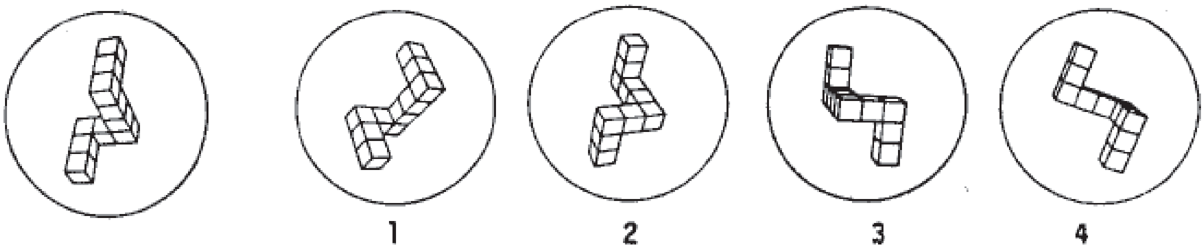
Novamente, quais são os dois desenhos dentre os quatro à direita que mostram o mesmo objeto que está à esquerda. Circule o número sob os dois.





1 2 3 4

O aplicador do teste dirá a você quais são os dois corretos.
Se você terminou este, tente o próximo item. Circule *dois* números.



Há sempre duas e apenas duas respostas corretas para cada item.
Há 20 itens então a nota máxima é 40.

POR FAVOR, NÃO "CHUTE".

Informação sobre a fonte:
Autor(es): Steven G. Vandenberg
Distribuído por The Department of Psychology, University of Colorado, Boulder, Colo. 80302
Desenvolvido para fins de pesquisa
Conteúdo: 1 questionário; quatro exemplos; 20 itens ou 40 respostas possíveis; 10 minutos
Pontuação: Número de respostas corretas
Referências: Vandenberg, S.G. Sources of variance in performance of spatial tests, In: Eliot, J. and Salkind, N. *Children's Spatial Development*, Springfield, Ill.: Charles Thomas, 1975.

Vandenberg, S.G.; Kuse, A.R. Mental rotations: Group test of three-dimensional spatial visualization. *Perceptual and Motor Skills*, 1978, 47, 599–604.

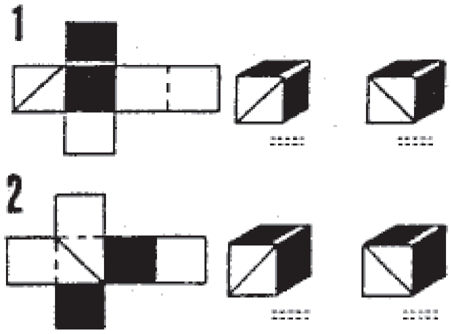
p. 357-358

I-D Aptitude Tests (1972)

Subteste 9: Teste de identificação das caixas
Status: Subteste disponível.

Descrição do teste e exemplos

O Teste das Caixas consiste de 48 itens. O objeto à esquerda de cada item é um "padrão" que formará um dos dois cubos à direita quando for dobrado para que as seis faces se encaixem. O examinado deve fazer todo o teste tão rapidamente quanto consiga, indicando qual dos dois cubos será formado quando essa operação de dobrar for concluída. O teste é dividido em duas partes de mesma dificuldade, com limite de tempo de quatro minutos cada; mas pela extensão do procedimento de demonstração, um total de 40 a 45 minutos ao todo é necessário.



Informação sobre a fonte:

Autor(es): Paul A. Schwarz
Publicado por The American Institutes For Research, Box 1113, Palo Alto, Calif. 94302
Desenvolvido para fins de pesquisa inter-cultural
Conteúdo: 1 questionário; nenhum exemplo; 48 itens; 2 partes de 24 itens cada com 4 minutos para cada parte
Pontuação: Número de respostas corretas somado a 100 menos número de respostas erradas
Referências: Schwarz, P.A.; Klug, R.E. *Ability Testing in Developing Countries: A Handbook of Principles and Techniques*. New York, N.Y.: Prager, 1972.

p. 367

Technical Test Battery: Level 2 (1979)

Subteste ST7: Raciocínio Espacial

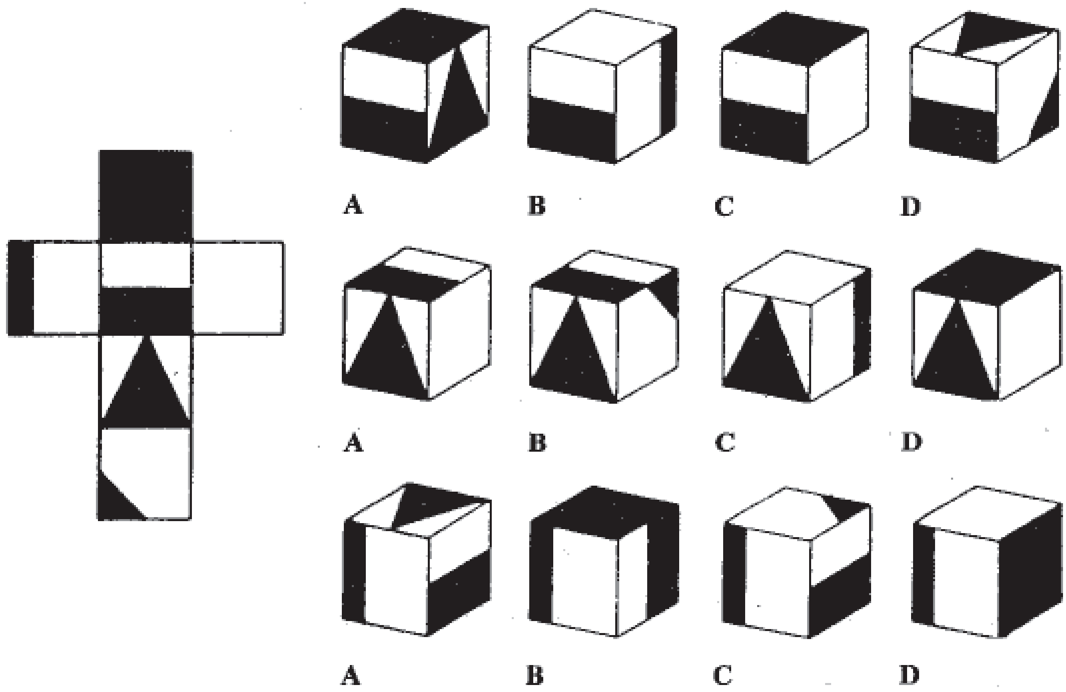
Status: Subteste disponível.

Instruções do teste e exemplos

Este teste consiste de três partes. No início de cada parte você verá um padrão o qual, se recortado, poderia ser dobrado para formar um cubo. Para cada problema você deve escolher qual, se algum, dos quatro cubos mostrados, poderia ser formado dobrando o padrão. Se você decidir que um dos quatro cubos poderia ser formado dobrando o padrão, escureça a caixa apropriada na folha de resposta. Se você concluir que nenhum dos cubos poderia ser formado a partir do padrão, escureça a caixa marcada com "E" na folha de respostas. Note que a face da frente é a mesma em cada uma das quatro alternativas de vista.

Agora resolva os exemplos abaixo e escureça as caixas apropriadas na folha de respostas na seção marcada "EXEMPLOS".

Exemplos:



Informação sobre a fonte:

Autor(es): David Hawkey e Peter Savill

Publicado por Saville and Holdsworth, North Lodge, Esher Park Avenue, Esher, Surrey KT10–9NP, England

Desenvolvido para testagem vocacional de candidatos a técnicos, supervisores, tecnológicos e graduados.

Conteúdo: 1 questionário; 3 exemplos; 40 itens; 20 minutos

Pontuação: Número de respostas corretas

Referências: *SHL Technical Test Battery*, Normline Supplement #1. Esher, England: Saville and Holdsworth, 1982.

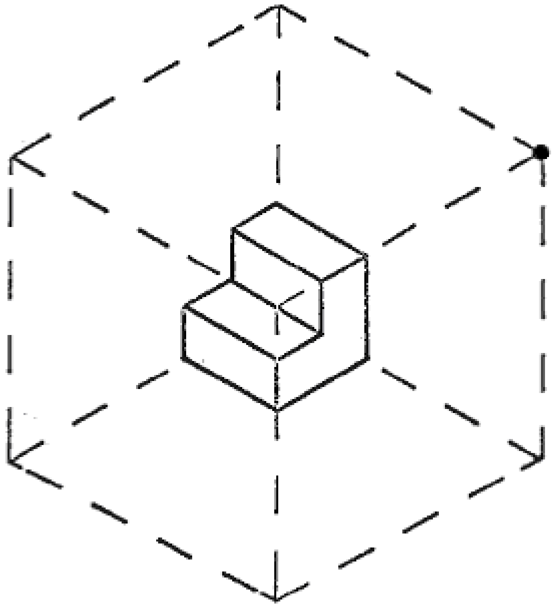
p. 380-382

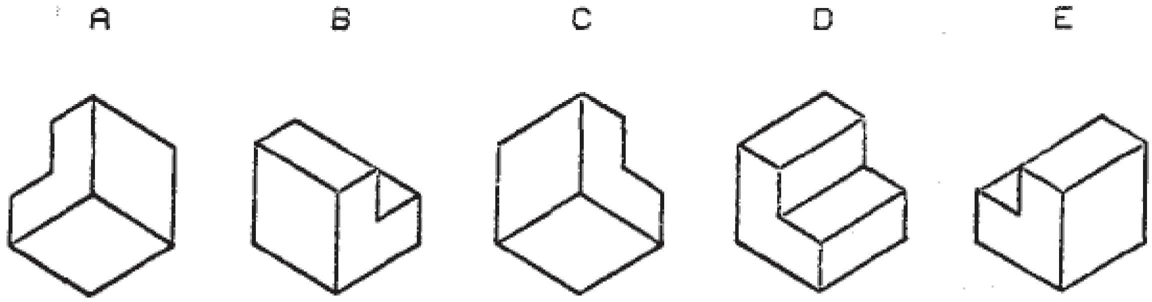
Guay's Visualization of Views (1976)

Status: Subteste disponível.

Instruções do teste e exemplos

Este teste consiste de 30 questões feitas para descobrir quão bem você pode visualizar como objetos tridimensionais parecem vistos de várias posições. Mostrado abaixo está um exemplo do tipo de questão incluída neste teste.





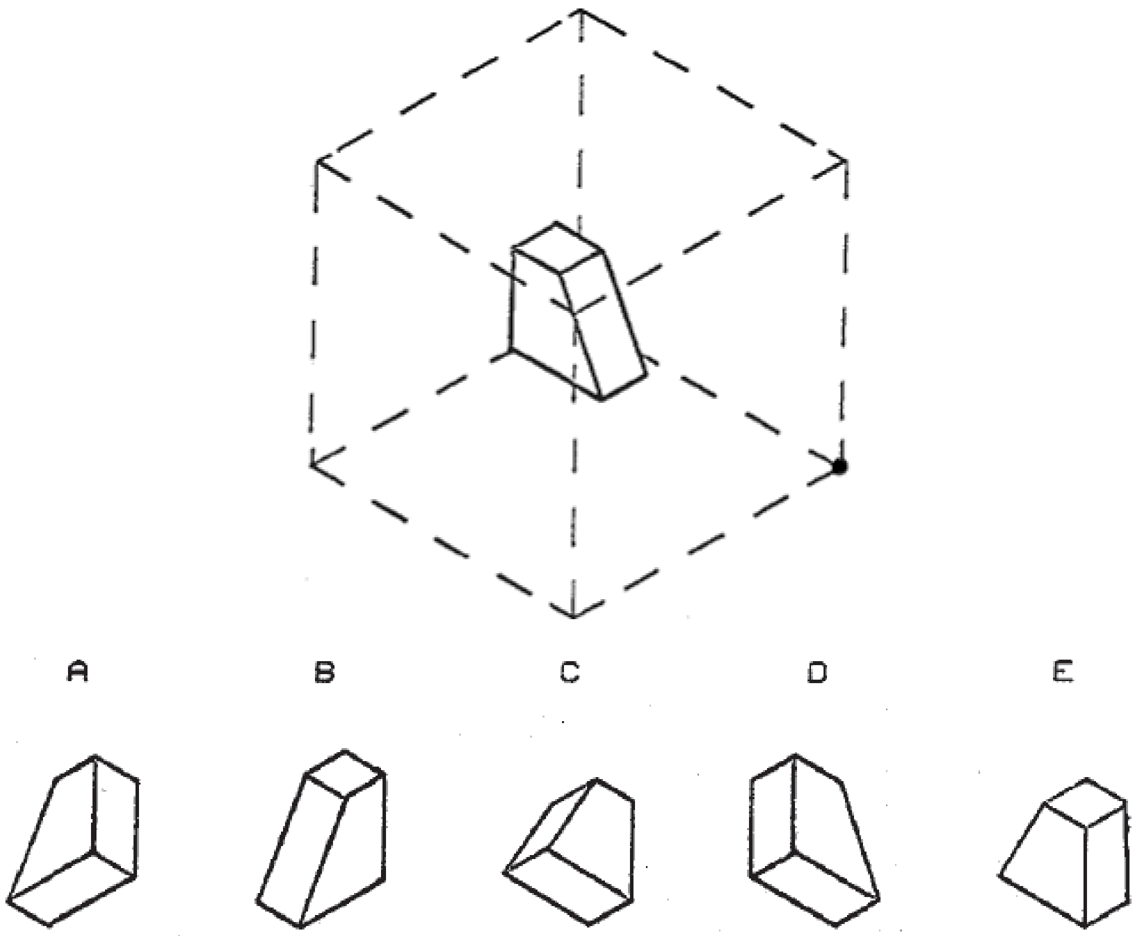
O exemplo mostra um objeto posicionado no meio de uma "caixa de vidro" e cinco desenhos representando como o mesmo objeto parece quando visto de diferentes posições. A bolinha preta no canto de cima à direita da "caixa de vidro" identifica a posição desejada para a vista. Você deve:

1. imaginar-se movendo em torno da "caixa de vidro" até que a bolinha preta esteja localizada diretamente entre você e o objeto;
2. dessa posição imagine em sua mente como o objeto na "caixa de vidro" se parece;
3. selecione dentre os cinco desenhos (A, B, C, D ou E) o único que se parece com o objeto visto daquela posição.

Qual é a resposta correta do exemplo mostrado na página anterior a esta?

As respostas A, B, C e D estão erradas. Só o desenho E assemelha-se ao objeto visto da posição dada. Neste teste cada questão tem apenas uma resposta correta.

Agora observe o próximo exemplo mostrado abaixo e tente escolher o único desenho que representa como o objeto se parece visto da posição dada. Lembre-se que o objeto está localizado no meio da "caixa de vidro" e você está se imaginando olhando o objeto com a bolinha preta entre você e o objeto.



A resposta correta para este exemplo é C.

Informação sobre a fonte:
Autor(es): Roland B. Guay
Publicado por The Purdue Research Foundation, 360 State Street, West Lafayette, Ind. 47906
Desenvolvido para fins de pesquisa
Conteúdo: 1 questionário; 1 exemplo; 30 itens; 20 minutos
Pontuação: Número de respostas corretas
Referências: McDaniel, E.D.; Guay, R.B. *Spatial ability, mathematics achievement, and the sexes*. Paper at Annual Meeting of American Educational Research Association, San Francisco, California, 1976.
Guay, R.B.;McDaniels, E.D. *Correlates of Performance on Spatial Aptitude Tests*. United States Army Research Institute Grant 19–77–G–0019. Purdue University, Lafayette, Indiana, November 1978.

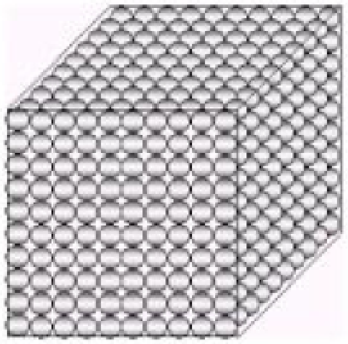
ANEXO C: QUESTÕES DO ENEM

ENEM 1998

Prova Amarela, Questões 01 e 02

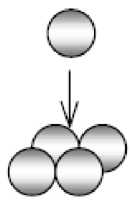
Observe nas questões 1 e 2 o que foi feito para colocar bolinhas de gude de 1 cm de diâmetro numa caixa cúbica com 10 cm de aresta.

01 Uma pessoa arrumou as bolinhas em camadas superpostas iguais, tendo assim empregado:



(A) 100 bolinhas.
(B) 300 bolinhas.
(C) 1000 bolinhas.
(D) 2000 bolinhas.
(E) 10000 bolinhas.

02 Uma segunda pessoa procurou encontrar outra maneira de arrumar as bolas na caixa achando que seria uma boa ideia organizá-las em camadas alternadas, onde cada bolinha de uma camada se apoiaria em 4 bolinhas da camada inferior, como mostra a figura. Deste modo, ela conseguiu fazer 12 camadas. Portanto, ela conseguiu colocar na caixa:



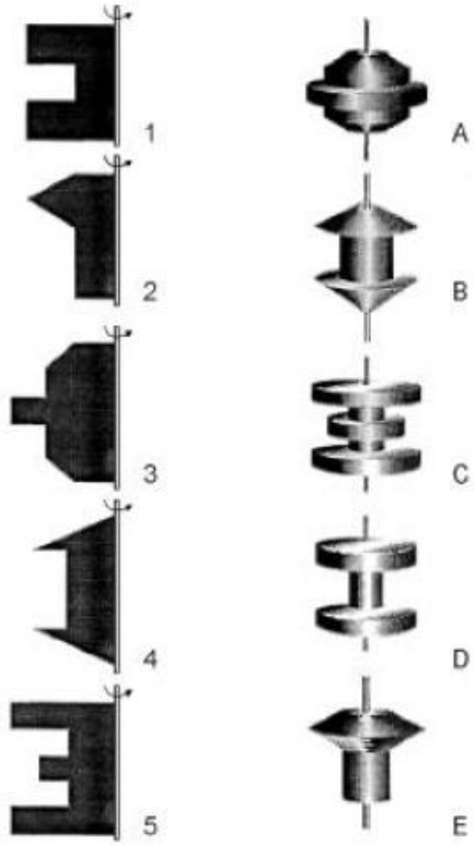
(A) 729 bolinhas.
(B) 984 bolinhas.
(C) 1000 bolinhas.
(D) 1086 bolinhas.
(E) 1200 bolinhas.

GABARITOS: 01 (C); 02 (D)

ENEM 1999

Prova Amarela, Questão 30

30 Assim como na relação entre o perfil de um corte de um torno e a peça torneada, sólidos de revolução resultam da rotação de figuras planas em torno de um eixo. Girando-se as figuras abaixo em torno da haste indicada obtêm-se os sólidos de revolução que estão na coluna da direita.



A correspondência correta entre as figures planas e os sólidos de revolução obtidos é:

(A) 1A, 2B, 3C, 4D, 5E.

(B) 1B, 2C, 3D, 4E, 5A.

(C) 1B, 2D, 3E, 4A, 5C.

(D) 1D, 2E, 3A, 4B, 5C.

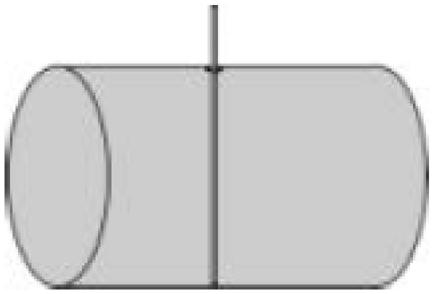
(E) 1D, 2E, 3B, 4C, 5A.

GABARITO: (E)

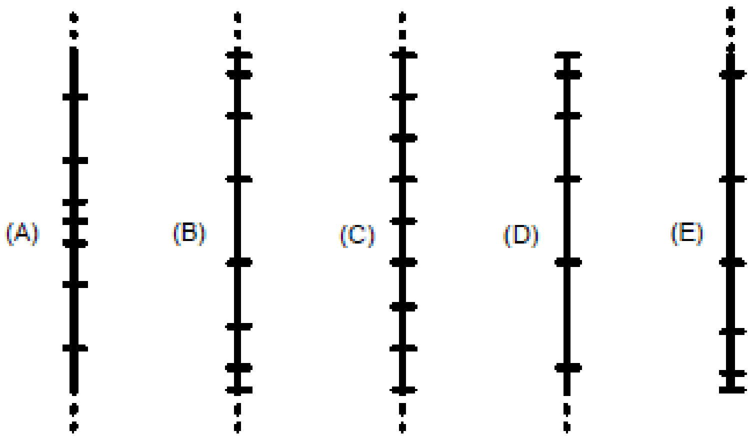
ENEM 2000

Prova Amarela, Questão 43

43 Uma empresa de transporte armazena seu combustível em um reservatório cilíndrico enterrado horizontalmente. Seu conteúdo é medido com uma vara graduada em vinte intervalos, de modo que a distância entre duas graduações consecutivas representa sempre o mesmo volume.



A ilustração que melhor representa a distribuição das graduações na vara é:

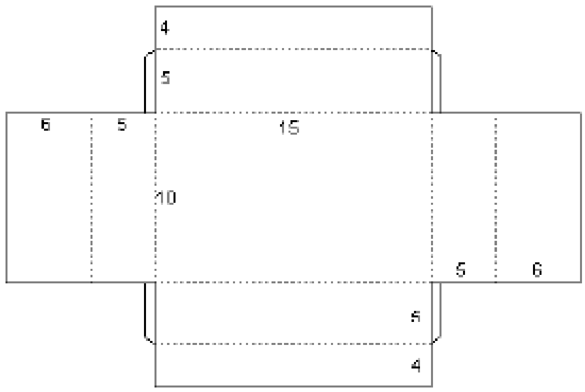


GABARITO: (A)

ENEM 2001

Prova Amarela, Questão 24

QUESTÃO 24
Um fabricante de brinquedos recebeu o projeto de uma caixa que deverá conter cinco pequenos sólidos, colocados na caixa por uma abertura em sua tampa. A figura representa a planificação da caixa, com as medidas dadas em centímetros.



Os sólidos são fabricados nas formas de

I. um cone reto de altura 1 cm e raio da base 1,5 cm.
II. um cubo de aresta 2 cm.
III. uma esfera de raio 1,5 cm.
IV. um paralelepípedo retangular reto, de dimensões 2 cm, 3 cm e 4 cm.
V. um cilindro reto de altura 3 cm e raio da base 1 cm.

O fabricante não aceitou o projeto, pois percebeu que, pela abertura dessa caixa, só poderia colocar os sólidos dos tipos

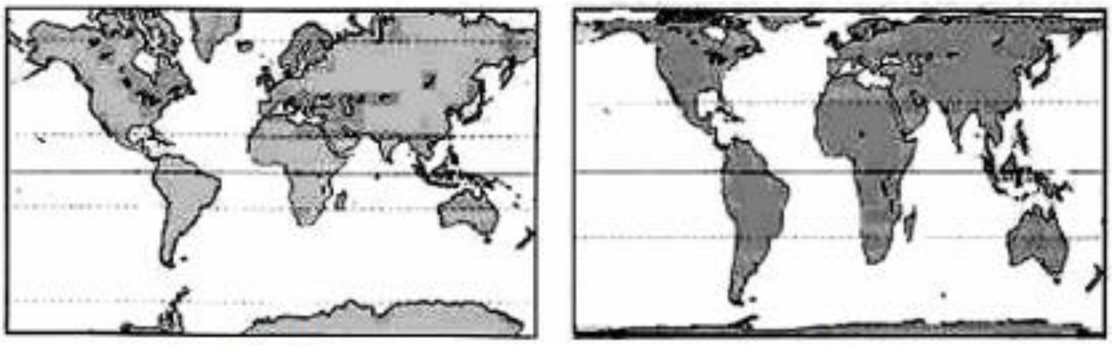
(A) I, II e III.
(B) I, II e V.
(C) I, II, IV e V.
(D)II, III, IV e V.
(E) III, IV e V.

GABARITO: (C)

ENEM 2001

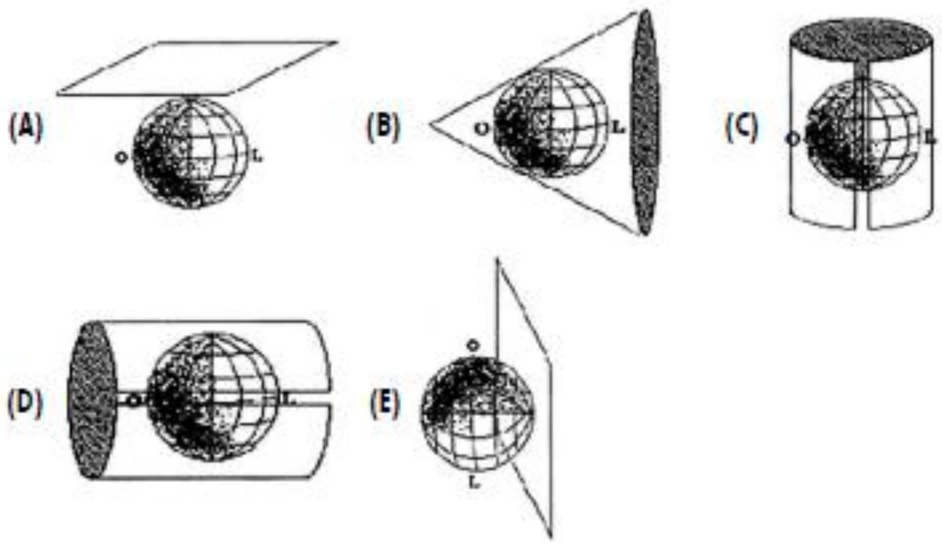
Prova Amarela, Questão 32

QUESTÃO 32
Existem diferentes formas de representação plana da superfície da Terra (planisfério). Os planisférios de Mercator e de Peters são atualmente os mais utilizados.



Mercator Peters

Apesar de usarem projeções, respectivamente, conforme e equivalente, ambas utilizam como base da projeção o modelo:



GABARITO: (C)

ENEM 2003

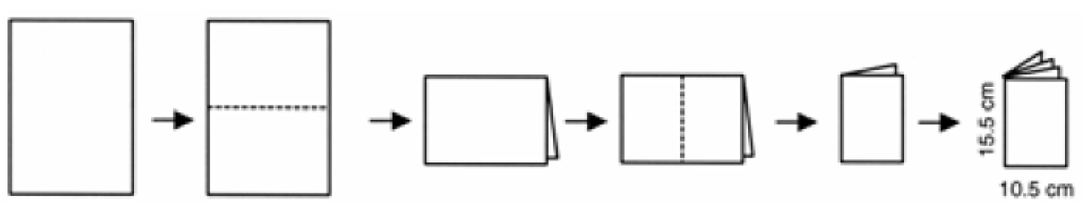
Prova Amarela, Questões 06 e 07

06
Uma editora pretende despachar um lote de livros, agrupados em 100 pacotes de 20cm x 20cm x 30cm. A transportadora acondicionará esses pacotes em caixas com formato de bloco retangular de 40cm x 40cm x 60cm. A quantidade mínima necessária de caixas para esse envio é:

(A) 9
(B) 11
(C) 13
(D) 15
(E) 17

07
Na literatura de cordel, os textos são impressos, em geral, com 8, 16, 24 ou 32 paginas de formato 10,5cm x 15,5cm. As razões históricas que explicam tal fato estão relacionadas à forma artesanal como são montadas as publicações e ao melhor aproveitamento possível do papel disponível.

Considere, abaixo, a confecção de um texto de cordel com 8 páginas (4 folhas):



Utilizando o processo descrito acima, pode-se produzir um exemplar de cordel com 32 páginas de 10,5cm x 15,5cm, com o menor gasto possível de material, utilizando uma única folha de:

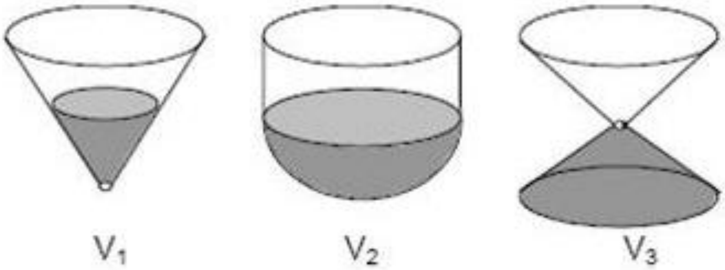
(A) 84cm x 62cm
(B) 84cm x 124cm
(C) 42cm x 31cm
(D) 42cm x 62cm
(E) 21cm x 31cm

GABARITOS: 06 (C); 07 (D)

ENEM 2005

Prova Amarela, Questão 61

61
Os três recipientes da figura têm formas diferentes, mas a mesma altura e o mesmo diâmetro da boca. Neles é colocado líquido até a metade de sua altura, conforme indicado nas figuras. Representando por V_1, V_2 e V_3 o volume de líquido em cada um dos recipientes, marque a alternativa correta:



$V_1 = V_2 = V_3$	$V_1 < V_3 < V_2$	$V_1 = V_3 < V_2$	$V_3 < V_1 < V_2$	$V_1 < V_2 = V_3$
(A)	(B)	(C)	(D)	(E)

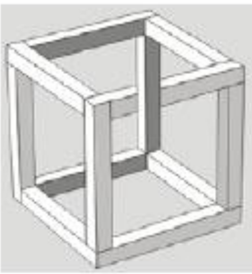
GABARITO: (B)

ENEM 2007

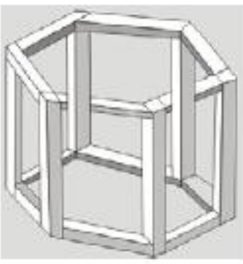
Prova Amarela, Questão 05

05
Representar objetos tridimensionais em uma folha de papel nem sempre é tarefa fácil. O artista holandês Escher (1898-1972) explorou essa dificuldade criando várias figuras planas impossíveis de serem construídas como objetos tridimensionais, a exemplo da litografia **Belvedere**, reproduzida ao lado.

Considere que um marceneiro tenha encontrado algumas figuras supostamente desenhadas por Escher e deseje construir uma delas com ripas rígidas de madeira que tenham o mesmo tamanho. Qual dos desenhos a seguir ele poderia reproduzir em um modelo tridimensional real?

A


B


C


D


E


GABARITO: (E)

ENEM 2009

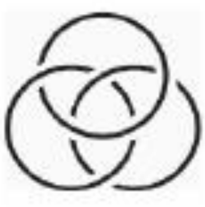
Caderno 7 - AZUL

Questão 149
Em Florença, Itália, na Igreja de Santa Crose , é possível encontrar um portão em que aparecem os anéis de Borromeo. Alguns historiadores acreditavam que os círculos representavam as três artes : escultura, pintura e arquitetura, pois elas eram tão próximas quanto inseparáveis.

Scientific American, ago. 2008.

Qual dos esboços a seguir melhor representa os anéis de Borromeo?

A 

B 

C 

D 

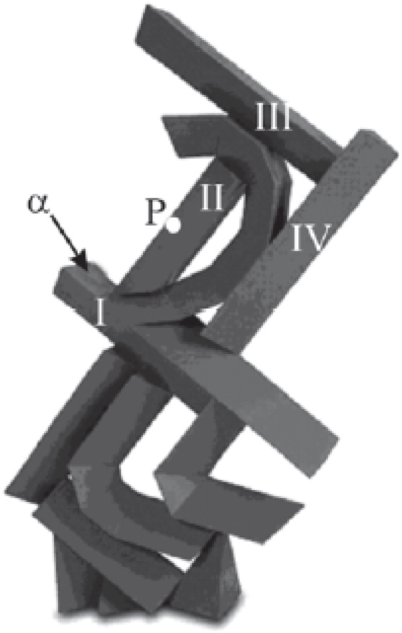
E 

GABARITO: (E)

ENEM 2009

Caderno 7 - AZUL

Questão 153
Suponha que, na escultura do artista Emanoel Araújo, mostrada na figura a seguir, todos os prismas numerados em algarismos romanos são retos, com bases triangulares, e que as faces laterais do poliedro II são perpendiculares à sua própria face superior, que, por sua vez, é um triangulo congruente ao triângulo base dos prismas. Além disso, considere que os prismas I e III são perpendiculares ao prisma IV e ao poliedro II.



Disponível em: www.escritosriodearte.com.br. Acesso em: 28 jul. 2009.

Imagine um plano paralelo à face α do prisma I, mas que passe pelo ponto P pertencente à aresta do poliedro II, indicado na figura. A interseção desse plano imaginário com a escultura contém

A) dois triângulos congruentes com lados correspondentes paralelos.
B) dois retângulos congruentes e com lados correspondentes paralelos.
C) dois trapézios congruentes com lados correspondentes perpendiculares.
D) dois paralelogramos congruentes com lados correspondentes paralelos.
E) dois quadriláteros congruentes com lados correspondentes perpendiculares.

GABARITO: (A)

ENEM 2009

Caderno 7 - AZUL

Questão 177
Um artesão construiu peças de artesanato interceptando um pirâmide de base quadrada com um plano. Após fazer um estudo das diferentes peças que poderia obter, ele concluiu que uma delas poderia ter uma das faces pentagonal.

Qual dos argumentos a seguir justifica a conclusão do artesão?

A) Uma pirâmide de base quadrada tem 4 arestas laterais e a interseção de um plano com a pirâmide intercepta suas arestas laterais. Assim, esses pontos formam um polígono de 4 lados.
B) Uma pirâmide de base quadrada tem 4 faces triangulares e, quando um plano intercepta essa pirâmide, divide cada face em um triângulo e um trapézio. Logo, um dos polígonos tem 4 lados.
C) Uma pirâmide de base quadrada tem 5 faces e a interseção de uma face com um plano é um segmento de reta. Assim, se o plano interceptar todas as faces, o polígono obtido nessa interseção tem 5 lados.
D) O número de lados de qualquer polígono obtido como interseção de uma pirâmide com um plano é igual ao número de faces da pirâmide. Como a pirâmide tem 5 faces, o polígono tem 5 lados.
E) O número de lados de qualquer polígono obtido interceptando-se uma pirâmide por um plano é igual ao número de arestas laterais da pirâmide. Como a pirâmide tem 4 arestas laterais, o polígono tem 4 lados.

GABARITO: (C)